MATHS

LIVING MATH

교과서를 쓰기 전에

교과서를 집필하기 전에, 먼저 글을 하나 적고자 합니다. 이 교과서를 왜 집필하는지, 어떤 의도로 어떤 가치를 담고자 했는지를 이야기하려 합니다. 질문을 하나 하겠습니다. 대한민국의 수학 교육에 문제가 있다고 생각하십니까? 필자는 대한민국의 수학 교육을 받고도 수학을 좋아하고 꽤 잘하는 편입니다. 이런 사람들이 많다면 대한민국의 수학 교육에는 문제가 없겠죠. 하지만 대한민국에는 수학 포기자, 일명 '수포자'라 이름 불리는 사람들이 참 많습니다. 이 '수포자'라는 단어도 대한민국에 밖에 없죠. 의문이 들기 시작했습니다. 왜 수포자가 있는 건지, 그들은 왜 수학을 포기하고, 다시 수학을 하려는 시도조차 하지 않는지, 이들이 수학을 포기할 수밖에 없는 이유가 있었던 것은 아니었는지, 대한민국 수학 교육에 문제가 있는 것은 아닌지. 그래서 대한민국의 수학의 교육과정을 찾아보기 시작했습니다. 수학 교육은 교육과정으로부터 시작하니까요.

수학 교육과정은 가장 최소한을, 가장 기본만을 이야기하고 있었고, 가장 기본적인 것만을 가르치도록 구성되어 있었습니다. 교육과정대로만 가르친다면 수포자들이 이렇게 많지 않았을 것이라고 생각했습니다. 오히려 수학을 좋아하고 수학에 흥미를 가지는 학생들이 더 많아졌을지도 모릅니다. 누군가는 수학을 포기해야 한다면 필수로 배워야 하는 필수교과과정이 아니었겠죠. 수학은 포기할 수밖에 없는 것이 아닙니다. 수학은 누구나 할 수 있습니다. 모두가 잘할 수는 없더라도 포기할 만한 것은 아니라는 것입니다. 그렇다면 무엇이 문제였을까요. 무엇이 그들을 포기하게 만든 것일까요.

교과서를 집필하기 전, '수포자 신분 세탁 프로젝트'라는 책을 읽었습니다.

이 책을 읽으며 한국 수학 교육의 문제점을 발견할 수 있었습니다. 가장 먼저 발견한 문제점은 대한민국의 수학은 복습이 없으며, 너무 방대한 양을 다루고 있다는 것이었습니다. 교육과정에서는 복습을 보장해 주지 않았습니다. 복습은 학생 스스로 해야 하는, 학생에게 맡겨진 일이었던 것입니다. 결국 복습을 스스로 할 수 있는 학생은 수학을 놓치지 않고 계속하며 흥미를 잃지 않을 수 있었던 것이었고, 복습을 스스로 할 수 없는 학생은 수학을 포기하게 되는 것이었죠. 그리고 중학교 3년 동안 매우 방대한 양을 배우기 때문에 한 가지 주제를 다루는 시간이 너무나 짧았습니다. 개념을 이해하고 넘어가기까지의 시간이 충분하지 않은 것입니다. 이해해야 생각할 수 있고, 생각하며 곱씹어 봐야 수학을 발견하고, 비로소 수학이 재밌어지는 것인데 말이죠. 너무나 방대한 양으로 진도를 나가는 것에 급급한 현 상황은, 학생들이 수학을 포기하기에 아주 적절한 상황이 되어 주었습니다. 해야 할 양은 많고, 시간은 매우 한정적이기 때문에 개념을 이해하지 못하고 공식을 암기할 수밖에 없고, 교사도 그렇게 가르칠 수밖에 없으니 학생들은 수학을 포기하게 됩니다. 그들에게는 수학이 이해되지 않았기에 수학이 매우 억지스럽다고 느껴진 것입니다. 수학을 통해 진정으로 배워야 할 것을 가르쳐주지 못하고 배우지도 못하는 것이죠. 그렇게 수학에 대한 오해를 하게 됩니다. 비록 교과과정은 개념을 제대로 설명하고, 이해할 수 있도록 구성되어 있다고 할지라도 한 가지 주제를 다룰 수 있는 시간 자체가 매우 부족하기 때문에 교육의 현장에서는 공식을 암기하게 하는 방법밖에 없는 것입니다. 수학을 통해 진정으로 배워야 하는 건, 공식을 암기해 문제풀이 실력만 향상시키는 것이 아니라 수학적으로 어떻게 사고해야 하는지를 아는 것입니다.

수학은 무턱대고 암기해야 하는 그런 억지스러운 학문이 아닙니다. 수학은 매우 논리적인 학문이기 때문에 문제를 이해하고, 주어진 문제의 조건에서 문제를 해결하여 답을 찾을 수 있습니다. 수학적 사고력은 일상생활 속에서 문제를 이해하고, 분석하고, 논리적으로 문제를 해결해 가는 능력을 말합니

다. ‘수포자 신분 세탁 프로젝트’ 책의 5장에 보면 ‘입시 수학’과 ‘진짜 수학’을 비교하여 설명하는 부분이 나옵니다. *‘입시 수학은 단편적인 개념을 이용해 예상문제, 적중문제를 푸는 것에만 관심이 있다. 연결하는 힘을 테스트하여 학생을 선발하는 데만 초점이 맞춰져 있다. 진짜 수학은 하나의 개념을 이용해 다른 개념을 만들어내고 이것이 연속적으로 연결되는 경험을 하는 데 관심이 있다. 누구나 가진 그 연결하는 힘을 자극하고 키우는 데 초점이 맞춰져 있다.’* 입시 수학에서 수학의 놀라운 연결하는 힘은, 그저 학생들을 테스트하기 위한 하나의 도구로만 취급됩니다. 진짜 수학에서 연결하는 힘은 수학 그 자체라고 봐도 무방할 정도로 정말 중요한 것인데 말이죠.

수학과 삶을 연결하고, 일상의 언어들을 수학의 언어로 전환하는 능력은 수학이 ‘언어’라는 것을 알면 쉽게 접근할 수 있습니다. 서술적 언어, 그림・도표 언어, 수학적 언어. 수학의 개념은 대부분 이 세 가지 언어를 통해 표현할 수 있습니다. 예를 들어 반지름이 1인 원을 세 가지의 언어로 표현한다고 하면, 먼저 서술적 언어로는 한 점에서의 거리가 1인 점들의 집합으로 표현하고, 그림・도표 언어로는 반지름이 1인 동그란 원을 그리면 됩니다. 수학적 언어로는 $x^2+y^2=1$과 같이 표현할 수 있습니다. 수학의 사고과정은 어떤 언어를 다른 종류의 언어로 바꾸는 과정입니다. 수학을 잘하기 위해서는 수학 문제를 많이 풀어보는 것을 넘어, 수학적 언어를 이해하는 훈련이 필요하고 이 같은 훈련을 통해 사고 능력을 향상시킬 수 있습니다.

수학을 공부한다는 것은 수학적 언어의 의미를 알게 된다는 것을 말합니다. 문제를 많이 빨리 푸는 것이 아닌 세 가지의 언어의 의미를 제대로 이해하여 이를 상황에 맞게 자유자재로 바꿀 수 있게 된다면 수학이 쉬워지고 재밌어지고 이로써 진정으로 수학을 공부하게 됩니다. 글이라는 언어로 된 표현, 그림이나 도표라는 언어로 된 표현, 수학식이라는 언어로 된 표현 사이에서 서로 다른 언어로 바꾸어 표현할 수 있는 능력을 기른다면 진정으로 수학을 공

부한 것입니다. 중요한 것은 수학적 언어는 많은 뜻이 함축되어 있는 언어이기 때문에 나머지 두 가지 언어에 비해 그 언어의 의미를 제대로 이해해야 합니다. 분수의 나눗셈, 이에 따른 비례식, 백분율 문제를 배울 때 수학적 원리를 먼저 이해하도록 훈련해야 합니다. 원리를 이해할 때 수학적 언어의 의미를 제대로 이해할 수 있습니다.

예를 들어 '$10 \div \frac{1}{2}$' 자체의 언어가 뜻하는 바를 이해하는 데 시간을 할애해야지, 분수의 나눗셈을 분자와 분모를 바꾸어서 곱하면 된다는 요령을 익히는 데 시간을 많이 들여서는 안 됩니다. 요령만 배우고 기계적 훈련을 많이 하면, 학생들은 이런 문제를 접할 때 수학적 언어의 뜻을 생각하지 않고, 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산하는 요령을 기억해내려고 합니다. 그렇게 대한민국의 학생들은 수학이 언어라는 사실은 전혀 알지 못하고, 수학적 언어의 의미도 제대로 깨닫지 못한 채, 공식을 외워 문제를 빨리 풀고 답을 빨리 내는 것이 수학을 잘하는 것이고, 수학을 공부한 것이라고 생각합니다. 그렇게 문제를 풀기 위해선 공식을 이용할 수밖에 없고, 이 문제는 이 공식, 저 문제는 저 공식, 이렇게 공부를 해봐야, 수학적 사고를 한 것이 아니기에 수학 실력은 전혀 늘지 않습니다. 대부분의 학생들에게 '$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$'이 무슨 의미를 담고 있냐고 물어봤을 때 이는 절반의 $\frac{1}{3}$ 만큼을 말하며 전체로 봤을 때는 $\frac{1}{6}$ 과 같기에 '$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$'이다라고 말할 수 있는 학생이 얼마나 될까요. 대한민국의 대부분의 학생들은 수학적 언어의 의미를 모르고 그저 요령만을 외운 학생들입니다.

이 교과서는 세 가지의 언어들을 조화롭게 사용하고 이를 자유자재로 변형시키는 활동을 통해 수학이 언어라는 사실을 학생들이 받아들일 수 있게 하고, 수학적 언어의 의미를 깊이 고민하고 이해하는 시간을 통하여 요령이 아닌 그 안에 담긴 의미를 기억해 냄으로써 학생들이 진정으로 수학을 공부할 수 있도록 할 것입니다. '이상한 나라의 수학자'라는 영화에서 이런 대사가

나옵니다. *'수학에서 답을 내려고만 하면 다른 건 볼 수가 없다. 정답보다 중요한 건 답을 찾는 과정이야.'* 우리는 너무 정답만을 추구한 교육을 해온 것은 아니었을까요. 우리는 과정을 경시하고 답을 위해 공식을 외우고 요령을 암기했습니다. 하지만 우리의 답은 맞았는데 이유를 모른다면, 이 공식이 어째서 이렇게 되는지 알지 못한다면, 모르는 것입니다. 과정을 중요시해야 하는 교육으로 변화돼야 합니다.

수학 교육의 문제를 해결하기 위해서는 교육과정의 변화가 필요합니다. 앞서 한국의 교육과정에 대한 문제점에 대해 이야기했습니다. 복습이 없고, 너무 방대한 양을 가르친다는 것이었죠. 복습을 보장해 주기 위해서는 새로운 진도를 나갈 때에 이와 관련되어 이전에 배웠던 내용을 가볍게 훑어, 다시 한 번 관련 내용을 떠올릴 수 있도록 해야 합니다. 새로운 진도를 나갈 때에 이전에 내용을 가볍게라도 훑고 지나가는 것과, 그냥 넘어가는 것은 그 학생의 이해 수준면에서 차이를 줍니다. 복습으로 인하여 새로운 내용을 그 위에 견고히 쌓을 수 있지만, 복습 없이 정리되지 않은 상태에서는 새로운 내용을 들어도 빠져나가거나 그 위에 아무렇게나 놓여 제대로 배우지 못하게 되는 것입니다. 교육과정을 구성하는 처음부터 복습을 보장하는 교육과정을 구성한다면 문제점을 해결할 수 있을 것입니다.

다음으로는 교육과정이 요구하는 지식의 분량을 줄여야 합니다. 대한민국의 수학 교육이 학생들에게 제공하고, 요구하는 수학의 수준의 깊이와 넓이는 다른 나라와의 비교가 불가능한 수준입니다. 대한민국은 배우는 양은 많고 수준은 높은데 시간은 한정적이기에 촉박할 수밖에 없는 구조입니다. 학년이 올라갈수록 더 높은 수준을 배우지만 이전 학년에서 제대로 이해하지 못한 내용을 학년이 올라가서 더 높은 수준으로 배우는 것은 무슨 의미가 있을까요. 무턱대고 높은 수준을 학생들에게 강요하는 것이 아니라 기초 단계라도 학생들이 이해할 수 있고, 천천히 사고하며 배울 수 있도록 충분한 시간을

배정해 줘야 합니다. 생각하게 하지 않고, 학생들이 생각할 기회를 빼앗아버리는 수학교육이 아닌, 이해할 수 있을 때까지 내용을 끌고 갈 수 있는 충분히 여유 있는 시간을 보장해 주는 교육과정이 되어야 합니다.

교과서에서는 개념을 열심히 설명하고 나서 가장 마지막에 정리 부분을 만들어서 공식을 이야기합니다. 몇 시간을 죽어라 개념을 가르쳐도 결론적으로 학생들은 마지막 정리 부분만 외워서 계속 연산 훈련만 반복하기 때문에 개념은 사라지고 연산만 남는 것입니다. 대한민국 수학 교육은 학생들에게 진짜로 무엇을 가르치고자 하는 것일까요. 무엇을 남기고자 하는 걸까요. 계산하는 기계가 필요한 것일까요. 한국 수학 교육이 추구하는 방향이 난이도 높은 문제를 해결하는 능력에서 수학적 사고를 할 수 있는 능력을 기르는 것으로 변해가야 할 것입니다.

교육과정의 또 다른 허점은 현장을 고려하지 않는다는 것입니다. 현장에서는 교육과정이 요구하는 모든 진도를 나가기 위해 모든 내용을 폭풍처럼 지나가지만 교육과정은 이 모든 것을 아이들이 할 수 있을 것이라고 생각하는 것이죠. 교육과정과 현장이 함께 발맞춰, 서로를 존중하고 배려하고 생각하며 이뤄나가야 합니다. 교육과정과 현장이 함께 맞춰 걷지 않는다면 그 피해는 고스란히 학생들에게 전해질 것입니다. 이렇게 함께 집필한 교육과정은 많은 학생들을 다시 돌아오게 하고, 학생과 교사 모두에게 진짜 수학을 할 수 있도록 할 것입니다. 수학 교육의 문제를 해결하기 위해선 교육과정이 변화되어야 하지만, 변화가 실현되기까지에는 많은 시간이 걸리기 때문에 먼저 이에 대한 해결 방안을 적용하여 교과서를 집필함으로 그 변화에 한 발짝 기여하고자 합니다.

이를 위하여 여러 가지의 교과서를 비교 분석하였습니다. 미리부터 이러한 고민을 한 사교육걱정없는세상에 의해 집필된 대안 교과서 ‘수학의 발견’과

미국, 핀란드 등 해외 교과서들을 읽고 비교 분석하였습니다. 분석한 결과, '수학의 발견'은 학생들로 하여금 많은 생각을 하게 만드는 형태로 교과서가 집필되어 있었습니다. 여러 가상의 주장에 대해 생각해 보고 자신의 생각을 적기도 하고, 해당 단원에서 하나하나 배우는 모든 내용을 자신이 직접 생각해 보고 어떤 것이 더 좋은지, 옳은지 판단해 볼 수 있게 되어있었습니다. 그리고 가장 놀라웠던 것은 일반 교과서의 문제점이었던 정리 부분이 없고, 스스로가 그 정리 부분을 직접 채워보도록 한다는 것이었습니다. 학생들 스스로 끊임없이 사고하고 추측해 보며 이해할 수 있도록 한 것입니다. 또, 쉬운 문제를 여러 번 풀어보며 규칙을 찾아내고 개념을 이해할 수 있도록 한다는 것을 알 수 있었습니다.

타 국가의 교과서로 미국과 핀란드 교과서를 접하게 되었는데, 이 교과서는 굉장히 쉬운 내용이라고 말할 수 있을 것 같습니다. 두 교과서 모두 심화 문제보다는 개념을 더욱 중시한다는 것을 볼 수 있었고 그들이 제공하는 문제는 개념의 이해를 돕는, 철저히 개념을 바탕으로 한 쉽고 간단한 문제들이었습니다. 그리고 세 가지 유형의 언어를 다양하게 사용하는 것을 발견할 수 있었습니다. 그림·도표 언어를 적극적으로 활용하여 직관적으로 이해할 수 있도록 했습니다. 교과서를 비교 분석하며 기존의 교과서의 문제점을 찾아내고 해결 방안을 탐색할 수 있었습니다.

교과서를 분석하고 제작을 기획하면서 그림·도표 언어를 적극적으로 활용해야겠다는 생각을 참 많이 했습니다. 직관적으로 보면 바로 이해할 수 있는 내용들이 있고, 그리고 서술적 언어와 수학적 언어만 있는 교과서는 아무리 내용이 좋아도 읽기가 꺼려지는 경향이 있습니다. 생각하고 추측한 내용을 직접 적어보는 것이 자신의 생각을 정리하고 이해하는 것에 정말 큰 도움을 주기 때문에 끊임없는 사고와 추측, 작성의 과정을 만들고자 합니다. 대안 교과서를 만들어야겠다고 생각하고, 가장 먼저 떠오른 것은 한국 수학 교육

의 피해자, 일명 '수포자'들이었습니다. 집필 전, 그들을 인터뷰하며 수학 교육의 진상을 들여다보고, 수학을 통해 받은 상처를 치유할 수 있는 수학 교육은 무엇인지 생각해 볼 수 있었고 이를 교과서에 담고자 하였습니다. 그들의 이야기는 이러했습니다. "우리가 평균적으로 받아들일 수 있는 지식의 수준과 용량이 한계가 있는데 그것 이상으로 가르치고 있는 것 같다.", "깊게 말고 넓게 교육하면 어떨까", "우리나라의 교육은 너무 과하다." 이들이 이야기한 내용도 앞서 살펴봤던 수학 교육의 문제점과 동일합니다. 범위가 너무 많고, 내용이 너무 깊은 것. 이 부분은 우리 교육이 반드시 변화되어야 할 부분입니다. 이들을 인터뷰하면서 느낀 것은 이들은 수학을 포기하고 싶어서 포기한 것이 아니었습니다. 수학을 포기하지 않기 위하여 끝까지 노력했지만 결국 포기의 길을 선택한 것이었습니다. 이는 이러한 문제가 수학 그 자체의 문제가 아닌 교육 방식의 문제라는 것을 시사합니다. 이들과의 인터뷰를 통하여 이 교과서를 사용할 이들을 생각하며, 그들은 무엇을 원하는지를 들을 수 있었습니다.

앞서 이야기했던 영화 '이상한 나라의 수학자'에서 수학을 대하는 자세에 대한 내용이 나옵니다. 이 내용을 소개하며 글을 마무리하겠습니다.

"문제가 안 풀릴 때는, 화를 내거나 포기하는 대신에 '문제가 참 어렵구나. 내일 아침에 다시 풀어봐야겠구나' 하는 여유로운 마음. 그것이 수학적 용기다."

수학은 용기있는 사람이 할 수 있습니다. 풀리지 않는 문제를 끝까지 포기하지 않는, 문제가 풀리지 않는다고 속상해하지 않는, 내일의 고뇌를 기대하며 또 다시 시도할 것을 다짐하는 여유와 용기.

당신에게 이 교과서가 여유와 용기를 선사하기를 바랍니다.

영화 '이상한 나라의 수학자' 명대사

"그냥 공식 하나 달랑 외워서 풀어버리면 절대 친해질 수가 없는거야.
공들여서 천천히 생각해서 친해지는거다."

"수학에서 답을 내려고만 하면 다른건 볼 수가 없다.
정답보다 중요한건 답을 찾는 과정이야."

"문제가 안풀릴때는 화를 내거나 포기하는 대신에
'문제가 어렵구나. 내일 아침에 다시 한번 풀어봐야겠구나' 하는 여유로운 마음
그것이 수학적 용기다.
그렇게 담담하게 꿋꿋하게 하는 사람이 결국에는 수학을 잘할 수 있는 것이다."

"네가 낸 답은 네가 확인을 해야지 누가 확인을 하니?
내가 스스로 푼 문제의 답도 내가 확인을 해야 한다."

I

유리수와 순환소수

01 유리수와 소수

유리수와 소수

유한소수로 나타낼 수 있는 유리수

02 순환소수

순환소수

순환소수로 나타낼 수 있는 유리수

순환소수의 분수표현

01 유리수와 소수

들어가볼까?

정훈이네 반에서 티볼 경기 대표 선수를 뽑으려고 합니다.
아래의 만화를 보고 누가 대표 선수로 나가야할지 생각해봅시다.

Q.

누가 대표 선수로 나가야할까요? 왜 그렇게 생각하나요?

비교하는 것이 쉬웠나요? 어떻게 비교하는 것이 쉬울까요?

왜 그렇게 생각하나요?

일상생활에서 소수가 편리한 상황과 분수가 편리한 상황은 언제일까요?
(모둠과 함께 이야기하고 발표해봅시다!)

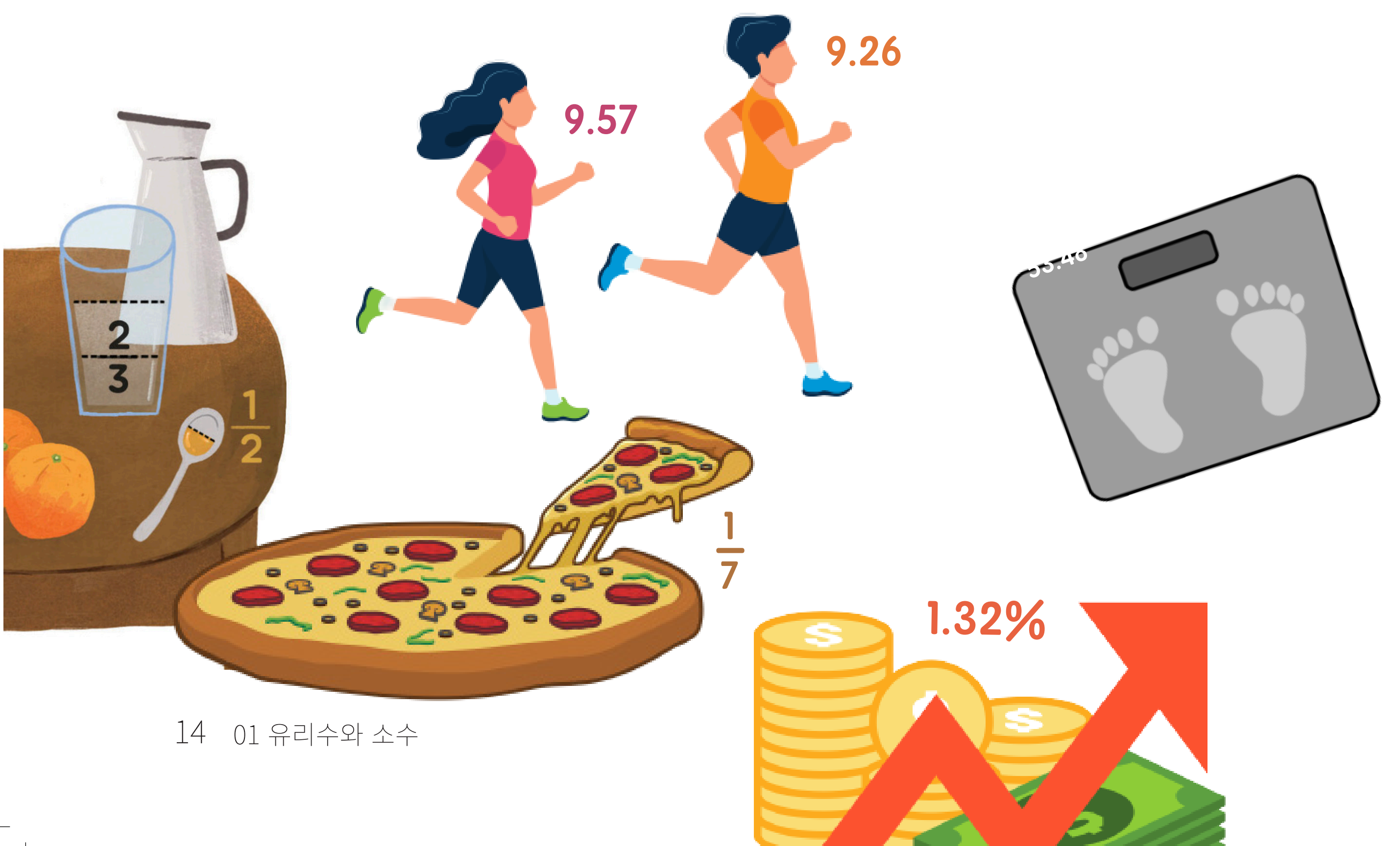
소수가 편리한 상황	
분수가 편리한 상황	

분수와 소수의 사용

피자 한 판을 균등하게 7조각 내어 그 중 한 조각을 먹으면 피자 한 판의 $\frac{1}{7}$을 먹었다고 하는 것처럼 분수는 하나의 대상을 똑같이 나누는 경우에 사용합니다. 또한, 물 $\frac{2}{3}$컵, 참기름 $\frac{1}{2}$큰술 등과 같이 비를 표현하고자 할 때 분수를 사용합니다.

한편, 달리기 기록, 예금의 금리, 물건의 무게 등을 나타낼 때 9.26초, 1.32%, $53.48kg$등과 같이 소수를 사용합니다.

분수 $\frac{3}{5}$과 소수 0.6은 같은 수를 나타내지만 분수 표시는 비를 알기 쉽게 하고 소수 표시는 크기의 순서를 알기 쉽게 합니다. 일반적으로 상대적인 양을 나타낼 때에는 분수 표현을, 크기를 나타낼 때에는 소수 표현을 사용합니다.



다시 해볼까?

> 자연수 $2, 3, 5, 7$과 같이 약수가 2개인 수, 즉 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수를 **소수**라고 하고, 소수를 제외한 나머지 수는 **합성수**라고 합니다. 이때 1은 소수도 아니고, 합성수도 아닙니다.

같은 수를 여러 번 곱한 것을 곱하는 수와 그 수가 곱해진 개수를 이용하여 간단히 나타낼 수 있는데, 2를 여러번 곱한 것을 간단히

$$2\times2=2^2 \qquad 2\times2\times2=2^3 \qquad 2\times2\times2\times2=2^4 \cdots$$

과 같이 나타내고 각각 2의 제곱, 2의 세제곱, 2의 네제곱 이라고 읽습니다. 이때 이들을 통틀어 2의 거듭제곱이라 하고 곱하는 수 2를 거듭제곱의 **밑**, 2가 곱해진 개수인 $2, 3, 4$를 거듭제곱의 **지수**라고 합니다.

12를 두 자연수의 곱으로 나타내면 $12=1\times12, 12=2\times6, 12=3\times4$ 이므로 $1, 2, 3, 4, 6, 12$는 모두 12의 약수입니다. 이 약수들을 12의 인수라고도 합니다. 특히 $2, 3$은 소수이면서 12의 인수입니다.
이와 같이 어떤 자연수의 인수이면서 소수인 수를 **소인수**라고 합니다.
12는 $12=2\times2\times3=2^2\times3$과 같이 소인수들만의 곱으로 나타낼 수 있습니다. 이와 같이 1보다 큰 자연수를 소인수들만의 곱으로 나타내는 것을 **소인수분해**라고 합니다.

다시 해볼까?

$+\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, +\frac{7}{5}$ 과 같이 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 양의 부호 $+$를 붙인 수를 **양의 유리수**, $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{5}$ 과 같이 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 음의 부호 $-$ 를 붙인 수를 **음의 유리수**라고 합니다.

이때 **양의 유리수,** 0**, 음의 유리수**를 통틀어 **유리수**라고 합니다.

정수는 다음과 같이 나타낼 수 있으므로 모두 유리수이다.

$$-2 = -\frac{2}{1} \qquad 7 = \frac{7}{1}$$

$+0.2, -1.5$ 와 같은 **소수**는 다음과 같이 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

$$+0.2 = +\frac{1}{5} \qquad -1.5 = -\frac{3}{2}$$

CHECK

분수는 소수로, 소수는 분수로 나타내세요.

(1) $\frac{3}{10}$ (2) 0.26 (3) $\frac{1}{5}$

(4) $\frac{9}{25}$ (5) 0.7 (6) $\frac{7}{40}$

(7) 0.059 (8) 0.83 (9) $\frac{3}{8}$

다음 수를 소인수분해하세요.

(1) 108

(2) 30

(3) 45

(4) 58

(5) 80

(6) 261

다음 수를 보고, 물음에 답하세요.

$$-7 \qquad \frac{3}{5} \qquad 4 \qquad 0 \qquad 1.2 \qquad \frac{20}{4} \qquad -0.12 \qquad \frac{9}{27}$$

(1) 자연수를 모두 찾으세요.

(2) 정수를 모두 찾으세요.

(3) 정수가 아닌 유리수를 모두 찾으세요.

다음 빈칸을 채워보세요.

$$\text{유리수}\begin{cases}\boxed{\phantom{\text{정수정수}}}\begin{cases}\text{자연수}\\ 0\\ \boxed{\phantom{\text{정수정수}}}\end{cases}\\ \text{정수가 아닌 유리수}\end{cases}$$

이제 해볼까?

유리수와 소수

유리수는 $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \cdots$ 와 같이 분수 $\frac{a}{b}$ $\left(\text{단}, a, b\text{는 정수}, b \neq 0\right)$ 로 나타낼 수 있는 수입니다.

다음 두 정의에 대해 이야기해봅시다!

중1

$+\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, +\frac{7}{5}$과 같이 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 양의 부호 $+$를 붙인 수를 **양의 유리수**, $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{5}$과 같이 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 음의 부호 $-$를 붙인 수를 **음의 유리수**라고 합니다. 이때 양의 유리수, 0, 음의 유리수를 통틀어 **유리수**라고 합니다.

중2

유리수는 $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \cdots$와 같이 분수 $\frac{a}{b}$ $(\text{단}, a, b\text{는 정수}, b \neq 0)$로 나타낼 수 있는 수입니다.

중학교 1학년 때 유리수에 대해 정의하고 중학교 2학년이 되어서도 유리수를 한 번 더 정의해요. 왜 그러는지 모둠과 함께 이야기해봅시다.

(1) 두 정의는 완전히 같은 의미일까요?

(2) 두 정의 중 어느 정의가 더 좋은 정의라고 생각하나요?
(이유도 함께 말해보세요)

이때 분수 $\frac{a}{b}$는 $a \div b$, 즉 분자를 분모로 나누어 **정수** 또는 **소수**로 나타낼 수 있습니다.

다음 분수를 소수로 나타내고, 두 소수의 차이점이 무엇인지 적어보세요.

$\frac{1}{4}$ ________ $\frac{2}{3}$ ________

차이점

0.25와 같이 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 **유한 번** 나타나는 소수를 **유한소수**라 하며, $0.6666\cdots$과 같이 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 **무한 번** 나타나는 소수를 **무한소수**라고 합니다.

CHECK

다음 분수를 소수로 나타내고, 유한소수와 무한소수로 구분하세요.

(1) $\frac{3}{4}$
(유한, 무한)

(2) $\frac{1}{6}$
(유한, 무한)

(3) $\frac{7}{8}$
(유한, 무한)

(4) $\frac{4}{9}$
(유한, 무한)

(5) $\frac{13}{11}$
(유한, 무한)

(6) $\frac{2}{7}$
(유한, 무한)

이제 해볼까?

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 의 분수를 각각 소수로 바꾸어 **유한소수**가 되는 것과 **무한소수**가 되는 것들을 아래와 같이 분류했습니다.

유한소수가 되는 분수들

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{1}{4} = 0.25$

$\frac{1}{5} = 0.2$ $\frac{1}{8} = 0.125$

$\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{1}{16} = 0.0625$

$\frac{1}{20} = 0.05$ $\frac{1}{25} = 0.04$

무한소수가 되는 분수들

$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ $\frac{1}{6} = 0.1666\cdots$

$\frac{1}{7} = 0.142857142\cdots$

$\frac{1}{9} = 0.111\cdots$ $\frac{1}{11} = 0.0909\cdots$

$\frac{1}{12} = 0.08333\cdots$ $\frac{1}{13} = 0.076923\cdots$

$\frac{1}{14} = 0.0.07142857142\cdots$

각각의 분수들에 어떤 특징이 있나요? (분모를 잘 관찰해보세요)

분수를 소수로 바꾸기 위해서는 분자를 분모로 나누어야 합니다. 그렇다면 분수를 직접 나누지 않고도 유한소수와 무한소수로 구분하는 방법이 있을까요? 모둠과 함께 이야기해봅시다.

다음 유한소수를 분수로 나타내기 위해 □ 안에 알맞는 수를 구해보세요.

$$0.43 = \frac{43}{\square} \qquad 0.259 = \frac{259}{\square} \qquad 0.3641 = \frac{3641}{\square}$$

각 □ 에는 어떤 특징이 있나요?

이와 같이 모든 유한소수는 분모가 □ 의 거듭제곱인 분수로
바꿀 수 있습니다.

바꾸어 생각해봅시다.

어떤 특징을 가진 분수를 유한소수로 바꿀 수 있는걸까요?

이제 해볼까?

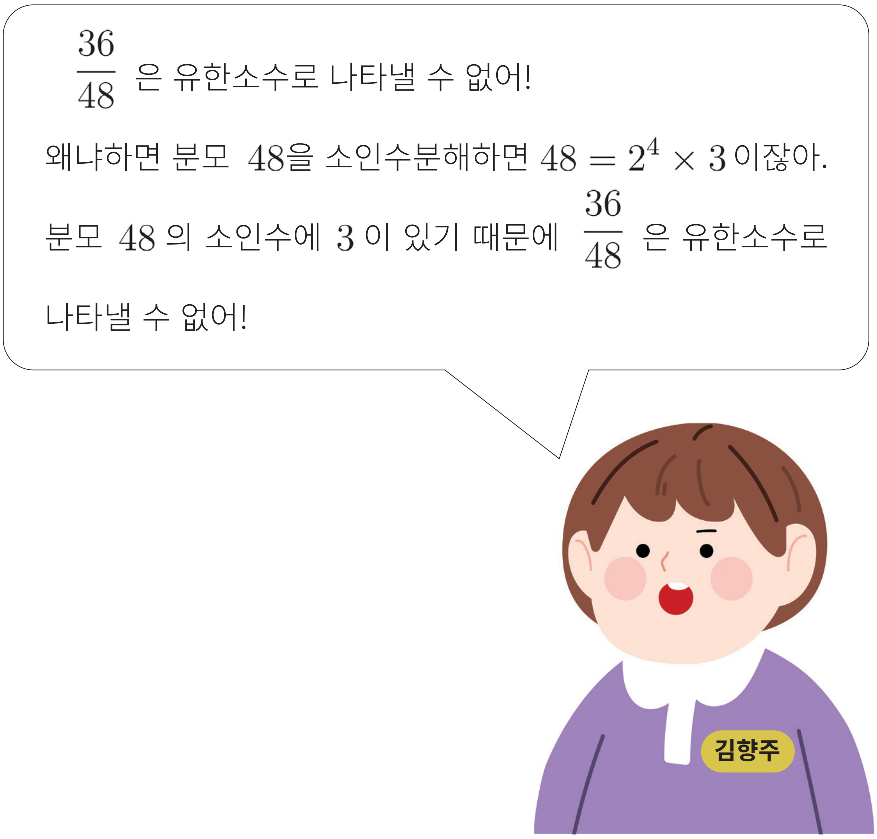
유한소수로 나타낼 수 있는 유리수

기약분수 | 더 이상 약분되지 않는 분수
분모와 분자의 공약수가 1뿐인 분수

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times 2}{5\times 2}=\frac{6}{10}=0.6$$

$$\frac{7}{20}=\frac{7}{2^2\times 5}=\frac{7\times 5}{2^2\times 5\times 5}=\frac{35}{100}=0.35$$

분수를 **기약분수**로 나타내었을 때 **분모의 소인수가** 2**또는** 5**뿐**이면 분자와 분모에 2또는 5의 거듭제곱을 적당히 곱하여 분모를 10**의 거듭제곱**으로 고칠 수 있으므로 그 분수는 유한소수로 나타낼 수 있습니다.



향주의 주장에 대한 나의 생각을 적어보세요.

CHECK

다음 중 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾아 동그라미하세요.

(1) $\frac{5}{8}$　　(2) $\frac{9}{5}$　　(3) $\frac{5}{14}$

(4) $\frac{3 \times 5}{22}$　　(5) $\frac{6}{2^2 \times 3}$　　(6) $\frac{2}{45}$

(7) $\frac{7}{16}$　　(8) $\frac{11}{55}$　　(9) $\frac{3 \times 7}{2 \times 3 \times 7^2}$

다음은 분수 $\frac{3}{40}$ 을 유한소수로 나타내는 과정입니다.
(1)~(4)에 알맞은 수를 구하세요.

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \times 5} = \frac{3 \times \boxed{(1)}}{2^3 \times 5 \times \boxed{(2)}} = \frac{\boxed{(3)}}{10^3} = \boxed{(4)}$$

(1)

(2)

(3)

(4)

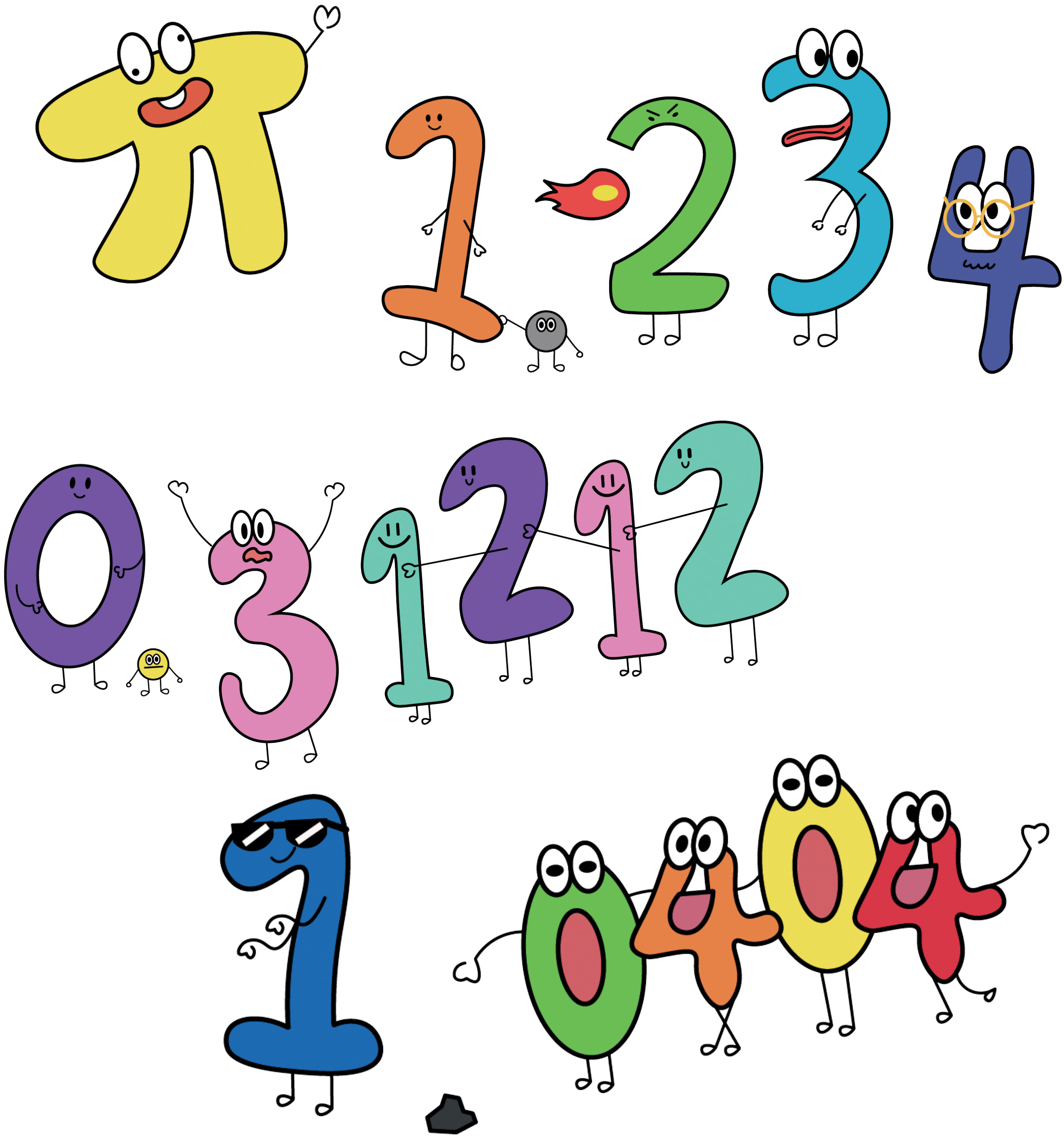
- 아래 달력에서 세로로 나란히 있는 두 수 중 위 칸의 수를 분자, 아래 칸의 수를 분모로 하는 분수를 만들었을 때 그 분수를 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾아 동그라미하세요.

3월

일	월	화	수	목	금	토
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

- $\frac{7}{30}$에 어떤 자연수 a를 곱하면 유한소수가 됩니다. a가 한 자리의 자연수라고 할 때, a의 값을 모두 구하고, 풀이과정을 적으세요.

02 순환소수



이제 해볼까?

순환소수

무한소수 중에는 $0.333\cdots$, $2.145145\cdots$ 와 같이 **소수점 아래**의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 끝없이 되풀이되는 소수가 있습니다.

이러한 소수를 **순환소수**라 하고, 이때 숫자의 배열이 되풀이되는 한 부분을 **순환마디**라고 합니다.

예를 들어 무한소수 $0.333\cdots$ 은 순환마디가 3인 순환소수이고, $0.285285285\cdots$는 순환마디가 285인 순환소수입니다.

순환소수는 순환마디 위, 양 끝 숫자 위에 점을 찍어서

$$0.333\cdots = 0.\dot{3} \qquad 0.285285285\cdots = 0.\dot{2}8\dot{5}$$

과 같이 나타냅니다.

선배의 조언

➔ 가장 최소한의 순환마디로 표현하기!

$$0.164646464\cdots$$

$0.1\dot{6}46\dot{4}$ ✕ $\qquad$ $0.1\dot{6}\dot{4}$ ○

➔ 소수점 아래부터 적용하기!

$$9.595959\cdots$$

$\dot{9}.\dot{5}95$ ✕ $\qquad$ $9.\dot{5}\dot{9}$ ○

➔ 순환마디 양 끝 숫자 위에 점을 찍기!

$$0.531531\cdots$$

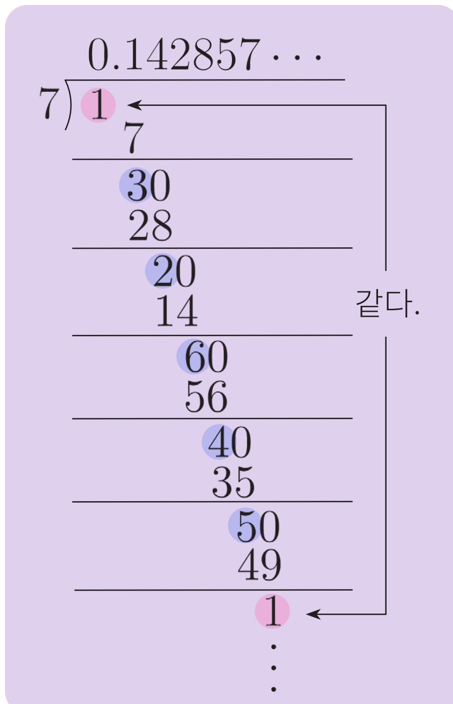
$0.\dot{5}\dot{3}\dot{1}$ ✕ $\qquad$ $0.\dot{5}3\dot{1}$ ○

이제 해볼까?

순환소수로 나타낼 수 있는 유리수

분모의 소인수가 2또는 5뿐인 기약분수는 유한소수로 나타낼 수 있습니다. 이제 분모가 2와 5이외의 소인수를 갖는 기약분수를 소수로 나타내봅시다!

분수 $\frac{1}{7}$ 을 소수로 나타낸 오른쪽 나눗셈 과정에서 알 수 있는 점을 빈칸을 채워 넣으며 알아봅시다.



① 나머지는 □ 보다 작은 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 많아야 □ 번째에는 같은 수가 나타난다.

② 같은 수가 나타나면 그때부터 같은 계산 과정이 반복된다.

따라서 $\frac{1}{7}$ 을 소수로 나타내면

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$$
$$= 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

과 같이 순환소수가 됩니다.

이와 같이 분모가 2와 5이외의 소인수를 갖는 기약분수를 소수로 나타내면 **순환소수**인 무한소수가 됩니다.

CHECK

- $0.121221222\cdots$는 순환소수일까요? 자신의 생각을 적어보세요.

- 다음 순환소수의 순환마디를 구하세요.

(1) $0.121212\cdots$

(2) $0.305305305\cdots$

(3) $-0.4898989\cdots$

(4) $-1.2487487487\cdots$

- 순환마디 표현이 옳으면 O를, 틀리면 X를 동그라미하세요.

(1) $0.515151 = 0.\dot{5}\dot{1}$ (O, X)

(2) $1.234343 = 1.2\dot{3}43\dot{4}$ (O, X)

(3) $3.1171717 = 3.1\dot{1}\dot{7}$ (O, X)

(4) $2.828282 = \dot{2}.8\dot{2}$ (O, X)

(5) $0.375375375 = 0.\dot{3}\dot{7}\dot{5}$ (O, X)

(6) $1.805805805 = 1.\dot{8}0\dot{5}$ (O, X)

CHECK

다음 순환소수의 순환마디를 구하고, 숫자 위에 점을 찍어 간단히 나타내세요.

(1) $0.555\cdots$　　(2) $4.524524524\cdots$

(3) $2.0656565\cdots$　　(4) $-1.263263263\cdots$

다음 중 순환소수로 나타낼 수 있는 분수를 모두 찾아 동그라미하세요.

$\frac{1}{6}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{25}{75}$
$\frac{18}{2^2 \times 3^2}$	$\frac{27}{2 \times 3^2 \times 5}$	$\frac{49}{2^2 \times 3 \times 7}$

다음 분수를 순환소수로 나타내세요.

(1) $\frac{1}{6}$　　(2) $\frac{4}{9}$　　(3) $\frac{2}{13}$

(4) $-\frac{5}{7}$　　(5) $\frac{8}{15}$　　(6) $-\frac{3}{11}$

다음 분수 중에서 순환소수로 나타낼 수 있는 것을 찾고, 순환마디를 이용하여 간단히 나타내세요.

$\frac{5}{8}$　　$\frac{7}{12}$　　$\frac{16}{84}$　　$-\frac{24}{27}$　　$\frac{105}{132}$

플러스 이야기

① 각 분수를 소수로 나타내보세요.

분수	소수
$\frac{1}{9}$	
$\frac{2}{9}$	
$\frac{3}{9}$	
$\frac{4}{9}$	
$\frac{5}{9}$	

분수	소수
$\frac{1}{11}$	
$\frac{2}{11}$	
$\frac{3}{11}$	
$\frac{4}{11}$	
$\frac{5}{11}$	

2 표를 보고 규칙을 찾아보세요.

$\frac{a}{9}$ 의 규칙을 적어보세요.

$\frac{a}{11}$ 의 규칙을 적어보세요.

3 찾아낸 규칙을 바탕으로 $\frac{6}{9}$, $\frac{6}{11}$ 를 계산하지 않고 소수로 나타내보세요.

분수	소수
$\frac{6}{9}$	
$\frac{6}{11}$	

이제 해볼까?

순환소수의 분수 표현

$$5.555\cdots \qquad 0.555\cdots$$

1 두 순환소수의 공통점이 무엇일까요?

2 네모 (가) 안에 알맞은 수는 무엇일까요?

$5.555\cdots$에서 $0.555\cdots$를 뺀 값은 소수점 아래의 부분이 같으므로 (가) 가 됩니다.

$$\begin{array}{r} 5.555\cdots \\ -)\ 0.555\cdots \\ \hline \boxed{(가)} \end{array}$$

주어진 순환소수에 적당한 10 **의 거듭제곱**을 곱하면 **소수점 아래 부분이 같은** 순환소수를 만들 수 있고, 이때 두 순환소수의 차가 정수임을 이용하여 순환소수를 분수로 나타낼 수 있습니다.

1단계 순환소수를 x로 놓기!

$0.\dot{5}$를 x라고 하면 $x = 0.555\cdots$ ……①

2단계 등식의 양변에 10의 거듭제곱을 곱하기!

① 의 양변에 10을 곱하면 $10x = 5.555\cdots$ ……②

3단계 두 식을 변끼리 빼서 x의 값 구하기!

②에서 ①을 변끼리 빼면 $9x = 5,\ x = \dfrac{5}{9}$

따라서, $0.\dot{5} = \dfrac{5}{9}$ 입니다.

$$\begin{array}{rr} & 10x = 5.555\cdots \\ -) & x = 0.555\cdots \\ \hline & 9x = 5 \end{array}$$

주어진 순환소수를 분수 $\dfrac{a}{b}$(단, a, b는 정수, $b \neq 0$) 의 꼴로 나타낼 수 있으므로 순환소수는 유리수입니다.

CHECK

다음 순환소수를 분수로 나타내세요.

(1) $0.\dot{1}$

(2) $0.\dot{2}\dot{3}$

(3) $0.\dot{5}\dot{1}$

(4) $1.\dot{4}2\dot{7}$

(5) $0.1\dot{6}$

(6) $0.5\dot{3}\dot{7}$

(7) $1.2\dot{5}$

(8) $2.1\dot{2}\dot{7}$

(9) $13.2\dot{1}\dot{3}$

순환소수를 분수로 나타낸 것 중에서 바르게 나타낸 것의 글자를 골라 아래 $\boxed{}$ 안에 차례대로 써 넣어 에디슨의 명언을 완성해보자!

1 $0.\dot{4}$
① $\frac{4}{9}$ ⇨ 전
② $\frac{2}{5}$ ⇨ 기

2 $0.\dot{2}\dot{8}$
① $\frac{28}{99}$ ⇨ 자
② $\frac{7}{25}$ ⇨ 구

3 $1.\dot{1}$
① $\frac{10}{9}$ ⇨ 시
② $\frac{11}{9}$ ⇨ 실

4 $1.\dot{6}\dot{2}$
① $\frac{18}{11}$ ⇨ 험
② $\frac{161}{99}$ ⇨ 상

5 $0.1\dot{6}$
① $\frac{5}{33}$ ⇨ 실
② $\frac{1}{6}$ ⇨ 재

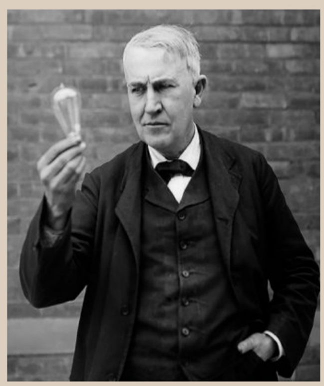
6 $2.1\dot{7}$
① $\frac{43}{18}$ ⇨ 능
② $\frac{98}{45}$ ⇨ 패

7 $0.4\dot{8}\dot{6}$
① $\frac{82}{99}$ ⇨ 발
② $\frac{241}{495}$ ⇨ 이

8 $0.0\dot{7}\dot{8}$
① $\frac{13}{165}$ ⇨ 치
② $\frac{26}{33}$ ⇨ 명

● **토머스 에디슨(Thomas A.Edison, 1847~1931)**

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 를 발명하기 위해
나는 9999번의 $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 을 했으나 잘 되지 않았다.
그러자 친구는 $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 를 1만 번째 되풀이할 셈이냐고 물었다. 그러나 나는 실패한 것이 아니고, 다만 전구가 안되는 $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 를 발견했을 뿐이다.


에디슨

CHECK

다음은 이 단원을 공부한 친구들이 각자의 생각을 정리한 문장입니다.
각 문장이 참인지 거짓인지 판단하고 그렇게 생각한 이유를 써보세요.

모든 무한소수는 분자, 분모가
모두 정수인 분수로 표현이 가능해!

	자신의 의견
(참, 거짓)	

모든 순환소수는 분자, 분모가
모두 정수인 분수로 표현이 가능해!

	자신의 의견
(참, 거짓)	

순환하지 않는 무한소수로 표현할 수 있는 유리수가 있어!

	자신의 의견
(참, 거짓)	

유리수는 반드시 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있어!

	자신의 의견
(참, 거짓)	

스스로 틀린 문장과 옳는 문장을 만들고, 모둠끼리 나눠보세요.

참	
거짓	

CHECK

'유리수를 소수로 고쳤을 때 순환하지 않는 무한소수가 나올 수 있을까?'

위 질문에 대한 자신의 생각을 적고 그렇게 생각한 이유를 써보세요.
그리고 친구와 토론해보세요.

'유리수 중 유한소수로 표현할 수 없는 수는 반드시 순환소수로 표현할 수 있다.'

위 문장에 대한 자신의 생각을 적고 그렇게 생각한 이유를 써보세요.
그리고 친구와 토론해보세요.

지금까지 배운 '유리수'가 무엇인지 자신의 말로 정리해보세요!
모둠과 함께 나누며 서로의 의견을 모아 하나의 정리를 만들어보세요.

나의 말로 정리하기

우리 모둠의 정리

다음 빈칸을 채워보세요.

$$\text{유리수}\begin{cases}\text{정수}\begin{cases}\boxed{}\\ 0\\ \text{음의 정수}\end{cases}\\ \boxed{}\begin{cases}\text{유한소수}\\ \boxed{}\end{cases}\end{cases}$$

Living Math(Maths)
초판 1쇄 발행 2023년 1월 10일

펴낸이 | 김향주
지도교사 | 최익준
표지디자인 | 박예솔
삽화 | 이수민
펴낸곳 | 드리미학교

주소 | 충남 천안시 동남구 병천면 봉항로 89
이메일 | dreamy@dreamyedu.net
홈페이지 | dreamyedu.net