SP FAZ ESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

Ensino Médio

1º BIMESTRE

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretário Executivo
Haroldo Corrêa Rocha

Chefe de Gabinete
Renilda Peres de Lima

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Leandro José Franco Damy

Caderno do Professor

1ª série do Ensino Médio

1º Bimestre

Organização das grades curriculares

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Currículo Oficial – SEE-SP		Competência Geral (BNCC)
Tema/ Conteúdo	Habilidades	
• Números ▪ Números e sequências. ▸ Regularidades numéricas. ▸ Progressões Aritméticas e Geométricas.	➧ Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível. ➧ Conhecer as características principais das progressões aritméticas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras sabendo aplicá-las em diferentes contextos. ➧ Conhecer as características principais das progressões geométricas expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras sabendo aplicá-las em diferentes contextos. ➧ Compreender o significado da soma dos termos de uma PG infinita (razão de valor absoluto menor do que 1) e saber calcular tal soma em alguns contextos, físicos ou geométricos	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

1 – As sequências numéricas e suas progressões

Antes de abordar o estudo das sequências numéricas, ressaltamos a importância do reconhecimento da regularidade envolvida na retomada das características dos conjuntos numéricos, a fim de que os alunos percebam, por um lado, a regularidade do conjunto dos números naturais e dos números inteiros e, por outro, a questão da densidade dos números reais. Partindo do conhecimento desses conjuntos, esperamos que os alunos possam relacionar a regularidade dos números naturais à de outras sequências numéricas e também geométricas, identificando essa regularidade, sempre que possível, por intermédio de uma expressão matemática.

Partindo do princípio de que os alunos devem reconhecer a regularidade de sequências numéricas de qualquer natureza e escrever expressões matemáticas que reflitam a regularidade observada, julgamos importante que não sejam tratadas de maneiras completamente distintas as sequências aritméticas e as sequências geométricas, como se costuma observar nos livros didáticos. Essa proposta de abordagem simultânea dos dois tipos mais comuns de sequências, as progressões aritméticas (PA) e as progressões geométricas (PG), permite, a nosso ver, que o foco do tratamento conceitual se desloque do formalismo algébrico para a construção do significado real e importante das características da regularidade de cada sequência.

PA e PG estão presentes em várias situações contextualizadas e não costumam trazer dificuldades adicionais de compreensão para os alunos.

O conceito de infinito, de suma importância em Matemática, costuma ser bastante motivador para o estudo de alguns conceitos, desde as séries iniciais, quando os alunos tomam contato com a ideia do "mais 1", que conduz à construção do campo numérico dos naturais.

Todos os temas acima apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem, conforme segue:

Situação de Aprendizagem 1 – Conjuntos Numéricos: Regularidades Numéricas e Geométricas, Vol.1, 1ª série do Ensino Médio, pg. 10 a 21.

Situação de Aprendizagem 2 – Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, Vol.1, 1ª série do Ensino Médio, pg. 25 a 33.

Situação de Aprendizagem 3 - Soma dos termos de uma PA ou de uma PG finitas e aplicações à Matemática Financeira, Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, pg. 39 a 47.

Situação de Aprendizagem 4 – Limite da soma dos infinitos termos de uma PG infinita, Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, pg. 48 a 54.

A seguir, elencamos alguns materiais nos quais podem ser utilizados como aprofundamento teórico dos assuntos acima referidos.

- ✓ Amuleto mágico, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1049, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Corrida ao 100, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1003, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Pensando em Progressão Aritmética, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1256, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Quadrado mágico aditivo, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1028, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Mais mortos ou mais vivos? disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1316, acesso em 03/12/2018.
- ✓ O quadrado de Koch, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1023, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Pandemia, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1148, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Para salvar o Mundo, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1151, acesso em 03/12/2018.

- ✓ Pensando em Progressão Geométrica, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1257, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Pra lá de Bagdá, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1158, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Quadrado mágico multiplicativo, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1372, acesso em 03/12/2018.
- ✓ Vampiros, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1260, acesso em 03/12/2018.

Amuleto mágico	Corrida ao 100	Pensando em Progressão Aritmética
Quadrado mágico aditivo	Mais mortos ou mais vivos?	O quadrado de Koch
Pandemia	Para salvar o Mundo	Pensando em Progressão Geométrica
Pra lá de Bagdá	Quadrado mágico multiplicativo	Vampiros

TEMA 1 – SEQUÊNCIAS E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

ATIVIDADE 1

(INSTITUTO AOCP) Observe a sequência de palavras a seguir e, a partir da análise do seu padrão, assinale a alternativa, que melhor se encaixa no lugar de “???”
(FÉ, PAZ, AMOR, UNIÃO, ÁRVORE SININHO, ???)

(A) NATAL
(B) PRESENTE
(C) ESPERANÇA
(D) HARPA
(E) ANJO

Para começo de conversa...

Professor, esta é a primeira orientação pedagógica da sequência de atividades do caderno . O objetivo único destas orientações é sugerir e/ou relembrar encaminhamentos didáticos (o que fazer, qual metodologia a ser considerada no momento) e procedimentos didáticos (como colocar em prática os encaminhamentos didáticos previamente planejados) que podem ser úteis na sua prática pedagógica e, principalmente, ampliar e qualificar as aprendizagens de todos os alunos. As orientações não devem ser encerradas em si mesmas. Devem ser consideradas, ampliadas, adaptadas e mesmo substituídas de acordo com as variáveis inerentes a cada grupo de alunos.

Orientações Pedagógicas

Antes de iniciar a sequência de atividades, uma possibilidade é tratar problemas simples que remetem à sequências e padrões numéricos observados no cotidiano, inclusive conjuntos numéricos: dias da semana, numeração das casas, números de telefone, conjuntos dos números R, *dentre outros tipos de conjuntos de sequências.*

Em relação à esta atividade, ao circular pela sala, observe os alunos que estão com dificuldade em resolver a questão e realize questionamentos do tipo: o que você pode observar nestas palavras?; se são palavras diferentes, em que elas são diferentes e o que elas podem ter em comum? Se necessário, peça para que os alunos sentem em duplas ou pequenos grupos para discutir sobre estes questionamentos. Observe também se é necessário prover atividades extras um pouco mais desafiadoras para os alunos que conseguem resolver atividades como esta com facilidade.

Na correção das questões, permita que os alunos expressem as diferentes maneiras de resolução.

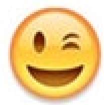
Resolução comentada

Observando a cardinalidade (quantidade) de letras de cada palavra, temos:
FÉ ↣ 2 letras;
PAZ ↣ 3 letras;
AMOR ↣ 4 letras;
UNIÃO ↣ 5 letras;
ÁRVORE ↣ 6 letras;
SININHO ↣ 7 letras;
Assim, o próximo termo da sequência (2, 3, 4, 5, 6, 7, ???) é o 8. A única palavra nas alternativas com 8 letras é a palavra PRESENTE, logo a resposta é a alternativa B.

ATIVIDADE 2

Observe a sequência de figuras e suponha que a lei de formação continue a mesma

a) Desenhe a figura que está faltando



Uma vez que você, professor, já repertoriou os alunos com as sequências do cotidiano que apresentam períodos que se repetem (dias da semana, dias dos meses, etc.), é provável que o aluno observe que o 4º termo é o mesmo que o 1º termo e que o 6º termo é o mesmo que o segundo termo. Então, o 5º termo será o mesmo que o 2º termo. Assim será possível responder a primeira questão, cuja resposta certa é o termo:

b) Qual será a figura que ocupará a 10ª posição nessa sequência?

O aluno pode já pensar em um algoritmo ou fazer o desenho até encontrar a figura da 10ª posição

c) Qual o padrão você pode verificar?

Resposta pessoal.

Orientações pedagógicas

Se alguns alunos não compreenderem que existe uma repetição a cada três posições, a maneira de pensar dos colegas de classe pode auxiliar a compreensão geral. Por isso o trabalho em grupo vem a favorecer a aprendizagem nesta atividade.

d) Qual será a figura que ocupará a 38ª posição nessa sequência?

O aluno pode já pensar em um algoritmo ou fazer o desenho até encontrar a figura da 38ª posição:
Se o aluno utilizar o algoritmo, observará o resto 2, o que equivale a escolha da segunda figura da sequência.

$$38 = 3 \cdot 12 + 2$$

Orientações pedagógicas

Aproximando-se dos alunos, aproveite e questione: é possível utilizar uma estratégia mais eficiente que o desenho? Deixe que eles pensem e discutam entre si, sem dar a resposta e sem validar de imediato (sem dizer se está certo ou errado).

e) Qual será a figura que ocupará a 120ª posição nessa sequência?

Nesse caso o aluno pode já pensar em um algoritmo ou fazer o desenho até encontrar a figura da *120ª* posição: $120 = 3 \cdot 40 + 0$, o resto zero mostra a congruência da *120ª* figura com a 3^a figura da sequência.

Orientações pedagógicas

Provavelmente algum aluno já perceba que o padrão tem relação com os números múltiplos de 3. É muito importante que essa discussão seja ampliada, com questionamentos norteadores. Se nenhum aluno chegar a citar que há relação com o resto da divisão, faça um exemplo mais simples na lousa. Todos devem compreender a relação entre o resto da divisão e a posição de cada figura na sequência.

Se achar oportuno, faça o seguinte registro na lousa.

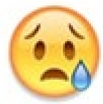
Apesar de não ser tema de discussão neste momento, é importante frisar que o conceito aqui trabalhado também é base fundamental para o estudo de congruências modulares em Teoria dos Números.

f) Descreva como você chegou a resposta em cada caso.

Uma resposta possível:
$10^a = 3 \cdot 3 + 1$, se o resto é 1, isso quer dizer que é igual a primeira figura;
$38^a = 3 \cdot 12 + 2$, se o resto é 2, isso quer dizer que é igual a segunda figura.

Posições: 1ª, 4ª, 7ª, ...
(Números que divididos por 3 deixam resto 1)

Posições: 2ª, 5ª, 8ª, ...
(Números que divididos por 3 deixam resto 2)



Posições 3ª, 6ª, 9ª, ...
(Números que divididos por 3 deixam resto 0)

$120^a = 3 \cdot 40 + 0$, se o resto é 0, isso quer dizer que é igual a terceira figura.

Orientações pedagógicas

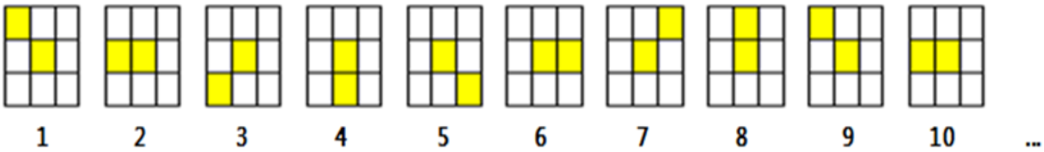
Antes de validar as resoluções, sugerimos que promova discussões sobre as mesmas. Convide um representante de cada grupo para escrever na lousa suas estratégias e depois pergunte ao grupo o que acharam das resoluções e qual delas pode ser aplicada em todos os casos. Pode ocorrer de nenhum aluno escrever o algoritmo da divisão, neste caso será preciso sua intervenção.

Resgatar a divisão escrita nesta forma, algoritmo de Euclides, é muito importante para que o aluno compreenda o significado de cada termo da divisão. Muitas outras atividades podem ser resolvidas com maior facilidade quando se compreende o processo.

A exploração de sequências repetitivas, numéricas ou não, favorece a discussão sobre algumas noções trabalhadas nas séries anteriores, como múltiplos , divisores e regras de divisibilidade, e permite uma aproximação da noção de congruência, uma vez que trabalha com números que divididos por um determinado número inteiro, apresentam o mesmo resto.

ATIVIDADE 3

Observe a sequência de figuras e suponha que a lei de formação continue a mesma.



a) Descreva, em palavras, o padrão de regularidade desta sequência e indique qual deve ser a próxima figura.

Descreva, em palavras, o padrão de regularidade desta sequência e indique qual deve ser a próxima figura.

b) A figura que ocupará a 15ª posição nessa sequência será:

- ( ) a mesma figura que ocupa a 1ª posição.
- ( ) a mesma figura que ocupa a 2ª posição..
- ( ) a mesma figura que ocupa a 5ª posição.
- (☑) A mesma figura que ocupa a 7ª posição.

$15^a = 8 \cdot 1 + 7$, se o resto é 7, então a *15ª* figura será igual a *7ª* figura.

c) Qual será a figura que ocupará a 96ª posição nessa sequência?

$96^a = 8 \cdot 12 + 0$; se o resto é 0, então a 96ª figura será igual a 8ª figura.

Orientações pedagógicas

Professor, recorra às recomendações da atividade 2. Uma vez que os alunos já foram repertoriados, talvez seja o momento de propor o trabalho em grupos menores ou duplas. Dessa forma fica mais fácil de observar pelas discussões dos alunos se eles estão compreendendo o processo. Se achar necessário, retome com outras atividades, sequências didáticas ou outras estratégias e metodologias. Estes são conceitos fundamentais que não podem deixar de ser explorados e compreendidos.

(AAP 2016 – 11ª Edição) Observe a sequência: (1,2,2,3,3,4,1,2,2,3,3,4,1,2,2…). Supondo que a lei de formação dessa sequência permaneça a mesma, o 54° termo dessa sequência será o número:

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

Pode-se estimular os alunos a observar que o período da sequência é formado por seis números (1,2,2,3,3,4). Segue que:

$54^a = 6 \cdot 9 + 0$

- ✓ 54ª é a posição do termo (dividendo da divisão)
- ✓ 6 é o período de repetição da sequência (divisor da divisão)
- ✓ 9 é o número de vezes que o período (1, 2, 2, 3, 3, 4) se repete de forma completa (quociente da divisão);
- ✓ 0 (zero) é o valor que vai indicar qual termo da sequência (1, 2, 2, 3, 3, 4) corresponde ao valor que está na 54ª posição (resto da divisão). O resto zero indica sempre o último termo do período, que no caso é o número 4.

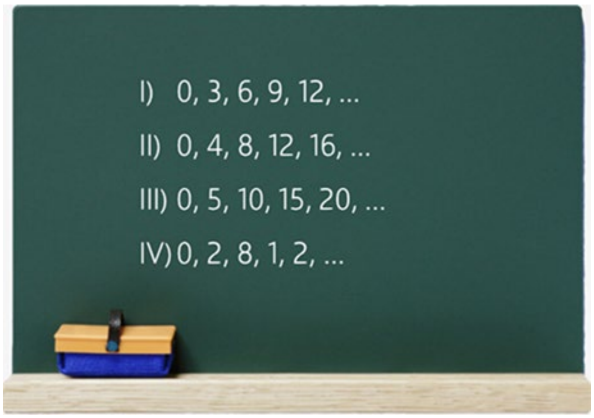
Orientações pedagógicas

Acreditamos que seja imprescindível que até aqui esteja consolidada a habilidade de relacionar o resto da divisão com a posição dos termos do período. Uma avaliação diagnóstica nesse momento é muito importante para saber se é possível avançar ou se é necessário optar por outras atividades, estratégias e metodologias.

ATIVIDADE 4

ATIVIDADE 5

(AAP 2016 – 11ª Edição - Adaptada) Observe as sequências que o professor deixou no quadro:



> Observe o exemplo abaixo sobre a lei de formação da sequência I: (0, 3, 6, 9, 12, ...).
>
> Cada um desses números é chamado de termo da sequência. A palavra termo geralmente é simbolizada por a_n. A letra $\boldsymbol{n}$ é trocada pela posição do termo. Por exemplo, para representar o 1° termo utilizamos a1. Neste caso, o zero é o primeiro termo, então dizemos então que $a_1 = 0$. Temos também a_2=3, a_3=6 e um termo que não sabemos em qual posição n ele está chamamos de a_n.
>
> Nesta sequência também observamos que ela cresce somando-se 3 unidades a cada termo. Se os valores da sequência estão crescente, dizemos que a sequência é crescente. Pergunte ao seu professor quais outros tipos sequência existem além das que são crescentes.
>
> A lei de formação da sequência (0, 3, 6, 9, ...) é:
>
> $a_n = 3.n - 3$

Orientações pedagógicas:

Uma possibilidade de reflexão é perguntar aos alunos o porquê de ter sido escrito 3n. Pergunte também se há mesmo a necessidade de subtrair três unidades.

a) Das quatro sequências, qual delas NÃO representa uma regularidade?

O item IV não admite uma lei de formação.

Orientações pedagógicas:

Após oferecer algum tempo para que os alunos resolvam esta questão, será interessante fazer a correção no coletivo, procurando discutir sobre:

- *o que os alunos já compreenderam sobre o que é uma sequência;*
- *o que eles entendem por regularidade de uma sequência. Qual a regularidade de cada um dos itens? Peça que os alunos expressem verbalmente a lei de formação que rege cada sequência. Isso levará a percepção de que, **com exceção do item IV**, todos admitem uma lei de formação.*

b) Verifique que a lei de formação da sequência I está correta.

Verificando a validade da lei de formação da sequência I: $a_n = 3.n - 3$

$a_1 = 3 \cdot 1 - 3 = 3 - 3 = 0$

$a_2 = 3 \cdot 2 - 3 = 6 - 3 = 3$

$a_3 = 3 \cdot 3 - 3 = 9 - 3 = 6$

$a_4 = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9$

Logo, a lei de formação para a sequência I: $a_n = 3 . n - 3$ está correta.

c) Escreva a lei de formação das sequências II e III.

Sequência II: $a_n = 4n - 2$

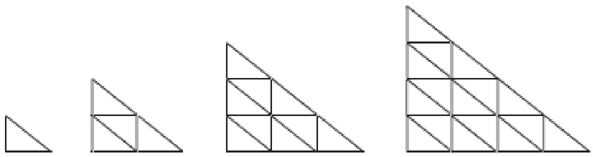
Sequência III: $a_n = 5n - 5$

Orientações pedagógicas dos itens b) e c)

Circule pela sala e observe como foram realizadas as verificações. Retome no coletivo, se necessário.

ATIVIDADE 6

(Adaptado - OBMEP 2018) As figuras abaixo são formadas por triângulos pequenos. A quarta figura tem 16 triângulos.



a) Quantos triângulos pequenos serão necessários para compor a 5ª figura?

25 triângulos

Orientações pedagógicas

O aluno poderá chegar a esta resposta fazendo o desenho da 5ª figura ou observando que a primeira figura é formada por apenas 1 triângulo; a segunda figura por 4 triângulos, a terceira por 9 triângulos e a quarta por 16 triângulos, e perceber o padrão numérico: 1 = 1x1 ou 1 = 1^2; 4 = 2 x 2 ou 4 = 2^2; 9 =3 x 3 ou 9 = 3^2; 16 = 4 x 4 ou 16 = 4^2; assim, seguindo o padrão a quinta figura é formada por 25 = 5 x 5 *triângulos. Deixe que socializem a resposta, fazendo a mediação das discussões.*

b) Conte quantos triângulos pequenos tem cada figura e complete a sequência até o termo a_6:

(1, 4, 9, , , ,)

(1, 4, 9, 16, 25, 36)

c) Mantendo esse padrão, quantos triângulos pequenos tem a 12ª figura da sequência:

$12^2 = 144$

Também será válido se o aluno responder $12 \cdot 12 = 144$ ou mesmo fazer o desenho.

Orientações Pedagógicas:

Espera-se que durante a correção, o aluno perceba a importância de obter a expressão do termo geral de determinada sequência. Outra maneira de resolver essa atividade é analisando outro padrão numérico, como segue:

1ª figura: 1 triângulo;

2ª figura: 4 = 1 + 3 triângulos (o anterior mais 3);

3ª figura: 9 = 4 + 5 triângulos (o anterior mais 5);

4ª figura: 16 = 9 + 7 triângulos (o anterior mais 7);

5ª figura: 25 = 16 + 9 triângulos (o anterior mais 9);

⋮

nª figura: $n^2 = (n-1)^2 + (2n-1)$ *triângulos.*

Também poderá resolver montando outra sequência paralela a essa, que é a sequência de diferenças entre os termos (1, 3, 5, 7, 9,..), ou seja, a soma dos termos de uma sequência de segunda ordem.

Exemplo: $a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

d) Descreva a maneira como você pensou para resolver a questão:

Respostas individuais.

Orientações pedagógicas:

Professor, não deixe de valorizar, explorar e socializar as diferentes estratégias que surgirem. As estratégias que não foram bem sucedidas também merecem atenção e podem ser o início de uma discussão construtiva sobre o assunto.

e) Qual é a expressão do termo geral dessa sequência?

$a_n = n^2$

ATIVIDADE 7

(Adaptada ENEM – 2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

Algumas das respostas possíveis:

i. 33000 + 1500 + 1500 + 1500 + 1500 + 1500 + 1500 = 42000
ii. (33000, 34500, 36000, 37500, 39000, 40500, 42000)
iii. $a_7 = 33000 + 6 \cdot 1500 = 42000$

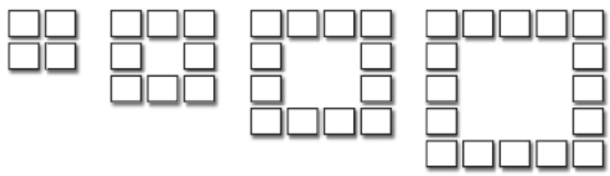
Orientações pedagógicas:

Uma vez que os alunos apresentem dificuldades para chegar na resposta correta, outras soluções poderão ser apresentadas a eles. Devem ser realizadas perguntas reflexivas sobre o melhor e mais abrangente modo de resolver. Note que o objetivo é sempre procurar meios para que eles compreendam o poder da generalização, contudo sem perder o foco na ampliação do raciocínio lógico individual.

Espera-se que o alunos compreendam que se o número de passagens vendidas aumentam 1500 por mês, em 6 meses ela aumenta 6 · 1500 = 9 000 passagens. Em julho, foram vendidas 33 000 + 9 000 = 42 000, como indicado no item iii.

ATIVIDADE 8

Observe a sequência de figuras. Em seguida responda:



a) quantos quadrinhos deverá ter a 6ª figura dessa sequência?

$$a_6 = 6 \cdot 4 = 24$$

Professor, se os alunos não chegarem a resposta correta sem utilizar este raciocínio, faça o detalhamento do mesmo, utilizando como suporte a representação figural apresentada.

b) escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de quadrinhos, em função da sequência. (Sugestão: você pode organizar os dados em uma tabela como a que segue)

Algumas das possíveis respostas

i. $a_n = 4 \cdot n$

ii. $a_n = (n - 1) \cdot 4 + 4$

Na fórmula: $a_n = (n - 1) \cdot 4 + 4$, o termo $(n - 1)$, representa a quantidade de quadrinhos que estão compreendidos entre os quadradinhos dos extremos (cantos) de cada lado da figura, multiplicado por 4, pois a figura tem 4 lados, somado com 4 que indicam os quadradinhos dos cantos da figura.

Posição da figura na sequência (n)	Número de quadrinhos $a_n = 4 \cdot n$	Número de quadrinhos $a_n = (n-1) \cdot 4 + 4$
1	$a_1 = 4 \cdot 1 = 4$	$a_1 = (1-1) \cdot 4 + 4 = 0 \cdot 4 + 4 = 4$
2	$a_2 = 4 \cdot 2 = 8$	$a_2 = (2-1) \cdot 4 + 4 = 1 \cdot 4 + 4 = 8$
3	$a_3 = 4 \cdot 3 = 12$	$a_3 = (3-1) \cdot 4 + 4 = 2 \cdot 4 + 4 = 12$
4	$a_4 = 4 \cdot 4 = 16$	$a_4 = (4-1) \cdot 4 + 4 = 3 \cdot 4 + 4 = 16$
⋮	⋮	⋮
n	$a_n = 4 \cdot n$	$a_n = (n-1) \cdot 4 + 4$

c) quantos quadrinhos deverá ter a 39ª figura dessa sequência?

Utilizando qualquer uma das fórmulas sugeridas, temos:

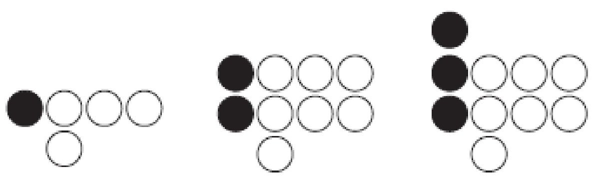
$a_{39} = 4 \cdot 39 = 156$

Orientações pedagógicas:

Chame a atenção dos alunos ao uso adequado da notação matemática, como a representação do termo e a substituição na expressão algébrica que representa o termo geral. Desta forma, quando a complexidade das atividades for aumentando ficará mais fácil compreender a resolução e organizar as informações

ATIVIDADE 9

Estão representados na figura, os três primeiros termos de uma sequência de conjuntos de bolas pretas e brancas que segue uma lei de formação.



1º termo **2º termo** **3º termo**

Preencha corretamente as lacunas da afirmação abaixo:

O 9º termo desta sequência terá ______ bolas pretas e ______bolas brancas.

A maneira pela qual você pensou na resolução da questão é muito importante, portanto escreva, como você chegou à resposta.

Observando a sequência das figuras, percebemos que a quantidade de bolas pretas é numericamente igual a posição da respectiva figura. Logo, o 9º termo terá 9 bolas pretas. Já o número de bolas brancas é obtido pela lei de formação: $a_n=3n+1$, logo a quantidade de bolas brancas do 9º termo é:

$a_9=3\ .\ 9+1=28$

A afirmação deverá ser:

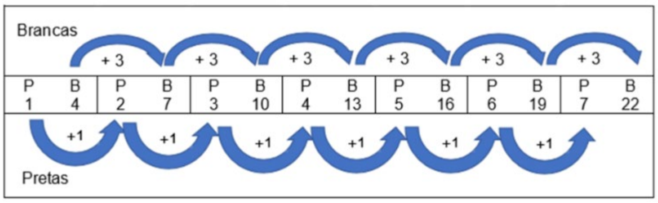
O 9º termo desta sequência terá <u>9</u> bolas pretas e <u>28</u> bolas brancas

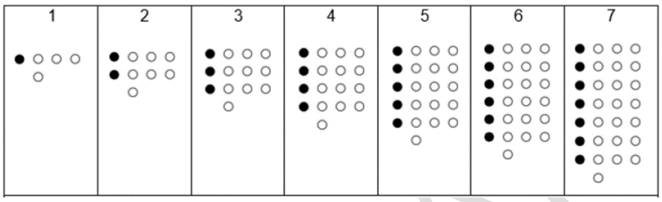
Comentários pedagógicos:

O objetivo da questão está em verificar a capacidade do aluno para identificação da regularidade existente na sequência geométrica da figura.

O padrão de formação é composto pelos três primeiros conjuntos de bolas (5, 9 e 13) nos quais, a quantidade de bolas aumenta de 1 bola preta e 3 brancas, conforme a figura a seguir.

Veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros.





ATIVIDADE 10

Considere a sequência numérica **(5, 9, 13, 17, 21...)**

a) Agora, preencha a tabela a seguir:

n	**Número de “saltos” do primeiro termo até o termo n**	**Primeiro termo somando o valor obtido com os “saltos”**	a_n
1	**0**	$a_1 = 5 + 0 \cdot 4$	**5**
2	**1**	$a_2 = 5 + 1 \cdot 4$	**9**
3	**2**	$a_3 = 5 + 2 \cdot 4$	**13**
4	**3**	$a_4 = 5 + 3 \cdot 4$	**17**
5	**4**	$a_5 = 5 + 4 \cdot 4$	**21**
6	**5**	$a_6 = 5 + 5 \cdot 4$	**25**

b) Qual a relação entre os valores das duas primeiras colunas?

A segunda coluna é numericamente menor que a primeira em 1 unidade.

c) Explique com suas palavras o significado de uma das expressões da 3ª coluna.

Tomando a terceira linha como exemplo:

- ✓ a_3 é o valor procurado para o terceiro termo;
- ✓ 5 é o valor do primeiro termo;
- ✓ 2 é o valor da quantidade de “saltos” do primeiro termo até o 3º termo;
- ✓ 4 é o valor do “salto”.

Continue preenchendo a tabela a seguir:

n	Número de "saltos" do primeiro termo até o termo n	Primeiro termo somando o valor obtido com os "saltos"	a_n
10	9	$a_{10} = 5 + 9 \cdot 4$	41
35	34	$a_{35} = 5 + 34 \cdot 4$	141
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(n-1)$	$a_n = 5 + (n-1) \cdot 4$	a_n

d) Como a fórmula encontrada na última linha pode ser adaptada para ser utilizada em qualquer sequência cuja diferença entre os termos é fixa?

Basta substituir o 5 por a_1 , pois ele representa o primeiro termo da sequência e substituir o 4 por r, que é a razão ("salto").

Orientações Pedagógicas:

Compreender e aplicar o movimento metodológico (aula no coletivo, aula em grupos, aula em duplas, aula no individual) requer observação das características individuais dos alunos, de como suas aprendizagens estão se desenvolvendo e qual das fases do movimento metodológico a atividade escolhida propicia o desenvolvimento.

Esta atividade mostra-se bem completa para poder avaliar se o aluno está desenvolvendo as habilidades relacionadas a este objeto do conhecimento. Utilizando-se das avaliações diárias que você tem realizado, pode entender que talvez seja uma boa atividade para ser resolvida e discutida em grupos ou duplas.

TEMA 2: AS SEQUÊNCIAS E SUAS PROGRESSÕES

Chamamos de Progressão Aritmética – P.A. uma sequência numérica que apresenta razão constante na sua formação, isto é, o valor adicionado a cada termo é sempre o mesmo.

ATIVIDADE 1

(AAP – 2014) Observe as sequências a seguir: e identifique quais podemos afirmar que representam P.A.

A maneira pela qual você pensou na resolução da questão é muito importante, portanto escreva no quadro a seguir, como você chegou à resposta.

I. (1, 5, 9, 13, ...)

A diferença entre os termos é sempre a mesma?

☑sim ☐ não

Se a resposta for sim, qual o valor desta diferença?

$r = 4$

II. (2, 3, 5, 7, ...)

A diferença entre os termos é sempre a mesma?

☐ sim ☑ não

Se a resposta for sim, qual o valor desta diferença?

III. (7, 4, 1, –2, ...)

A diferença entre os termos é sempre a mesma?

☑sim ☐ não

Se a resposta for sim, qual o valor desta diferença?

$r = -3$

IV. $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$

A diferença entre os termos é sempre a mesma?

☑sim ☐ não

Se a resposta for sim, qual o valor desta diferença?

$r = 0$

Quando a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos de uma sequência for constante, chamamos a sequência de **Progressão Aritmética, P. A.**. Esta diferença constante chamamos de **razão** e a representamos pela letra r.

Orientações pedagógicas

Até este momento é necessário que todos os conceitos e nomenclaturas apresentados até aqui estejam consolidados. Circule pela sala, ouça os alunos e faça questionamentos para que possa perceber se é preciso ampliar o leque de atividades. Se achar necessário, utilize de outros meios de avaliação para diagnosticar as aprendizagens dos alunos.

Não deixe de perguntar e explorar com eles a frase presente no enunciado: "Considere que todas elas são sequências infinitas e quando houver padrão aparente ele se mantém".

ATIVIDADE 2

(Adaptada ENEM - 2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:

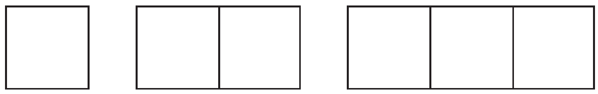


Figura I **Figura II** **Figura III**

Que expressão fornece a quantidade de quadrados de cada figura?

(A) $C = 4Q$

(B) $C = 3Q + 1$

(C) $C = 4Q + 1$

(D) $C = Q + 3$

(E) $C = 4Q - 2$

Posição da figura (n)	Quantidade de quadrados (Q)	Quantidade C de quadrados
1	1	$3 + 1 = 4$
2	2	$3 + 3 + 1 = 7$
3	3	$3 + 3 + 3 + 1 = 10$
⋮	⋮	⋮
n	Q	$3 \cdot Q + 1 = C$

Note que neste caso a quantidade C parece que não está em função da posição n. Contudo, como n = Q, C está em função de n, implicitamente.

Orientações pedagógicas:

Mesmo sendo uma resposta de múltipla escolha, explorar as estratégias dos alunos é fundamental, pois assim os alunos que responderam equivocadamente podem observar seus erros, aprender novas estratégias.

ATIVIDADE 3

(Adaptada ENEM - 2010) As projeções para a produção de arroz no período de 2012 - 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeto da Produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00
2016	
	60,25

a) Calcule a diferença na produção de arroz entre os anos 2012 e 2013

r = 51,50 – 50,25 = 1,25
Portanto a diferença entre os anos de 2012 e 2013 é de 1,25 toneladas.

b) Complete a tabela com os valores que estão faltando.

Ano	Projeto da Produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00
2016	55,25
⋮	⋮
2020	60,25
2021	61,50

c) Calcule a diferença na produção de arroz entre os anos 2012 e 2021.

A diferença de produção de arroz entre os anos de 2012 a 2021 é dada por:
61,50 – 50,25 = 11,25 toneladas

d) A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

(A) 497,25

(B) 500,85

(C) 502,87

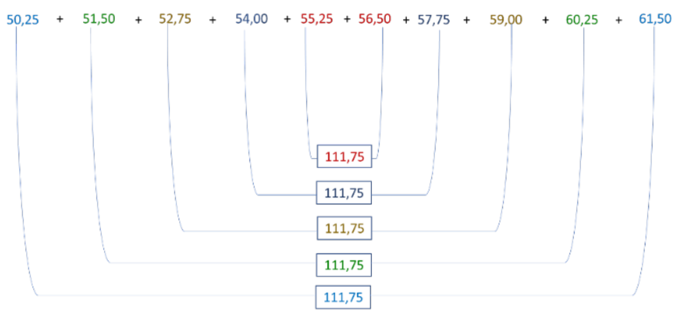
(D) 558,75

(E) 563,25

A quantidade total de arroz produzido do ano de 2012 a 2021 é dada por:
50,25 + 51,50 + 52,75 + 54,00 + 55,25 + 56,50 + 57,75 + 59,00 + 60,25 + 61,50 = 558,75
Portanto alternativa D.

Orientações pedagógicas:

Professor, este é um momento oportuno para apresentar aos alunos um exemplo simples de soma de PA utilizando a estratégia utilizada pelo matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855):



50,25	+	51,50	+	52,75	+	54,00	+	55,25
+ 61,50	+	60,25	+	59,00	+	57,75	+	56,50
111,75	+	111,75	+	111,75	+	111,75	+	111,75

É o mesmo que 5 · 111,75 =558,75

Portanto alternativa D

ATIVIDADE 4

A soma de três números que compõe uma P.A. é 72 e o produto dos termos extremos é 560. Qual é a P.A.?

SUGESTÃO: *às vezes, é interessante representar 3 termos desconhecidos de uma P.A. por: **x – r, x, x + r**, em que **r** é a razão da P.A.*

Antes de solicitar a resolução desta atividade, apresente inicialmente exemplos numéricos e depois exemplos algébricos mais simples. Esse momento de repertoriar o aluno vai oferecer subsídios de resolução, uma vez que ele não teve acesso a este tipo de problema. Você vai observar que, neste caso, não seria necessário utilizar um sistema linear, pois é possível determinar o valor de x já na primeira equação. Após a resolução, esta é uma informação que deve ser dada aos alunos. Por outro lado, para a ampliação do conhecimento do aluno, compor o sistema também é importante, uma vez que muitos problemas desta natureza precisarão desse processo.

Resolução comentada:

Pode-se iniciar utilizando um sistema linear de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 72 \\ (x - r) \cdot (x + r) = 560 \end{cases}$$

Da primeira equação segue que:

$3x = 72$, logo $x = 24$

Substituindo o valor de x na segunda equação e desenvolvendo o produto notável: $(24 - r) \cdot (24 + r) = 560$, temos:

$$24^2 - r^2 = 560 = 576 - r^2 = 560 \Rightarrow -r^2 = 560 - 576 \Rightarrow -r^2 = -16 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \sqrt{16} \Rightarrow r = \pm 4$$

Note que com as razões obtidas ($r = 4$ e $r = -4$), obtemos duas Progressões Aritméticas distintas, sendo uma crescente e outra decrescente, conforme mostramos a seguir:

Para $r = 4$, temos a P.A. (20, 24, 28) e para $r = -4$, temos a P.A. (28, 24, 20).

Orientações pedagógicas:

Sugerimos que a classificação da P.A. nas categorias: crescente, decrescente e constante, sejam tratadas depois que os alunos construírem as duas P.A. da atividade. Amplie com outros exemplos.

Em relação ao trecho da resolução (24 – r) . (24 + r) = 560 , irá perceber que muitos alunos não têm consolidado o conhecimento sobre produtos notáveis. Por isso, no momento da correção, em uma parte da lousa mostre para eles as duas possibilidades de resolver essa linha, fazendo um paralelo: produtos notáveis ou pela distributiva.

ATIVIDADE 5

Em um triângulo, a medida do maior ângulo interno é 105°. Determine as medidas de seus ângulos internos, sabendo que elas estão em P.A.

Antes de solicitar a resolução desta atividade, é necessário exemplos que remetem a soma dos ângulos internos de um triângulo, com o objetivo de que eles relembrem que é sempre a mesma sempre resulta em 180°.

A seguir, mesmo que alguns passos estejam suprimidos nesta resolução, não deixe de certificar se os alunos sabem fazer todo o desenvolvimento.

Resolução comentada:

Chamaremos os ângulos de ***x – r, x, x + r.*** Antes de dizer o valor, pergunte aos alunos qual destes será substituído por 105°. Peça também que justifiquem sua escolha.

A partir dos dados apresentados, podemos indicar o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x - r) = 180° \\ (x - r) + x + 105° = 180 \end{cases}$$

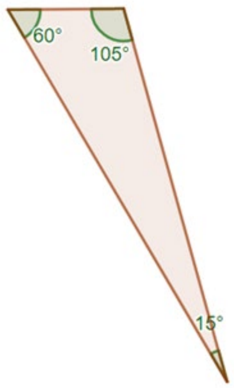
Desenvolvendo a primeira equação do sistema linear, temos

$$3x = 180° \Rightarrow x = \frac{180°}{3} \Rightarrow x = 60°$$

Obtido o valor do segundo ângulo interno, calcularemos a razão entre eles:, substituindo o valor de x na segunda equação do sistema linear:

$$(60 - r) + 60 + 105° = 180°$$
$$-r + 225 = 180$$
$$-r = -45 \Rightarrow r = 45°$$

A seguir ilustra-se uma das possibilidade de montagem do triângulo, com seus respectivos ângulos:



ATIVIDADE 6

As medidas dos lados de um triângulo retângulo são numericamente iguais aos termos de uma P.A. de razão 4. Qual é a medida da hipotenusa?

Orientações pedagógicas:

Antes de solicitar a resolução, relembre com os alunos as principais propriedades do triângulo retângulo, seja quanto aos ângulos ou quanto os lados e também as nomenclaturas. São informações que estão implícitas no enunciado e que precisam ser evidenciadas por meio de procedimentos e bons questionamentos. Procure sempre consolidar relações como: a hipotenusa é o maior lado devido ao fato de ser o lado oposto ao ângulo de 90°, que é o maior ângulo de um triângulo retângulo.

Se achar pertinente, antes mesmo de apresentar a atividade dê exemplos simples de atividades que envolvam o Teorema de Pitágoras e produtos notáveis.

Resolução comentada:

P.A. que representa a medida dos lados:
$(x - r,\ x,\ x + r)$ e como $r = 4$, temos:
$(x - 4,\ x,\ x + 4)$
Sabendo que $x + 4$ é a hipotenusa (maior lado), utilizamos o Teorema de Pitágoras.

$$(x + 4)^2 = x^2 + (x - 4)^2 =$$
$$x^2 + 8x + 16 =$$
$$x^2 + x^2 - 8x + 16 =$$
$$-x^2 + 16x = 0$$

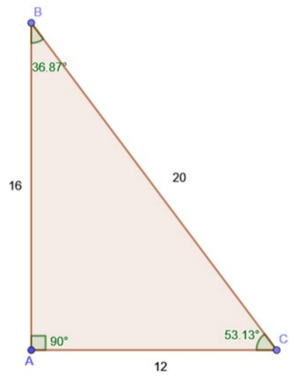
Desenvolvendo a última equação obtida, temos:

$$-x^2 + 16x = 0 = -x \cdot (x - 16) = 0$$

Assim, temos que:
$x = 0$ (O resultado não pode ser admitido, pois não há lado de triângulo com esta medida)
ou

$$(x - 16) = 0 \Rightarrow x = 16$$

A P.A. procurada é (12, 16, 20), e a hipotenusa mede 20 unidades de comprimento.
A figura a seguir ilustra o triângulo retângulo com as medidas calculadas na atividade:



ATIVIDADE 7

Dado um quadrado Q_1 de lado $\ell = 1$ cm, considere a sequência de quadrados $(\ell_{Q_1}, \ell_{Q_2}, \ell_{Q_2})$. O lado do segundo quadrado é duas unidades maior que o lado do quadrado anterior e assim sucessivamente.
Com base nas informações, determine:

a) a medida do lado de Q_{20}
b) o perímetro de Q_{20}:
c) a área de Q_{20}:
d) a medida da diagonal de Q_{20}:

Orientações Pedagógicas:

A atividade envolve os conceitos de área, perímetro e diagonal de um quadrado, sugerimos que retome brevemente estes conceitos antes de solicitar a resolução.

Explique também a importância de se colocar os índices na resolução, pois se trata da escrita correta da matemática e tem como objetivo orientar a resolução.

Resolução comentada:

a) De acordo com o enunciado, temos uma P.A. de razão 2, então:

$$\ell_{Q_n} = \ell_{Q_1} + (n - 1) \cdot r^2$$
$$\ell_{Q_{20}} = 1 + (20 - 1) \cdot 2$$
$$\boxed{\ell_{Q_{20}} = 39 \text{ cm}}$$

b) Sabendo-se que a medida do lado do 20º quadrado mede 39 cm, temos que:

$$P_{Q_n} = 4 \cdot \ell_{Q_n}$$
$$P_{Q_{20}} = 4 \cdot \ell_{Q_{20}}$$
$$P_{Q_{20}} = 4 \cdot 39$$
$$\boxed{P_{Q_{20}} = 156 \text{ cm}}$$

c) Sabendo-se que a medida do lado do 20º quadrado mede 39 cm, temos que:

$$A_{Q_n} = (\ell_{Q_n})^2$$
$$A_{Q_{20}} = (\ell_{Q_{20}})^2$$
$$A_{Q_{20}} = (39)^2$$
$$\boxed{A_{Q_{20}} = 1521 \text{ cm}^2}$$

d)

$$D_{Q_n} = \ell_{Q_n} \cdot \sqrt{2}$$
$$D_{Q_{20}} = \ell_{Q_{20}} \cdot \sqrt{2}$$
$$\boxed{D_{Q_{20}} = 39\sqrt{2}}$$

ATIVIDADE 8

Os números que expressam as medidas do perímetro, diagonal e a área de um quadrado, nesta ordem podem ser os termos de uma P.A.? Justifique sua resposta.

Orientações pedagógicas:

A prova por contradição é o que chamamos de prova por absurdo. Para provar algo utilizando este método, afirmamos que uma tese é verdadeira, mas que no final acaba por resultar em um resultado matematicamente contraditório.

Resolução comentada:

Partindo-se da hipótese de que o perímetro, a área e a diagonal de um quadrado, formam, nesta ordem uma Progressão Aritmética, então temos a sequência:

$(4\ell, \ell\sqrt{2}, \ell^2)$

Considerando a hipótese de que a sequência dada é uma P.A, temos:

$\ell\sqrt{2} - 4\ell = r$

$\ell^2 - \ell\sqrt{2}$

Então,

$\ell\sqrt{2} - 4\ell = \ell^2 - \ell\sqrt{2}$

$\ell(\sqrt{2} - 4) = \ell\,(\ell - \sqrt{2})$

$\sqrt{2} - 4 = \ell - \sqrt{2}$

$\ell = 2\sqrt{2} - 4 = -1{,}7157...$

Constata-se que pelo resultado obtido, temos uma inconsistência , pois o valor de ℓ, é sempre positivo, portanto, a sequência dada NÃO se trata de uma Progressão Aritmética.

ATIVIDADE 9

A Copa do Mundo de Futebol é um evento que ocorre de quatro em quatro anos. A 1ª Copa foi realizada em 1930, no Uruguai, porém, nos anos de 1942 e 1946 , o evento não foi realizado, devido à 2ª Guerra Mundial.

a) A Copa de 2014 foi realizada no Brasil. Qual é a ordem desse evento na sequência de anos em que foi realizada?

Resolução comentada:

Considerando que houveram todas as copas, temos a seguinte P.A. de razão r = 4

(1930, 1934, ... , 1942, 1946, ... , 2014)

A ordem n do ano de 2014 na P.A., é dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$2014 = 1930 + (n - 1) \cdot r$$
$$2014 = 1930 + 4n - 4$$
$$2014 - 1930 + 4 = 4n$$
$$4n = 88$$
$$n = \frac{88}{4}$$
$$\boxed{n = 22}$$

Contudo, foi informado que não houveram copas nos anos de 1942 e 1946. Então a sequência deixa de ser uma P.A. de 22 termos e passa a ser apenas uma sequência de números com 20 termos. É o mesmo que dizer que a Copa realizado no Brasil representa a 20ª edição do evento.

Orientações Pedagógicas:

Retome com os alunos a fim de saber qual a diferença entre uma Progressão Aritmética e uma sequência qualquer.

b) Considerando que os próximos eventos ocorram seguindo o mesmo padrão e que não existam imprevistos que impeçam a realização desse evento, responda: haverá Copa em 2100? E em 2150?

Resolução Comentada:

Esta questão pode ser respondida a partir da observação da periodicidade, considerando os restos da divisão ou utilizando a expressão do termo geral da P.A.
Vamos observar o resto da divisão por 4 do ano de 2014.

$$2014 = 4 \cdot 503 + 2$$

Para que em 2100 e 2150 sejam ano de Copa, o resto da divisão também tem que ser 2.

✓ Verificando 2100
$2100 = 4 \cdot 525 + 0$, como $0 \neq 2$, então não haverá Copa do Mundo neste ano.

Verificando 2150
$2150 = 4 \cdot 537 + 2$, como o resto é 2, então haverá Copa do Mundo neste ano.

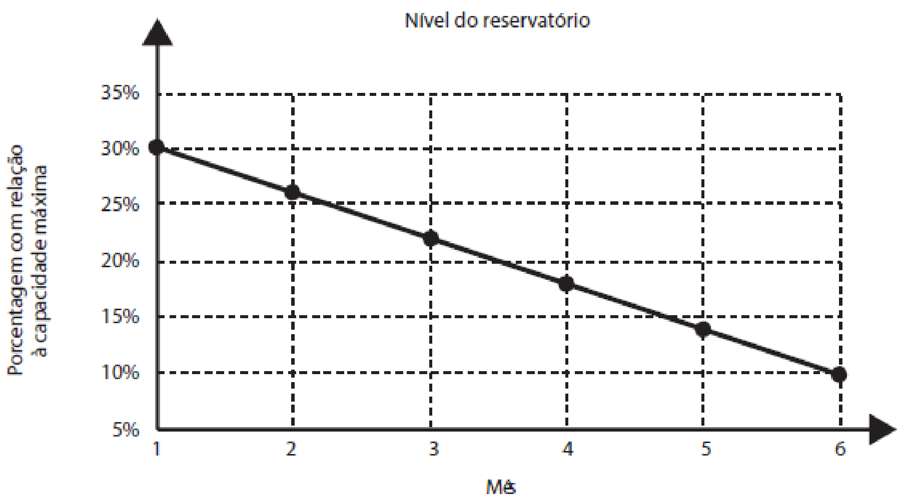
Outra maneira de resolver é utilizando a expressão do termo geral da P.A. $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.
Para que os anos mencionados sejam anos de Copa do mundo o n tem que necessariamente pertencer ao conjunto dos números naturais, $n \in \mathbb{N}$.

Orientações Pedagógicas:

Para uma melhor compreensão dos alunos, se achar necessário, dê exemplos de anos mais próximos a 2014.

ATIVIDADE 10

(Adaptada -ENEM 2016) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo aproximado para que o reservatório atinja o nível zero da sua capacidade?

Resolução Comentada:

Como podemos observar no gráfico, existe uma variação linear da porcentagem da capacidade do reservatório em função do mês, desta forma, podemos calcular a quantidade de meses para atingir o nível zero do reservatório, da seguinte maneira:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$0 = 30 + (n-1) \cdot \left(\frac{-20}{5}\right)$$
$$0 = 30 - \frac{20}{5}n + \frac{20}{5}$$
$$0 = \frac{150}{5} - \frac{20}{5}n + \frac{20}{5}$$
$$0 = 150 - 20n + 20$$
$$0 = 170 - 20n$$
$$20n = 170$$
$$n = \frac{170}{20} = \frac{17}{2}$$

n = 8,5 meses ou 8 meses e meio.

Atenção: A razão foi encontrada considerando que em 5 intervalos de meses houve uma variação de 20% do nível de água. Foi considerada uma razão negativa, pois a cada mês a porcentagem de água no reservatório estava diminuindo.

Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

ATIVIDADE 1

O gerente de um supermercado contratou uma empresa para a distribuição de seus panfletos. No primeiro dia foram entregues 960 panfletos em diferentes regiões da cidade e planejou-se que, nos dias seguintes, seriam entregues, por dia, 50 panfletos a mais do que no dia anterior. Sendo assim:

a) quantos panfletos foram distribuídos no quinto dia de trabalho?

b) ao final do décimo dia de entregas, quantos panfletos foram distribuídos no total?

Resolução Comentada:

a) Temos a P.A. (960, 1010, 1060, 1110, 1170), somando os termos, temos que:

960 + 1010 + 1060 + 1110 + 1170 = 5300

b) Pode-se utilizar a fórmula para encontrar o termo geral de uma P. A. e calcular o décimo termo:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$a_{10} = 960 + (10-1) \cdot 50$$
$$a_{10} = 1410$$

Somando o primeiro termo com o décimo termo temos: 960 + 1410 = 2370.

Por meio de perguntas reflexivas, procure levar o aluno a observar que o valor 2370 aparece 5 vezes na soma dos 10 termos, pois são 5 pares de termos. Então:

$$5 \cdot 2370 = 11\,850 \text{ jornais}$$

ATIVIDADE 2

Para responder ao item b da questão anterior, um aluno pensou organizou seus cálculos da seguinte maneira:

Dia	Número de panfletos entregues
1	960
2	1010
3	1030
4	1110
5	1160
6	1210
7	1260
8	1310
9	1360
10	1410

a) Observando o número de panfletos entregue em cada dia, o aluno notou que:

960 + 1410 = 1010 + 1360 = 1060 + 1310 =1110 + 1260 = 1160 + 1210 = 2370

Concluiu, assim, que ao final de 10 dias já haviam sido distribuídos 6210 panfletos, no total.
Você considera correto o algoritmo usado por esse aluno?

Resolução Comentada:

O raciocínio inicial está correto, mas ele se equivocou ao multiplicar 2370 por 10. O correto é multiplicar por 5, que é a quantidade de somas iguais realizadas.

Orientações Pedagógicas:

Professor, procure enfatizar que 5 é a quantidade de pares, o mesmo que $\frac{10}{2}$ e isso ampliará a possibilidade de dedução da fórmula dos termos de uma P.A.

b) Essa sequência de passos para se obter a soma dos termos de uma PA pode ser vista como um algoritmo que permite rapidez e precisão no cálculo e, por isso mesmo, pode e deve ser bem compreendida e utilizada sempre que possível. Neste caso, usamos a seguinte expressão para representar a soma dos 10 termos desta sequência algébrica:

$$S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot \frac{10}{2}$$

Escreva uma expressão que generalize a soma de n termos para uma sequência aritmética qualquer.

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

ATIVIDADE 3

O número mensal de refeições vendidos em um restaurante paulista aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 3000 refeições; em fevereiro, 3150; em março, 3300. Esse padrão de crescimento se manteve para os meses subsequentes.
Durante todo o ano, quantas refeições foram vendidas por este restaurante?

Resolução Comentada:

Primeiramente é necessário encontrar o valor do 12º mês, o a_{12}.
Para tanto utilizamos a fórmula do termo geral de uma P.A.:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_{12} = 3000 + (12 - 1) \cdot 150$$
$$a_{12} = 4650$$

Agora utilizamos a fórmula para obter a soma de uma P.A. finita.

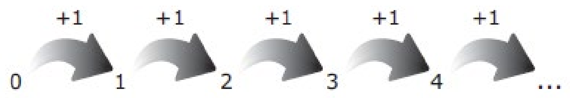
$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$
$$S_{12} = (3000 + 4650) \cdot \frac{12}{2}$$
S_{12}= 45900 refeições

Orientações Pedagógicas:

Professor, esta atividade tem como objetivo principal verificar se o aluno tem domínio dos conceitos básicos e da utilização correta das fórmulas relacionadas a P.A.. Caso perceba que os alunos apresentam dificuldades, promova momentos de realização de outras atividades, em que os alunos possam trocar ideias com outros colegas de grupo.

ATIVIDADE 4

A sequência dos números naturais é construída, como sabemos, pelo acréscimo de uma unidade a um termo já conhecido:



a) Quais são os 5 primeiros termos dessa sequência?
(0, 1, 2, 3, 4)

b) Qual é o termo a_{37}?
n – 1 = 37 –1 = 36 ou 35 + 1 = 36

Orientações Pedagógicas:

*Pode acontecer que alguns alunos não consigam sistematizar a expressão algébrica: **n - 1**. É provável que alguns alunos irão concluir que "**é a posição pedida menos uma unidade**". Questione se alguém pensou em responder utilizando a álgebra. Se for preciso, apresente o termo n - 1 e provoque uma reflexão sobre o que isso representa e de que forma pode ser útil.*

c) Como se pode determinar um termo a_n qualquer?

$a_n = a_1 + (n – 1) \cdot r$
$a_n = 0 + (n – 1) \cdot 1$
$a_n = n – 1$

d) Calcule a soma dos termos desta sequência, desde o 21° termo até o 51°

São 31 termos do 21° ao 51°, então n = 31 (51 - 21 =30; 30 + 1 = 31)
Consideramos a P.A. a partir do 21° termo e isto pode ser apontado na fórmula, como segue na segunda linha da resolução
$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$ (na linha abaixo trocaremos a_1 por a_{21}, pois este é o primeiro termo da sequência cuja soma deverá ser calculada)

$$S_{31} = (a_{21} + a_{51}) \cdot \frac{31}{2}$$
$$S_{31} = (20 + 50) \cdot \frac{31}{2}$$
$$S_{31} = 70 \cdot \frac{31}{2}$$
$$S_{31} = 1085$$

ATIVIDADE 5

Utilizando-se um fio de comprimento **L** é possível construir uma sequência de 16 quadrados em que a medida do lado de cada quadrado, a partir do segundo, é 2 cm maior que a medida do lado do quadrado anterior. Sabendo que para a construção do sétimo quadrado são necessários 68 cm, determine o valor de **L**.

Orientações Pedagógicas:

Neste momento é importante que seus alunos tenham um tempo para ler e montar estratégias de modo a resolver o problema. É uma atividade que propicia o trabalho em grupos. Primeiro solicite que leiam e tentem compreender o problema individualmente. Faça questionamentos que possibilite que busquem as respostas no próprio problema. Por exemplo:

- *Qual a figura que será formada com o fio?*
- *Quais as principais características e propriedades do quadrado?*

Anote as respostas em uma parte da lousa que pode ficar disponível para a leitura durante a resolução do problema.

Em seguida, indique a formação de grupos previamente pensados por você.

Pode levar como material de apoio para que montem os quadrados de forma experimental: canudos de plástico para serem cortados; palitos de madeira; material de desenho; barbante, ou papel quadriculado. Se um destes caminhos forem utilizado, sugira que utilizem a régua para aferir as medidas e que anotem os procedimentos utilizados. Pode sugerir que cada grupo utilize um dos materiais e depois socializem os procedimentos adotados.

Resolução Comentada:

Inicialmente será verificado se os números que compõe a sequência de quadrados representam uma progressão aritmética.

Cada termo desta sequência será representado por um quadrado de lado 2 cm maior que a medida do lado do quadrado anterior, assim cada termo é representado pelo perímetro do quadrado, ou seja, a sequência é:

$(PQ_1, PQ_2, PQ_3, PQ_4, PQ_5, PQ_6, PQ_7)$, onde

PQ_1 representa o perímetro do quadrado que ocupa a primeira posição.

PQ_2 representa o perímetro do quadrado que ocupa a segunda posição e assim sucessivamente.

Pelas informações do enunciado temos que, "para a construção do sétimo quadrado são necessários 68 cm" de fio, ou seja, $PQ_7 = 68$

E que, "a partir do segundo, é 2 cm maior que a medida do lado do quadrado anterior", percebemos que a razão é $2 \cdot 4 = 8$ cm.

Logo, para calcular o perímetro do primeiro quadrado, $PQ_1 = a_1$, aplicamos a fórmula do termo geral temos,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot 8$$
$$68 = a_1 + 48$$
$$a_1 = 20$$

P.A. = (20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, ..., a_{16}). Com o comprimento L, é possível construir 16 quadrados (informações no próprio texto do problema). Podemos concluir que o perímetro do quadrado que está na 16ª posição utilizando:

$$a_{16} = 20 + (16-1) \cdot 8$$
$$a_{16} = 20 + 15 \cdot 8$$
$$a_{16} = 20 + 120$$
$$a_{16} = 140 \text{ cm}$$

P. A. = (20, 28, 36, ..., 140)

Temos agora uma P.A. de 16 termos, sendo que o valor do primeiro é 20 cm e o valor do último termo é 140 cm.

O comprimento do fio L é a soma dos perímetros de cada quadrado da sequência:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$
$$S_{16} = (a_1 + a_{16}) \cdot \frac{n}{2}$$
$$S_{16} = (20 + 140) \cdot \frac{16}{2}$$
$$S_{16} = 160 \cdot 8$$
$$S_{16} = 1280 \text{ cm} = 12{,}80 \text{ m}$$

ATIVIDADE 6

Suponha que uma pessoa aplique mensalmente, durante 8 meses, uma quantia fixa de 200 reais a juros simples de 5%. Ao final, depois dos 8 meses de aplicação, quanto essa pessoa terá acumulado? A tabela de capitalização a seguir pode ajudá-lo a organizar o método de resolução:

Mês	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	Final
CAPITAL	200	210	220	230	240	250	260	270	280
		200	210	220	230	240	250	260	270
			200	210	220	230	240	250	260
				200					
					200				
						200			
							200		
Total a cada mês	200	410	630	860					

Orientações Pedagógicas:

Propondo um problema dessa natureza aos seus alunos, poderá comentar que ele é de fácil resolução por envolver juros simples, mas que no caso real de um capital aplicado a juros compostos, será necessário um método organizado de resolução. Justifica-se, dessa maneira, o processo representado na tabela acima.

No caso real, de uma capitalização a juros compostos, o esquema de resolução será similar ao apresentado, variando apenas a forma de crescimento das parcelas aplicadas.

Resolução Comentada:

Mês	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	Final
CAPITAL	200	210	220	230	240	250	260	270	280
		200	210	220	230	240	250	260	270
			200	210	220	230	240	250	260
				200	210	210	230	240	250
					200	210	220	230	240
						200	210	220	230
							200	210	220
								200	210
Total a cada mês	200	410	630	860	1100	1350	1610	1880	1960

Os 200 reais depositados no primeiro mês tornam-se 210 reais, no segundo mês, 220 reais, no terceiro mês, e assim por diante, tornando-se, ao final, 280 reais. Os 200 reais depositados no segundo mês, de modo análogo,

convertem-se em 270 reais, ao final de sete meses de aplicação. Seguindo o raciocínio, o saldo final da aplicação será o resultado da adição dos valores da última coluna da tabela, que são os termos de uma PA:
Saldo final = 210 + 220 + 230 + 240 + 250 + 260 + 270 + 280

Saldo final = $\frac{(210 + 280) \cdot 8}{2} = 1960$

Portanto, o saldo final da aplicação será igual a R$ 1960,00.

Chamamos de Progressão Geométrica – P.G. uma sequência numérica que apresenta razão constante na sua formação, isto é, o valor multiplicado a cada termo é sempre o mesmo.

ATIVIDADE 1

(AAP – 2016) Dada a sequência: $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$ pode-se concluir que:

(A) é uma PG, pois se considerarmos um termo qualquer e multiplicarmos por um valor constante chamado de razão da PG, obtemos seu sucessor. Neste caso, a razão da PG é igual a 3.

(B) é uma PG, pois se considerarmos um termo qualquer e multiplicarmos um valor constante chamado de razão da PG, obtemos seu sucessor. Neste caso, a razão da PG é igual a $\frac{1}{3}$.

(C) não é uma PG, pois ela não é composta por números naturais.

(D) não é uma PG, pois ela possui duas razões para uma mesma sequência, ou seja, o racional $\frac{1}{3}$ e o natural 3.

Orientações Pedagógicas:

Esta questão tem como objetivo a investigação da regularidade de uma sequência numérica e consequentemente aferir se realmente ela se refere a uma P.G., identificando a constante multiplicativa de regularidade, a razão da P.G..

Antes de solicitar a resolução desta atividade, apresente sequências que podem ser comparadas, sem nominá-las se são P.A. ou P.G. e, a partir desta comparação, faça junto aos alunos a sistematização dos conceitos relacionados à P.G..

A rigor, a sistematização não precisa ser igual a que se segue, até porque haverá contribuições advindas do vocabulário dos alunos. Apenas deixaremos aqui um texto base, para consulta.

Ao final, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

Resolução Comentada:

"Uma Progressão Geométrica P.G. é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, em que cada termo a_n, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação de seu antecedente a_{n-1} por uma constante diferente de zero".

Ao localizar a razão desta sequência podemos verificar que a resposta correta é a letra a.

Para calcular a razão deveremos dividir o valor de um termo pelo valor do termo anterior:

$$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{9}{3} = 3$$

Pode-se também generalizar, a partir de uma sequência hipotética, a existência da constante multiplicativa, a razão.

Seja a sequência:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

A sequência dada, será uma Progressão Geométrica, se e somente se:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Então, na sequência apresentada, temos que:

$$\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$$

Verificando se a sequência é uma P.G:

$$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = \frac{1}{9} \cdot 27 = 3$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

$$\frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{9}{3} = 3$$

Pelos cálculos apresentados, verifica-se que há uma constante multiplicativa, cujo valor é 3, portanto a sequência dada é uma P.G, desta forma conclui-se que a (A) é a alternativa correta.

ATIVIDADE 2

(AAP – 2017) O Índice de Preços de Imóveis é o principal termômetro do mercado imobiliário brasileiro. Nesse contexto, ao pensar matematicamente sobre o preço de um imóvel, em São Paulo, que sofre um acréscimo de 10%, todo mês, temos uma sequência de valores que corresponde a uma:

(A) Progressão Geométrica de razão 1,1.

(B) Progressão Geométrica de razão 0,1.

(C) Progressão Aritmética de razão 1,1.

(D) Progressão Aritmética de razão 0,1.

(E) Progressão Geométrica de razão 10.

A maneira pela qual você pensou na resolução da questão é muito importante, portanto escreva como você chegou à resposta.

Orientações Pedagógicas

O objetivo da questão é verificar a capacidade do aluno em aplicar conhecimentos matemáticos a situações de cotidiano financeiro. Amplie com eles, através de uma conversa no coletivo sobre o que é mercado imobiliário; acréscimo; qual a função da palavra "termômetro" neste contexto. Tudo com o objetivo de que, sabendo do que se trata o problema, a resolução seja mais segura e assertiva.

Ao circular pela sala, observe quais estratégias estão utilizando para que depois você possa ter subsídios para nortear a socialização. Se perceber que os alunos estão com muita dificuldade, amplie a compreensão e conhecimento dos alunos com exemplos numéricos e depois passe para exemplos algébricos.

Resolução Comentada:

Analisando a questão:

Aumentar 10% sobre o valor anterior, todo mês, significa:

$$x + \frac{10}{100}x$$

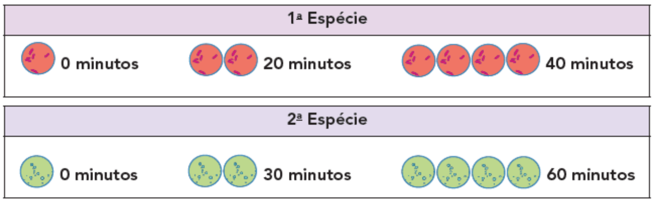
Resolvendo a adição:

$$x + \frac{10x}{100} = \frac{100x + 10x}{100} = \frac{110x}{100} = 1{,}1x$$

Assim sendo, conclui-se que se trata de uma progressão geométrica de razão q = 1,1. Portanto a alternativa (A) é a correta.

ATIVIDADE 3

(AAP - 2016) Em determinada amostra encontram-se duas populações distintas de bactérias. A 1ª espécie tem sua população duplicada a cada 20 minutos, e a segunda tem sua população duplicada a cada 30 minutos, conforme mostra a figura:



De acordo com as informações, após 3 horas, a quantidade total de bactérias das duas espécies será de:

Orientações Pedagógicas:

Permita que os alunos tentem resolver utilizando estratégias próprias. Mesmo que não montem uma tabela, considere as diferentes maneira de resolver o problema. No momento em que for fazer a correção da atividade, peça que pelo menos duas estratégias sejam apresentadas e que os demais alunos digam o que vêm de semelhante entre as duas. O intuito é desenvolver a autonomia dos alunos.

Resolução Comentada:

Apresentamos a seguir uma das possibilidades de resolução da questão proposta. Segundo os dados apresentados, temos que:

1ª Espécie:

Período	Tempo (minutos)	Quantidade
Situação inicial	0	1
	20	2
1ª hora	40	4
	60	8
2ª hora	80	16
	100	32
	120	64
3ª hora	140	128
	160	256
	180	**512**

2ª Espécie

Período	Tempo (minutos)	Quantidade
1ª hora	0	1
	30	2
	60	4
2ª hora	90	8
	120	16
3ª hora	150	32
	180	**64**

Somando-se as quantidades das 1ª e 2ª espécies encontramos 576 bactérias..

ATIVIDADE 4

Imagine duas situações onde dois irmãos resolvem fazer economias juntando moedas.

- Marcos guardou em seu cofrinho 2 moedas no primeiro dia e, a partir do segundo dia, sempre guardava duas moedas a mais que a quantidade guardada no dia anterior.

- Marcos guardou em seu cofrinho 2 moedas no primeiro dia e, a partir do segundo dia, sempre guardava duas moedas a mais que a quantidade guardada no dia anterior.

a) Calcule a quantidade de moedas que Marcos guardou em cada um dos cinco primeiros dias. Represente esses valores como elementos de um conjunto:

M = {____, ____, ____, ____, ____}.

b) Qual é tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto M?

c) Qual é a lei de formação dessa sequência?

d) Calcule a quantidade de moedas que Davi guardou em cada um dos seis primeiros dias.

D = {____, ____, ____, ____, ____}.

e) Qual tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto D?

f) Construa um gráfico a partir dos valores encontrados nas duas sequências de coordenadas (n, y), onde n é a posição de cada termo e y o valor presente em cada posição. Anote pelo menos duas observações em relação ao comportamento de crescimento delas.

Orientações Pedagógicas:

Essa atividade propõe que o aluno relacione e compare as características e propriedades da P.A. e P.G.. Note que todos os itens propõe uma retomada dos objetos de conhecimentos e que o item f) reúne todas as informações quando propõe a representação de ambas sequências em um mesmo plano. Sugerimos uma atenção especial a este item, que, por meio de um recurso visual, pode ser decisivo para a compreensão dos alunos em relação ao crescimento de cada uma.

Se for possível, pode utilizar o GEOGEBRA para explorar ainda mais o comportamento de crescimento desta e de outras sequências. Lembrando que serão apenas pontos, pois a sequência é discreta.

Resolução Comentada:

a) A sequência que expressa os valores que Marcos guardou é: M = (2, 4, 6, 8, 10, 12)

b) A sequência dos elementos de M forma uma P.A., pois a partir do primeiro elemento, os demais são obtidos somando 2 unidades ao anterior.

c) $a_n = 2 \cdot n$ ou $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2 \cdot n$

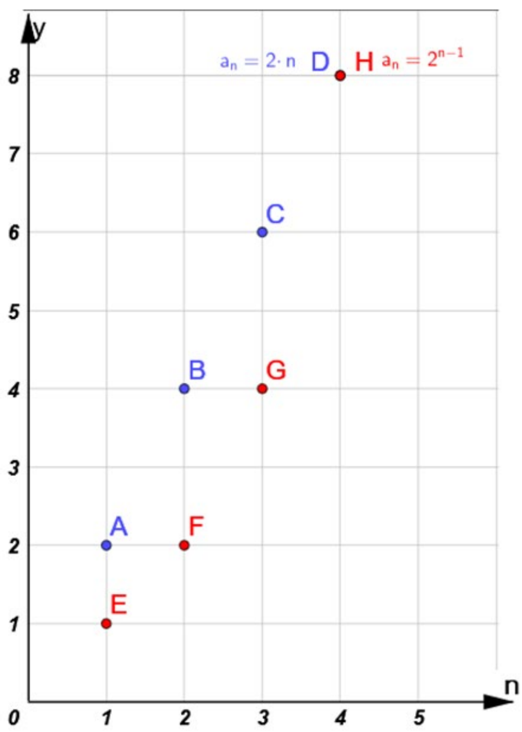
d) A sequência de valores que Davi guardou é: D = (1, 2, 4, 8, 16, 32)

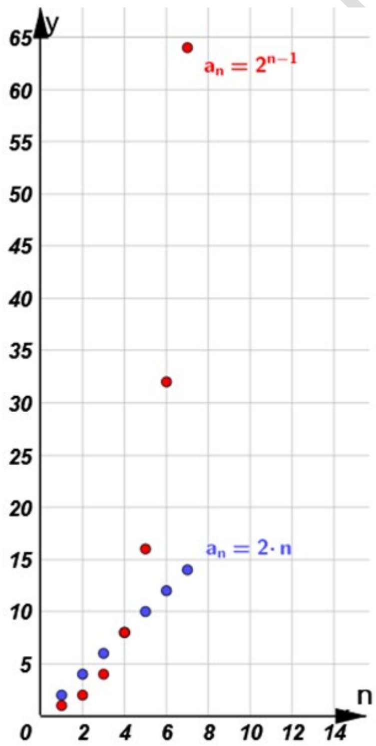
e) É uma Progressão Geométrica P.G., pois os elementos desse conjunto são obtidos multiplicando um mesmo valor a partir do termo anterior: $a_n = 2^{n-1}$

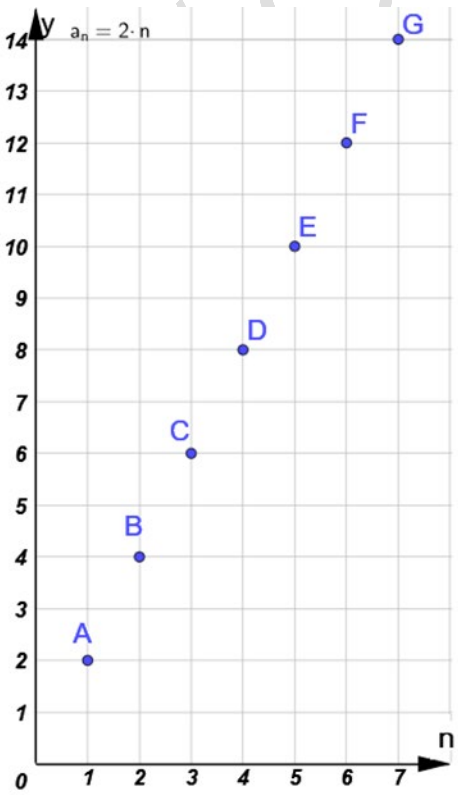
f) Todas as imagens são de um mesmo gráfico.

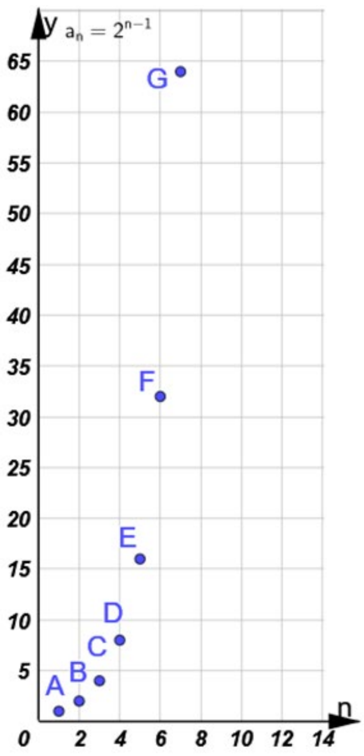
n	$y = 2 \cdot n$	(n, y)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	6	(3, 6)
4	8	(4, 8)
5	10	(5, 10)
6	12	(6, 12)

n	$y = 2^{n-1}$	(n, y)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	4	(3, 4)
4	8	(4, 8)
5	16	(5, 16)
6	32	(6, 32)









ATIVIDADE 5

As idades da senhora Elizabeth, de sua filha e de sua neta, formam, nessa ordem, uma P.G. de razão $\frac{2}{3}$. Determine as três idades, sabendo que a neta tem cinquenta anos a menos que a avó.

Resolução Comentada:

Como as idades da senhora Elizabeth, de sua filha e de sua neta formam, nesta ordem, uma P. G. de razão $\frac{2}{3}$.

Chamamos:

E : a idade da Elizabeth;

$\frac{2}{3}$ E : idade da filha da Elizabeth;

$\frac{4}{9}$ E : idade da neta da Elizabeth;

$$\left(E,\ \frac{2}{3}E,\ \frac{4}{9}E\right)$$

A neta tem 50 anos a menos que a avó, ou seja, a diferença entre a idade da avó e da neta é de 50 anos.

$$E - \frac{4}{9}E = 50$$
$$9E - 4E = 450$$
$$5E = 450$$
$$E = 90 \text{ anos}$$

Resposta: Elizabeth tem 90 anos, sua filha tem 60 anos e sua neta 40 anos.

ATIVIDADE 6

Existe um caso em que a medida do lado, do perímetro e da área, formam, nesta ordem, uma P.G. Desta forma, a medida do lado será:

SUGESTÃO:

seja (a, b, c) uma P.G., então: $\boxed{b^2 = a \cdot c}$

Orientações Pedagógicas:

Inicialmente utilize exemplos numéricos para explicar sobre a média geométrica dos termos. Acreditamos que desta forma o aluno possa compreender melhor quando for apresentados termos cuja representação é algébrica. Selecione também, com muito critério, sequências algébricas para que sirvam de exemplo.

Por exemplo: $(x, 2x^2, 4x^3)$

Ao final da atividade, peça para que o aluno certifique-se que a sequência encontrada é uma P.G. e que o 2° termo é a média geométrica dos termos adjacentes.

Resolução Comentada:

Observamos que, em toda P.G., o valor absoluto de cada termo, a partir do segundo, é a **média geométrica** entre o termo anterior e do posterior.

Seja uma P.G. $(L,\ 4.L,\ L^2)$, cujos termos são o lado, o perímetro e a área de um quadrado.

Seguindo a sugestão dada, temos que:

$$(4 \cdot L)^2 = L \cdot L^2 \text{ , com } L \neq 0$$
$$16 \cdot L^2 = L^3$$
$$L^3 - 16 \cdot L^2 = 0$$
$$L^2\,(L - 16) = 0$$
$$L^2 = 0 \text{ ou } (L - 16) = 0$$
$$L = 0, \text{ não convém, pois } L \neq 0, \text{ ou } L = 16$$

Logo, L = 16

Verificando para L = 16, temos:

$$(L, 4 \cdot L,\ L^2)$$
$$(16,\ 64,\ 256)$$

ATIVIDADE 7

Qual é a condição sobre os números **a, b, c,** de modo que a sequência (a, b, c) seja, simultaneamente, uma P.A. e uma P.G.?

SUGESTÃO:

seja (a, b, c) uma P.A., então: $b = \frac{a + c}{2}$

Orientações Pedagógicas:

Esta atividade exige do aluno uma compreensão consistente sobre a relação entre os termos de uma P.A. e uma P.G.. O que não impede que a atividade possa ser útil para a ampliação da aprendizagem dos alunos ainda com dúvidas. Tudo vai depender de como a atividade será abordada e qual movimento metodológico será requerida.

Sugerimos que a discussão se inicie no coletivo, e a resolução seja solicitada em grupos organizados por níveis de proficiência. Enquanto alguns grupos realizarão a atividade, você poderá atender os grupos que ainda apresentem dificuldade. O objetivo é a compreensão de todos os alunos

Resolução Comentada:

A condição para que a sequência (a, b, c) seja, simultaneamente uma P.A. e uma P.G. é que, a média aritmética deve ser igual à média geométrica.

$$\frac{a + c}{2} = \sqrt{a \cdot c}$$

$$\left(\frac{a + c}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{a \cdot c}\right)^2$$

$$\frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot c + c^2}{4} = a \cdot c$$

$$a^2 + 2ac + c^2 = 4ac$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0$$

$$(a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c$$

Cálculo do valor de b:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

$$b = \frac{a + a}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Portanto, a condição para que uma dada sequência (a, b, c), seja simultaneamente uma P.A. e uma P.G., será: **a = b = c,** ou seja, uma sequência, em que todos termos são iguais, por exemplo: (1, 1, 1), (20, 20, 20), etc., note que na P.A. de três termos a razão é zero, e na P.G. a razão é 1.

Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

ATIVIDADE 1

Considere a sequência numérica **(2, 6, 18, 54,...)**

a) Qual será o próximo termo dessa sequência?

b) E o 8º termo dessa sequência?

c) Qual é o "passo" multiplicando a cada termo que permite obter o termo seguinte?

Algumas expressões podem ser usadas para o cálculo da soma dos termos de uma PG, de modo mais rápido e eficaz do que o cálculo da soma termo a termo:

$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$	$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$

Resolução Comentada:

a) A sequência numérica (2, 6, 18, 54, ...) representa uma P.G, de razão 3, pois, $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$, logo a_5 é:

$$a_5 = 54 \cdot 3 = 162$$

b) Pela fórmula do termo geral temos:

$$a_8 = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2187 = 4374$$

c) O "passo" é multiplicar por 3.

ATIVIDADE 2

Considerando a sequência numérica **(2, 6, 18, 54, ...)**, calcule:

a) a soma dos 10 primeiros termos:

b) a soma dos 100 primeiros termos:

Orientações Pedagógicas:

A utilização da fórmula requer a compreensão do seu objetivo, principalmente porque futuramente o aluno terá acesso à fórmula de soma dos termos infinitos de uma P.G., com razão q: $0 \leq q \leq 1$.

Com poucas tentativas o aluno perceberá a impossibilidade de somar vários termos de uma P.G. sem utilizar a fórmula.

Resolução Comentada:

a) Sabendo-se que a soma dos n primeiros termos de uma P.G. é dada por: $S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$, temos que a soma dos 10 primeiros termos da sequência será:

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{(3^{10} - 1)}{3 - 1}$$

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{(59049 - 1)}{2}$$

$$S_{10} = 59048$$

b) A soma dos 100 primeiros termos será:

$$S_{100} = 2 \cdot \frac{(3^{100} - 1)}{3 - 1}$$

$$S_{100} = 2 \cdot \frac{(3^{100} - 1)}{2}$$

$$S_{100} = 3^{100} - 1$$

ATIVIDADE 3

Supondo que um cidadão aplique mensalmente, durante 8 meses, uma quantia fixa de 200 reais a juros compostos de 5%. Ao final, depois dos 8 meses de aplicação, quanto essa pessoa terá acumulado? A tabela de capitalização a seguir pode ajudá-lo a organizar o método de resolução.

Mês	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	Final
CAPITAL	200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$	$200 \cdot 1{,}05^7$	$200 \cdot 1{,}05^8$
		200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$	$200 \cdot 1{,}05^7$
			200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$
				200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$
					200				
						200			
							200		
								200	$200 \cdot 1{,}05$

Resolução Comentada:

Tabela após a inserção de todos os valores que faltavam:

Mês	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	Final
CAPITAL	200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$	$200 \cdot 1{,}05^7$	$200 \cdot 1{,}05^8$
		200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$	$200 \cdot 1{,}05^7$
			200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$	$200 \cdot 1{,}05^6$
				200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$	$200 \cdot 1{,}05^5$
					200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$	$200 \cdot 1{,}05^4$
						200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$	$200 \cdot 1{,}05^3$
							200	$200 \cdot 1{,}05$	$200 \cdot 1{,}05^2$
								200	$200 \cdot 1{,}05$

A soma dos valores da última coluna da tabela fornece o total capitalizado. Trata-se da soma dos termos de uma PG de razão 1,05.

$$S = 200 \cdot \left(1{,}05 + 1{,}05^2 + 1{,}05^3 + 1{,}05^4 + 1{,}05^5 + 1{,}05^6 + 1{,}05^7 + 1{,}05^8\right)$$

$$S = 200 \cdot \frac{1{,}05^8 \cdot 1{,}05 - 1{,}05}{1{,}05 - 1} = 200 \cdot \frac{1{,}05^8 \cdot 1{,}05 - 1{,}05}{0{,}05}$$

O cálculo dessa soma é trabalhoso se realizado manualmente. Por isso, propomos que os alunos possam utilizar calculadoras para agilizar a obtenção do resultado, sem qualquer perda de significado para o conceito. O importante, aqui, não é saber calcular uma potência, coisa que os alunos já devem saber, mas sim obter a expressão numérica que conduz ao resultado desejado. Todavia, mesmo utilizando calculadoras, será interessante simplificar inicialmente a expressão, como neste caso:

Efetuando a fatoração do numerador da fração, pois 1,05 é fator comum, temos:

$$S = 200 \cdot \frac{1{,}05 \cdot (1{,}05^8 - 1)}{0{,}05}$$

Dividindo 1,05 por 0,05, temos:

$$S = 200 \cdot 21 \cdot (1{,}05^8 - 1) = 2005{,}31$$

Caso o professor opte por não permitir o uso de calculadoras, o que não aconselhamos, poderá fornecer aos alunos, previamente, o valor da potência.

No caso, $1{,}05^8 \cong 1{,}477$

Desta forma, a resposta será:

$$S = 200 \cdot 21 \cdot (1{,}477 - 1) = 2003{,}4$$

Comentários Pedagógicos:

Anteriormente, apresentamos o estudo da soma dos n primeiros termos de uma P.A, e foi indicada uma atividade similar a esta, abordando a correção monetária calculada por juros simples , nesta situação o montante após 8 meses resultou em R\$ 1.960,00 e no caso desta atividade em regime de juros compostos, o montante é de R\$ 2.005,31, ficando evidente que o processo a juros compostos conduz a um montante maior.

ATIVIDADE 4

No financiamento de uma moto, ficou combinado que o proprietário faria o pagamento em vinte prestações mensais que formam uma P.G. de razão 1,02 ..
Sabendo que o valor da quarta prestação era de R\$ 318,00, determine o valor total pago pela moto.

Resposta: O valor total do financiamento da moto, será de R\$ 7.500,00.

Considere: $1{,}02^3 \cong 1{,}06$ e $1{,}02^{20} \cong 1{,}5$

Orientações Pedagógicas:

O objetivo principal da atividade é que o aluno desenvolva a habilidade de resolver questões envolvendo diversas variáveis. Visto isso, a possibilidade de utilizar a calculadora pode ser considerada.

Resolução Comentada:

De acordo com os dados da atividade, temos que a razão q = 1,02 e $a_4 = 318$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$318 = a_1 \cdot 1{,}02^{(4-1)}$$
$$318 = a_1 \cdot 1{,}02^3$$
$$318 = a_1 \cdot 1{,}06$$
$$a_1 = \frac{318}{1{,}06}$$
$$a_1 = 300$$

Para calcular o valor pago pela moto, temos que encontrar a soma de todas as 20 prestações.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{20} = \frac{300 \cdot (1{,}02^{20} - 1)}{1{,}02 - 1} = \frac{300 \cdot (1{,}5 - 1)}{0{,}02} = \frac{300 \cdot 0{,}5}{0{,}02} = \frac{150}{0{,}02} = 7500$$

ATIVIDADE 5

Seja a sequência definida pelo termo geral, $a_n = \frac{3^n}{6}, n \in N^*$

a) Calcule a soma de seus três primeiros termos.

b) Quantos termos devemos somar na sequência, a partir do primeiro, a fim de obter soma igual a 14 762?

Orientações Pedagógicas:

Até o momento foi solicitado ao aluno que, a partir de uma sequência dada, reconhecessem os termos. Neste caso, tem-se a lei de formação e a partir dela os termos serão encontrados. Por ser um movimento pouco explorado pelos alunos, é importante que questionamentos sejam realizados: como devemos fazer a leitura de $a_n = \frac{3^n}{6}, n \in N^*$? o que $a_n = \frac{3^n}{6}$ significa? porque $n \in N^*$? quem poderia encontrar primeiro termo e fazer o registro na lousa?

Resolução Comentada:

a)

Parte 1 – Obtendo os três primeiros termos da sequência:

Dada a expressão do termo geral: $a_n = \frac{3^n}{6}$, obtemos:

$$a_1 = \frac{3^1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{3^2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{3^3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Portanto, os três primeiros da sequência são:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

Parte 2 – A razão da sequência.

Analisando a sequência, verifica-se que ela é uma P.G. de razão 3, pois:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 3$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{2} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$$

b) $S_n = 14\,762$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$14\,762 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$14\,762 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3^n - 1)}{2}$$

$$14\,762 = \frac{(3^n - 1)}{4}$$

$$(3^n - 1) = 14\,762 \,.\, 4$$

$$3^n - 1 = 59\,048$$

$$3^n = 59\,049$$

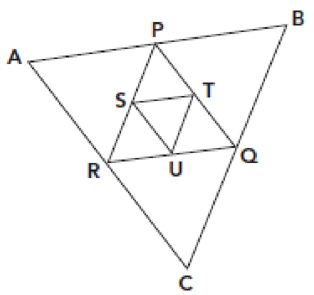
$$3^n = 3^{10}$$

$$n = 10$$

Soma dos infinitos termos de uma P.G. infinita.

ATIVIDADE 1

O triângulo ABC da figura a seguir é equilátero de lado 1u. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos o segundo triângulo PQR, unindo os pontos médios dos lados do triângulo PQR, obtemos o terceiro triângulo STU, e assim sucessivamente.



a) as medidas dos lados PQ, PR e RQ. (considere u a medida do lado do triângulo ABC)

b) o perímetro dos triângulos ABC, PQR e STU.

c) a sequência numérica cujos termos são os perímetros dos triângulos ABC, PQR, STU e de mais outros dois triângulos construídos segundo o mesmo critério.

d) a soma dos perímetros dos infinitos triângulos construídos por esse processo.

Orientações Pedagógicas:

Acreditamos ser importante que o aluno compreenda a composição da figura, qual a influência da informação "ponto médio" e, principalmente, qual o comportamento dela com a inserção de mais triângulos e de infinitos triângulos. A partir desta compreensão, retome o conceito de perímetros, principalmente dos triângulos já desenhados. Note que a resposta do itens a) e b) já estarão sendo tecidas em conjunto com os alunos. Este movimento no coletivo também é importante para a compreensão, mas não é o mesmo que fazer a explanação sobre o conteúdo sem a participação dos alunos.

Resolução Comentada:

a) todos os lados medem ½ u.

b)

Perímetro de ABC = 3u

Perímetro de PQR = $^3/_2$ u

Perímetro de STU = $^3/_4$ u

c)

3u, $^3/_2$ u, $^3/_4$ u, $^3/_8$ u, $^3/_{16}$ u

Para essas questões, é importante que o professor discuta, inicialmente, que, dado um triângulo ABC, se P e Q são pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente, então PQ é paralelo a AC, e sua medida é igual à metade de AC. O mesmo vale para os demais lados do triângulo PQR, visto que o triângulo ABC é equilátero.

Dessa forma, os perímetros dos triângulos da figura são, 3u, $^3/_2$ u, $^3/_4$ u.

A sequência dos infinitos triângulos assim construídos terá perímetros respectivamente iguais a:

$$3u,\ ^3/_2\,u,\ ^3/_4\,u,\ ^3/_8\,u,\ ^3/_{16}\,u, \cdots$$

d)

Após esse trabalho inicial, sugere-se que os alunos calculem as somas dos perímetros: dos dois primeiros, dos três primeiros, e assim por diante.

Assim, os alunos obteriam as seguintes somas:

$$S_1 = 3$$

$$S_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$S_3 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5{,}25$$

$$S_4 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{45}{8} = 5{,}625$$

$$S_5 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{93}{16} = 5{,}8125$$

$$S_6 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} = \frac{189}{32} = 5{,}90625$$

$$S_7 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} = \frac{381}{64} = 5{,}953125$$

Após esses cálculos, o professor poderia solicitar que os alunos fizessem suas conjecturas a respeito deles, procurando responder à questão: O que acontece à soma se as parcelas forem aumentando com os perímetros de outros triângulos da sequência?

É importante discutir com a turma que as somas aumentariam, com o acréscimo de novas parcelas, mas esse aumento é cada vez menor.

O uso da fórmula da soma dos termos de uma PG pode ampliar essa discussão:

$$S = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 3}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{a_n}{2} - 3}{-\frac{1}{2}}$$

A soma obtida está em função de a_n, aqui considerado o último termo. O questionamento a seguir é sobre o que ocorre com a_n, à medida que $\boldsymbol{n}$ cresce muito. As respostas dos alunos tendem a caminhar no sentido da intuição de que o último termo da sequência, supondo grande número de termos, será praticamente zero ou, como o professor poderá comentar, “tenderá a zero”. Assim, por meio da ideia de limite, pode-se perguntar aos alunos como fica a expressão da soma, uma vez que a_n é praticamente nulo. O correto será, nesse momento, substituir “S” por " $\lim\limits_{n\to\infty} S$ ".

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{\frac{a_n}{2} - 3}{-\frac{1}{2}} = \frac{0 - 3}{-\frac{1}{2}} = 6$$

Esse resultado nos diz que, quanto mais termos acrescentarmos à soma em questão, mais nos aproximaremos do valor limite, 6, sem jamais alcançá-lo.

$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} + \cdots = 6$, ou seja, o limite da soma quando n tende ao infinito é 6.

Reproduzindo esse raciocínio na expressão do cálculo da soma da PG, obtém a expressão do limite da soma dos infinitos termos de uma PG com razão no intervalo $-1 < q < 1$, que é esta:

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Professor, partir dessa discussão, será possível propor aos alunos a resolução de outras situações-problema.

Resumindo:

Na P.G. $(a_{1,}\ a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 \quad q}$$

Dizemos, então que a soma dos infinitos termos da P.G. infinita é igual a

$$S = \frac{a_1}{1 \quad q}$$

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Valéria Arcari Muhi

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Carolina dos Santos Batista Murauskas

ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

BIOLOGIA
Aparecida Kida Sanches – *Equipe Curricular de Biologia*; Beatriz Felice Ponzio – *Equipe Curricular de Biologia*; Airton dos Santos Bartolotto – *PCNP da D.E. de Santos*; Evandro Rodrigues Vargas Silvério – *PCNP da D.E. de Apiaí*; Ludmila Sadokoff – *PCNP da D.E. de Caraguatatuba*; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – *PCNP da D.E. de São Vicente*; Marly Aparecida Giraldelli Marsulo – *PCNP da D.E. de Piracicaba*; Paula Aparecida Borges de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 3*

FÍSICA
Ana Claudia Cossini Martins – *PCNP D.E. José Bonifácio*; Debora Cíntia Rabello – *PCNP D.E. Santos*; Carina Emy Kagohara *PCNP D.E. Sul 1* – Dimas Daniel de Barros – *PCNP D.E. São Roque*; Jefferson Heleno Tsuchiya – *Equipe Curricular de Física*; José Rubens Antoniazzi Silva – *PCNP D.E. Tupã*; Juliana Pereira Thomazo – *PCNP D.E. São Bernardo do Campo*; Jussara Alves Martins Ferrari – *PCNP D.E. Adamantina;* Sara dos Santos Dias – *PCNP D.E. Mauá; Thaís* de Oliveira Müzel – *PCNP D.E. Itapeva;* Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – *PCNP DE Leste 5*.

QUÍMICA
Alexandra Fraga Vasquez – *Equipe Curricular de Química*; Cristiane Marani Coppini – *PCNP D.E. São Roque*; Gerson Novais Silva – *PCNP D.E. Região de São Vicente;* Laura Camargo de Andrade Xavier – *PCNP D.E. Registro*; Natalina de Fátima Mateus – *PCNP D.E. Guarulhos Sul;* Wilian Guirra de Jesus – *PCNP D.E. Franca*; Xenia Aparecida Sabino – *PCNP D.E. Leste 5*.

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

GEOGRAFIA
Andréia Cristina Barroso Cardoso – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Sergio Luiz Damiati – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; André Baroni - *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Alexandre Cursino Borges Júnior – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Beatriz Michele Moço Dias – *PCNP da D.E. Taubaté*; Bruna Capóia Trescenti – *PCNP da D.E Itu*; Daniel Ladeira Almeida – *PCNP da D.E. São Bernardo do Campo*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Cleunice Dias de Oliveira Gaspar – *PCNP da D.E. São Vicente*; Cristiane Cristina Olímpio – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba*; Dulcinéa da Silveira Ballestero – *PCNP da D.E. Leste 5*; Elizete Buranello Perez – *PCNP da D.E. Penápolis*; Maria Julia Ramos Sant'Ana – *PCNP da D.E. Adamantina*; Márcio Eduardo Pedrozo – *PCNP da D.E. Americana*; Patrícia Silvestre Águas; Regina Célia Batista – *PCNP da D.E. Piraju*; Roseli Pereira De Araujo – *PCNP da D.E. Bauru*; Rosenei Aparecida Ribeiro Libório – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Sandra Raquel Scassola Dias – *PCNP da D.E. Tupã*; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 2*; Shirley Schweizer – *PCNP da D.E. Botucatu*; Simone Regiane de Almeida Cuba – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Telma Riggio – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Viviane Maria Bispo – *PCNP da D.E. José Bonifácio*.

FILOSOFIA
Produção, organização e revisão: Erica Cristina Frau – *PCNP da DRE Campinas Oeste*; Tânia Gonçalves – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular*

HISTÓRIA
1ª Série – Edi Wilson Silveira – *COPED – SEDUC*; Bruno Ferreira Matsumoto – *PCNP da D.E. de Itapetininga*. **2ª Série** – Tadeu Pamplona Pagnossa – *PCNP da D.E. de Guaratinguetá*. **3ª Série** – Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED – SEDUC; Rodrigo Costa Silva – PCNP da D.E. de Assis*.
Organização e revisão
Edi Wilson Silveira – *COPED – SEDUC;* Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED – SEDUC*

Colaboradora – Revisora de Língua Portuguesa
Caroline Cavalli.

SOCIOLOGIA
Emerson Costa – SEDUC/COPED/CEM – *Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Revisão
Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Organização
Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*

ÁREA DE LINGUAGENS

ARTE
Carlos Eduardo Povinha – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Eduardo Martins kebbe – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Adriana Marques Ursini Santás – *PCNP da D.E. Santos;* Ana Maria Minari de Siqueira – *PCNP da D.E. são José dos Campos*; Débora David Guidolín – *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Djalma Abel Novaes – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Eliana Florindo – *PCNP da D.E. Suzano*; Elisangela Vicente Prismit – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Madalena Ponce Rodrigues – *PCNP da D.E. Botucatu*; Marilia Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – *PCNP da D.E. São Vicente*; Patrícia de Lima Takaoka – *PCNP da D.E. Caraguatatuba;* Pedro Kazuo Nagasse – *PCNP da D.E. Jales*; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Caieiras*; Roberta Jorge Luz – *PCNP da D.E. Sorocaba*; Rodrigo Mendes – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Silmara Lourdes Truzzi – *PCNP da D.E. Marília;* Sonia Tobias Prado – *PCNP da D.E. Lins*.

EDUCAÇÃO FÍSICA
Luiz Fernando Vagliengo – *Equipe Curricular de Educação Física*; Marcelo Ortega Amorim – *Equipe Curricular de Educação Física;* Mirna Leia Violin Brandt – *Equipe Curricular de Educação Física;* Sandra Pereira Mendes – *Equipe Curricular de Educação Física*; Diego Diaz Sanchez – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Felipe Augusto Lucci – *PCNP da D.E. Itu*; Flavia Naomi Kunihira Peixoto – *PCNP da D.E. Suzano*; Gislaine Procópio Querido – *PCNP da D.E. São Roque*; Isabela Muniz dos Santos Cáceres – *PCNP da D.E. Votorantim*; Janaina Pazeto Domingos – *PCNP da D.E. Sul 3*; Katia Mendes Silva – *PCNP da D.E. Andradina*; Lígia Estronioli de Castro – *PCNP da D.E. Bauru*; Maria Izildinha Marcelino – *PCNP da D.E. Osasco*; Nabil José Awad – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Neara Isabel de Freitas Lima – *PCNP da D.E. Sorocaba*; Sandra Regina Valadão – *PCNP da D.E. Taboão da Serra*; Tiago Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Lins* ; Thaisa Pedrosa Silva Nunes – *PCNP da D.E. Tupã*

INGLÊS
Aderson Toledo Moreno – *PCNP da D.E. SUL 1*; Catarina Reis Matos da Cruz – *PCNP da D.E. Leste2*; Cíntia Perrenoud de Almeida – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba;* Eliana Aparecida Oliveira Burian – *COPED – CEM – LEM*; Emerson Thiago Kaishi Ono – *COPED - CEFAF – LEM;* Gilmara Aparecida Prado Cavalcante – *PCNP da D.E. Mauá;* Jucimeire de Souza Bispo – *COPED – CEFAF – LEM;* Liana Maura Antunes da Silva Barreto – *PCNP da D.E. Centro*; Luiz Afonso Baddini – *PCNP da D.E Santos;* Marisa Mota Novais Porto – PCNP – *D.E. Carapicuíba*; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – *PCNP – D.E. Centro-Oeste*; Pamella de Paula da Silva Santos – *COPED – CEM – LEM;* Renata Andreia Placa Orosco de Souza – *PCNP da D.E. Presidente Prudente;* Rosane de Carvalho – *PCNP da D.E. Adamantina;* Sérgio Antonio da Silva Teressaka – *PCNP da D.E Jacareí;* Viviane Barcellos Isidorio – *PCNP – D.E. São José dos Campos;* Vlademir Oliveira Ismael – *PCNP da D.E. SUL 1*.

LÍNGUA PORTUGUESA
Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo, Alzira Maria Sá Magalhães Cavalcante, Andrea Righeto, Cristiane Alves de Oliveira, Daniel Carvalho Nhani; Danubia Fernandes Sobreira Tasca, Débora Silva Batista Eilliar, Eliane Cristina Gonçalves Ramos, Helena Pereira dos Santos, Igor Rodrigo Valério Matias, Jacqueline da Silva Souza, João Mário Santana, Katia Amâncio Cruz, Letícia Maria de Barros Lima Viviani, Lidiane Máximo Feitosa, Luiz Eduardo Divino da Fonseca, Luiz Fernando Biasi, Márcia Regina Xavier Gardenal, Maria Madalena Borges Gutierre, Martha Wassif Salloume Garcia, Neuza de Mello Lopes Schonherr, Patrícia Fernanda Morande Roveri, Reginaldo Inocenti, Rodrigo Cesar Gonçalves, Shirlei Pio Pereira Fernandes, Sônia Maria Rodrigues, Tatiana Balli, Valquíria Ferreira de Lima Almeida, Viviane Evangelista Neves Santos, William Ruotti.
Leitura crítica e validação: Cristiane Aparecida Nunes; Edvaldo Cerazze; Fabiano Pereira dos Santos; Fabrício Cristian de Proença; Glauco Roberto Bertucci; Marcia Aparecida Barbosa Corrales; Maria José Constâncio Bellon; Maria Madalena Borges Gutierre; Mariângela Soares Baptistello Porto; Paula de Souza Mozaner; Raquel Salzani Fiorini; Reginaldo Inocenti; Ronaldo Cesar Alexandre Formici; Rosane de Paiva Felício; Roseli Aparecida Conceição Ota; Selma Tavares da Silva; Silvia Helena Soares.
Professores responsáveis pela organização, revisão adaptação e validação do material: Katia Regina Pessoa, Mara Lucia David, Marcos Rodrigues Ferreira, Mary Jacomine da Silva, Teônia de Abreu Ferreira.

MATEMÁTICA
Ilana Brawerman – *Equipe Curricular de Matemática*; João dos Santos Vitalino – *Equipe Curricular de Matemática;* Marcos José Traldi – *Equipe Curricular de Matemática;* Otávio Yoshio Yamanaka – Equipe Curricular de Matemática; Vanderley Aparecido Cornatione – *Equipe Curricular de Matemática;* Lilian Silva de Carvalho – *PCNP da D.E. de São Carlos;* Marcelo Balduíno – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte;* Maria Regina Duarte Lima – *PCNP da D.E. José Bonifácio;* Simone Cristina do Amaral Porto –*PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Talles Eduardo Nazar Cerizza – *PCNP da D.E. Franca;* Willian Casari de Souza – *PCNP da D.E. Araçatuba*.

TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
Adilson Vilas Boas – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Alessandro Antônio Bernardo – *PCNP da D.E. Jaú*; Alet Rosie de Campos Silva – *PCNP da D.E. Mirante do Paranapanema*; Aparecido Antonio de Almeida – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Arlete Aparecida de Almeida Oliveira – *SEDUC/COPED/ Centro de Inovação*; Aydê Pereira Salla – *PCNP da D.E. Campinas Leste*; Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/ Assessora Educação Integral*; *CIEB;* Camila Aparecida Carvalho Lopes – *SEDUC/ COPED/Assessora Técnica*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Debora Denise Dias Garofalo – *SEDUC/COPED/Assessora de Tecnologia*; Eduardo de Moura Almeida – *Assessora da Universidade de São Paulo*; *EducaMídia – Palavra Aberta;* Elaine Leite de Lima – *SEDUC/EFAPE/Técnico III*; Fabiano Pereira dos Santos – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Fábio Granella de Jesus – *PCNP da D.E. Fernandópolis*; Fabrício Cristian de Proença – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Fernanda Henrique De Oliveira – *SEDUC/EFAPE/Diretora do DETED*; Fernando Carlos Rodrigues Pinto – *PCNP da D.E. Presidente Prudente*; *Fundação Telefonica Vivo; Fundação Vanzolini;* Grasiela Cabrio dos Santos Oliveira – *PCNP da D.E. Araraquara*; *Grupo Mais Unidos;* Helder Alexandre de Oliveira – *PCNP da D.E. Tupã*; Jacqueline Peixoto Barbosa – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; José Armando Valente – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; Liliane Pereira – *SEDUC/COPED/ Diretora do Centro de Inovação*; Leonardo Granado Garcia – *PCNPda D.E. Franca*; Lucy Mary Padilha Domingos – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Marcelo Suwabe – *PCNP da D.E. Santos*; Márcio Greyck Guimarães Correa – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Marcos Vinícius Marcondes de Menezes – *PCNP da D.E. Andradina*; Maria Elizabeth de Almeida – *Assessora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*; Mariana Moreira Martines – *PCNP da D.E. Bauru*; Matheus Lima Piffer – *PCNP da D.E. Limeira*; Patricia Pinto Santiago – *PCNP da D.E. Registro*; *Mundo Maker;* Pedro Henrique Eneas Ferreira – *PCNP da D.E. São Carlos*; Raquel Villa Nova Pedroso de Almeida – *PCNP da D.E. Norte 1*; Rebeka de Moraes Garcia – *PCNP da D.E. Mogi das Cruzes*; Rodrigo Prizoto – *PCNP da D.E. Taubaté*; Roseli Aparecida Conceição Ota – *PCNP da D.E. São Roque*; Roxane Helena Rodrigues Rojo – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; Salete Cristina Venarusso – *PCNP da D.E. Jaú*; Sandra Heloisa Mancebo Henrique – *PCNP da D.E. Registro*; Sandra Pereira Jardim – *PCNP da D.E. Osasco*; Sidemar Rodrigues (Nino) – *PCNP da D.E. Mogi Mirim*; Silene Kuin – *SEDUC/ EFAPE/Técnico I*; Silvia Helena Soares – *PCNP da D.E. Mogi Mirim*; Sílvia Nogueira – *PCNP da D.E. Leste 1*; *Triade Educacional; Undime;* Viviane Artioli – *PCNP da D.E. Campinas Leste*; Viviane Camilo de Andrade – *PCNP da D.E. Carapicuíba*; Wagner Aparecido da Silva – *PCNP da D.E. Itapecerica da Serra*.

PROJETO DE VIDA
Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/Assessora Educação Integral*; Cassia Moraes Targa Longo – *SEDUC/COPED/CEART*; Claudia Soraia Rocha Moura – *SEDUC/COPED/ DEMOD/CEJA*; Helena Claudia Soares Achilles – *SEDUC/COPED/DECEGP*; Instituto Ayrton Senna; Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto Proaj; Simone Cristina Succi – *SEDUC/EFAPE*; Walter Aparecido Borges – *SEDUC/EFAPE*.

Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

Projeto Gráfico
Fernanda Buccelli e Ricardo Ferreira

Diagramação, Tratamento de Imagens e Colaboradores:
Aline Navarro; Ana Lúcia Charnyai; Dulce Maria de Lima Pinto; Fátima Regina de Souza Lima; Isabel Gomes Ferreira; Leonídio Gomes; Marcelo de Oliveira Daniel; Maria de Fátima Alves Gonçalves; Marilena Camargo Villavoy; Marli Santos de Jesus; Paulo César Tenório; Ricardo Ferreira; Rita de Cássia Diniz; Robson Minghini; Sandra Regina Brazão Gomes; Selma Brisolla de Campos; Teresa Lucinda Ferreira de Andrade; Tiago Cheregati e Vanessa Merizzi.