MATHS

Living Math

Dreamy School

이 교과서를 집필하며..

대부분의 사람들은 우리나라 수학 교육에서 문제점을 느낀다. 하지만 우리는 지금의 수학교육을 그냥 받아들이거나 수학을 포기하는 경우가 많다. 여러분이 생각하는 우리나라 수학 교육의 문제점은 무엇인가? 이 글을 통해 내가 생각하는 수학교육에 대한 문제점을 나누려고 한다. 물론 아무리 좋은 교육 과정이 있다고 하더라도 수학을 싫어할 수 있다. 하지만 우리나라에는 수학을 싫어하는 사람들이 다른 나라에 비해 훨씬 많고 '수포자'(수학 포기자)라는 단어도 이제는 평범한 단어가 되었다. 그래서 우리나라 수학교육의 문제를 깊이 알아보기 위해 여러 책을 읽어보고 교과서들을 분석해 보았다. 이런 과정을 통해 더 많은 문제점을 알게 되었고, 우리가 함께 생각해봐야 할 내용들을 나누어 보려고 한다.

앞서 이 교과서의 목적을 말하면, 우리나라 수학교육을 배우며 힘들어하고 있던 사람들이 이 교과서를 통해 수학에 대해 다시 생각해 보는 것이다. 또한 ‘수학’이라고만 하면 싫어하던 사람들이 조금이라도 더 쉽게 다가갈 수 있는 수학도 있음을 알게 되는 것이다. 공식을 외워 푸는 수학에서 벗어나 우리가 배워야 할 수학은 무엇인지 알아보기를 바라며 이 교과서를 집필하였다. 지금 우리가 교육받는 수학이 당연하지 않음을 깨닫고, 이 교과서를 통해 현재의 수학교육 과정을 새로운 관점으로 바라보길 바란다.

우리가 경험하고 있는 수학

우리나라 수학교육에는 문제점이 많지만, 우리나라 수학 교과서 장점은 생각하기, 활동하기, 오류 찾기 등 여러가지 요소들이 담겨져 있는 것이다. 교과서대로 하나씩 이해하고 넘어간다면 혼자서도 공부할 수 있을 것이다. 그렇다면 어디에서 수학교육의 문제점이 발생하는 것일까?

내가 경험한 수학과 수포자의 수학 경험을 되돌아보며 우리나라 수학교육의 문제가 시작되는 곳을 알아보려고 한다. 먼저 나는 수학을 좋아하는 학생이고, 수학 대안 교과서를 만드는 Living Math 수업을 들으면서 지금 우리나라 수학 교육 과정에 대해 알아보게 되었다. 우리나라 수학교육에 문제가 있다는 것은 알았지만 깊이 생각해본 적이 없어서 이 수업을 통해 여러 가지 문제가 있다는 것을 깨달았다. 내가 경험한 수학을 통해 느낀 문제점은 평가

방법의 문제이다. 내가 수학을 좋아하는 이유는 웬만한 유형들의 문제를 다 풀고 반복해서 잘하게 되어서이지 수학 깊은 곳에서 나오는 진정한 재미를 느끼지 못하고 있었다. 그런데도 수학을 좋아한다고 느꼈던 이유는 우리나라 수학교육 평가 방법에는 필요한 과정이기 때문이다. 그래서 내가 경험한 수학처럼 사교육이 있고 심화 학습을 해야지만 우리나라에서 높은 평가를 받을 수 있다. 현재 수학교육 평가는 과정을 중시하지 않는다. 요즘에는 과정 중심의 평가를 하려고 하지만 학생들의 수학적 사고력을 평가하기에는 부족한 평가 방식이다. 그렇기에 학생들은 사교육을 계속하게 되고, 잘못된 평가 방식을 따라가려다 보니 무작정 문제만 풀면서 수학의 진정한 재미를 느끼지 못한다. 이렇게 우리나라 수학 교육 평가 방법이 수포자를 더 만들어내고 있다고 생각한다. 우리가 평가에 따른 공부를 하지 않고, 진짜 수학 실력을 평가하기 위해서는 다른 평가 방법이 필요하다.

다음으로는 우리나라 수학교육의 피해자이기도 하며 수포자인 사람들의 수학을 나누어 보려고 한다. 보통 대부분의 사람들이 인식하고 있는 수학은 왜 배워야 하는지도 모르지만 무작정 문제만 푸는 수학, 공식을 외워서 푸는 수학이다. 수포자 인터뷰를 통해서도 많은 사람들이 '수학'하면 어려운 문제들을 생각하고 부정적으로 생각하게 된다는 것을 알게 되었다. 그리고 그들의 시선으로 우리나라 수학교육 문제점을 바라볼 수 있었다. 일단 나의 경험을 통해서도 느꼈듯이 수포자들 또한 평가 방법에 대한 문제점을 인식하고 있었다. 지금까지 경험한 수학교육의 문제점을 물어봤을 때 "다른 과목도 마찬가지지만 공식을 외우고, 풀고, 결과물을 가지고 평가하는 것"이라는 답변이 나왔다. 위에서 말했듯이 요즘에는 과정 중심의 평가를 한다고 하지만 아직 많이 부족하다. 심지어 한 수포자는 학교에서 열심히 배워봤자 학교에서 배우지 않은 시험 문제가 나오고, 배운 것이 문제에 나와 배운 것을 풀며 성취감을 느끼고 싶었다고 했다. 이런 상황 속에서 우리는 제대로 된 수학을 배울 수 있을까?

그리고 수포자 인터뷰를 통해 공교육에는 평가 방법뿐만 아니라 지도 방법의 문제도 있다는 것을 알게 되었다. 학원에 다니지 않은 수포자였는데 배움에 대한 부족함을 많이 느꼈다고 했다. 교과서에 나오고 그날 배우는 내용은 딱 1번까지 풀 수 있는 문제라면 2~10까지의 난이도를 가진 학습지를 숙제로 내주는 경우가 있었다고 한다. 이러한 지도 방법에 따라 공부하면 진도를 따라가지 못해 피해를 볼 수 있다. 한 학생의 이야기라고만 생각할 수도 있지만 많은 수포자들이 생기는 것을 보면 이런 문제도 우리나라 수학교육에 영향을 끼치고 있음을 알 수 있다. 또한 처음부터 잘 알려주며 잘하는 학생이

있어 바로바로 넘어갈 수 있어도 어려워하는 학생에 맞춰 걸리는 부분들을 하나하나 제대로 넘어갔었더라면 싫어하지 않았을 것 같다고 말했다. 교과서가 아무리 좋더라도 이렇게 잘못된 지도 방법에 따라가려고 하다 보면 실력이 뒤처져 수학을 어려워할 수밖에 없다. 물론 공교육은 일대일 교육이 아니기에 어려워하는 학생들을 일일이 다 맞춰줄 수는 없지만 이해하는 사람보다 어려워하는 학생들이 더 많다고 사교육을 통해 이해한다면 우리는 누구에게 맞추어야 할지 생각해 볼 필요가 있다.

다른 나라의 수학 교육과정

다른 나라에 비해 우리나라는 수포자들이 더 많아 그 이유를 알아보기 위해 한국, 미국, 핀란드의 여러 수학 교과서를 비교해 보았다. 내가 집필한 피타고라스 단원을 통해 예를 들어보면, 한국 교과서(저자: 김화경 외, 출판사: 좋은책신사고)는 피타고라스 증명을 유도하면서 단원의 문을 열었다. 그다음 피타고라스를 정의하고 직각삼각형의 조건을 설명해 주었다. 반면, 미국 교과서(저자: Allan G. Bluman, 출판사: McGraw-Hill)를 살펴본 봤을 때, 피타고라스를 먼저 정의하고, 피타고라스가 성립되면 직각삼각형, 직각삼각형이면 피타고라스가 성립됨을 단순 계산으로 반복했다. 이외의 여러 교과서를 비교해 봤을 때, 증명과 활용 문제도 거의 없고 대신 좌표평면을 통해서도 설명하는 내용이 담긴 교과서도 있었다. 미국은 주마다 교육과정이 다르지만, 우리나라에서 피타고라스를 한 단원으로 배울 때 대부분의 미국 수학 교육 과정에서는 1~2장 정도 활용과 증명 없이 정의와 단순 계산만 아주 간단히 다루고 있었다. 이를 통해, 우리나라에서는 다른 나라와 똑같은 중학생이어도 훨씬 더 깊은 내용을 배우고 있다는 것을 알 수 있다.

또한 우리가 수학을 포기하고 싫어하게 되는 이유 중에 증명, 수학의 양, 깊이가 있는데 한국 교과서에는 모든 내용이 다 들어가 있었다. 먼저 증명을 보면 피타고라스가 무엇인지 모르는 상황에서 굳이 학생들이 어려워하는 증명으로 시작할 필요가 있을까? 핀란드 교육과정(저자: Teuvo Laurinolli, 출판사: 솔빛길)에서는 처음부터 직각삼각형과 피타고라스를 연결하여 설명하고 증명은 아주 간단히 담겨 있었다. 다른 나라에 비해 우리나라 수학이 어렵다는 것은 알고 있었지만, 핀란드와 미국 중학교 수학 과정에서는 증명이 거의 나오지 않아 우리나라 수학이 정말 어려움을 다시 느끼게 되었다. 게다가, 분량도 많이 차이가 난다는 것을 알 수 있었다. 우리나라는 피타고라스 정리만 한 단원으로 빼 피타고라스의 활용, 평면도형에서의 피타고라스 정리, 심지

어 입체도형까지도 배운다. 하지만 거의 피타고라스의 정의 정도만 배운다고 할 수 있을 정도로 간단히 나오는 미국 수학교육과정을 보면서 우리나라 수학교육의 문제에 양과 깊이도 큰 영향을 끼친다는 것을 느꼈다.

여기서 드는 의문이 있다면 다른 나라 학생들은 피타고라스의 정의만 배우고 심화는 더 배우지 않는 것인가이다. 다른 나라들의 수학교육 과정에서 피타고라스의 정의만 나오고 끝난다면 문제가 된다. 하지만 앞서 말한 피타고라스 정리 기초 과정은 중등 과정이며, 고등과정에서 다시 추가로 더 배우며 중학교 때 배운 피타고라스 정리를 다시 상기시킬 수 있다. 모두 아시다시피 우리나라 수학교육과정에는 복습이 별로 없다. 피타고라스 정리 단원뿐만 아니라 하나의 단원과 내용은 한 번만 배우고 넘어간다. 이런 경우 생기는 문제가 있다. 위의 평가 방법의 문제에서 말했듯 우리가 이해했는지 평가하기보다 문제를 푸는가를 보기 때문에 한 번 공식을 외워서 풀고 넘어가는 경우가 있다. 하지만 시험 문제에서는 모든 범위의 내용을 알고 있어야 한다. 그렇기 때문에 미국 교과서처럼 시기를 나누어 반복할 수 있는 점도 중요하다. 우리나라 수학교육 과정에서도 반복 학습을 생각해 볼 필요가 있다.
정리하자면 우리나라 수학 교과서는 혼자서도 공부할 수 있을 정도로 모든 내용이 잘 담겨 있는 장점이 있지만, 답이 정해져 있어 학생들이 생각해볼 시간이 없다. 그렇기 때문에 추론 능력을 키울 수 없고, 복습과 배우는 범위 측면에서도 부정적으로 바라볼 수 있다. 수학 교과서가 어떻게 이루어져 있든 제대로 된 지도에 따라 달라질 수 있다는 뜻이다. 이렇게 여러 가지 문제점들이 있고 더 큰 문제로 이어지고 있는데 이런 수학교육을 그냥 받아들이는 것이 과연 옳을까? 라는 의문이 든다.

새롭게 알게된 수학

지금까지 수학교육의 여러 문제점에 대해 알아봤다면 이번에는 우리가 지금까지 놓치고 있던 수학에 대해 알아보려고 한다. 먼저 나는 5차원 수학(저자: 원동연, 임소영 / 출판사: 김영사)이라는 책을 통해 내가 놓치고 있던 수학의 의미에 대해 다시 생각해 볼 수 있었다. 이 책에서는 수학이 무엇인가에 대해 '수학은 언어이다'라고 표현한다. 처음 이 문장을 봤을 때 나는 완전히 수학을 좋아하는 이과로서 수학을 언어라고 표현하니 더 거리감이 느껴지기도 했다. 하지만 여기서 수학을 왜 언어라고 표현하는지를 알게 되어 이해할 수 있었다. 수학은 외우는 공식이 아니다. 대부분의 사람도 수학은 공식을 외워서 푸는 것이 아님을 알지만, 공식을 외워서 푸는 것이 더 편하기에 공식을

외우는 경우가 많다. 하지만 언어를 익히듯 수학적 언어의 의미를 알면 이해하게 되는 것이다. 아직 수학적 언어를 이해하기 어려울 수 있는데 추가로 설명하면 수학에는 서술적 언어, 그림-도표의 언어, 수학적 언어가 있다. 이 수학적 언어들이 의미하는 바가 무엇인지, 어떻게 연결되고 있는지만 알면 수학은 쉬워진다. 예를 들어, 원점에서 거리가 1인 점의 모임은 서술적 언어이다. 그림-도표의 언어로 표현하면 동그란 원을 그리면 된다. 수학적 언어로는 $x^2 + y^2 = 1$이라고 할 수 있다. 이렇게 수학을 언어로 생각하며 표현할 수 있고, 수학에서의 사고 과정은 어떤 언어를 다른 종류의 언어로 바꾸는 것이라고 할 수 있다. 수학이 어려운 이유는 수학적 언어가 매우 추상적이고 함축적이기 때문인데 다른 언어들을 통해 수학에 더 쉽게 다가갈 수 있다. 또한 수학적 언어를 다르게 표현할 수 있다는 것을 알면 굳이 많은 문제를 푸는 것에만 애쓰지 않아도 된다는 생각이 든다.

다음은 수포자 신분 세탁 프로젝트 책(저자: 임흥덕 / 출판사: 사교육걱정없는세상)을 통해 느낀 것을 나누어 보려고 한다. 우리는 수학 교육을 하는 과정에서 학생뿐만 아니라 부모도 조급함과 걱정을 갖는다. 우리는 아이들의 불안을 쉽게 볼 수 있다. 수학 문제를 틀릴까 봐 두려워하고, 발표를 두려워하고, 수학 문제 아래 여백을 두어 아이들의 생각을 마음껏 쓰라고 해도 어려움을 겪는다. 사실 아이들의 불안은 부모의 불안에서 나오고 있다. 아이들에게 틀려도 괜찮은 나이임을 알려줘야 하지만 부모도 불안해하는 상황에 있다는 것을 기억해야 한다. 또한 이 책에서는 아이들의 조급함이 아는 것과 이해하는 것의 차이에서 나온다고 말하고 있다. 이해한다는 것은 자신이 직접 설명할 수 있어야 하지만 아이들은 이 기초적인 앎을 가지고 잘 알고 있다고 오해하고, 부모님들은 결과만 보면서 비교한다. 나도 이해하지 못한 것을 안다고 생각하며 넘긴 적이 많다. 심지어 배움이 느린 아이들뿐만 아니라 상위권 아이들과 부모도 더 높을 곳만을 보며 불안해한다. 대체 누구를 기준으로 한 비교와 불안일까? 이런 상황 속에서도 우리는 계속해서 수학 교육을 하고 있다. 나 또한 불안을 많이 느끼면서 교육 방식에 문제가 있음을 느꼈다. 이렇게 모두가 불안해하는 수학교육이 과연 맞는 방식일까? 앞으로의 교육을 위해 지금의 교육과정을 꼭 생각해봐야 한다.

이 교과서의 구성과 특징

이 교과서에 관해 설명하기 전 내가 바라는 앞으로의 수학 교육을 나누고자 한다. 나는 앞으로 수학교육이 모두가 쉽게 다가갈 수 있도록 이끌어주

는 교육이 되기를 바란다. 그렇기 위해서는 위에서 말한 문제점들을 바탕으로 3가지의 변화가 꼭 이루어져야 한다고 생각한다. 먼저 수학 지도 방법, 평가 방법의 개편이 필요하다. 수학을 지도하고 평가할 때 제대로 된 수학을 지도하고 그 수학 실력을 평가할 수 있어야 한다. 여기서 내가 생각하는 우리가 배워야 할 수학은 공식을 외워서 푸는 수학이 아니라 개념 원리를 가지고 자기 생각을 펼치는 수학이다. 이런 수학을 교사들이 제대로 가르치고, 학생들이 학습 내용을 따라가지 못할 때 바로 붙잡아 주는 것이 수학교육에서 좋은 방법이라고 생각한다. 다음은 수학교육과정의 범위, 즉 양과 깊이를 개선할 필요가 있다. 우리가 지금 배우고 있는 모든 수학이 정말 모두에게 필요한 것일지 생각해봐야 한다. 수학이 아닌 다른 영역에 재능을 가지고 있고, 수학을 학습할 필요가 없는 영역으로의 진로를 가지고 있다면 굳이 우리 모두 이 정도의 깊이를 알지 않아도 된다. 심지어 지금으로서는 외워서 푸는 수학을 통해 문제를 해결하고 있는데 이렇게 되면 어차피 까먹기 때문에 수학 교육과정 내용을 줄이는 것 또한 조금 더 나은 수학교육을 만드는 하나의 방법이 될 수 있음을 기억해야 한다. 마지막으로는 반복 학습이 있는 수학 교육이 되기를 바란다. 개인적으로 추가 공부를 할 때뿐만 아니라 교육과정 자체가 반복 학습을 할 수밖에 없도록 설계되어야 할 필요가 있다. 앞서 미국 교과서와의 비교를 통해서도 알 수 있었듯이 처음에는 쉽게 접해 마음의 문을 열고 나중에 더 심화 과정을 배우는 것이다. 반복적인 배움을 통해 더 오래 기억할 수 있고 처음에는 원리만 배워 그 기본 개념에 더 집중할 수 있다고 생각한다.

이러한 수학교육을 바라며 이 교과서를 집필하였는데 내가 만든 교과서를 간단히 설명하면 이 교과서는 기본에 충실하였고 학생들의 생각을 넓힐 수 있는 교과서이다. 심화, 증명보다는 기본 원리에 집중하여 학생들이 쉽게 다가갈 수 있도록 하였다. 또한 처음 조금의 흥미와 호기심도 놓치지 않도록 다양한 요소를 넣는 것을 중요하게 생각했고 수학을 통해 자신감을 잃는 일이 생기지 않도록 신경을 기울였다. 이 단원의 구성과 특징은 3가지로 나누어서 볼 수 있다. 첫 단계는 개념을 가지고 간단한 반복 연습이다. 이 단원은 피타고라스 정리이기 때문에 피타고라스의 정의와 단순 계산을 통해 피타고라스가 무엇인지 이해하도록 도울 것이다. 2단계는 자신만의 분석과 추론을 가질 수 있도록 구성하였다. 자신의 풀이 과정을 마음껏 쓸 수 있도록 빈 공간을 만들었다. 이 공간을 잘 활용해 생각하는 수학을 느껴보았으면 좋겠다. 마지막 단계는 실생활에서 적용되는 예시를 통해 문제를 만들었다. 너무 어려운 심화 문제들보다는 실생활 이야기를 통해 흥미를 갖고 내용을 정리할 수 있

도록 구성하였다.

마지막으로..

수학은 세상을 이해할 수 있도록 도와주는 하나의 언어이다. 지금까지 생각해오던 수학에서 벗어나 새로운 마음으로 수학을 받아들이고 이 교과서를 시작할 수 있기를 바란다. 또 수학을 공부하는 과정에서는 용기와 끈기가 꼭 필요함을 기억하며 이 교과서를 풀어나갔으면 좋겠다. 이 글과 교과서를 통해 우리가 배워야 할 수학이 무엇인지 생각해보는 시간이 되고 수학에 한 발 더 가까이 다가가게 되는 계기가 되기를 바란다.

이 책을 사용하는 학생들에게

공식을 외우는 것에 익숙해져 암산으로 빨리빨리 풀려고만 하지 말고 한 층 더 생각해보기를 바랍니다. 무엇을 깊이 생각해봐야 할지 모르겠다면 기본 개념이 성립하는 이유를 자신만의 방법으로 생각해 보는 것입니다. 더 나아가, 자신의 생각을 나눔으로써 수학적 사고력을 더 키울 수 있습니다. 또한 문제를 틀렸다고 해서 포기하지 말고 끝까지 도전해보는 끈기를 가졌으면 합니다. 틀린 문제를 계속 붙잡기가 어려울 수도 있지만 수학 문제를 풀기 위해서는 끈기가 정말 중요합니다. 특히 이 교과서에서는 정해진 풀이 과정이 있는 것이 아니기에 자신이 이해할 때까지 포기하지 않고 도전해 보기를 바랍니다.

피타고라스

고대 그리스의 철학자이자 수학자.
세상 모든 것의 시작을 **'수'**로 보았으며, 학문을 연구하는 단체이자 종교 단체 성격을 가진 철학공동체, **피타고라스 학파**를 만들어 활동하였습니다.
수학뿐만 아니라 철학, 자연과학 등을 연구하여 황금비, 지구의 모양과 공전, 자전 발견하였고 많은 업적을 가지고 있습니다.

피타고라스 정리는 피타고라스가 처음 만든 것이 아니다?!

여러분, 피타고라스 정리는 누가 만들었을까요?

피타고라스 정리니까.. 피타고라스요!!

피타고라스 정리를 만들었다는건 보통 증명했다는 것을 의미할텐데, **사실 피타고라스가 처음 증명한 것은 아니에요.** 피타고라스 정리에 대한 기록을 살펴보면 '발견했다'고 되어 있어요. 이건 '최초로 증명했다'는 뜻으로 보기 어려워요. 또한 피타고라스 이전의 고대 바빌로니아와 이집트 사람들도 피타고라스의 정리를 알고 사용했다는 기록이 남아 있어요.

그럼 왜 피타고라스 정리인가요?

피타고라스 학파가 식의 형태로 완성하고 그 증명을 기록으로 남긴 최초의 학파이기 때문이에요!

피타고라스 정리

01 피타고라스 정리

들어가기
읽어보기
- 고대시대의 피타고라스 정리

돌아보기
복습하기
- 삼각형의 결정조건
- 직각삼각형

알아가기
개념알기
- 피타고라스 정리란?

활동하기
- 정사각형의 넓이 계산하여 확인하기
- 잘라 붙여 확인하기

고민해보기
- 직각삼각형이 아닌 경우

이해하기
반복학습
- 직각삼각형인지 확인하기
- 피타고라스의 세 수 구하기

추론학습
- 추론문제

활용하기
응용문제
- 피타고라스 정리를 활용한 응용문제

수학 역량 플러스
피타고라스 정리 증명방법
원에서의 피타고라스 정리

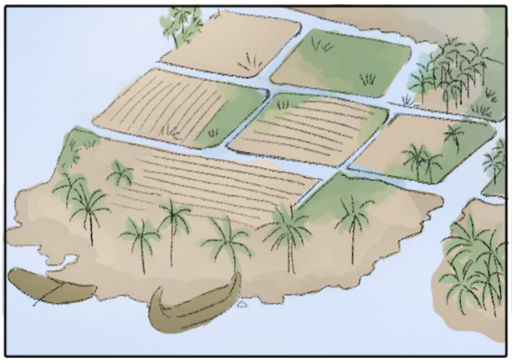
01 피타고라스 정리

• 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.

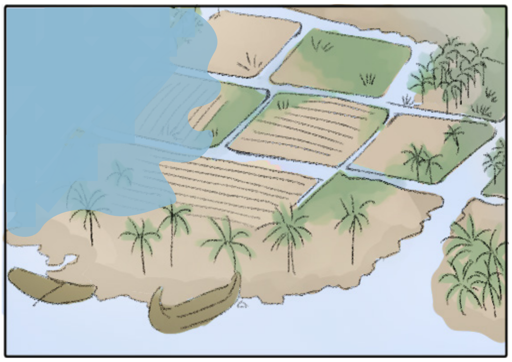
들어가기

읽어보기

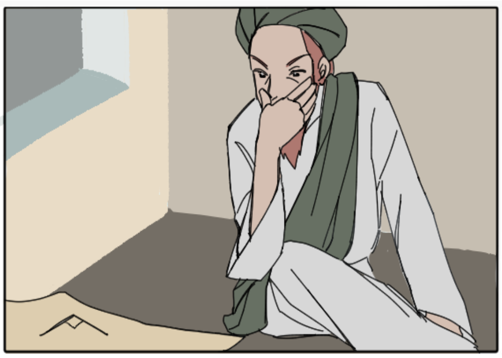
고대 시대의 피타고라스 정리



고대 시대 이집트 사람들은 나일강 유역에 자리를 잡고 살았습니다.



당시 나일강은 매년 우기때마다 넘쳐 흘렀고, 그로 인해 토지 경계선이 없어지는 경우가 발생했습니다.



그렇기 때문에, 지도자들은 토지의 공정한 재분배를 위해 직각을 찾으려고 고민했습니다.

그러던 중, 밧줄에 같은 간격의 매듭 12개를 만들어 직각을 찾는 방법을 발견했습니다.

이렇게 고대 이집트 사람들은 밧줄에 같은 간격의 매듭 12개를 만들어 직각을 찾는 방법을 알아냈습니다. 어떻게 이번 단원에서는 피타고라스 정리를 배우며 12개의 똑같은 밧줄로 직각삼각형을 만드는 방법을 알아봅시다.

돌아보기

복습하기

삼각형의 결정조건

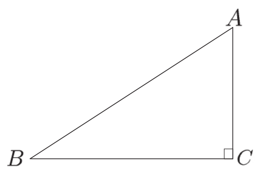
1. 다음에 주어진 길이의 세 선분으로 삼각형을 만들 수 있는 것을 모두 찾아보세요. (자와 컴퍼스를 활용하여 옆 공간에 직접 그려보면서 찾아보고, 친구들과 삼각형의 결정조건에 대해 얘기해봅시다.)

1) 1cm, 1cm, 2cm　　2) 1cm, 2cm, 2cm　　3) 2cm, 3cm, 4cm

직각삼각형

2. 아래 직각삼각형 ABC에서 다음에 해당하는 변을 쓰세요.

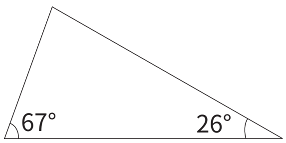
1) 밑변과 높이
2) 빗변



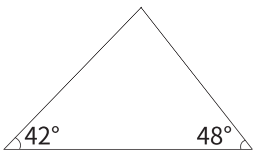
직각삼각형

3. 다음 삼각형이 직각삼각형인지 알아보세요.

1)



2)



알 아 보 기

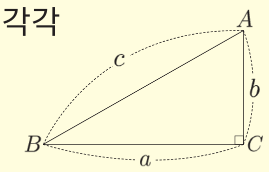
개념알기

피타고라스 정리란?

피타고라스 정리

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라고 하면

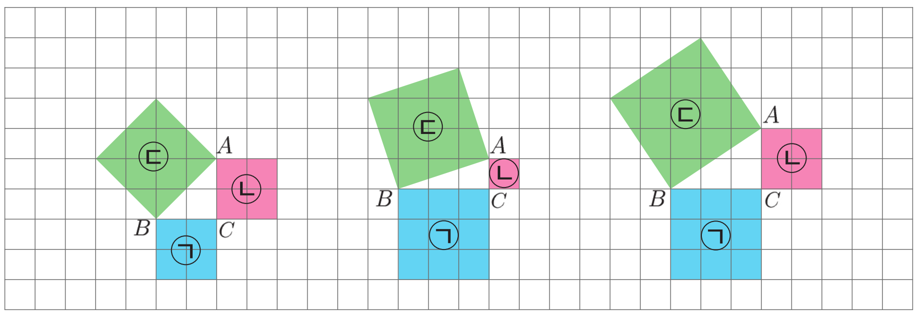
$$a^2 + b^2 = c^2$$



활동하기

정사각형의 넓이 계산하여 확인하기

활동1 다음은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이에 $\angle C$=90°인 직각삼각형 ABC와 그 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 ㉠, ㉡, ㉢를 그린 것입니다.



[그림1] [그림2] [그림3]

정사각형 ㉠, ㉡, ㉢의 넓이를 각각 구하여 다음 표를 완성해 보고, 세 정사각형 ㉠, ㉡, ㉢의 넓이 사이의 관계를 비교하며 피타고라스 정리가 성립되는 것을 확인해 보세요.

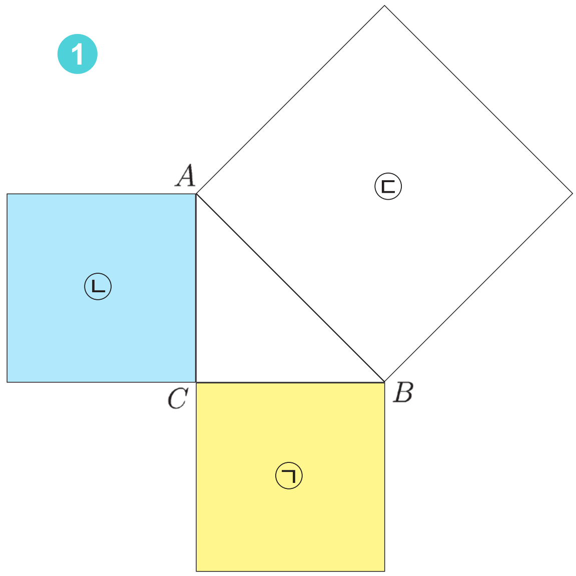
	[그림1]	[그림2]	[그림3]
㉠의 넓이			
㉡의 넓이			
㉢의 넓이			

잘라 붙여 확인하기

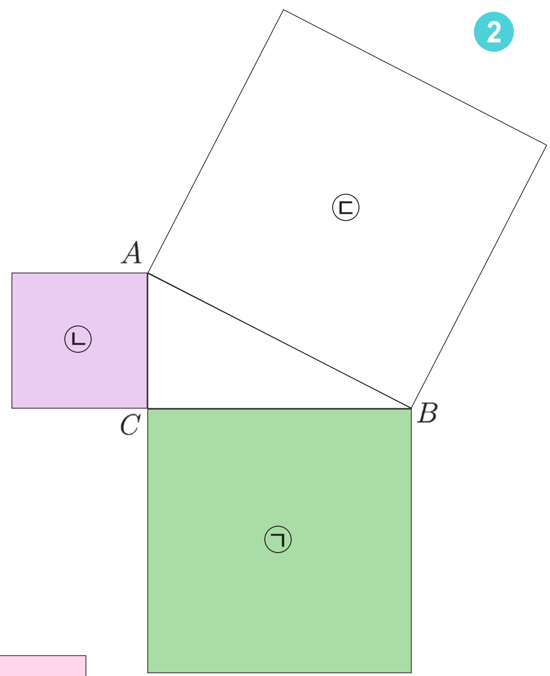
활동2 다음은 직각삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것입니다. 부록의 정사각형을 직접 잘라 ㉢위에 붙여 피타고라스 정리가 성립되는 것을 확인해 보세요.

부록 27p

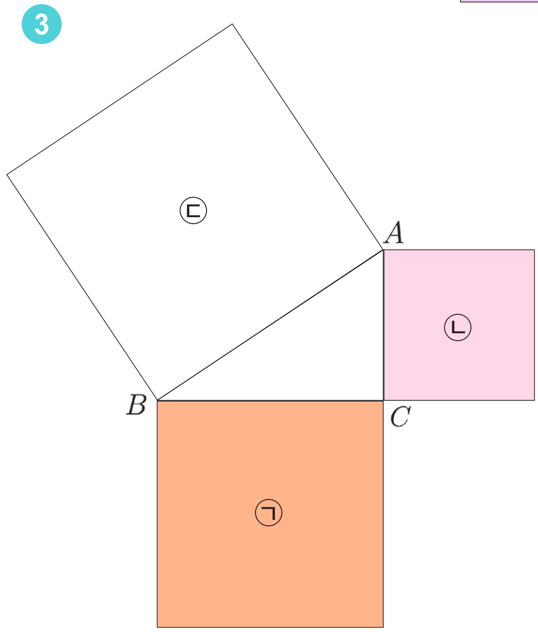
1



2



3



위의 2가지 활동을 통해

___의 넓이 + ㉡의 넓이 = ___의 넓이 임을 알 수 있었습니다.

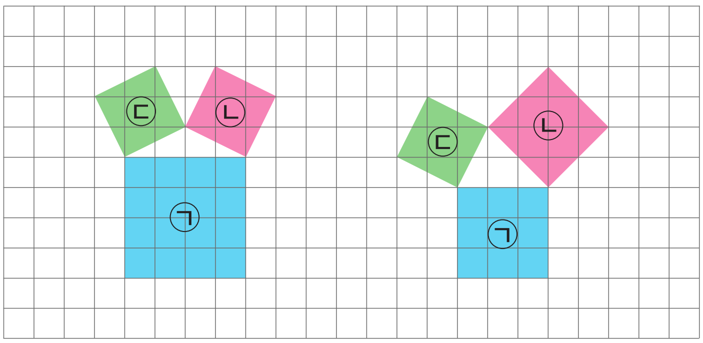
㉠의 넓이 = $\overline{BC}^2$
㉡의 넓이 = ____
㉢의 넓이 = $\overline{AB}^2$

$\overline{BC}^2$ + ____ = $\overline{AB}^2$

따라서 '직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다'는 피타고라스 정리가 성립하는 경우가 있음 확인했습니다. (모든 직각삼각형에서 피타고라스 정리가 성립함을 증명하는 것은 수학 역량 플러스에서 알아보세요.)

고민해보기 - 직각삼각형이 아닌 경우

위에서 발견한 삼각형의 변에 그려진 정사각형 넓이 사이의 관계가 모든 삼각형에 대해서도 성립할 수 있는지 생각해보고, 아래 그림을 통해 알게된 점을 적어보세요.



알게된 점

이 해 하 기

반복학습

직각삼각형인지 확인하기

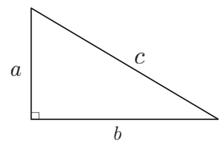
유형1 피타고라스 정리가 무엇인지 알게되었다면, 반복학습을 통해 피타고라스 정리에 익숙해져 봅시다. 다음 표를 완성해 보세요.

	a	b	c	$a^2+b^2=c^2$가 성립하나요?	직각삼각형을 만들 수 있나요?
1.	1	3	4		
2.	3	4	5		
3.	3	4	7		
4.	4	6	9		

5.	5	12	13		
6.	6	8	14		
7.	7	13	16		
8.	7	24	25		
9.	8	14	17		
10.	8	20	22		
11.	10	13	15		
12.	13	20	27		

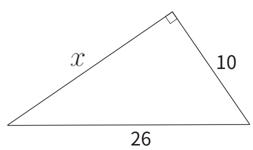
피타고라스의 세 수 구하기

유형2 피타고라스 정리를 이용하여 다음 빈칸을 채워보세요.

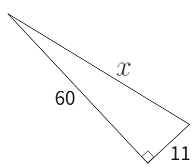


	a	b	c
1.	5	12	
2.	7	24	
3.	9	40	
4.	15	20	
5.	6		10
6.	8		17
7.		4	5
8.		12	15

9. x를 구하세요.

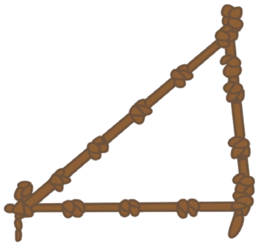


10. x를 구하세요.

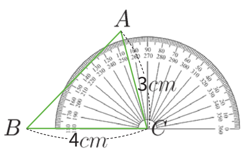


추론학습

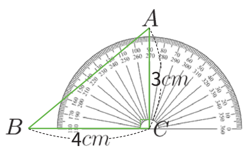
문제1 고대 이집트 사람들은 아래 그림과 같이 밧줄에 같은 간격의 매듭 12개를 만든 후 팽팽하게 잡아당겨 직각삼각형 모양을 만들었다고 합니다. 이은 밧줄의 개수를 30개로 바꾸어 다른 직각삼각형 모양을 만드는 방법을 설명해보세요.



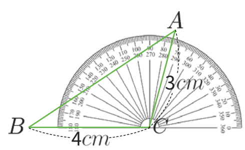
문제2 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$= 3cm,$\overline{BC}$ = 4cm 입니다.



[그림1]



[그림2]



[그림3]

(1) [그림2]에서 직각을 낀 두 변 사이의 각의 크기를 변화시킬 때, [그림1]과 [그림3]에서 $\overline{AB}$의 길이는 어떻게 변화하는지 위의 그림을 이용해 설명해 보세요.

(2) (1)의 활동을 통해 알 수 있는 삼각형의 종류에 따른 변의 길이의 관계를 등호와 부등호를 이용한 식으로 나타내 보세요.

1) 예각삼각형	
2) 직각삼각형	
3) 둔각삼각형	

(3) 세 변의 길이가 다음과 같이 주어진 삼각형이 어떤 삼각형인지 확인하고 그 이유를 써보세요.

1) (6, 8, 10)

2) (5, 6, 10)

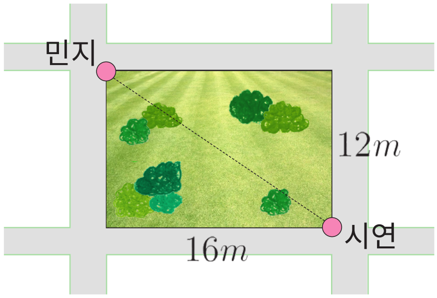
3) (4, 4, 4)

4) (1, 2, 2)

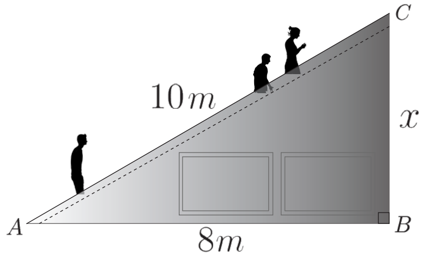
응용문제

피타고라스 정리를 활용하여 응용문제, 실생활 문제를 풀어봅시다. 모든 문제를 풀 때 풀이과정을 적으면서 피타고라스 정리의 다양한 유형 문제를 자신의 것으로 만들어보세요.

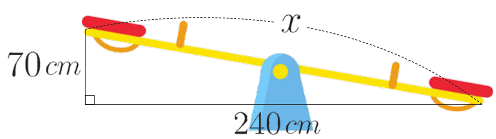
1. 시연이가 민지에게 걸어갈 때, 공원을 가로질러 걸어가면 인도를 따라 걷는 것에 비해 얼마나 짧은지 구해보세요.



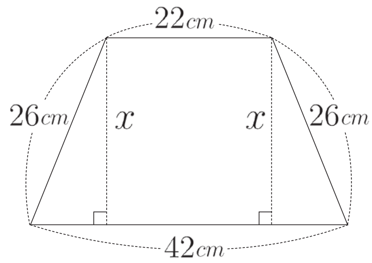
2. 오른쪽 그림과 같은 지하철역 에스컬레이터의 높이를 계산하세요.



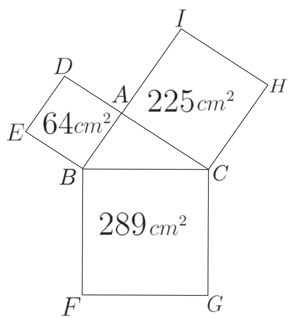
3. 다음 시소의 길이 x를 계산하세요.



4. 다음 등변사다리꼴의 높이 x를 구하세요.

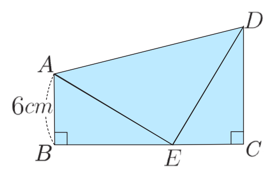


5. 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 세 변을 각각 한 변으로 하고 넓이가 각각 $64\ cm^2$, $225\ cm^2$, $289\ cm^2$ 인 세 정사각형이 있습니다. 이때 삼각형 ABC의 넓이를 구하세요.

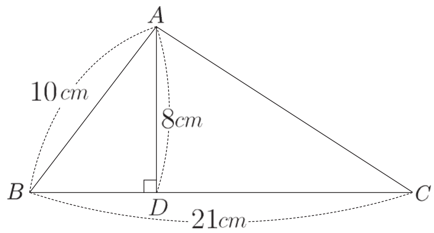


6. 오른쪽 그림에서 $\triangle ABE \equiv \triangle ECD$이고 세 점 B, E, C는 한 직선 위에 있다. $\overline{AB} = 6cm$ 이고, 삼각형 AED의 넓이는 $50\ cm$ 일 때, 다음에 답하세요.

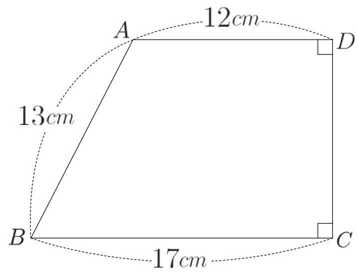
(1) $\overline{AE}$ 의 길이를 구하세요.
(2) $\overline{BE}$ 의 길이를 구하세요.
(3) 사다리꼴 $ABCD$ 의 넓이를 구하세요.



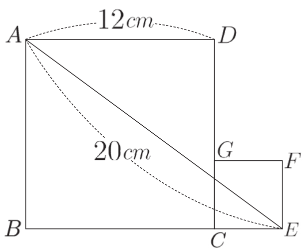
7. 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하세요.



8. 오른쪽 그림과 같은 사다리꼴 $ABCD$ 의 둘레의 길이를 구하세요.



9. 다음 그림에서 $\square ABCD$ 와 $\square CEFG$ 는 정사각형이다. $\overline{AD}=12\,cm$, $\overline{AE}=20\,cm$ 일 때, $\square CEFG$의 둘레의 길이를 구하세요.



수학 역량 플러스

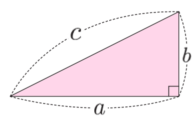
피타고라스 정리 증명방법 (1)

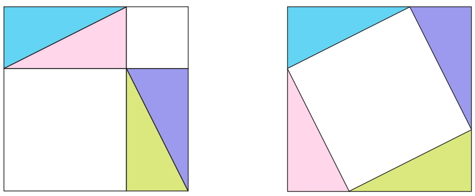
피타고라스 정리를 설명하는 방법은 피타고라스의 방법, 바스카라의 방법, 유클리드의 방법 등 360여 개가 넘는다고 합니다. 여러가지 피타고라스 증명 방법을 알아보세요.

피타고라스의 방법

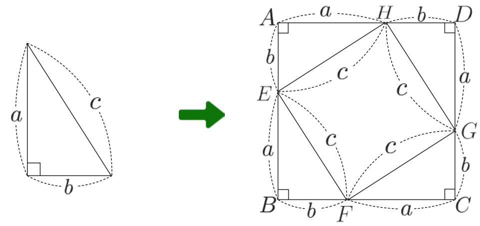
1 추론하기

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서 세 변의 길이를 $a, b,$ c 라고 합니다. 아래 두 정사각형의 그림을 이용하여 피타고라스 정리를 설명해 보세요. (단, 그림에 있는 모든 직각삼각형은 합동입니다.)





2 증명 방법



정사각형 $ABCD$의 넓이
= ($\triangle AHE$+$\triangle DGH$+$\triangle BEF$+$\triangle CFG$의 넓이) + 정사각형 $EFGH$넓이

$$(a+b)^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2$$

$$\rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

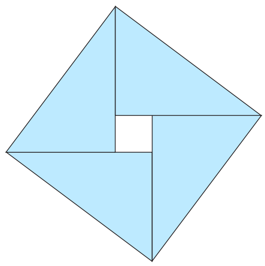
수학 역량 플러스

피타고라스 정리 증명방법 (2)

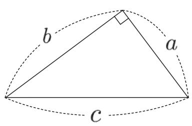
바스카라의 방법

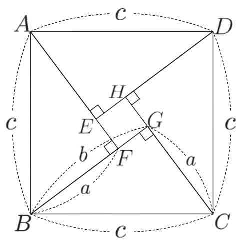
1 추론하기

아래 도형은 직각을 낀 두 변의 길이가 $6cm$, $8\ cm$ 인 직각삼각형 4 개로 만든 것입니다 . 이 직각삼각형의 빗변의 길이를 구할 때 , 피타고라스 정리를 이용할 수 있습니다 . 아래 그림을 이용하여 직각삼각형의 빗변의 길이가 $10\ cm$ 임을 설명해 보세요 .



2 증명 방법





정사각형 $ABCD$의 넓이
= ($\triangle ABF$ + $\triangle BCG$ + $\triangle CDH$ + $\triangle DAE$ 의 넓이) + 정사각형 $EFGH$넓이

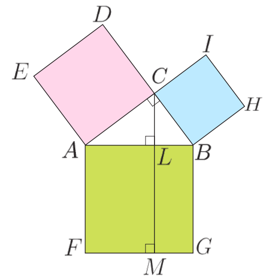
$$\begin{aligned} c^2 &= 4 \times \frac{1}{2}ab + (a-b)^2 \\ &= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

수학 역량 플러스

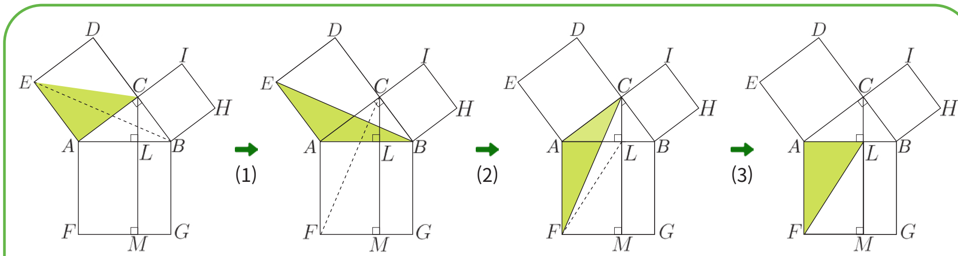
피타고라스 정리 증명방법 (3)

유클리드의 방법

1 증명 방법



오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC 의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 $ACDE$,$BHIC$,$AFGB$ 를 만들면
$\square ACDE=\square AFML$, $\square BHIC=\square LMGB$
이다. 다음 설명을 통해 알아보면

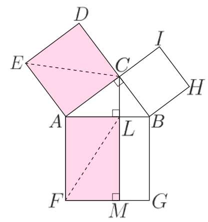


(1) $\overline{EA}/\!/\overline{CB}$이므로
$\triangle ACE=\triangle ABE$

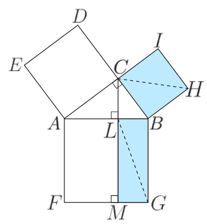
(2) $\triangle ABE\equiv\triangle AFC$
(SAS합동)이므로
$\triangle ABE=\triangle AFC$

(3) $\overline{AF}/\!/\overline{CL}$이므로
$\triangle AFC=\triangle AFL$

(1)~(3)에 의해 $\triangle ACE=\triangle ABE=\triangle AFC=\triangle AFL$
즉, $\triangle ACE=\triangle AFL$ 이므로
$\square ACDE=2\triangle ACE=2\triangle AFL$
$=\square AFML$



같은 방법으로 $\triangle BHC=\triangle BHA=\triangle BCG=\triangle BLG$
즉, $\triangle BHC=\triangle BLG$ 이므로
$\square BHIC=2\triangle BHC=2\triangle BLG$
$=\square LMGB$



따라서 $\square ACDE=\square AFML$, $\square BHIC=\square LMGB$ 이므로
$\square ACDE+\square BHIC=\square AFML+\square LMGB$
$=\square AFGB$

➡ $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$

수학 역량 플러스

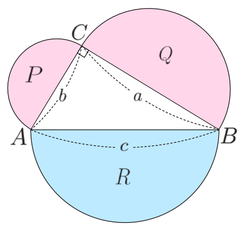
원에서의 피타고라스 정리

직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 그렸을 때, 가장 큰 정사각형의 넓이는 나머지 두 정사각형의 넓이의 합과 같음을 확인하였다. 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 세 변을 각각 지름으로 하는 반원을 그렸을 때에도 가장 큰 반원의 넓이가 나머지 두 반원의 넓이의 합과 같은지 확인해보세요.

원에서의 피타고라스 정리

1 추론하기

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변을 각각 지름으로 하는 한 반원을 그리고 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라고 합니다. 세 반원을 각각 P, Q, R이라 할 때, 그 넓이를 구해보세요.



(P 의 넓이) = $\frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{8}b^2\pi$

(Q 의 넓이) = ______________

(R 의 넓이) = ______________

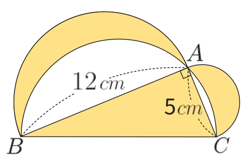
이때 (P 의 넓이) + (Q 의 넓이) = ____________ 이고, 직각삼각형 ABC 에서 피타고라스 정리에 의하여 $a^2+b^2=c^2$이므로 다음이 성립한다.

$$(P \text{ 의 넓이}) + (Q \text{ 의 넓이}) = (R \text{ 의 넓이})$$

---

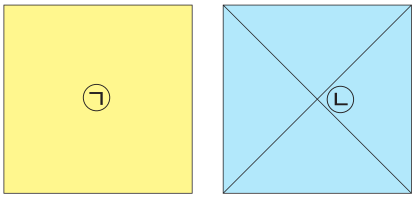
2 응용문제

오른쪽 그림과 같이 $\angle A$ = $90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 세 변을 각각 지름으로 하는 세 반원을 그린 것입니다. 색칠한 부분의 넓이를 구해보세요.

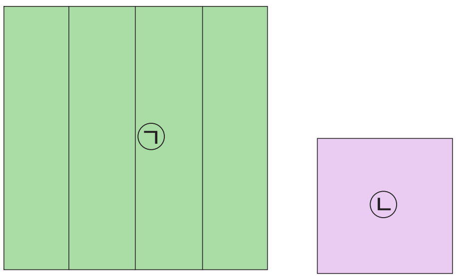


<부록> 알아보기 _ 활동2 ▶ 15쪽

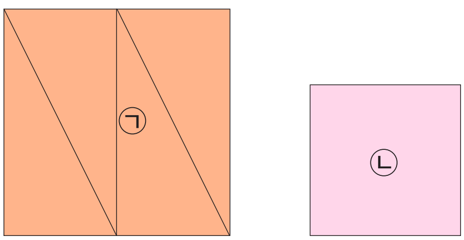
1



2



3



memo

Living Math(Maths)
초판 1쇄 발행 2023년 1월 10일

펴낸이 | 박예솔
지도교사 | 최익준

표지디자인 | 박예솔
삽화 | 박신비
펴낸곳 | 드리미학교

주소 | 충남 천안시 동남구 병천면 봉항로 89
이메일 | dreamy@dreamyedu.net
홈페이지 | dreamyedu.net