

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя оргкомитета
третьего этапа, первый заместитель
начальника главного управления по
образованию Витебского областного
исполнительного комитета

Е.Л. Богданович

20 октября 2022 г.

**Задания второго этапа республиканской олимпиады по учебному
предмету «Математика», 2022/2023 учебный год
XI класс**

1. Докажите, что если $\sin x + \sin y + \sin z > 2$, то $\cos x + \cos y + \cos z < 2,3$.

2. Пусть x_1, x_2 – корни многочлена $f(x) = x^2 + 2022x + a$; y_1, y_2 – корни многочлена $g(x) = x^2 + bx + c$. Найдите все возможные значения величины $f(5) - 2 \cdot g(4)$, если известно, что $f(y_1) + f(y_2) + g(x_1) + g(x_2) + (f(1))^{20} + (g(2))^{22} \leq 0$.

3. Известно, что внутри вписанного n -угольника $A_1A_2\dots A_n$ есть точка P такая, что $\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \dots = \angle PA_{n-1}A_n = \angle PA_nA_1$.

Докажите, что внутри этого многоугольника есть также точка Q такая, что $\angle QA_2A_1 = \angle QA_3A_2 = \dots = \angle QA_nA_{n-1} = \angle QA_1A_n$.

4. Пусть для некоторого натурального значения n числа 2^n и 5^n начинаются с одной и той же цифры. Найдите все возможные значения этой цифры.

5. Назовем тройку действительных чисел *хорошей*, если два меньших числа этой тройки отличаются друг от друга не более чем на 1 (например, $(1; \sqrt{3}; 4)$ – хорошая тройка, а $(1; 3; 4)$ – нет). В некоторой треугольной пирамиде длины ребер каждой грани образуют хорошую тройку.

Докажите, что полусуммы длин скрещивающихся ребер этой пирамиды также образуют хорошую тройку.