ملخص الرياضيات البحتة

للصف الحادي عشر

الوحدة الرابعة

المتتاليات والمتسلسلات

٣ـ ٤ المتتالية الهندسية

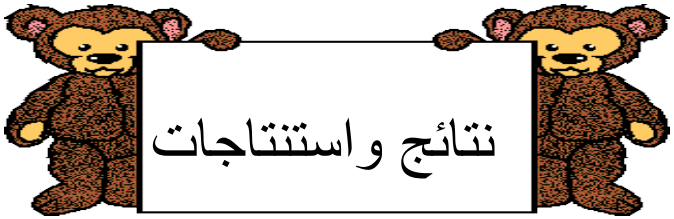
(حدود المتتالية الهندسية)

مثال (١):

أوجد أساس المتتالية : (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$ .....)

الحل:

الأساس = $\frac{١}{٣}$



تعريف :

المتتالية ($ح_ن$) تسمى متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = ر$$ **حيث لكل ن تنتمي للأعداد الصحيحة الموجبة ، و (ر)**

عدد حقيقي ثابت ، $ح_ن \neq ٠$

تسمى (ر) أساس المتتالية الهندسية.

تمرين :

أي مما يلي يمثل متتالية هندسية :

١) $ح_ن = ١ - ن$ **٢)** $ح_ن = ٣^ن$ **؟؟؟؟؟**

الحل:

١) $ح_ن$ **ليست هندسيه**

٢) $ح_ن = ٣^ن$ **هندسيه**

* الحد العام

مثال (١):

يمارس مروان رياضة المشي على الأقدام فإذا قطع في اليوم الأول مسافة ٣٠٠ متر وكان يقطع في كل يوم تال ضعف المسافة التي قطعها في اليوم السابق له مباشرة . أكتب متتالية المسافة التي يقطعها مروان في كل يوم ولمدة ٥ أيام ؟؟؟؟

الحل :

المسافة المقطوعة في اليوم الأول ٣٠٠ متر : (أ = ٣٠٠)

بما أن المسافة المقطوعة في كل يوم = ضعف المسافة في اليوم السابق
(ر = ٢)

إذن المتتالية هي :

٣٠٠ ، ٦٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٢٤٠٠ ، ٤٨٠٠

مثال (٢) :

أكتب المتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٩ وحدها السادس = ٢٨٨ ؟؟؟

الحل:

$ح_{ن} = أ ر^{ن-١}$

$٢٨٨ = ٩ ر^{٥}$ ⟵ $ر^{٥} = \frac{٢٨٨}{٩}$

$ر^{٥} = ٢^{٥}$ ⟵ $ر = ٢$

المتتالية هي : (٩ ، ١٨ ، ٣٦ ، ٧٢ ، ١٤٤ ، .....)

مثال (٣):

ثلاث أعداد تكون متتالية هندسية فإذا كان مقلوب الحد الأول يزيد عن مقلوب الحد الثاني بمقدار ٢ وكان الحد الثالث يزيد عن الحد الثاني بمقدار ١٨
فما هذه الأعداد؟؟؟

حل مثال (٣):

نفرض أن الأعداد هي $أ$ ، $أر$ ، $أر^{٢}$

$$\frac{١}{أ} - \frac{١}{أر} = ٢ \longleftarrow \frac{ر-١}{أر} = ٢ \longleftarrow ٢ أر = ر-١ \longleftarrow (١)$$

$$أر^{٢} - أر = ١٨ \longleftarrow أر (ر-١) = ١٨ \longleftarrow (٢)$$

بقسمة (١) على (٢):

$$\frac{٢ أر}{أر (ر-١)} = \frac{(ر-١)}{١٨} \longleftarrow (ر - ١)^{٢} = ٣٦$$

$$ر - ١ = \pm ٦ \longleftarrow ر = ٧ \text{ أو } ر = -٥$$

إذا كانت $ر = ٧$ **فإن** $١٤ أ = ٦$ $\longleftarrow$ $أ = \frac{٣}{٧}$ **الأعداد هي :** $\frac{٣}{٧}$ ، ٣ ، ٢١

وإذا كانت $ر = -٥$ **فإن** $-١٠ أ = -٦$ $\longleftarrow$ $أ = \frac{٣}{٥}$ **الأعداد هي :** $\frac{٣}{٥}$ ، -٣ ، ١٥

مثال(٤):

يزداد عدد الطلبة الملتحقين بالصف الأول بمعدل ٤ % كل سنة في إحدى مناطق السلطنة . فإذا كان عددهم حاليا ٢٠٠٠٠ طالب فكم سيكون عدد الطلبة بعد ٦ سنوات ؟؟؟

الحل :

عدد الطلبة حاليا = ٢٠٠٠٠

عدد الطلبة في السنة الثانية = ٢٠٠٠٠ + ٢٠٠٠٠ × ٤ %

= ٢٠٠٠٠ (١+ ٠,٠٤)

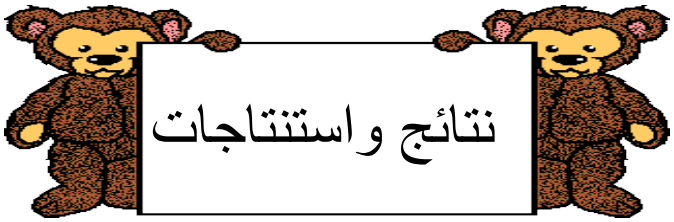
= ٢٠٠٠٠ (١,٠٤)

عدد الطلبة في السنة الثالثة = ٢٠٠٠٠ (١,٠٤) + ٢٠٠٠٠ (١,٠٤) × ٤ %

= ٢٠٠٠٠(١,٠٤)^{٢}

وهكذا عدد الطلبة بعد ٦ سنوات ح = أ ر^{٦}

= ٢٠٠٠٠(١,٠٤) = ٢٥٣٠٦,٤ طالبا.



نتيجة:

إذا كانت (ح$_{ن}$) متتالية هندسية أساسها ر فإن :

ح$_{ن}$ = ح$_{١}$ ر$^{ن - ١}$

وإذا رمزنا للحد الأول لمتتالية هندسية بالرمز أ فإن الصورة العامة هي:

أ ، أر ، أر^{٢} ،..... ، أ ر$^{ن - ١}$

تمرين :

سيارة قيمتها ٧٠٠٠ ريال عماني إذا علمت أن قيمة السيارة في نهاية كل سنة تكون بنسبة ٨٠% من سعرها . أوجد سعر السيارة بعد ٨ سنوات ؟؟؟

الحل:

سعر السيارة في نهاية السنة الأولى = ٧٠٠٠ × ٠,٨ = ٥٦٠٠ ريالا

سعر السيارة في نهاية السنة الثانية = ٧٠٠٠ (٠,٨)^{٢}

سعر السيارة في نهاية السنة الثالثة = ٧٠٠٠(٠,٨)^{٣} وهكذا .....

*الأوساط الهندسية

مثال (١):

أدخل ٣ أوساط هندسية بين العددين ٤ ، ٦٤ ؟؟؟

الحل:

بإدخال ٣ أوساط تكون متتالية بالصورة : ٤ ،؟ ، ؟ ، ؟ ، ٦٤

أي أن عدد حدود المتتالية = ٥ وحدها الأول = ٤ ، وحدها الخامس = ٦٤

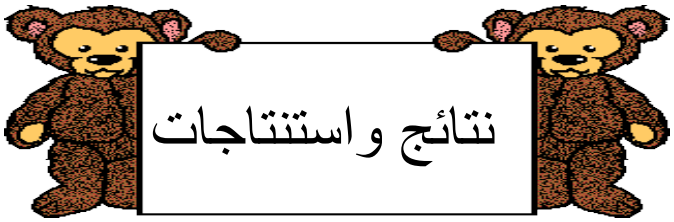
$ح_{٥} = أ ر^{٤}$

$٦٤ = ٤ \times ر^{٤}$

$ر^{٤} = ١٦ \longleftarrow ر = \pm ٢$

تنتج متتاليتين هندسيتين الأولى أساسها ٢ والأوساط الهندسية هي: ٨ ، ١٦ ، ٣٢

والثانية أساسها – ٢ والأوساط الهندسية : - ٨ ، ١٦ ، - ٣٢



تعريف:

تسمى الأعداد ج ، د ، ....، ل أوساطا هندسية للعددين الحقيقيين الموجبين أ ، ب

إذا كانت أ ، ج ، د، ...، ل ،ب متتالية هندسية

تمرين :

أوجد قيمة س بحيث تكون ٥ ، س ، ١٨ متتالية هندسية ؟؟؟

الحل:

س = ٩,٤