# MATHS

Living Math

# 서론

드리미학교 2022년도 2학기 'Living Math' 수업을 통해 만들게 된 이 교과서는 고등학생들이 모여 수학에 대한 책을 읽고 여러 사람들을 인터뷰하며 교과서 분석을 통해 학생들이 수학을 어떻게 배우면 좋을지 연구하고 토론한 결과이다. 수학 교과서 제작에 대해 이야기 하기 전에 우선 수학이 무엇인지에 대해 나누어보고자 한다. 수학이 뭘까? 지금껏 수학이라는 과목을 배워왔지만, 수학이라는 학문에 대해서 그리고, 무엇을 위해 수학을 배우는지에 대해 배우지 않았기에 쉽사리 대답하지 못할 것이다.

인터넷에 '수학'이라 검색하면 가장 먼저 뜨는 것은 '수, 양, 구조, 공간, 변화, 논리 등의 개념을 다루는 학문' 이라 서술되어 있는 수학을 정의해둔 내용이다. 우리가 경험했던, 그리고 경험하고 있는 수학은 이렇게 글로 적혀있는 수학이 아니기에 그리 와닿지 않을 수 있다. 많은 학생들이 '왜? 수학을 배워야 하는 거지?'라는 질문을 하는 것을 보았다. 임소영, 원동연 작가님들의 '5차원 수학'이라는 책에서는 '수학은 하나의 개념을 통해 다른 개념을 만들어 내고, 다른 개념과의 연결의 통해 또 다른 개념을 만나는 경험을 하는 것이다.' 라고 설명하고 있다. 실제로, 수학 교육 과정에 대한 어떤 걸 보든 수학이 서로 연결되어 있다는 사실을 알 수 있다. 단원, 단원이 서로 연결되어 있는 것은 물론, 배움을 얻는 과정에 사용되는 내용들도 서로 연결되어 있다. 또, 수학은 글로 적혀있는 내용들을 수학적인 언어로 표현함으로 수월하게 전달할 수 있도록 돕기도 한다. 예시를 들자면, 익주니에게 색연필 5세트가 있는데, 색연필 1세트당 12색의 색연필이 들어있다면 익주니가 가지고있는 색연필의 총 개수는 '5x12' 라는 함축된 수식으로 표현할 수 있다는 것이다. 수학적 언어에 대해 배운다면 긴 글을 짧고 간결하게 표현하는 수학을 매력적이게 느낄 수 있게 된다. 복잡하고 어려운 문제를 수학적 언어로 표현하고, 계산과 해결의 과정을 통해 논리적으로 생각하는 방법과 문제 해결력을 얻음으로 학생들의 사고력을 향상시켜주는 학문인 것이다. 자신이 알고 있는 것들을 가지고 발견하게 된 새로운 것을 자신의 것으로 만드는 것, 이게 바로 진정한 수학을 하는 방법이다.

그러나, 위 내용들과는 달리 대다수의 경우 수학에 대한 잘못된 인식을 가지고 있다. 필자 또한 수학에 대한 잘못된 인식을 가지고 있는 한국의 수학 교육의 피해자이다. 수학 교과서를 만들게 되면서 처음으로 수학에 대해 연구하게 되었는데, 이 연구로 하여금 이 사실을 알게 되었다.
이에 본론에 앞서, 연구를 통해 발견하게 된 한국 교육의 문제점에 대해 이야기 나누고자 한다.

첫 번째 문제는 수학 교과의 많은 학습량과 이에 따른 빠른 진도이다.
한국 수학은 마치 마라톤과 같다. 가야하는 길이 긴데, 엄청난 빠르기로 달려서 정해진 시간안에 들어와야만 한다. 한국 수학 교육 내에서 학기 별로 정해져 있는 단원들을 기간 내에 모두 배워야 하기 때문에 개개인에 따라 이해하는 속도가 다 다른데도 모든 학생들에게 동일한 속도의 배움을 강요하고 있는 것이다. 이 속도를 따라가지 못하는 학생들은 계속해서 뒤쳐지게 되어 특정 개념과 같은 기초적인 것들을 몰라 학교 수업만으로는 수학을 배울 수 없는 상황이기에 학생들에겐 복습과 예습 등의 추가적인 시간을 투자하는 것이 필수적이다.

두 번째는 배움의 목적과 중점이다.
'한국의 배움 목적은 대입이다.' 라고 결론지어 말 할 수 있다. 그만큼 배움의 목적을 평가에 두고 있다. 때문에, 학생들은 수학의 개념보다는 시험에 나오는 문제 유형을 공부하는데에 중점을 두고 공부한다. 그러나 우리가 중점을 두어야 할 부분은 수학의 기초를 잡아주는 개념이다. 개념을 알고 있으면, 공식이나 심화된 부분을 이해하기 수월하다. 반면, 기초를 정확히 알지 못한 채 심화의 내용을 접하게 되면 수학을 완전히 제 것으로 만들지 못한다. 수학 점수가 올랐다고 수학 실력이 오른 건 아니지만 수학 실력이 오르면 수학 점수가 오른다. 즉, 시험이 목적이라면, 개념을 중요하게 여겨야 한다는 것이다. 또, 어떠한 목적이든지 개념의 중요하다는 것을 인지해야 함을 명심하라.

세 번째는 배움의 깊이이다.
한국의 수학 교육은 모든 학생들에게 상당히 높은 수준의 수학을 학습하도록 요구하고 있다. 심지어 수학과 전혀 관련이 없는 전공 분야의 진학을 준비하고 있는 학생들에게도 말이다. 수학을 배우는 것이 필요하지 않은게 아니다. 사고력 향상에는 수학이 효과적인데, 학생들의 사고능력에 도움이 되는 과정 이상을 배우고 있다는 것이다. 실제로, 학생들이 정해진 기간 내에 온전하게 배움을 자신의 지식으로 습득하기엔 어려움이 있다는 기사도 있었다. 이를 이행하기 위해 어린시절부터 선행학습을 진행하는 결과를 초래하게 되는데, 한국의 교육과 진학 조건에 익숙해진 우리로서는 당연하다 느껴질 수 있다. 그렇지만, 전혀 당연한 상황이 아니다.

네 번째 문제는 수학 전달자의 잘못된 과목 인식으로 인한 대물림 현상이다.
수학은 암기 과목이 아니다. 후에 자세히 이야기하겠지만, 수학은 글로 적힌 개념과 문제 형식을 암기하고 공식을 외우는 과목이 절대 아니다. 개념을 이해하고 문제를 해결하고자 사고해가는 과목이다. 학생들의 기본 교재인, 교과서에서는 개념을 쉽게 설명하기 위해 그림을 활용하기도 하고, 공식을 풀어서 자세하게 설명해주기도, 실제적인 활동을 하며 흥미를 유발시키기도 한다. 그러나 몇몇 선생님들의 잘못된 교과목 인식은 학생들이 품고 있는 수학에 대한 호기심에 대해 답을 해주지 않는다던가, 정확한 개념의 이해를 시키지 않고 문제 유형들을 다루는 것 등과 같은 상황들을 발생시키는 것을 보았다. 최악의 상황은 아예 개념에 대해 다루지 않는 것이다. 또 다르게는, 평가를 위한 과목으로 인식하기도 한다. 이 경우, 교과서를 통해 수업을 진행함에도 학생들의 실력을 평가하고자 하는 목적에 온전히 치우쳐 교과서 그 이상의 내용을 시험에 출제하기도 한다. 그렇게 배우지도 않은 내용으로 평가가 진행되는 순간 학생들은 본인에게 도움을 줄 수 있다 생각하는 사교육의 문을 열게 되는 것이다.

사실상, 앞서 설명한 이 문제들은 모두, 한국 수학 교육의 가장 큰 문제인 사교육과 모두 연결되어 있다. 특히나 한국은 OECD의 사교육 의존도 조사 결과 세계 1위인데,특히나 수학은 2021년 사교육비 지출 현황에 35%를 웃도는 것으로 조사되었다. 사교육을 경험해 본 학생으로서, 이를 기반으로 학생들이 사교육을 통해 어떤 것을 공부하고자 하는지, 이에 따른 문제점이 무엇인지 이야기 해보고자 한다.

첫째로는, 부족한 부분을 보충하고 심화된 내용을 공부 하기 위함이다.
2021년 사교육을 받은 전국 학생 중 약 75%의 학생들은 사교육 목적 1위로 보충 및 심화를 선택했다. 보충을 선택한 이유는 빠른 진도의 수업을 따라가지 못해, 다음 단계 수업을 이해하지 못하는 상황을 방지하기 위해 배운 내용을 보충하는 시간이 충분히 필요하다고 생각한다. 반면 심화를 선택한 이유는, 교육과정 평가의 심화된 난이도의 문제라고 보여진다. 학생들은 심화된 내용을 가르쳐 주고 문제를 많이 풀어볼 수 있는 사교육으로 향하게 된다. 그러나.그러나, 심화 공부는 개념을 모르는 상태라면 오히려 독이 된다. 초반에는 괜찮아보일지 모르지만, 한 칸씩 올라가야하는 계단을 두 칸, 세 칸, 네 칸, 계속해서 늘려가며 올라가는 것과 마찬가지이다. 그렇게 점점 높이 올라갈 수록, 어느 순간에 도달하게 될 때 한 칸도 오르지 못하는 상황이 발생하게 되는 것이다. 심화공부는 개념을 연결시키고 확장하는 것으로, 개념을 정확히 아는 것이 중요하다. 특히나, 한국 교과서는 학생들이 개념을 익히기에 최적화되어 있는 교재이기에 활용하길 권장한다.

두 번째는 선행 학습이다.
아마 현 한국 교육의 가장 큰 문제일 것으로 생각된다. 교육과정 속 정해진 수학의 범위를 온전하게 따라가고 끝마치기 위해서는 선행학습을 진행 할 수 밖에 없다. 빠른 진도의 문제로 다음 수업을 따라가기 위해 진행한 학습이, 선행학습으로 많이 이어진다. 적당한 선에서의 선행은 오히려 예습 효과를 볼 수 있지만, 지금은 초등학생들이 고등학교 수준의 문제를 풀고 있을 정도로 선행학습에 대한 문제가 심각하다. 나이에 맞지 않는 과도한 선행학습은 난이도로 인해 해당 과목에 대한 반발을 유발시키기도 한다. 또한, 많은 선행학습으로 인해 학생들은 이미 배웠던 내용을 다시 배우게 된다는 생각에 정규 수업을 가볍게 여기는 마음을 가지게 된다. 교과서를 활용해 가르치는 학교에서 얻을 수 있는 배움과, 선행학습을 통해 얻을 수 있는 배움은 별개이기에 선행학습을 하고자 한다면 정규 교육 과정을 중요히 여길 필요가 있다.

사실, 어떠한 목적에서든 사교육을 하는 것이 나쁘다고 할 수는 없다. 사교육을 하는 것도 물론, 도움이 된다. 그렇지만 사교육과 연관지어야만 이 문제들이 해결된다고 보장할 수 없을 뿐더러, 꼭 사교육을 받아야지만 해결할 수 있는 문제가 아니라는 점을 인지했으면 좋겠다. 사교육을 하지 않는다면, 어떻게 수학을 공부해야 하는 걸까? 지금부터, 수학을 공부하는 방법에 대해 이야기 해보고자 한다.

사실 누구나 수학을 어떻게 공부해야하는지 알고 있다. 한 번쯤 수능 시험 만점자가 '교과서 위주로 공부했어요'라고 말하는 걸 본 적이 있을 것이다. 굉장히 뻔하고 진부한 이야기로 들릴지 모르지만, 교과서 중심으로 공부하는 것은 우리가 생각하는 것보다 더 중요하다. 교과서는 수학적 사고력을 기르는데 초점을 맞추어 제작된 책이기에, 완벽하지도 않고 문제점이 있기도 하지만 개념을 익히기에 가장 적합하다. 반면, 문제집이나 사교육에서 사용하는 교재는 단시간의 많은 진도를 나가기에 최적화 되어 있는 경우가 대부분이다. 개념과 문제를 푸는 과정 중심의 교과서와는 달리, 문제집은 문제를 푸는 연산 능력과 문제의 답에 중점을 두고 있다. 답을 맞추는 것이 중요하니까, 문제집을 풀어야겠다는 생각을 하고 있다면 오산이다. 결과는 과정의 산물이다. 때문에 오히려 좋은 결과를 만들기 위해서는 과정을 더 단단히 만들어야만 한다.

과정을 단단히 만들어주는 가장 좋은 요소는 복습과 예습으로, 보충을 하기 위해서는 복습을, 선행학습은 예습을 통해 해결할 수 있다. 복습은, 정확하게 알지 못하고 따라 배웠던 내용들을 다시 한 번 되짚을 수 있는 기회를 준다. 뿐만 아니라, 배운 내용을 되돌아 봄으로 우리 머릿속에 오랜시간 내용이 남아 있을 수 있도록 도와준다. 그렇기에, 무엇보다 중요한 개념을 중심으로 처음 배운듯이 차근차근 공부하는 것을 추천한다. 들은 것을 설명하는건 완전하게 이해한 사람만이 할 수 있기에, 주위 사람들이나 인형과 같이 대상을 정해두고 개념에 대해 가르치듯 설명하는 방법이 효과적인 방법으로 꼽힌다. 예습은, 다음시간에 배울 개념들을 미리 공부하는 시간들로, 실제 수업을 들을 때 많은 내용의 진도를 빠르게 나가도 한 번 복습한다는 느낌으로 가벼운 마음을 가지고 집중할 수 있도록 도와준다. 수업 전, 교과서의 내용을 한 번 훑어보아 전체적인 흐름을 읽는 것 자체로 도움이 된다. 이 두 가지를 모두 철저히 한다면, 심화학습을 접하게 될 때 자연스레 이어갈 수 있게 되는 것이다. 이 내용을 가장 잘 수행할 수 있는 책이 바로 교과서이다.

필자는 교과서를 재작하며 다양한 교과서들의 이점을 가져와 구성하고자 했다. 우선, 한국 교과서이다. 국내에서 흔히 사용되고 있는 수학 교과서는 학생들에게 내용을 알려주기 위한 개념을 꾹꾹 눌러 담아 둔 개념서로, 기본적인 내용들을 공부하기에 가장 적합한 교재이다. 교과서가 아닌 부가 교재와 달리 개념들이 자세하고 명확하게 담겨있기도 하고, 계속해서 본인이 개념을 이해하고 적용할 수 있는지를 시험하고 있다.

반면, 미국 교과서의 경우 교과서보단 선생님의 지도에 따라 진행되는 수업이 주를 이룬다고 한다. 때문에 교과서의 전체적인 구성이 많지 않고, 이와 더불어 문제를 풀 수 있는 충분한 여백이 확보되는 것을 확인할 수 있었다. 이와 같은 교과서의 이점들을 교재에 녹여내고자 했다.

교과서를 통해 개념을 이해할 수 있도록 하는 것, 이해를 바탕으로 적정 수준의 심화학습을 진행할 수 있도록 제작하고자 하였다. 그리고, 사고에 초점을 맞추어 학생들이 해당 단원을 통해 사고할 수 있는 활동들을 포함하고자 했다. 또, 서술 과정에 중요성을 두어 학생들이 해당 내용을 정확히 이해하고 있는지 확인 할 수 있도록 하고, 문제에 대한 답만을 적어두기 보단 서술 과정을 포함시켜 해당 내용의 올바른 과정을 알 수 있도록 하고자 했다. 마지막으로, 무엇보다 학생들이 이 교재를 통해 이전 내용을 리마인드 할 수 있고, 충분한 복습을 할 수 있는 기회를 제공할 수 있도록 제작하고자 하였다. 위 내용에 대한 고민의 흔적을 거친 결과들이 이 교과서에 담겨 온전히 전달되기를 바란다.

필자가 제작하고자 한 '다항식의 곱셈과 인수분해'는 개인적으로 수학을 배워가던 과정 중에서 가장 고비가 되었던 부분이다. 많은 사교육을 경험했고, 계속해서 선행학습을 진행해왔으나 수학을 포기하고 싶다는 생각을 가지게 된 건 인수분해가 처음이었다. 한 번 부딪히고 나서 약 3년이라는 시간동안 인수분해에 필요한 과정들을 다시 배우고, 계속된 도전 끝에 현재는 수학과 애증의 관계를 맺게 되었다. 그리 어려운 문제가 아니라는 것을 깨닫고 나서 부터는 더이상 수학이 두렵다는 마음을 가지지 않게 되었다. 오히려 현재는 수학을 좋아한다고 당당하게 말할 수 있다. 수학과 필자를 가로막고 있었던건 선행학습과 이에 따른 배움의 나이 차이, 연결되는 내용들을 정확하게 알지 못했던 것, 공식을 이해하지 못하고서 무작정 암기를 강요받았던 것이었다. 필자에게 가장 어려움을 주었던 이 부분을 교과서로 만들고자 한 데에는 이유가 있다. 바로, 누구나 수학을 할 수 있다는 용기를 주고 싶어서이다. 움츠러들 이유도, 두려움을 가질 필요도 없다. 수학을 진정으로 이해하게 되어 수학적 사고를 할 수 있게 될 때, 이 교과서를 접하는 모두가 수학에 대한 흥미를 가질 수 있을 것이라 믿는다. 지금까지는 우리에게 다가오던 수학을 접했다면, 이제는 우리가 수학에게 다가갈 차례이다.

# 다항식의 곱셈과 인수분해

## 1 다항식의 곱셈

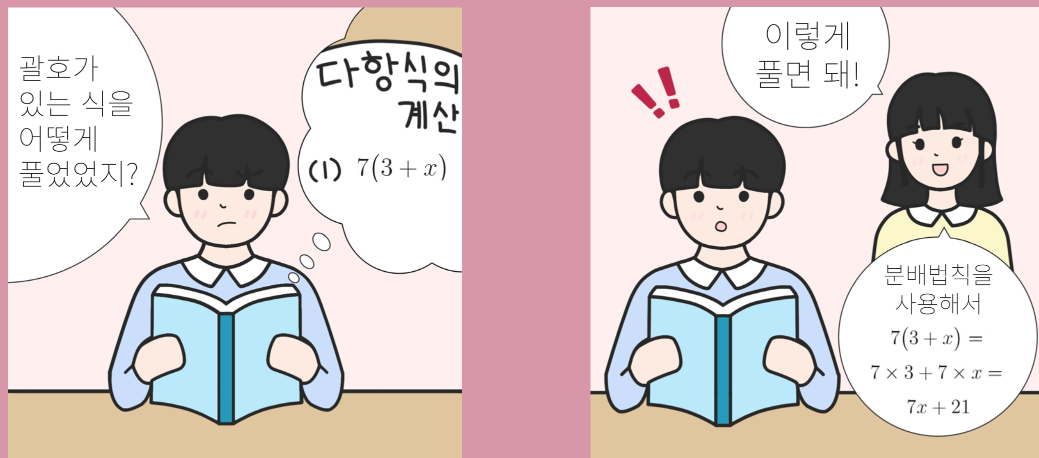
- 복습하기
- 개념알기
- 생각해보기
- 확인하기
- 개념정리
- 개념플러스

## 2 다항식의 인수분해

- 복습하기
- 개념알기
- 개념정리
- 생각해보기
- 확인하기
- 마무리하기

# 1. 다항식의 곱셈

**학습 목표**
다항식의 곱셈을 할 수 있다.





## 복습하기

### 지수법칙

1. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $a^2 \times a^4 \times a^3 = a^{2+4+\square} = a^{\square}$

(2) $a^{\square} \times a \times a^3 = a^6$

(3) $(b^2)^4 = b^{2\times\square} = b^{\square}$

(4) $\left(\frac{b^3}{a^2}\right)^2 = \left(\frac{b^{3\times\square}}{a^{2\times\square}}\right)^2 = \left(\frac{b^{\square}}{a^{\square}}\right)$

(5) $a^7 \div a^4 = a^{\square-\square} = a^{\square}$

(6) $b^8 \div (b^2)^2 \div b^3 = b^{8-\square-\square} = b^{\square}$

(7) $a^9 \div a^9 = \square$

2. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $x^2 \times y \times x^3 \times y^3$

(2) $\left(-\frac{y^3}{x^2}\right)^3$

(3) $(x^2)^5 \div (x^4)^3$

### 단항식과 다항식의 계산

3. 다음을 계산하시오.

(1) $2a^3b^2 \times (-4ab^5)$

(2) $(a^5b^2)^2 \div 3ab^3$

(3) $3xy^2 \div \left(-\frac{3}{7}y^2\right) \div 5x$

4. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(3a+b)+(-a+5b)$

(2) $(2a^2-5x+7)-(7a^2-4x-1)$

(3) $a(2a-5)$

(4) $-2x(x-4)+x(3x+7)$

분배법칙 $(a+b)M = aM + bM$

## 두 자리수의 곱셈을 하듯이, 다항식의 곱셈도 할 수 있지 않을까?

1. 두 다항식을 곱한 방법을 두 자리수의 곱셈에 비교해 설명해 보시오.

두 자리수의 곱셈

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 |
| × | | 3 | 8 |
| | 1 | 8 | 4 |
| | 6 | 9 | |
| | 8 | 7 | 4 |

다항식의 곱셈

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $2x$ | $+3$ |
| × | | $3x$ | $-8$ |
| | | $-16x$ | $-24$ |
| × | $6x^2$ | $+9x$ | |
| | $6x^2$ | $-7x$ | $-24$ |

| 비슷한 부분 | 다른 부분 |
|---|---|
| | |

2. 세로셈을 이용해 식을 전개해보시오.

예시) $(x+y)^2$

| | | |
|---|---|---|
| | $x$ | $y$ |
| × | $x$ | $y$ |
| | $xy$ | $y^2$ |
| $x^2$ | $xy$ | |
| $x^2$ | $2xy$ | $y^2$ |

(1) $2x(3x+1)$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| × | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(2) $(x+4)(5x+3)$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| × | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(3) $(3y+2)(-2y+4)$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| × | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(4) $(-y+3)(-4y+2)$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| × | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(5) $(a-b)^2$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| × | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(6) $(a+b)(a-b)$

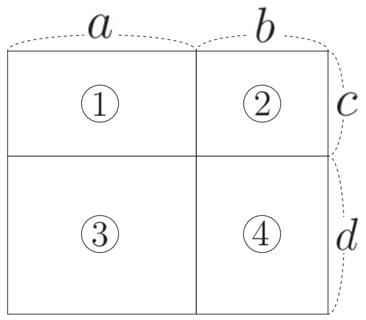
| | | |
|---|---|---|
| | | |
| × | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(7) $(a+b)(c+d)$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| × | | |
| | | |
| | | |
| | | |

# 곱셈공식

1. 도형의 각각의 넓이와 전체 넓이를 구하시오.




①:　　　　②:

③:　　　　④:

전체 넓이:

**개념알기**

앞서, 세로셈을 사용해 전개했던 이 등식은 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 전개한 것과 같다. 또, 1번 문제와 같은 도형으로 표현할 수 있다.

$$\left(a+b\right)\left(c+d\right)=a\left(c+d\right)+b\left(c+d\right)$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

이와 같이 다항식과 다항식의 곱은 다음 방법으로 전개할 수 있다.

$$\left(a+b\right)\left(c+d\right)=\underset{①}{\underline{ac}}+\underset{②}{\underline{ad}}+\underset{③}{\underline{bc}}+\underset{④}{\underline{bd}}$$

2. 분배법칙을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $\left(2x+y\right)\left(x-3y\right)$

(2) $\left(3x-2\right)\left(2x-5\right)$

(3) $\left(-2y-1\right)\left(-y+6\right)$

**개념알기**

곱셈공식 (1)

분배법칙을 이용하여 $\left(a+b\right)^2$를 전개하면 다음과 같다.

$$\left(a+b\right)^2=\left(a+b\right)\left(a+b\right)=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

같은 방법으로 $\left(a-b\right)^2$ 를 전개하면 다음과 같다.

$$\left(a-b\right)^2=\left(a-b\right)\left(a-b\right)=a^2-ab-ab+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

2. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\left(x+2\right)^2$　　　　(2) $\left(3x+5y\right)^2$

(3) $\left(2x-1\right)^2$　　　　(4) $\left(-x-3y\right)^2$

4. 빈칸에 분배법칙을 이용한 알맞은 전개식을 넣고, 결과가 옳지 않은 것을 고르시오.

① $\left(2x+y\right)^2=$　　　　$=4x^2+4xy+y^2$

② $\left(3a-4b\right)^2=$　　　　$=9a^2-24ab+16b^2$

③ $\left(-x-5y\right)^2=$　　　　$=x^2+10xy+25y^2$

④ $\left(-2+3b\right)^2=$　　　　$=9b^2-12b+4$

⑤ $\left(3x+3y\right)^2=$　　　　$=9x^2+18xy+9x^2$

### 생각해보기

$(a+b)^2$, $(a-b)^2$ 를 사각형의 넓이를 구하는 과정을 표현해보자.

### 개념알기

곱셈공식 (2)

분배법칙을 이용하여 $(a+b)(a-b)$ 를 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

5. 곱셈공식을 활용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x-2)$

(2) $(-2a+1)(-2a-1)$

(3) $(5a-2b)(5a+2b)$



### 생각해보기

$(a+b)(a-b)$ 를 사각형의 넓이를 구하는 방법을 표현해보자.

### 개념알기

곱셈공식 (3)

분배법칙을 이용하여 $(x+a)(x+b)$ 를 전개하면 다음과 같다.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

6. 곱셈공식을 활용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+4)(x-2)$

(2) $(y+1)(y+5)$

(3) $(a-7)(a+3)$

(4) $(x-5)(x-1)$

### 생각해보기

$\left(a+b\right)\left(a-b\right)$ 를 사각형의 넓이를 구하는 방법을 표현해보자.

### 개념알기

곱셈공식 (4)

전개 분배법칙을 이용하여 $\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)$ 를 전개하면 다음과 같다.

$$\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)=acx^2+\left(ad+bc\right)x+bd$$

7. 곱셈공식을 활용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $\left(x+2\right)\left(2x+3\right)$

(2) $\left(-3x+y\right)\left(2x+3y\right)$

(3) $\left(-3a+2b\right)\left(a-4b\right)$

(4) $\left(-4a+b\right)\left(-a-5b\right)$



### 생각해보기

$\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)$ 를 사각형의 넓이를 구하는 방법을 표현해보자.

### 확인하기

8. 다음 식을 계산하시오

$$\left(5x+2y\right)\left(x-4y\right)-2(2x+y)(2x-y)$$

9. $\left(x-a\right)\left(-9+bx\right)=6x^2+cx-18$ 일때, 상수 $a$ $b$, $c$, 를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.

10. 두 자연수 $a, b$ 에 대하여 다항식 $(2x-a)^2+(x+3)(-4x+b)$ 을 계산한 식에서 $x$ 의 계수가 15 일 때, 상수항을 구하시오.

**개념정리**

이상에서 다음과 같은 곱셈 공식을 얻는다.

**곱셈 공식** (1)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

**곱셈 공식** (2)

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

**곱셈 공식** (3)

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

**곱셈 공식** (4)

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$



## 곱셈 공식의 활용

1. 알맞은 식끼리 연결하시오.

| | |
|---|---|
| (1) $(a+b)(a-b)$ • | • $a^2-2ab+b^2$ |
| (2) $(ax+b)(cx+d)$ • | • $a^2-b^2$ |
| (3) $(a+b)^2$ • | • $acx^2+(ad+bc)x+bd$ |
| (4) $(x+a)(x+b)$ • | • $x^2+(a+b)x+ab$ |
| (5) $(a-b)^2$ • | • $a^2+2ab+b^2$ |

2. 다음 중 옳지 않은 것을 고르시오.

① $(3x+1)(2x-4)=6x^2-10x-4$

② $(-x-2y)(4x-y)=-4x^2-7xy+2y^2$

③ $(2x+4)(x+5)=2x^2+14x+20$

④ $(x-3)(-5x+2)=-5x^2-13x-6$

⑤ $(-4x+3y)(-x-y)=4x^2+xy-3y^2$

3. 다음 표의 가로 방향과 세로 방향은 모두 두 다항식의 곱셈을 전개하여 나타낸 것이다. 두 다항식 $a, b$에 대하여 $a$-$b$를 계산하시오.

| | | |
|---|---|---|
| $2x+3$ | $5x-2$ | $10x^2+11x-6$ |
| $-4x-3$ | $-x+6$ | $a$ |
| $b$ | $-5x^2+32x-12$ | |

**개념 플러스**

두 수의 곱이나 어떤 수의 제곱을 계산할 때, 곱셈 공식을 이용하면 편리한 경우가 있다.

**생각해보기**

각각 다른 두 가지의 공식을 활용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $86 \times 94$

(1)

(2)

(2) $6.7^2$

(1)

(2)

(3) $(\sqrt{4}+\sqrt{7})(\sqrt{4}-\sqrt{7})$

(1)

(2)



**개념 플러스**

분수의 분모가 근호를 포함한 식일 때, 곱셈 공식
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 을 이용하여 분모를 유리화 할 수 있다.

근호를 유리화하는 식

$a+\sqrt{b} \Rightarrow a-\sqrt{b}$ $\quad$ $\sqrt{a}+\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}$

$a-\sqrt{b} \Rightarrow a+\sqrt{b}$ $\quad$ $\sqrt{a}-\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}$

예

$(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=1+2\sqrt{2}$

4. 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

(2) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

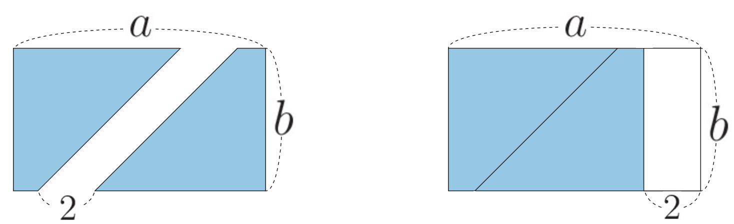
5. $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}, y=\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$ 일 때, $(x+y)^2$ 의 값을 구하시오.

**개념 플러스**

곱셈 공식과 도형의 넓이

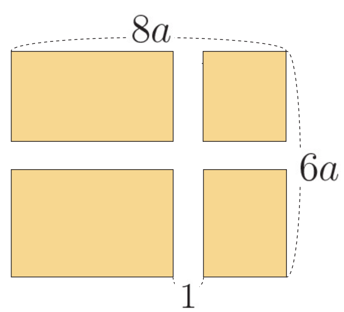
일정한 간격만큼 떨어져 있는 도형의 넓이는 떨어져 있는 도형을 이동하여 붙여서 생각한다.

예

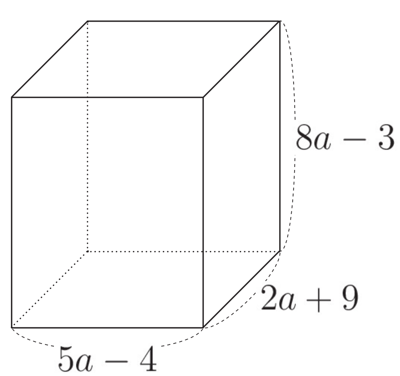



색칠한 부분의 넓이는 $b(a-2)=ab-2b$

6. 가로, 세로의 길이가 각각 $8a$, $6a$ 인 직사각형 모양의 밭에 폭이 $1$인 길을 냈다. 길을 제외한 밭의 넓이를 구하시오.




7. 아래 그림과 같이 가로 세로의 길이가 각각 $5a-4$ , $2a+9$ 이고 높이가 $8a-3$ 인 직육면체의 겉넓이를 구하시오.






**개념 플러스**

참고하기

곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

(3) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(4) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

위 식에 $b$ 대신 $\frac{1}{a}$ 대입하면 다음과 같다.

(1) $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2$

(2) $a^2+\frac{1}{a^2}=(a-\frac{1}{a})^2+2$

(3) $(a+\frac{1}{a})^2=(a-\frac{1}{a})^2+4$

(4) $(a-\frac{1}{a})^2=(a+\frac{1}{a})^2+4$

10. $x+y=3$, $xy=-6$ 일 때, $x^2+y^2$ 의 값을 구하시오.

11. $a-\frac{1}{a}=3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $a^2+\frac{1}{a^2}$

(2) $(a+\frac{1}{a})^2$

# 2. 다항식의 인수분해

**학습 목표**
다항식의 인수분해를 할 수 있다.

## 복습하기

### 소인수분해

1. 다음 수를 소인수분해하시오.

(1) $36$

(2) $15$

(3) $54$

소인수분해 : 자연수를 소수의 곱으로 나타내는 것

### 곱셈공식

2. 다음 식을 전개하시오.

(1) $(3x+2)^2$

(2) $(x+5)(x-5)$

(3) $(4x-y)$

(4) $(y+5)(y-7)$

(5) $(4x+1)(-x-2)$



## 다항식의 인수분해

**개념 알기**

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 다항식의 **인수**라고 한다. 또, 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 다항식을 **인수분해**한다고 한다.

$$x^2+6x+5 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+5)$$

예

$(x+1)(x+5)$ 을 전개하면 $x^2+6x+5$ 이므로
$x^2+6x+5$ 을 인수분해하면 $(x+1)(x+5)$ 이다.
이때 $x+1$과 $x+5$은 다항식 $x^2+6x+5$의 인수이다.

다항식 $ma+mb$ 두 항 $ma$, $mb$ 에 공통으로 들어있는 인수 $m$을 묶어 내어 다음과 같이 인수분해 할 수 있다.

$$ma+mb=m(a+b)$$

이와 같이 다항식의 각 항에 공통으로 들어 있는 인수가 있으면 그 인수로 묶어내어 인수분해 할 수 있다.

1. 다음 식에서 공통인 인수를 찾아 인수분해하시오.

(1) $3a^2+2a$ ⇨ 공통인 인수 : $a$ , 인수분해 : $a(\quad a+\quad)$

(2) $8a+6b$ ⇨ 공통인 인수 : , 인수분해 :

(3) $x^2y^3+x^5y^2$

(4) $4a^5b^3+12ab^7$

# 인수분해 공식

**개념 알기**

인수분해 공식 (1)

곱셈 공식 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ 에서 각각 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

1. 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $4a^2+12ab+9b^2$

$(\quad a+\quad b)^2$

$(\quad a)^2\ 2(\quad a\times\quad b)\ (\quad b)^2$

$a^2+2ab+b^2$

(2) $x^2+10x+25$

$a^2+2ab+b^2$

(3) $16x^2-8x+y^2$

$(\quad x)^2$

$a^2-2ab+b^2$

(4) $9a^2-24a+16$

$a^2-2ab+b^2$

**개념 알기**

$(a+2)^2$, $(2x+3)^2$, $5(2x+y)$ 와 같이 다항식의 제곱으로 된 식 또는 이 식에 상수를 곱한 식을 완전제곱식이라고 한다.



2. 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 양수를 써넣으시오.

(1) $x^2+\square+36$

(2) $16x^2+8x+\square$

(3) $4a^2-24ab+\square$

(4) $y^2-\square+9$

3. 완전제곱식인 것은?

① $9x^2+18x+36$

② $16a^2-16ab+4b^2$

③ $25y^2-15y+9$

④ $a^2-16a+8$

⑤ $4x^2-10xy+25y^2$

**개념 알기**

인수분해 공식 (2)

곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 에서 각각 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

4. 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2-4$

(2) $36a^2-9$

(3) $16x^2-25y^2$

(4) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2$

**개념 알기**

인수분해 공식 (3)

곱셈 공식 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 에서 각각 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

예

앞의 공식을 이용하여 다항식 $x^2+5x+6$을 인수분해해 보자.
다항식 $x^2+5x+6$은 **인수분해 공식**(3)에서

$$a+b=5,\ ab=6$$

인 경우이므로 합이 $6$이고, 곱이 $5$인 두 정수 $a, b$를 찾으면 된다.
정수와 $2$과 $3$이므로 $x^2+5x+6$을 인수분해 하면

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

이다.

| 곱이 $6$인 두 정수 | | 합이 $5$ |
|---|---|---|
| $1$ | $6$ | X |
| $2$ | $3$ | O |
| $3$ | $2$ | O |
| $6$ | $1$ | X |

왼쪽 표에 따라 $a=2$, $b=3$ 이라고 가정하면,

$$\begin{array}{ccc} (x)^2 & (2+3)x & 2\times 3 \\ \multicolumn{3}{c}{x^2+(a+b)x+ab} \end{array}$$

5. 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+6x+8$

| 곱이 인 두 정수 | | 합이 |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(2) $x^2+10x+21$

| 곱이 인 두 정수 | | 합이 |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

(3) $x^2+8x+12$

(4) $x^2+11x+24$

6. $x^2+Ax-24=(x+B)(x+C)$일 때, 다음 중 $A$의 값이 될 수 없는 것은? ($A, B, C$는 정수)

① $2$ ② $-10$ ③ $5$ ④ $-1$ ⑤ $23$

**개념 알기**

인수분해 공식 (4)

곱셈 공식 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ 에서 각각 좌변과 우변을 서로 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

예

앞의 공식을 이용하여 다항식 $2x^2+7x+3$을 인수분해해 보자.
다항식 $2x^2+7x+3$은 **인수분해 공식**(4)에서

$$ac=2,\ ad+bc=7,\ bd=3$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 7 & 3 \\ \multicolumn{3}{c}{acx^2+(ad+bc)x+bd} \end{array}$$

인 경우이므로 이를 만족시키는 네 정수 $a, b, c, d$를 찾으면 된다.
먼저 $ac=2$인 두 양의 정수 $a, c$와 $bd=3$인 두 정수 $b, d$를 구하여 오른쪽과 같이 나열한 후 $ad+bc=7$이 되는 $a, b, c, d$를 찾는다.

$$\begin{array}{ccc} a & b \rightarrow & ad \\ c & d \rightarrow & bc \\ \hline & & ad+bc \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 \rightarrow & 2 \\ 2 & 3 \rightarrow & 3 \\ \hline & & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 \rightarrow & 6 \\ 2 & 1 \rightarrow & 1 \\ \hline & & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 \rightarrow & -2 \\ 2 & -3 \rightarrow & -3 \\ \hline & & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & -3 \rightarrow & -6 \\ 2 & -1 \rightarrow & -1 \\ \hline & & -7 \end{array}$$

위에서 $a=1, b=3, c=2, d=1$이므로 $2x^2+7x+3$을 인수분해하면 $2x^2+7x+3=(x+3)(2x+1)$이다.

7. 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $4x^2+10+4$

(2) $3x^2-5x-2$

(3) $x^2+7x-8$

(4) $2x^2-5x+2$

**개념 알기**

다항식을 인수분해할 때, 각 항에 공통으로 들어 있는 인수가 있으면 먼저 그 인수로 묶어 낸 다음 인수분해 공식을 이용한다.

예 $x^2y-3xy+2y$ 의 공통인수는 $y$ 이므로

$$x^2y-3xy+2y=y(x^2-3x+2)=y(x-1)(x-2)$$

이다.

8. 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $3x^3+18x^2-21x$

(2) $2x^3y+14x^2y-16$

9. 다음 중 다항식 $3(x^2-2x+1)$ 인수가 아닌 것을 고르시오.

① $3$ ② $(x+1)$ ③ $3x^2-6x+3$

④ $3(x-1)$ ⑤ $x^2-2x$



**개념정리**

이상에서 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

**인수분해 공식** (1)

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

**인수분해 공식** (2)

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

**인수분해 공식** (3)

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

**인수분해 공식** (4)

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

**생각해보기**

곱셈공식과 인수분해의 관계에 대해 서술해보시오.

## 확인하기

10. 다음 중 인수분해한 것이 옳지 않은 것은?

① $x^2+14+49=(x+7)^2$

② $10a^2+40ab+14b^2=(5a+2b)(2a+7b)$

③ $4a^2-9b^2=(2a+3b)(2a-3b)$

④ $9x^2-18-9x=(3x-3)^2$

⑤ $x^2+4x-21=(x+7)(x-3)$

11. 다음 등식을 만족시키는 정수 $a, b, c, d$ 에 대하여 $a+b+c+d$ 의 값을 구하시오. (단, $b>0$)

$$4x^2+7x-2=(4x-a)(x+2)$$
$$x^2-196=(x+b)(x-b)$$
$$7x^2-cx-6=(7x+2)(x-d)$$

12. $x-2$ 을 인수로 갖는 다항식을 보기에서 모두 고른 것은?

(가) $x^2+2x-8$　(나) $2x^2-x-1$
(다) $2x^2-11x+14$　(라) $3x^2+5x-2$

① (가), (나)　② (가), (나), (다)　③ (나), (다), (라)
④ (나), (다)　⑤ (가), (라)



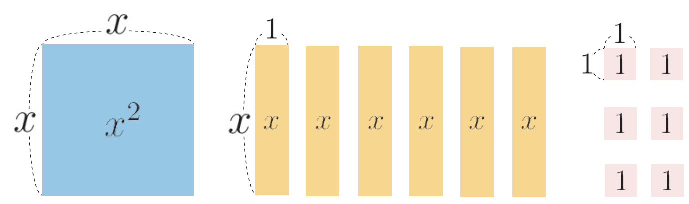
## 인수분해 활용

1. 인수분해 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) $83^2-17^2$　(2) $(5-\sqrt{3})^2-(5+\sqrt{3})^2$

2. $x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ 일 때, $(x+y)^2$의 값을 구하시오.

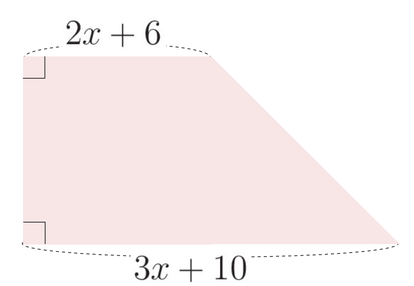
3. 다음 그림의 모든 직사각형을 겹치지 않게 이어 붙여 만든 새로운 정사각형의 한 변의 길이와 넓이를 구하시오.



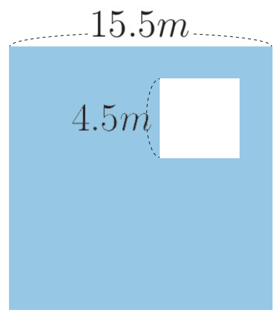

길이 ＿＿＿＿＿

넓이 ＿＿＿＿＿

4. 아래 그림과 같이 사다리꼴 넓이가 $25x^2-256$일 때, 이 사다리꼴의 높이를 구하시오.

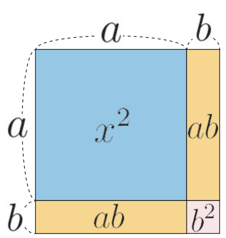


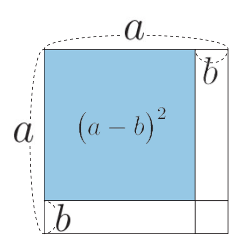
5. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 $15.5m$인 정사각형 모양의 염전 내부에 한 변의 길이가 $4.5m$인 정사각형 모양으로 모아둔 소금이 있다. 염전에서 모아둔 소금의 넓이를 제외한 부분의 넓이를 인수분해 공식을 이용하여 구하시오.

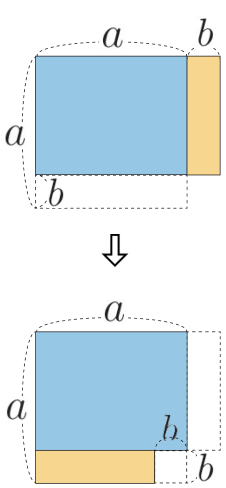


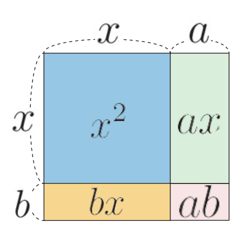

**마무리하기**

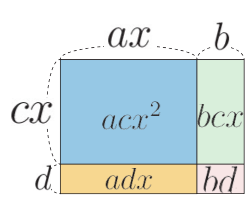
아래, 각각의 도형과 알맞은 곱셈공식을 작성하시오.



Living Math(Maths)
초판 1쇄 발행 2023년 1월 10일

펴낸이 김지수 김향주 박예솔 신채원 오영화 정예원
지도교사 최익준

표지디자인 박예솔
삽화 신채원
펴낸곳 드리미학교

주소 충남 천안시 동남구 병천면 봉항로 89
이메일 dreamy@dreamyedu.net
홈페이지 dreamyedu.net