SP FAZ ESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

Ensino Médio

1º BIMESTRE

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretário Executivo
Haroldo Corrêa Rocha

Chefe de Gabinete
Renilda Peres de Lima

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Leandro José Franco Damy

MATEMÁTICA

CADERNO DO PROFESSOR

3ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO

1º BIMESTRE

ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Currículo Oficial – BNCC - SP		**BNCC**
Tema/ Conteúdo	**Habilidades**	**Competência Geral**
▸ Geometria /Relações ▪ Geometria analítica → Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. → Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares. → Ponto e reta: distância. → Circunferência: equação → Reta e circunferência: posições relativas. → Cônicas: noções, equações, aplicações.	▪ saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações; ▪ saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas; ▪ compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares; ▪ saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares. ▪ saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Normalmente o desenvolvimento dos conceitos relativos à Geometria Analítica, inicia-se pelo estudo da equação da reta, apresentada de um modo peculiar, na qual se destaca certa classe de problemas cuja solução depende apenas de uma compreensão adequada da ideia de proporcionalidade subjacente. São os chamados problemas lineares entre os quais estão alguns problemas de máximos e mínimos muito interessantes.

Consideramos, que o tema das retas, com suas equações, propriedades e aplicações pode ser especialmente representativa do significado da Geometria Analítica como um método de abordagem dos problemas geométricos que contempla o ideal cartesiano – ou o "plano" de Descartes, que buscava uma aproximação efetiva entre a Geometria e a Álgebra.

Desta forma, é importante, que o Professor, tenha como objetivo, as seguintes características na abordagem deste conteúdo:

- consolidação do uso de sistemas de coordenadas cartesianas XOY, já iniciado em séries anteriores. Tal sistema será utilizado para representar pontos do plano, determinando-se, por exemplo, a distância entre dois pontos, o ponto médio e a inclinação do segmento determinado pelos dois pontos.
- consolidação da ideia de inclinação de um segmento, buscando a caracterização de segmentos paralelos quanto na condição de alinhamento de três pontos, uma vez que para três pontos (A, B e C) estarem alinhados, as inclinações das retas AB, BC e AC devem ser iguais.

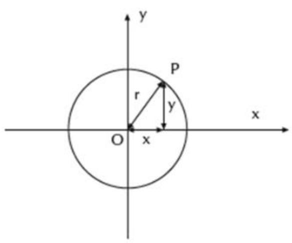
Com base nessas condições iniciais, é possível propor e resolver uma série de problemas geométricos simples, em que a aprendizagem do método analítico situa-se no centro das atenções.

Em continuidade, explora-se a representação de curvas por equações, iniciando-se com a reta. Os casos particulares das retas paralelas aos eixos coordenados, lembrando-se que neste caso, serão tratados diretamente, de modo simples. Para as retas inclinadas em relação aos eixos OX e OY, a qualidade comum a todos a seus pontos é o fato de que qualquer que seja o par de representantes que escolhamos, a inclinação do segmento correspondente é sempre a mesma: tal inclinação constante é o coeficiente angular da reta (m). Assim, facilmente se chega à equação **y = mx + h**, em que o coeficiente **m** representa a inclinação da reta, e **h** representa o ponto em que a reta corta o eixo OY. A caracterização de retas concorrentes e paralelas, com base nas inclinações correspondentes, é uma consequência natural.

Com relação à perpendicularidade de duas retas, estuda-se a inclinação de m_1 e m_2, de tal forma que se $m_1 \cdot m_2 = -1$, então as retas serão perpendiculares. Um outro tópico importante no estudo analítico das retas é a forma geral da equação da reta, bem como, a representação de regiões do plano por meio de desigualdades.

Finalizando o estudo, tendo em vista a resolução de alguns problemas lineares, ou seja, problemas que envolvem apenas relações de proporcionalidade direta, incluindo-se alguns de problemas de máximos e mínimos. Apesar de problemas como esses não serem apresentados no Ensino Médio, pedimos ao professor que os leia com atenção, pois certamente perceberá que constituem situações simples em contextos interessantes.

Após o estudo das retas, o próximo conteúdo é a equação da circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas. O tempo disponível pelo professor deverá determinar o nível de exploração de tal equação, deixando-se à escolha do professor o estudo das translações da equação ou da forma geral da equação da circunferência.



C: $x^2 + y^2 = r^2$

O próximo assunto referente ao estudo da equação da circunferência seria o cálculo da distância de um ponto a uma reta, baseado apenas na inclinação **m** da reta. Complementando tal cálculo, poderá ser feito um estudo simplificado das posições relativas entre retas e circunferências.

Encerrando os conteúdos relativos ao 1º bimestre letivo, estudamos as cônicas são apresentadas e caracterizadas por meio de propriedades de diversas maneiras. Além de constituírem intersecções de um plano com uma superfície cônica, o que lhes garante a denominação, a elipse é uma circunferência "achatada"; a hipérbole surge na representação de grandezas inversamente proporcionais; e a parábola, na representação de uma grandeza que é proporcional ao quadrado de outra. Complementarmente, as cônicas também são apresentadas pelas suas importantes propriedades características em relação aos focos.

As equações da elipse, da hipérbole e da parábola, são apresentadas em posições convenientes em relação aos eixos de coordenadas, de modo a simplificar os cálculos. Uma extensão de tal estudo, conduzindo a equações mais gerais, pode ser dispensada ou adiada para o momento, pois serão aprofundadas posteriormente.

Os tópicos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- **Situação de Aprendizagem 1**: A Geometria e o método das coordenadas, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 12 a 21;

- **Situação de Aprendizagem 2**: A reta, a inclinação constante e a proporcionalidade, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 22 a 33.

- **Situação de Aprendizagem 3**: Problemas lineares – Máximos e Mínimos, Vol. 1, 3ª série do Ensino Médio, p. 33 a 43.

- **Situações de Aprendizagem 4**: Circunferências e cônicas: significados, equações, aplicações, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 43 a 59

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Estradas para estação, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1015 (acesso em 18/03/2019);

- Montanhas geométricas, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1021 (acesso em 18/03/2019);

- Tesouro cartesiano, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1183 (acesso em 18/03/2019).

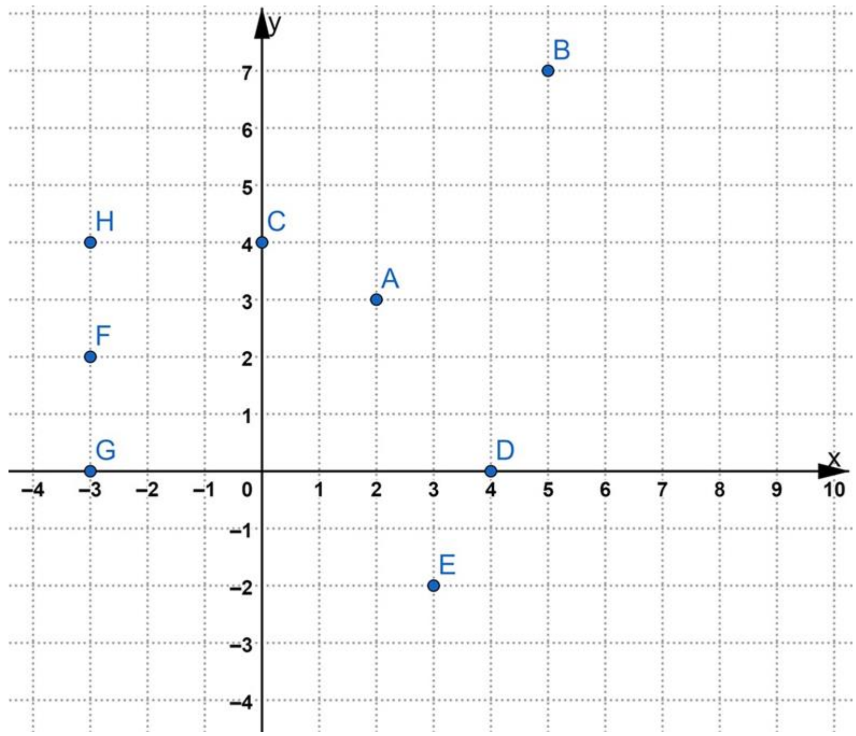
Estradas para estação	Montanhas geométricas	Tesouro Cartesiano

ATIVIDADES

TEMA 1: A GEOMETRIA E O MÉTODO DAS COORDENADAS

ATIVIDADE 1

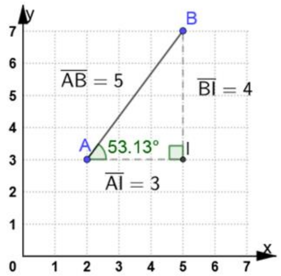
Observe os pontos indicados no plano cartesiano, conforme mostra a figura a seguir:

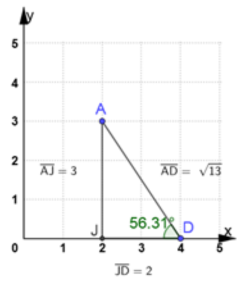


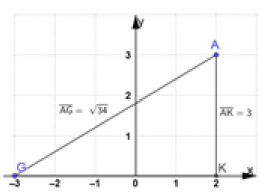
Preencha a tabela a seguir, conforme os dados informados na figura.

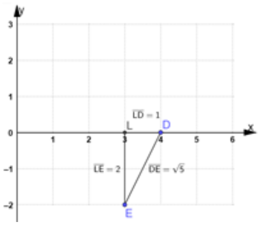
Pontos	Distância	Inclinação	Equação da reta
A e B	$(\overline{AB}) = 5$	$m = \frac{3}{4}$	$-\frac{4x}{3} + y - \frac{1}{3} = 0$
A e D	$(\overline{AD}) = \sqrt{13}$	$m = -\frac{3}{2}$	$\frac{3x}{2} + y - 6 = 0$
A e G	$(\overline{AG}) = \sqrt{34}$	$m = \frac{3}{5}$	$-\frac{3x}{3} + y - \frac{9}{5} = 0$
D e E	$(\overline{DE}) = \sqrt{5}$	$m = 2$	$-2x + y + 8 = 0$
E e G	$(\overline{EG}) = 4\sqrt{10}$	$m = -\frac{1}{3}$	$\frac{1x}{3} + y + 1 = 0$
F e A	$(\overline{FA}) = \sqrt{26}$	$m = \frac{1}{5}$	$-\frac{1x}{5} + y - \frac{13}{5} = 0$
H e C	$(\overline{HC}) = 3$	$m = 0$	$y - 4 = 0$
H e G	$(\overline{HG}) = 5$	Indefinido	$x = -3$

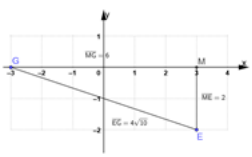
Resolução

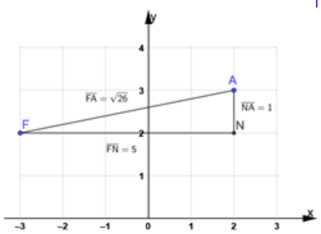
<table>
<tr><th>Pontos</th><th>Distância</th><th>Inclinação</th><th>Equação da reta</th></tr>
<tr>
<td>A e B
A = (2, 3)
B = (5, 7)

</td>
<td>$(\overline{AB})^2 = (5-2)^2 + (7-3)^2$
$(\overline{AB})^2 = 3^2 + 4^2$
$(\overline{AB})^2 = 9 + 16$
$(\overline{AB})^2 = 25$
$\sqrt{(\overline{AB})^2} = \sqrt{25}$
$(\overline{AB}) = 5$</td>
<td>$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = \frac{CO}{CA}$
$tg\alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$
$m = \frac{3}{4}$</td>
<td>$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$
$(y_1 - 7) = \frac{4}{3} \cdot (x_1 - 5)$
$y - 7 = \frac{4x}{3} - \frac{20}{3}$
$-\frac{4x}{3} + y - 7 + \frac{20}{3} = 0$
$-\frac{4x}{3} + y - \frac{1}{3} = 0$</td>
</tr>
</table>

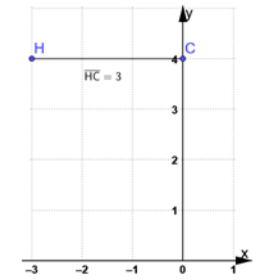
<table>
<tr><th>Pontos</th><th>Distância</th><th>Inclinação</th><th>Equação da reta</th></tr>
<tr>
<td>A e D
A = (2, 3)
D = (4, 0)

</td>
<td>$(\overline{AD})^2 = (4-2)^2 + (3-0)^2$
$(\overline{AD})^2 = 2^2 + 3^2$
$(\overline{AD})^2 = 4 + 9$
$(\overline{AD})^2 = 13$
$\sqrt{(\overline{AD})^2} = \sqrt{13}$
$(\overline{AD}) = \sqrt{13}$</td>
<td>$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\square = \frac{CO}{CA}$
$tg\square = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$
$m = -\frac{3}{2}$</td>
<td>$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$
$(y_1 - 3) = -\frac{3}{2} \cdot (x_1 - 2)$
$y - 3 = -\frac{3x}{2} + \frac{6}{2}$
$y - 3 = -\frac{3x}{2} + 3$
$\frac{3x}{2} + y - 3 - 3 = 0$
$\frac{3x}{2} + y - 6 = 0$</td>
</tr>
</table>

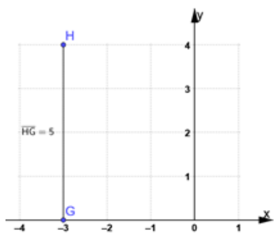
<table>
<tr><th>Pontos</th><th>Distância</th><th>Inclinação</th><th>Equação da reta</th></tr>
<tr>
<td>A e G
A = (2, 3)
G = (-3, 0)

</td>
<td>$(\overline{AG})^2 = (-3-2)^2 + (3-0)^2$
$(\overline{AG})^2 = (-5)^2 + 3^2$
$(\overline{AG})^2 = 25 + 9$
$(\overline{AG})^2 = 34$
$\sqrt{(\overline{AG})^2} = \sqrt{34}$
$(\overline{AG}) = \sqrt{34}$</td>
<td>$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\square = \frac{CO}{CA}$
$tg\square = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$
$m = \frac{3}{5}$</td>
<td>$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$
$(y_1 - 3) = \frac{3}{5} \cdot (x_1 - 2)$
$y - 3 = \frac{3x}{5} - \frac{6}{5}$
$-\frac{3x}{5} + y - 3 + \frac{6}{5} = 0$
$-\frac{3x}{5} + y - \frac{15}{5} + \frac{6}{5} = 0$
$-\frac{3x}{5} + y - \frac{9}{5} = 0$</td>
</tr>
</table>

Pontos	Distância	Inclinação	Equação da reta
D e E $D = (4, 0)$ $E = (3, -2)$	$\left(\overline{DE}\right)^2 = (4-3)^2 + (0-(-2))^2$ $\left(\overline{DE}\right)^2 = (1)^2 + 2^2$ $\left(\overline{DE}\right)^2 = 1 + 4$ $\left(\overline{DE}\right)^2 = 5$ $\sqrt{\left(\overline{DE}\right)^2} = \sqrt{5}$ $\left(\overline{DE}\right) = \sqrt{5}$	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg□ = \frac{CO}{CA}$ $tg□ = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$ $m = \frac{2}{1}$ $m = 2$	$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$ $(y_1 - 0) = 2 \cdot (x_1 - 4)$ $y = 2x - 8$ $-2x + y + 8 = 0$
			

Pontos	Distância	Inclinação	Equação da reta
E e G $E = (3, -2)$ $G = (-3, 0)$	$\left(\overline{EG}\right)^2 = (-3-3)^2 + (-2-0)^2$ $\left(\overline{EG}\right)^2 = (-6)^2 + (-2)^2$ $\left(\overline{EG}\right)^2 = 36 + 4$ $\left(\overline{EG}\right)^2 = 40$ $\sqrt{\left(\overline{EG}\right)^2} = \sqrt{40}$ $\left(\overline{EG}\right) = 4\sqrt{10}$	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg□ = \frac{CO}{CA}$ $tg□ = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$ $m = -\frac{2}{6}$ $m = -\frac{1}{3}$	$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$ $\left(y_1 - (-2)\right) = -\frac{1}{3} \cdot (x_1 - 3)$ $y + 2 = -\frac{1x}{3} + \frac{3}{3}$ $y + 2 = -\frac{1x}{3} + 1$ $\frac{1x}{3} + y + 2 - 1 = 0$ $\frac{1x}{3} + y + 1 = 0$
			

Pontos	Distância	Inclinação	Equação da reta
F e A $F = (-3, 2)$ $A = (2, 3)$	$\left(\overline{FA}\right)^2 = \left(-3-(2)\right)^2 + (2-3)^2$ $\left(\overline{FA}\right)^2 = (-5)^2 + (-1)^2$ $\left(\overline{FA}\right)^2 = 25 + 1$ $\left(\overline{FA}\right)^2 = 26$ $\sqrt{\left(\overline{FA}\right)^2} = \sqrt{26}$ $\left(\overline{FA}\right) = \sqrt{26}$	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg□ = \frac{CO}{CA}$ $tg□ = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$ $m = \frac{1}{5}$	$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$ $(y_1 - 3) = \frac{1}{5} \cdot (x_1 - 2)$ $y - 3 = \frac{1x}{5} - \frac{2}{5}$ $-\frac{1x}{5} + y - 3 + \frac{2}{5} = 0$ $-\frac{1x}{5} + y - \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = 0$ $-\frac{1x}{5} + y - \frac{13}{5} = 0$
			

Pontos	Distância	Inclinação	Equação da reta
H e C $H=(-3,4)$ $C=(0,4)$ 	$\left(\overline{HC}\right)^2=(-3-0)^2+(0)^2$ $\left(\overline{HC}\right)^2=(-3)^2$ $\left(\overline{HC}\right)^2=9$ $\sqrt{\left(\overline{HC}\right)^2}=\sqrt{9}$ $\left(\overline{HC}\right)=3$	$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\square=\frac{CO}{CA}$ $tg\square=\frac{(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)}$ $m=\frac{0}{3}$ $m=0$	$(y_1-y_0)=m(x_1-x_0)$ $(y_1-4)=0\cdot(x_1-(-3))$ $y-4=0$

Pontos	Distância	Inclinação	Equação da reta
H e G $H=(-3,4)$ $G=(-3,0)$ 	$\left(\overline{HG}\right)^2=(0)^2+(0-5)^2$ $\left(\overline{HG}\right)^2=(-5)^2$ $\left(\overline{HG}\right)^2=25$ $\sqrt{(HG)^2}=\sqrt{25}$ $\left(\overline{HG}\right)=5$	$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\alpha=\frac{CO}{CA}$ $tg\alpha=\frac{(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)}$ $m=\frac{4}{0}$ $m=$indefinido	$x=-3$

ATIVIDADE 2

Na tabela a seguir, são informadas na primeira linha e, coluna algumas equações de reta. Indique nas células de interseção da linha com a coluna se as retas são concorrentes ou paralelas.

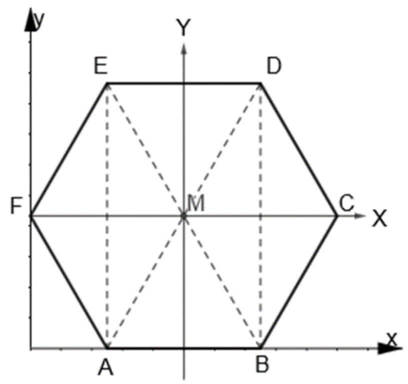
	y = 2x – 2	y = 3x	y = ¼ x
y = 2x -1	*Paralelas*	*Concorrentes*	*Concorrentes*
y = ¼ x +2	*Concorrentes*	*Concorrentes*	*Paralelas*
y= 2x	*Paralelas*	*Concorrentes*	*Concorrentes*

Correção Comentada

Quando os coeficientes angulares são iguais as retas serão paralelas ($m_1= m_2$)
Quando os coeficientes angulares são diferentes as retas serão concorrentes ($m_1 \neq m_2$)

ATIVIDADE 3

O hexágono regular ABCDEF tem centro M, como mostra a figura a seguir, e cada lado tem 10 unidades de comprimento. Utilizando os sistemas de coordenadas xOy e XMY.



Determine:

a) as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F;

b) as coordenadas do ponto M, centro do hexágono;

c) a inclinação dos segmentos AD e BE;

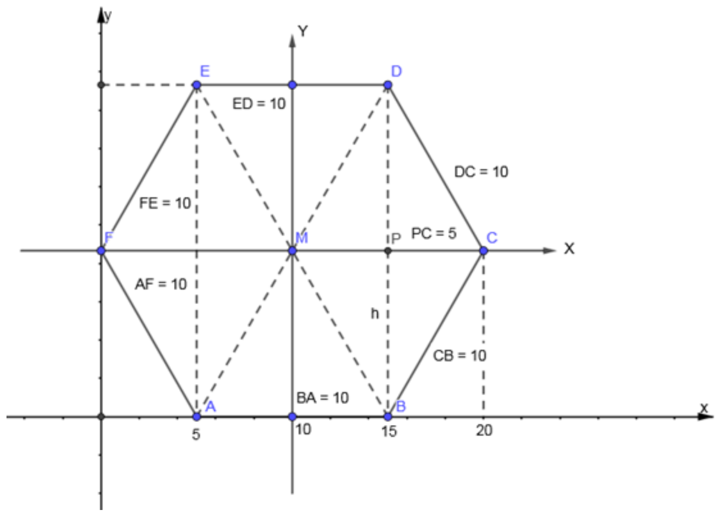
d) as coordenadas do ponto médio dos segmentos: AE e BD;

Correção comentada

a) Como o hexágono é regular ele é formado por seis triângulos equiláteros, logo a distância entre $\overline{FM} = \overline{AM} = \overline{FA} = 10$, sendo assim as coordenadas dos pontos são:

Ponto A = (5, 0);
Ponto B = (15, 0);

Para o ponto C, é preciso considerar que a coordenada y do ponto é igual a altura do triangulo MBC, considerando essa altura igual a h temos:



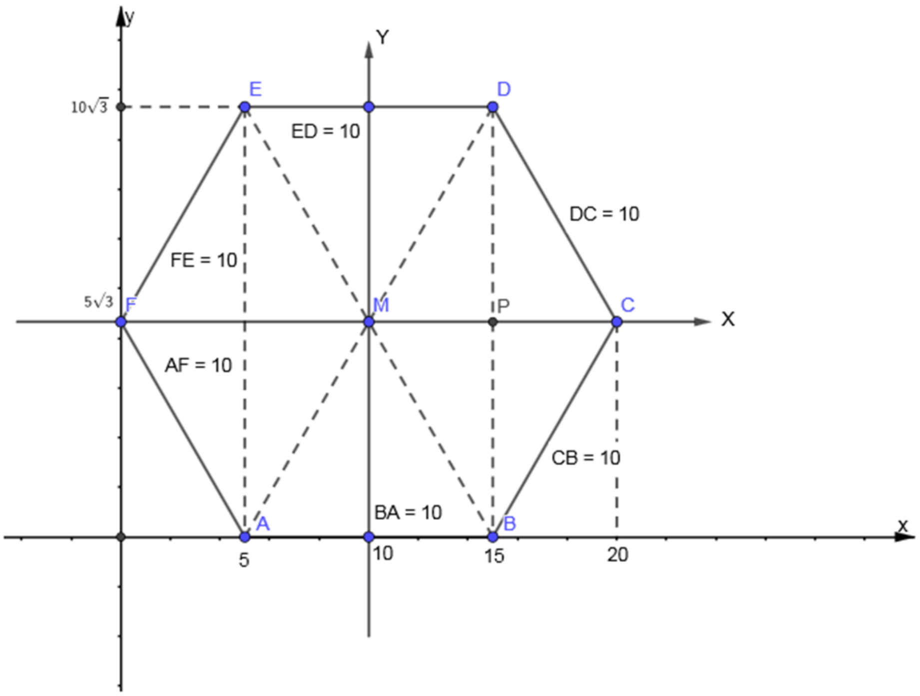
$h^2 + 5^2 = 10^2$
$h^2 = 100 - 25 \Rightarrow h^2 = 75$
$h = \sqrt{75} \Rightarrow h = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$

A partir desse resultado, para o sistema xOy, temos:

Para ponto C, temos que o segmento FC mede 20 unidades, e dista verticalmente da origem na altura h, então as coordenadas deste ponto será representada da seguinte maneira: C (20, 5 $\sqrt{3}$).
Temos que, se h é a altura do triângulo MCB, então, existe um ponto médio (P) ao segmento MC, de tal forma que $\overline{MP} = \overline{PC} = 5$. Portanto , a abscissa do ponto D, será a composição da medida do segmento FM = 10 unidades e do segmento MP, de medida 5, resultando no segmento FP com medida de 15 unidades.
Se o polígono ABCDE é um hexágono, então, temos que ele possui 6 triângulos equiláteros, então temos que: Δ MCB $\equiv$ Δ MCD $\therefore$ $\overline{PB} = \overline{PD} = 5\sqrt{3}$, sabendo-se disto, temos que o segmento BD mede $10\sqrt{3}$ unidades.
Portanto, as coordenadas do ponto D será: D (15, $10\sqrt{3}$)
Utilizando o mesmo raciocínio, obtemos as coordenadas dos pontos E e F, conforme segue:
E (5, $10\sqrt{3}$) e F (0, $5\sqrt{3}$).

b) O ponto M Tem como coordenada o par (10, $5\sqrt{3}$)

O gráfico a seguir , mostra as coordenadas dos pontos, solicitados:



c) a inclinação dos segmentos AD e BE;

Segmento AD
A (5, 0) e D (15, $10\sqrt{3}$)

$$m_{\overline{AD}} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{10\sqrt{3} - 0}{15 - 5} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

A inclinação calculada, corresponde à tangente do ângulo de 60º.

Segmento BE
B (15, 0) e E (5, $10\sqrt{3}$)

$$m_{\overline{BE}} = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{10\sqrt{3} - 0}{5 - 15} = \frac{10\sqrt{3}}{-10} = -\sqrt{3}$$

d) as coordenadas do ponto médio dos segmentos: AE e BD.

A $(5, 0)$; E $(5, 10\sqrt{3})$; B $(15, 0)$ e D $(15, 10\sqrt{3})$

Segmento AE

$$x_M = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{0+10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$M_{\overline{AE}} = (5,\ 5\sqrt{3})$$

Segmento BD

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{15+15}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$y_M = \frac{0+10\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$M_{\overline{BD}} = (15,\ 5\sqrt{3})$$

Observem que os dois pontos médios estão na mesma altura, alterando a coordenada do eixo x.

ATIVIDADE 4

Dados os pontos A (1, 3), B (3, 7) e C (4, k):

a) determine o valor de k para que esses pontos estejam alinhados.

b) determine o valor de k para que a área do triângulo ABC seja igual a zero.

c) sendo k = 3, desenhe o triângulo ABC e calcule sua área.

a) Para que três pontos, no caso, A, B e C, estejam alinhados, necessariamente temos que considerar: $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}}$

Então:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{3-1} = 2$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} = \frac{k-7}{4-3} = k-7$$

Como $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}} \Rightarrow 2 = k - 7 \Rightarrow k = 9$

Podemos também utilizar a seguinte definição:
Três pontos são colineares (alinhados) quando o determinante da matriz formada pelas coordenadas desses pontos for igual a zero, ou seja:

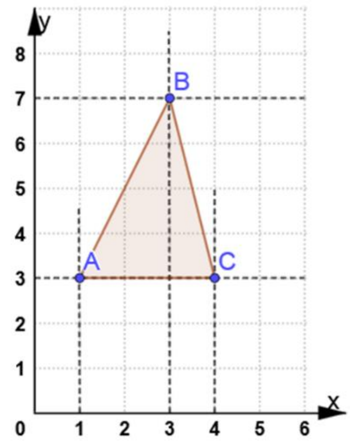
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & k & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & k & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \\ 4 & k \end{matrix}$$

$$-28 \quad -k \quad -9 \qquad +7 \quad +12 \quad +3k$$

$$-37 - k + 19 + 3k = 0 \Rightarrow -18 + 2k = 0 \Rightarrow 2k = 18 \Rightarrow k = 9$$

b) A área do triângulo ABC será nula quando os três pontos estiverem alinhados, ou seja, quando k = 9. É interessante aproximar essas duas informações, sempre que três pontos estão alinhados, a área do triângulo formado por eles é nula e vice-versa.

c) O triângulo ABC, será representado graficamente no plano cartesiano da seguinte maneira:



Observando a figura, verificamos que o segmento AC mede 3 unidades e a altura relativa a este segmento mede 4 unidades, logo a área do triângulo ABC será igual a 6 unidades quadradas, ou seja,

$$Área_{\Delta_{ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ unidades quadradas}$$

Outra maneira de se resolver a mesma atividade, consiste na utilização do cálculo de determinante no cálculo de áreas de triângulos, conforme segue:

Sendo $k \neq 9$ os três pontos, não são colineares, ou seja, não estão alinhados, assim sendo, a disposição dos três pontos nos permite delimitar uma área triangular e sua área é igual a metade do módulo do determinante da matriz formada pelas coordenadas dos três pontos.

$$\frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{matrix} \right|$$

$$-28 \quad -3 \quad -9 \quad 7 \quad 12 \quad 9$$

$$\frac{1}{2} \left|-40+28\right| = \frac{1}{2} \left|-12\right| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ unidades quadradas}$$

TEMA 2: A RETA, A INCLINAÇÃO CONSTANTE E A PROPORCIONALIDADE

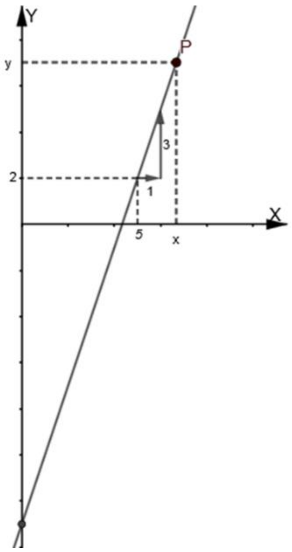
ATIVIDADE 1

Na equação y = 473,5 x + 12,879, se x variar uma unidade, passando, por exemplo, de 2008 para 2009, de quanto será o aumento de y? Tente responder a essa questão sem efetuar cálculos.

Nesta atividade o aluno deve ser capaz de compreender que o coeficiente de x é 473,5 e que isso significa que para cada unidade x o resultado final é acrescido de 473,5 unidades.

ATIVIDADE 2

Determine a equação da reta que passa pelo ponto A (2; 5) e tem inclinação m = 3.



1ª solução
A equação da reta e do tipo $y = mx + h$, ou seja, e $y = 3x + h$
Como o ponto (2; 5) pertence a reta, então: $5 = 3 \cdot 2 + h$
Logo, $h = -1$, e a equação é $y = 3x - 1$

2ª solução
Sendo (x, y) um ponto genérico da reta , devemos ter:

$$m = \frac{y-5}{x-2} = 3$$

Logo, $y - 5 = 3(x - 2)$, ou seja, $y = 3x - 1$

3ª solução
Dado um ponto e a inclinação da reta é possível determinar a equação geral da reta pela equação fundamental da reta.

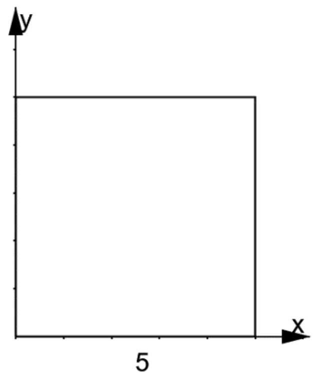
$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

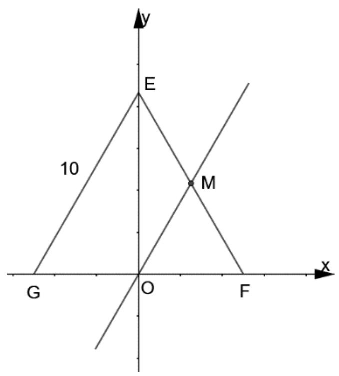
Dados os pontos: A (2,5) e P (x, y) e m = 3, temos que:

$$(y - 5) = 3(x - 2) \Rightarrow y - 5 = 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 1$$

ATIVIDADE 3

Considere o quadrado ABCD, cujo lado mede 5 unidades, e o triângulo equilátero EFG, cujo lado mede 10 unidades, representados no sistema cartesiano.





a) escolha um sistema de coordenadas que considere mais adequado e escreva as equações das retas AB, BC, CD, DA, AC e BD.

b) escolha um sistema de coordenadas que considere mais adequado e escreva as equações das retas EF, FG, GE e OM, onde M é o ponto médio do lado EF e O é o ponto médio do lado GF.

Resolução

a)

As retas AB e DC são paralelas ao eixo x (constantes) portanto suas equações, respectivamente, são:
$y = 5$ e $y = 0$
No caso da reta AB podemos observar que independentemente do que ocorra com o valor de x, o valor de y permanece 5. O mesmo raciocínio é valido para a reta DC, para qualquer valor de x o valor de $y = 0$.
As retas DA e BC são paralelas ao eixo y portanto suas equações, respectivamente, são:
$X=0$ e $x=5$
Nesses casos em que a reta é vertical, ou seja, não é possível determinar o coeficiente angular sua equação é definida pelo ponto onde a reta cruza o eixo da abscissa.
A reta AC, coincide com a diagonal do quadrado ABCD, logo, estão a 45º graus em relação ao eixo x.
Sabendo que $m=tg\alpha$ é possível determinar o coeficiente angular da reta ($m=tg45º=1$) considerando qualquer ponto pertencente a reta e o seu coeficiente angular é possível por meio da equação fundamental da reta determinar sua equação:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 5) = 1\ (x_1 - 5)$$
$$y - 5 = x - 5$$
$$y - 5 + 5 = x$$
$$y = x$$

A reta AC encontra-se em situação semelhante a reta BD, porém é decrescente portanto seu coeficiente angular é negativo. O ângulo formado entre a reta e o eixo x é de 135º ($m = tg135º = -1$)

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = -1\ (x_1 - 5)$$
$$y = -x + 5$$

b)

Dado o triangulo equilátero, seus ângulos internos são todos de 60º graus. Sendo assim o ângulo formado pela reta GE é igual a 60º, ($m = tg60º = \sqrt{3}$). Tomando um ponto pertencente a reta GE (ponto G) é possível usar a equação fundamental e determinar a equação da reta.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = \sqrt{3}\ (x_1 - (-5))$$
$$y = x\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

A reta EF forma com o eixo x um ângulo de 120º graus, possibilitando o cálculo de seu coeficiente angular; $m = tg120º = -\sqrt{3}$. Tomando um ponto pertencente a reta EF (ponto F) é possível determinar a equação da reta.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = -\sqrt{3}\ (x_1 - 5)$$
$$y = -x\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

Obs. Foi evitado usar o ponto E no item anterior por comodidade evitando calcular a sua ordenada.
A reta FG é constante (paralela ao eixo x) e coincidente com a abscissa. Seu coeficiente angular é igual a zero ($m=0$), tomando o ponto F pertencente a reta FG temos:

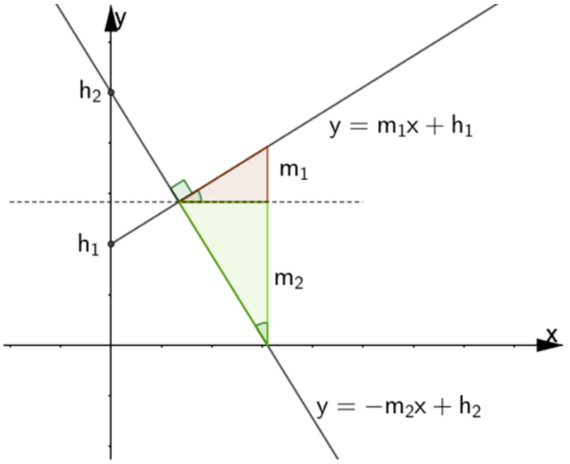
$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = 0\ (x_1 - 5)$$
$$y = 0$$

O ponto médio M divide o segmento EF ao meio e o ponto O divide o segmento GF também ao meio, formando um novo triângulo equilátero OMF, assim a reta OM forma com a abscissa o ângulo de 60º, possibilitando calcular seu coeficiente angular $m = tg60º = \sqrt{3}$. Tomando o ponto O como ponto de referencia pertencente a reta OM, temos:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = \sqrt{3}\ (x_1 - 0)$$
$$y = x\sqrt{3}$$

Perpendicularismo entre duas retas

Se duas retas inclinadas em relação aos eixos coordenados r_1 e r_2 são perpendiculares, então suas inclinações m_1 e m_2 tem sinais opostos e são inversas, isto é, $m_1 \cdot m_2 = -1$, como é possível perceber pela análise da figura seguinte:



Os ângulos assinalados nos dois triângulos retângulos são congruentes. Isto nos permite afirmar que $\frac{m_1}{1} = \frac{1}{-m_2}$ (note que, como $m_2 < 0$, o segmento que corresponde ao lado do triângulo tem comprimento igual a $-m_2$). Sendo assim, concluímos que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

ATIVIDADE 4

Considerando os apontamentos teóricos anteriormente citados, determine a equação da reta t que passa pelo ponto **A** e é perpendicular à reta r, nos seguintes casos.

A	r	t
(0; 0)	$y = 4 - 3x$	$y = \frac{1}{3}x$
(0; 4)	$y = 2x - 5$	$y = -\frac{1}{2}x + 2$
(0; –3)	$y = 0{,}2x + 7$	$y = -5x - 15$
(0; 7)	$y = -\sqrt{3}x + 2$	$y = \sqrt{3}x - \frac{7\sqrt{3}}{3}$
(1; 2)	$y = 3x + 7$	$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Correção comentada

Como visto anteriormente, se duas retas são perpendiculares entre si, então m1.m2= -1. Identificado o coeficiente angular da reta r é possível calcular o coeficiente angular da reta t de modo que ele seja o oposto inverso do coeficiente angular de r, garantindo o perpendicularismo.

Para a coordenada (0;0) temos a reta r dada pela equação

$y = 4 - 3x$

O coeficiente angular da reta r , $m_r = -3$, sabendo o coeficiente angular de r calcula-se o coeficiente angular de t,

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_t = -\frac{1}{m_r}$$

$$m_t = -\frac{1}{-3}$$

$$m_t = \frac{1}{3}$$

Sabendo o coeficiente angular da reta t, é possível saber a equação da reta t.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 0) = \frac{1}{3}(x_1 - 0)$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

Usa-se do mesmo raciocínio para as demais coordenadas.

Problemas lineares – Máximos e Mínimos

ATIVIDADE 1

Em uma fábrica que produz um só tipo de produto, o custo **C** da produção de **x** unidades é a soma de um custo fixo $\mathbf{C_0}$ com custo variável $\mathbf{C_1}$, que é proporcional a **x**, então $C_1 = kx$, onde **k** representa o custo de cada unidade do produto.

Em uma fábrica como a descrita acima, tem-se: **C = 3000 + 150x** (x é o número de artigos; C é o custo da produção em reais).

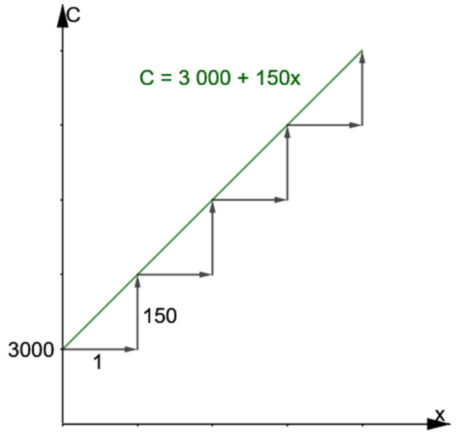
a) esboce o gráfico de C em função de x.

b) Para qual valor de x o custo fixo se iguala ao custo variável?

c) a partir de qual valor de x o custo fixo passa a representar menos de 10% do custo total da produção?

Resolução

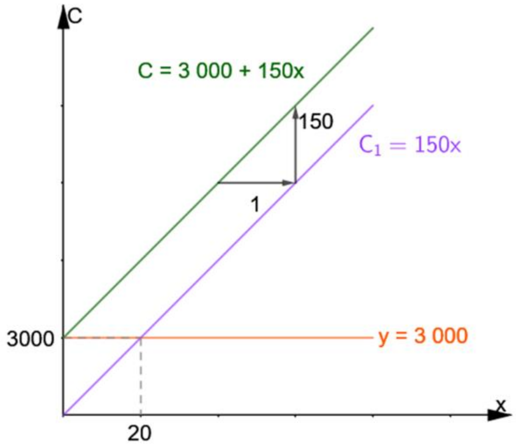
a)



b)
O custo fixo é de 3000, o custo variável é representado por 150x, então:

$$3000 = 150x$$
$$x = \frac{3000}{150}$$
$$x = 20$$

Graficamente, temos a seguinte situação:



c)

O custo fixo passará a corresponder a 10% do custo total na seguinte situação:
3000 = 10% de (3000 + 150x), ou seja, na seguinte situação:

$$3000 = 0{,}1 \cdot (3000 + 150x)$$
$$3000 = 300 + 15x$$
$$2700 = 15x$$
$$x = \frac{2700}{15} = 180$$

ATIVIDADE 2

Um pequeno fazendeiro dispõe de 8 alqueires para plantar milho e cana. Ele deve decidir quanto plantar de milho e quanto de cana, em alqueires, de modo que seu rendimento total seja o maior possível. Cada alqueire de milho plantado deve resultar em um rendimento líquido de R$ 20 mil, e cada alqueire de cana deverá render R$ 15 mil. No entanto, cada alqueire de milho requer 20 000 L de água para irrigação e cada alqueire de cana requer 10 000 L de água, sendo que, no período correspondente, a quantidade de água disponível para tal fim é 120 000 L.

Considere x e y as quantidades de alqueires plantados de milho e cana, respectivamente.

a) como se pode representar, em termos de x e y, o rendimento total **R** a ser recebido pelo fazendeiro, supondo que venda a totalidade de sua produção?

b) Qual a relação entre x e y que traduz a exigência de que o total de alqueires plantados não pode ser maior que 8? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.

c) Qual é a relação entre x e y que traduz a exigência de que o total de água a ser utilizado não pode superar os 120 000L? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.

d) Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos que satisfazem, simultaneamente, as duas exigências expressas nos itens (B) e (C) (lembrando que devemos ter $x \geq 0$, $y \geq 0$).

e) Determine o conjunto dos pontos (x; y) do plano que correspondem ao rendimento R_1 = 75 mil, e os que correspondem ao rendimento R_2 = 120 mil.

f) Mostre que, quanto maior o rendimento **R**, maior a ordenada do ponto em que a reta que o representa o eixo OY.

g) determine o ponto da região do item d que corresponde ao rendimento total máximo.

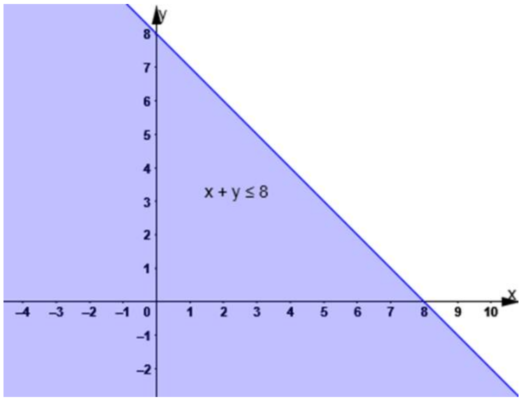
Resolução

a)

Cada alqueire de milho renderá 20.000, logo, se plantar x alqueires, o rendimento será 20.000x. Cada alqueire de cana renderá 15.000, logo, se plantar y alqueires de cana, o rendimento será 15.000y. O rendimento total será $R = 20.000x + 15.0000y$.

b)

Sendo x a quantidade de alqueires a ser plantados de milho e y a quantidade de alqueires plantados de cana, a soma x + y não pode ultrapassar os 8 alqueires disponíveis, ou seja $x + y \leq 8$.

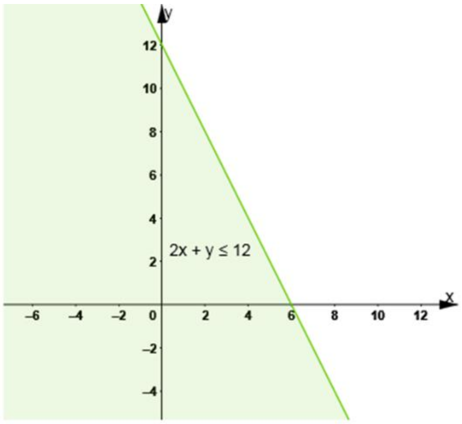


c)

Como cada alqueire de milho requer 20.000L de água, x alqueires requererão 20.000x L, da mesma forma, y alqueires cana utilizarão 10.000y L de água. Assim o total de litros de água utilizados será 20.000x + 10.000y, e não poderá ultrapassar o limite de 120.000, ou seja, $20.000x + 120.000 \leq 120.000$*, isso corresponde aos pontos situados abaixo da reta ou na reta* $20.000x + 10.000y = 120.000$.

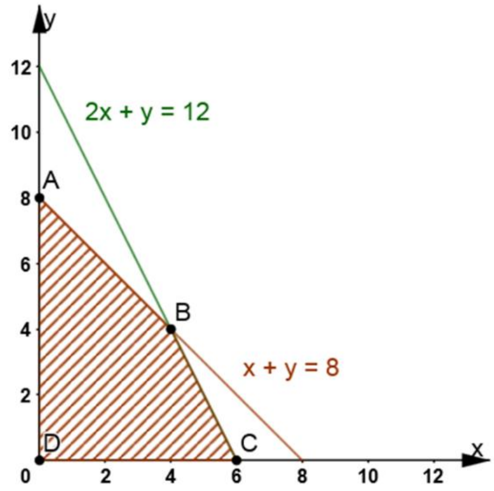
Para representar a reta podemos simplificar os coeficientes, obtendo $2x + y = 12$

- *para* $x = 0$*, temos* $y = 12$;
- *para* $y = 0$*, temos* $x = 6$



d)

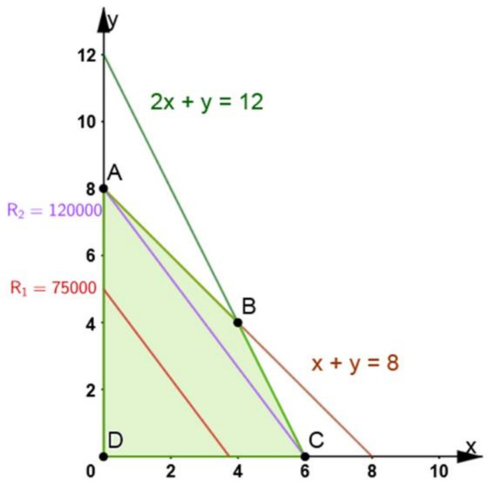
Os pontos do plano que satisfazem simultaneamente as duas restrições são os pontos situados abaixo ou na reta $x + y = 8$ e abaixo ou na reta $2x + y = 12$. Formam o quadrilátero ABCD indicado na representação a seguir.



e)

Os pontos (x, y) que correspondem ao rendimento $R_1 = 75\,000$ reais são os pontos da reta r_1 de equação $75\,000 = 20\,000x + 15\,000y$, ou seja, simplificando os coeficientes, $4x + 3y = 15$

Os pontos que correspondem ao rendimento $R_2 = 120\,000$ são os pontos da reta r_2 de equação $120\,000 = 20\,000x + 15\,000y$, ou seja, simplificando os coeficientes, $24 = 4x + 3y$. As duas retas são paralelas e estão representadas a seguir:



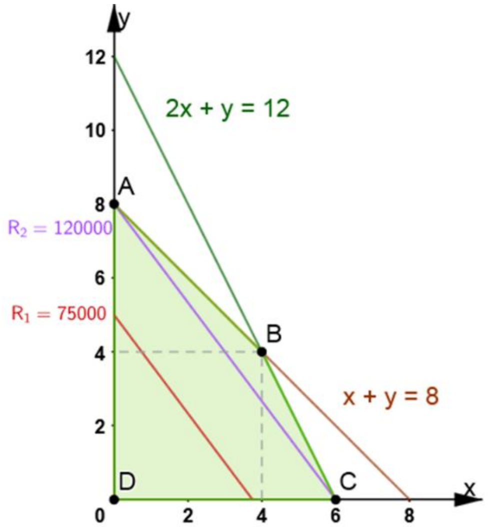
$r_1 = 4x + 3y = 15$	$r_2 = 4x + 3y = 24$
$x = 0 \Rightarrow y = 5$	$x = 0 \Rightarrow y = 8$
$y = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{4}$	$y = 0 \Rightarrow x = 6$

f)

Para cada valor fixado do rendimento R, a reta $R = 20\,000x + 15\,000y$ corta o eixo OU no ponto em que $x = 0$, ou seja, em que $y = \frac{R}{15000}$. Isso significa que quanto maior o rendimento, maior é a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo y.

g)

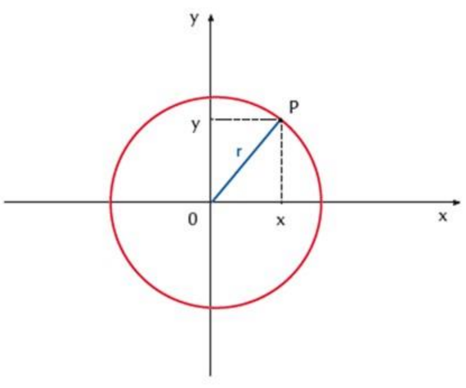
Aqui, vamos identificar o ponto da região de viabilidade do problema, ou seja, que foi determinado no item d, no qual o rendimento total R é o maior possível. O maior valor possível para a reta R = 20 000x + 15 000y cortar o eixo y sem sair da região de viabilidade corresponde à reta que passa pelo ponto de interseção das retas x + y = 8 e 2x + y = 12. Calculando tal ponto, obtemos x = 4 e y = 4. No ponto (4, 4), portanto, o valor de R é o maior possível, respeitadas as condições de x + y ≤ 8 e 2x + y ≤ 12. Calculando o valor de R nesse ponto, obtemos R = 20 000 · 4 + 15 000 · 4, ou seja, R = 140.000 reais.



TEMA 3: A RETA, A INCLINAÇÃO CONSTANTE E A PROPORCIONALIDADE

Circunferência

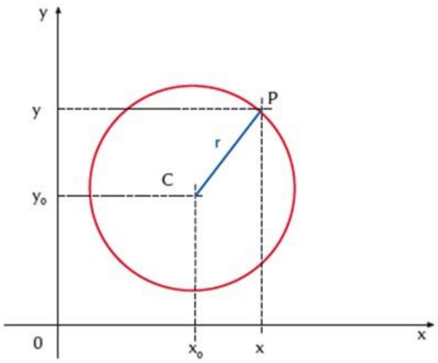
A propriedade característica da circunferência é a de que seus pontos são todos equidistantes de um ponto interior chamado centro; a distância comum de cada um de seus pontos ao centro é o raio da circunferência. Assim, se o centro for a origem do sistema de coordenadas e **P** (x; y) um ponto de uma circunferência de raio r, a equação que relaciona as coordenadas de um ponto qualquer da circunferência é:



d(P; O) = r

ou seja, $\sqrt{x^2+y^2} = r$;

ou ainda, $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$



Se o centro **C** for o ponto $(x_0; y_0)$, então da igualdade característica d(P; C) = r resultará:

$$\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_0)^2} = r^2$$

ou seja:

$$\mathbf{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

ATIVIDADE 1

Sabendo que uma circunferência de centro **C** $(x_0; y_0)$ e raio **r** tem equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, considere a circunferência de centro (4; 4) e de raio 4.

a) Represente-a no plano cartesiano a seguir e determine sua equação.

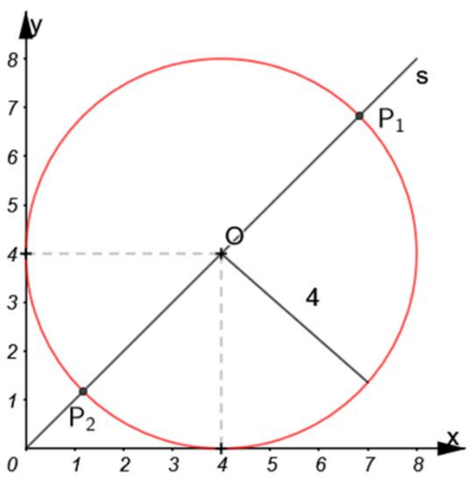
b) Determine a equação da reta **s** que passa pela origem e pelo centro da circunferência.

c) Calcule as coordenadas dos pontos P_1 e P_2, de interseção da reta **s** com a circunferência dada.

d) Calcule a distância entre P_1 e P_2.

a)

A equação da circunferência é $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$, com a seguinte representação gráfica:



b)

Dados dois pontos pertencentes a reta s (0,0) e (4,4) é possível determinar a equação da reta usando a condição de alinhamento de três pontos, em que o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos é igual a zero. Usando os pontos por onde é sabido que a reta s passa (4,4) centro da circunferência; (0,0) origem e (x,y) um ponto genérico pertencente a essa reta temos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ x & y \end{matrix}$$

$$0 \quad -4y \quad 0 \qquad\qquad 0 \quad 4x \quad 0$$

$$4x - 4y = 0$$
$$x - y = 0$$
$$x = y$$

c)

P_1 e P_2 são pontos comuns tanto a circunferência quanto a reta s, ou seja, são pontos que satisfazem as duas equações simultaneamente formando um sistema:

$$\begin{cases} x = y \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow (y-4)^2 + (y-4)^2 = 16$$

$$2\,(y-4)^2 = 16$$
$$2(y^2 - 8y + 16) = 16$$
$$2y^2 - 16y + 32 = 16$$
$$2y^2 - 16y + 16 = 0 = y^2 - 8y + 8 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$y_1 = 4 + 2\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $y_2 = 4 - 2\sqrt{2}$

$x_1 = 4 + 2\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 4 - 2\sqrt{2}$

$$P_1 = \left(4 + 2\sqrt{2}\,;\, 4 + 2\sqrt{2}\right)$$
$$P_2 = \left(4 - 2\sqrt{2}\,;\, 4 - 2\sqrt{2}\right)$$

d)

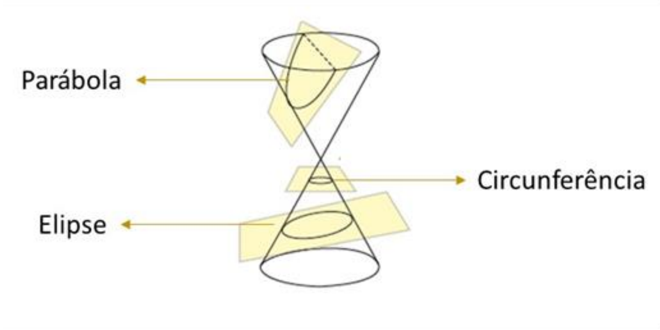
A distância entre os pontos de intersecção é igual ao diâmetro (d) da circunferência.
$d = 2 \cdot r$ (r igual ao raio da circunferência)
$d = 2 \cdot 4$
$d = 8$.

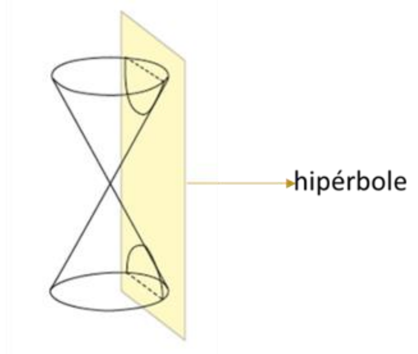
Professor:

Outros exercícios poderiam ser propostos, articulando o reconhecimento da equação da circunferência e os resultados já conhecidos sobre retas. Em virtude da limitação do espaço do Caderno do Aluno, deixamos tal tarefa para o discernimento e a disponibilidade do professor.

CÔNICAS

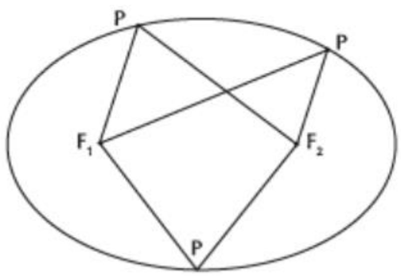
As cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) são curvas que podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis.





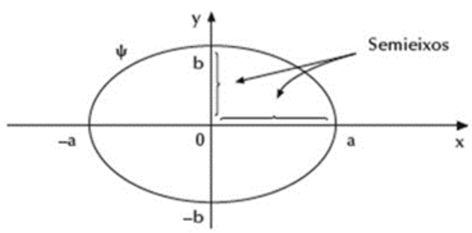
ELIPSE

Uma propriedade fundamental pode ser utilizada para caracterizar uma elipse: qualquer ponto da elipse é tal que a soma das distâncias até esses dois pontos fixados, que são os focos, é constante, como mostra a figura a seguir:



$$d(P, F_1) + d(P,F_2) = \text{constante}$$

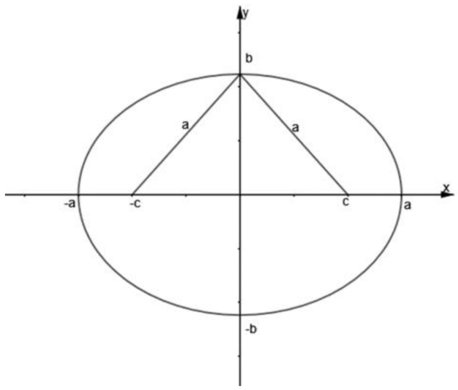
A elipse apresenta dois eixos de simetria: o semieixo maior costuma ser representado por **a**, e o menor por **b**. Assim, os dois eixos são 2a e 2b.



Desta forma, podemos dizer que uma elipse é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, cuja equação será representada da seguinte maneira:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Em uma elipse com centro na origem e semieixo maior **a** no eixo OX, os pontos (0; b) e (0; –b) distam do centro menos do que **a**. Os pontos do eixo OX que estão a uma distância **a** de (0; b) e (0; –b) têm coordenadas (c; 0) e (–c; 0), são particularmente importantes, sendo chamados **focos** da elipse. O valor **c** é chamado de distância focal da elipse. Por construção, a soma das distâncias dos pontos (0; b) e (0; –b) até os focos é igual a **2a**. É possível mostrar que, para todo ponto **P** (x; y) do plano, se $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$, então a soma das distâncias de **P** até os focos (c; 0) e (–c; 0) é igual a **2a**. A razão $\frac{c}{a}$ é chamada excentricidade da elipse, sendo representada pela letra **e**.



ATIVIDADE 2

De acordo com os fundamentos teóricos apresentados:

a) Mostre que, entre **a**, **b** e **c**, vale a relação $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

b) Mostre que, fixado o valor de **a**, quanto menor for o valor de **b**, mais a excentricidade se aproxima de 1 e a elipse se aproxima de um segmento de reta; e quanto mais próximo de **a** for o valor de **b**, mais a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência.

Resolução:

a)

Observando o triângulo retângulo formado na figura, de hipotenusa a e catetos b e c, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$.

b)

Como $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ *notamos que, sendo fixado o valor de a, quanto maior for o valor de b, menor será c, e portanto, menor a excentricidade, e mais a elipse se aproxima de uma circunferência; quanto menor o valor de b, mais próximo de a é o valor de c, e portanto, maior é a excentricidade, que se aproxima do valor 1.*

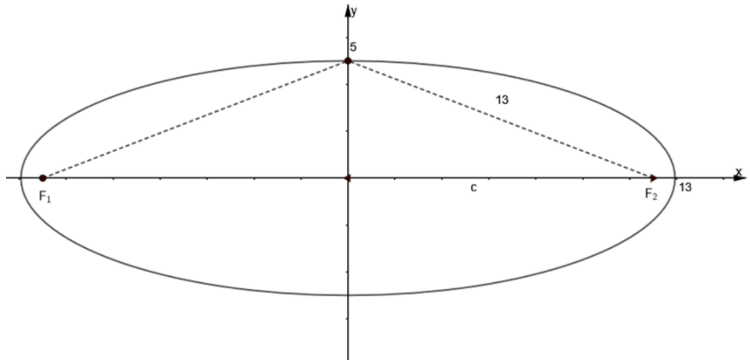
Professor:

É possível verificar a mudança de excentricidade acessando o link a seguir:

Faça a leitura do "QR code" ao lado com seu smartphone ou acesse o link : https://www.geogebra.org/m/uvu8rfwc

ATIVIDADE 3

Considere a elipse representada a seguir de centro na origem e semieixos a = 13 e b = 5.



Determine.

a) a equação da elipse;

b) a excentricidade da elipse;

c) os focos da elipse;

d) o valor de **k** para que o ponto **P** (5; k), do primeiro quadrante, pertença a elipse;

e) a soma das distâncias de **P** aos focos da elipse.

Resolução:

a)

De acordo com os dados da atividade, temos que: a = 13 e b = 5, temos que:

Então, a equação da elipse será dada por:

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

b)

A excentricidade da elipse é dada por: $e = \frac{c}{a}$

Sabemos que: $a^2 = b^2 + c^2$ *então,* $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Então:

$c = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

Desta forma, a excentricidade da elipse será:

$$e = \frac{12}{13} \cong 0{,}92$$

c)

Os focos da elipse são os pontos de coordenadas (c; 0) e (–c; 0), ou seja, são os pontos (12; 0) e (–12; 0).

d)

Para que o ponto (5, k) pertença à elipse, devemos ter:

$$\frac{5^2}{13^2}+\frac{k^2}{5^2}=1$$

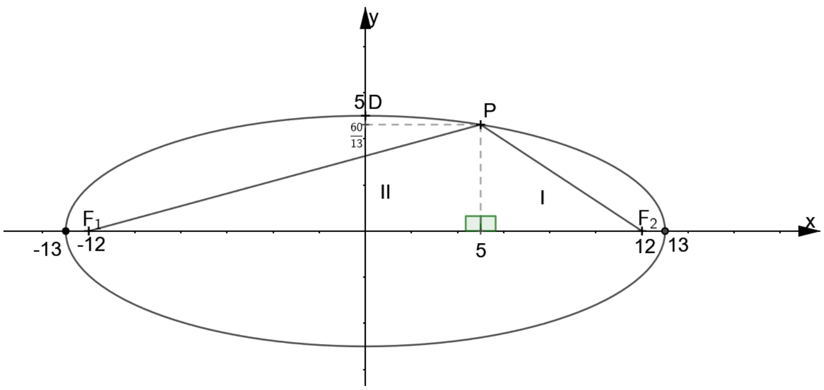
$$\frac{625+169k^2}{4225}=\frac{4225}{4225}$$

$$625+169k^2=4225 \Rightarrow 169k^2=4225-625 \Rightarrow 169\,k^2=3600 \Rightarrow k^2=\frac{3600}{169} \Rightarrow k=\sqrt{\frac{3600}{169}} \Rightarrow k=\pm\frac{60}{13}$$

Sendo P do primeiro quadrante, segue que $k=\frac{60}{13}$

e)

Seja a figura que representa a elipse a seguir:



Da figura temos que os triângulos I e II são retângulos, e portanto:

$$d_{\overline{PF_1}}=\sqrt{7^2+\left(\frac{60}{13}\right)^2}=\sqrt{49+21{,}30}=\sqrt{70{,}30}\cong 8{,}38$$

$$d_{\overline{PF_2}}=\sqrt{17^2+\left(\frac{60}{13}\right)^2}=\sqrt{289+21{,}30}=\sqrt{310{,}30}\cong 17{,}62$$

*Então, a soma das distâncias de **P** aos focos da elipse, será:*

$$D=d_{\overline{PF_1}}+d_{\overline{PF_2}}=8{,}38+17{,}62\cong 26$$

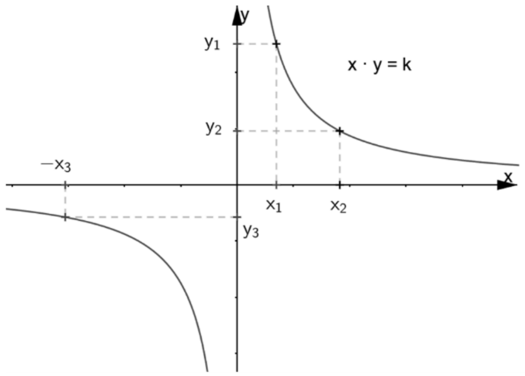
Nota-se que tal resultado é numericamente equivalente a $2\cdot a=26$.

Professor:

Aqui seria interessante apresentar muitos exercícios de identificação dos dois semieixos de elipses dadas por equações na forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, com a correspondente representação no plano cartesiano, bem como exercícios de escrita das equações das elipses já representadas no plano, com o centro na origem do sistema e com os valores dos semieixos indicados sobre os eixos coordenados.

HIPÉRBOLE

Quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas que são inversamente proporcionais, isto é, cujo produto **x · y** é constante e não nulo, a curva obtida é uma hipérbole.



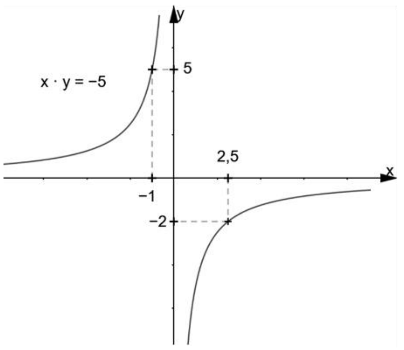
Eixos perpendiculares/sistema ortogonal

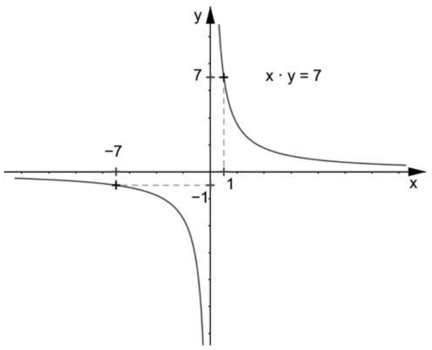
$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = k \neq 0$$

A hipérbole é obtida quando selecionamos um cone circular reto junto ao plano que forma com o plano da base, um ângulo maior do que aquele formado por uma geratriz do cone com a base.

Para escrever a equação da hipérbole, podemos partir da representação de grandezas inversamente proporcionais. No caso de um sistema XOY, em que os eixos cartesianos são ortogonais, a hipérbole é chamada equilátera e os dois ramos da curva se aproximam indefinidamente dos eixos coordenados são chamados, nesse caso, de assíntotas da hipérbole.

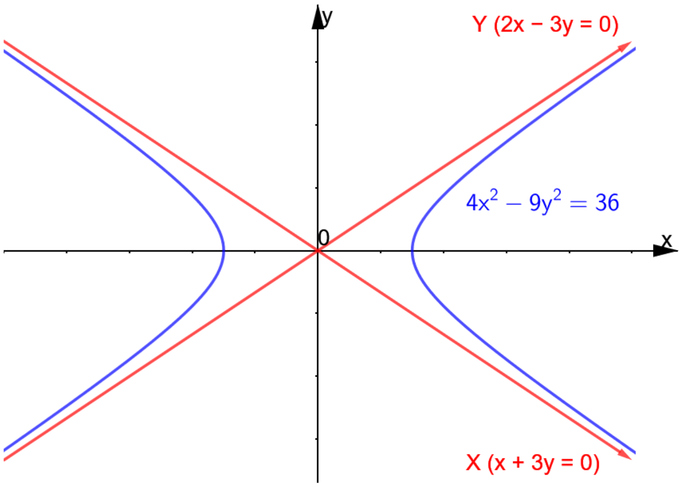
Por exemplo, as curvas formadas pelos pontos cujas coordenadas satisfazem as relações a seguir são hipérboles, tendo como assíntotas os eixos coordenados:





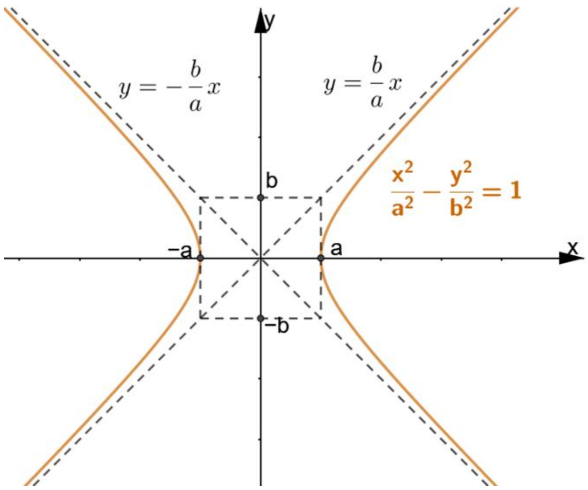
ATIVIDADE 1

A equação $4x^2 - 9y^2 = 36$ pode ser considerada uma hipérbole. Fatore o primeiro membro e obtenha **X** e **Y** tal que **X · Y** = 36. Em seguida, determine as assíntotas e faça uma representação gráfica da hipérbole, obtendo $(2x - 3y) \cdot (2x + 3y) = 36$, ou seja, **X · Y** = 36.



ATIVIDADE 2

A equação de uma hipérbole representada no plano cartesiano, com centro na origem, é do tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, em que **a** é a soma do vértice da hipérbole, nas condições representadas na figura seguinte:



a) Sabendo isso, determine a equação da hipérbole que passa pelo ponto (3; 0) e tem como assíntotas as retas $y = \frac{4}{3}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$.

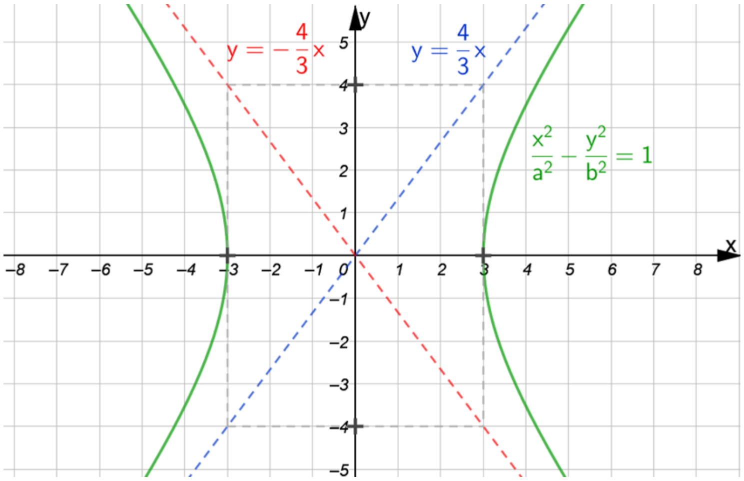
Resolução:

Dadas as assíntotas da hipérbole, constamos que: $\begin{cases} a = 3 \text{ e } -3 \\ b = 4 \text{ e } -4 \end{cases}$

Então, a equação da hipérbole será dada por:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b) Faça a representação gráfica da hipérbole e de suas assíntotas.

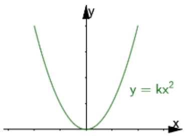


Professor:

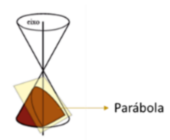
Neste momento, seria interessante apresentar diversos exercícios de representação no plano cartesiano de hipérboles dadas por equações na forma apresentada anteriormente, sempre destacando as assíntotas, que podem ser obtidas pela simples fatoração da diferença de quadrados, característica da equação da hipérbole nessa forma.

PARÁBOLA

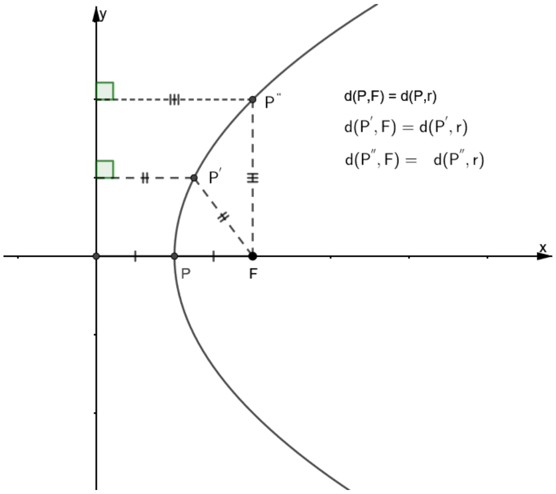
Em geral, quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas tais que **y** é diretamente proporcional ao quadrado de **x** ($y = kx^2$, k constante e $k \neq 0$), a curva correspondente no plano cartesiano é uma parábola.



Quando seccionamos um cone circular reto por um plano que forma com a base um ângulo exatamente igual ao que uma geratriz do cone forma com a base, obtemos também uma parábola.



A parábola tem certas propriedades características que podem ser utilizadas para defini-la. Uma delas é a existência de um ponto **F**, fixado, e de uma reta **r**, fixada, tais que a distância de cada ponto **P** da parábola até **F** é igual à distância de **P** até **r**. **F** é o foco da parábola e **r** é sua diretriz.



ATIVIDADE 1

Determine o foco e a diretriz das parábolas que podem ser representadas no plano cartesiano por equações do tipo:

a) $y = kx^2$

b) $y = ky^2$

c) $y = kx^2 + h$

Resolução:

Consideremos a parábola $y = kx^2$.

Se o foco for o ponto F(0, c), então a diretriz r será a reta $y = -c$, pois o ponto (0, 0) pertence à parábola e a distância dele ao foco deve ser a mesma que a distância dele à diretriz.

Sendo P(x, y) um ponto qualquer da parábola, a distância de P ao foco deve ser igual à distância de P ao foco deve ser igual à distância até a diretriz, ou seja:

$d(P,F) = \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = y + c = d(P, r)$.

Logo, $x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$

Substituindo y por kx^2 e efetuando os cálculos, obtemos;

$x^2 + \left(kx^2 - c\right)^2 = (kx + c)^2$

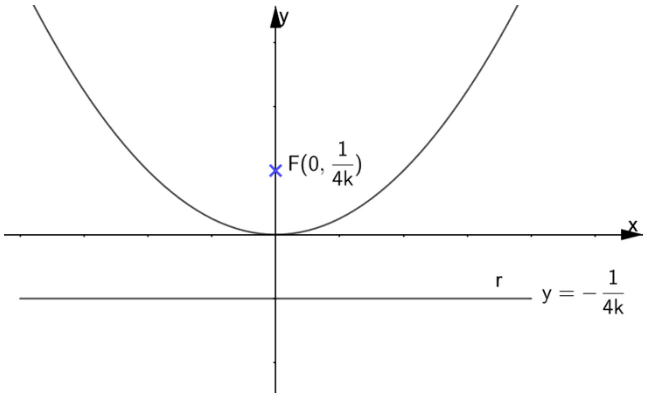
$x^2 + k^2x^4 + c^2 - 2kx^2c = k^2x^4 + c^2 + 2kcx^2$

$x^2(1 - 4kc) = 0$

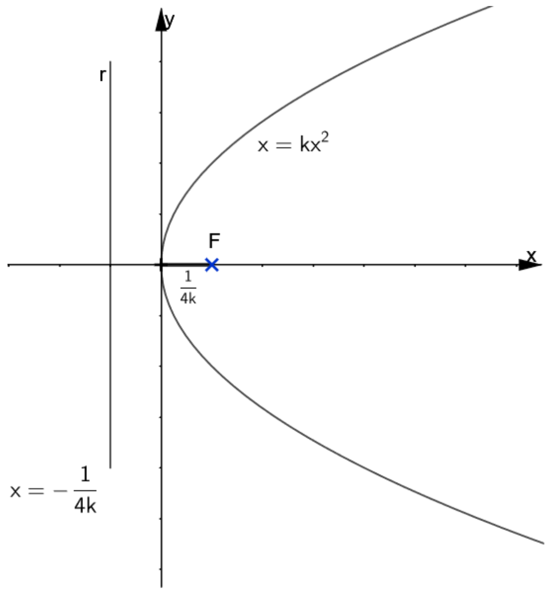
Sendo assim, concluímos que, para a igualdade valer para todo x, devemos ter:

$$c = \frac{1}{4k}$$

Logo, o foco é o ponto $\left(0, \frac{1}{4k}\right)$, e a diretriz é a reta $y = -\frac{1}{4k}$.

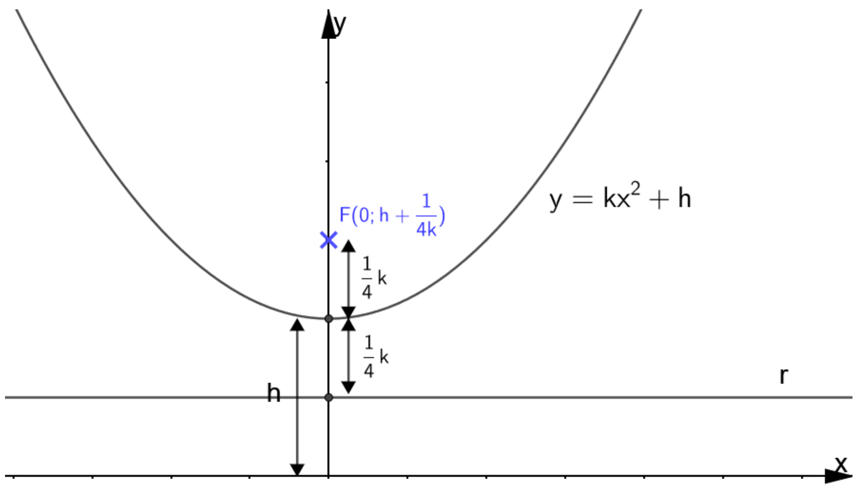


Da mesma maneira, se a parábola fosse $x = ky^2$, teríamos: foco $\left(\frac{1}{4k}; 0\right)$ *e diretriz* $x = -\frac{1}{4k}$



Para uma parábola de equação $y = kx^2 + h$, o foco e a diretriz seriam transladados na direção do eixo Ou de um valor h, ou seja teríamos:

$F\left(0; h + \frac{1}{4k}\right)$ e r: $y = h - \frac{1}{4k}$



Professor:

Em função do tempo disponível, exercícios de identificação do foco e da diretriz de diversos parábolas expressas por meio de equações do tipo: $y = ax^2 + bx + c$, podem ser propostos. Para achar o foco, é fundamental antes achar o vértice; a partir daí, determina-se a equação da diretriz.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Valéria Arcari Muhi

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Carolina dos Santos Batista Murauskas

ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

BIOLOGIA
Aparecida Kida Sanches – *Equipe Curricular de Biologia*; Beatriz Felice Ponzio – *Equipe Curricular de Biologia*; Airton dos Santos Bartolotto – *PCNP da D.E. de Santos*; Evandro Rodrigues Vargas Silvério – *PCNP da D.E. de Apiaí*; Ludmila Sadokoff – *PCNP da D.E. de Caraguatatuba*; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – *PCNP da D.E. de São Vicente*; Marly Aparecida Giraldelli Marsulo – *PCNP da D.E. de Piracicaba*; Paula Aparecida Borges de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 3*

FÍSICA
Ana Claudia Cossini Martins – *PCNP D.E. José Bonifácio*; Debora Cíntia Rabello – *PCNP D.E. Santos*; Carina Emy Kagohara *PCNP D.E. Sul 1* – Dimas Daniel de Barros – *PCNP D.E. São Roque*; Jefferson Heleno Tsuchiya – *Equipe Curricular de Física*; José Rubens Antoniazzi Silva – *PCNP D.E. Tupã*; Juliana Pereira Thomazo – *PCNP D.E. São Bernardo do Campo*; Jussara Alves Martins Ferrari – *PCNP D.E. Adamantina;* Sara dos Santos Dias – *PCNP D.E. Mauá;* Thaís de Oliveira Müzel – *PCNP D.E. Itapeva;* Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – *PCNP DE Leste 5*.

QUÍMICA
Alexandra Fraga Vasquez – *Equipe Curricular de Química*; Cristiane Marani Coppini – *PCNP D.E. São Roque*; Gerson Novais Silva – *PCNP D.E. Região de São Vicente;* Laura Camargo de Andrade Xavier – *PCNP D.E. Registro*; Natalina de Fátima Mateus – *PCNP D.E. Guarulhos Sul;* Wilian Guirra de Jesus – *PCNP D.E. Franca*; Xenia Aparecida Sabino – *PCNP D.E. Leste 5*.

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

GEOGRAFIA
Andréia Cristina Barroso Cardoso – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Sergio Luiz Damiati – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; André Baroni - *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Alexandre Cursino Borges Júnior – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Beatriz Michele Moço Dias – *PCNP da D.E. Taubaté*; Bruna Capóia Trescenti – *PCNP da D.E Itu*; Daniel Ladeira Almeida – *PCNP da D.E. São Bernardo do Campo*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Cleunice Dias de Oliveira Gaspar – *PCNP da D.E. São Vicente*; Cristiane Cristina Olímpio – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba*; Dulcinéa da Silveira Ballestero – *PCNP da D.E. Leste 5*; Elizete Buranello Perez – *PCNP da D.E. Penápolis*; Maria Julia Ramos Sant'Ana – *PCNP da D.E. Adamantina*; Márcio Eduardo Pedrozo – *PCNP da D.E. Americana*; Patrícia Silvestre Águas; Regina Célia Batista – *PCNP da D.E. Piraju*; Roseli Pereira De Araujo – *PCNP da D.E. Bauru*; Rosenei Aparecida Ribeiro Libório – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Sandra Raquel Scassola Dias – *PCNP da D.E. Tupã*; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 2*; Shirley Schweizer – *PCNP da D.E. Botucatu*; Simone Regiane de Almeida Cuba – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Telma Riggio – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Viviane Maria Bispo – *PCNP da D.E. José Bonifácio*.

FILOSOFIA
Produção, organização e revisão: Erica Cristina Frau – *PCNP da DRE Campinas Oeste*; Tânia Gonçalves – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular*

HISTÓRIA
1ª Série – Edi Wilson Silveira – *COPED – SEDUC*; Bruno Ferreira Matsumoto – *PCNP da D.E. de Itapetininga*. **2ª Série** – Tadeu Pamplona Pagnossa – *PCNP da D.E. de Guaratinguetá*. **3ª Série** – Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED – SEDUC; Rodrigo Costa Silva – PCNP da D.E. de Assis*.
Organização e revisão
Edi Wilson Silveira – *COPED – SEDUC;* Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED – SEDUC*

Colaboradora – Revisora de Língua Portuguesa
Caroline Cavalli.

SOCIOLOGIA
Emerson Costa – SEDUC/COPED/CEM – *Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Revisão
Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Organização
Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*

ÁREA DE LINGUAGENS

ARTE
Carlos Eduardo Povinha – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Eduardo Martins kebbe – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Adriana Marques Ursini Santás – *PCNP da D.E. Santos;* Ana Maria Minari de Siqueira – *PCNP da D.E. são José dos Campos*; Débora David Guidolín – *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Djalma Abel Novaes – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Eliana Florindo – *PCNP da D.E. Suzano*; Elisangela Vicente Prismit – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Madalena Ponce Rodrigues – *PCNP da D.E. Botucatu*; Marilia Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – *PCNP da D.E. São Vicente*; Patrícia de Lima Takaoka – *PCNP da D.E. Caraguatatuba;* Pedro Kazuo Nagasse – *PCNP da D.E. Jales*; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Caieiras*; Roberta Jorge Luz – *PCNP da D.E. Sorocaba*; Rodrigo Mendes – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Silmara Lourdes Truzzi – *PCNP da D.E. Marília;* Sonia Tobias Prado – *PCNP da D.E. Lins*.

EDUCAÇÃO FÍSICA
Luiz Fernando Vagliengo – *Equipe Curricular de Educação Física*; Marcelo Ortega Amorim – *Equipe Curricular de Educação Física;* Mirna Leia Violin Brandt – *Equipe Curricular de Educação Física;* Sandra Pereira Mendes – *Equipe Curricular de Educação Física*; Diego Diaz Sanchez – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Felipe Augusto Lucci – *PCNP da D.E. Itu*; Flavia Naomi Kunihira Peixoto – *PCNP da D.E. Suzano*; Gislaine Procópio Querido – *PCNP da D.E. São Roque*; Isabela Muniz dos Santos Cáceres – *PCNP da D.E. Votorantim*; Janaina Pazeto Domingos – *PCNP da D.E. Sul 3*; Katia Mendes Silva – *PCNP da D.E. Andradina*; Lígia Estronioli de Castro – *PCNP da D.E. Bauru*; Maria Izildinha Marcelino – *PCNP da D.E. Osasco*; Nabil José Awad – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Neara Isabel de Freitas Lima – *PCNP da D.E. Sorocaba*; Sandra Regina Valadão – *PCNP da D.E. Taboão da Serra*; Tiago Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Lins* ; Thaisa Pedrosa Silva Nunes – *PCNP da D.E. Tupã*

INGLÊS
Aderson Toledo Moreno – *PCNP da D.E. SUL 1*; Catarina Reis Matos da Cruz – *PCNP da D.E. Leste2*; Cíntia Perrenoud de Almeida – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba;* Eliana Aparecida Oliveira Burian – *COPED – CEM – LEM*; Emerson Thiago Kaishi Ono – *COPED - CEFAF – LEM;* Gilmara Aparecida Prado Cavalcante – *PCNP da D.E. Mauá;* Jucimeire de Souza Bispo – *COPED – CEFAF – LEM;* Liana Maura Antunes da Silva Barreto – *PCNP da D.E. Centro*; Luiz Afonso Baddini – *PCNP da D.E Santos;* Marisa Mota Novais Porto – PCNP – *D.E. Carapicuíba*; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – *PCNP – D.E. Centro-Oeste*; Pamella de Paula da Silva Santos – *COPED – CEM – LEM;* Renata Andreia Placa Orosco de Souza – *PCNP da D.E. Presidente Prudente;* Rosane de Carvalho – *PCNP da D.E. Adamantina;* Sérgio Antonio da Silva Teressaka – *PCNP da D.E Jacareí;* Viviane Barcellos Isidorio – *PCNP – D.E. São José dos Campos;* Vlademir Oliveira Ismael – *PCNP da D.E. SUL 1*.

LÍNGUA PORTUGUESA
Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo, Alzira Maria Sá Magalhães Cavalcante, Andrea Righeto, Cristiane Alves de Oliveira, Daniel Carvalho Nhani; Danubia Fernandes Sobreira Tasca, Débora Silva Batista Eilliar, Eliane Cristina Gonçalves Ramos, Helena Pereira dos Santos, Igor Rodrigo Valério Matias, Jacqueline da Silva Souza, João Mário Santana, Katia Amâncio Cruz, Letícia Maria de Barros Lima Viviani, Lidiane Máximo Feitosa, Luiz Eduardo Divino da Fonseca, Luiz Fernando Biasi, Márcia Regina Xavier Gardenal, Maria Madalena Borges Gutierre, Martha Wassif Salloume Garcia, Neuza de Mello Lopes Schonherr, Patrícia Fernanda Morande Roveri, Reginaldo Inocenti, Rodrigo Cesar Gonçalves, Shirlei Pio Pereira Fernandes, Sônia Maria Rodrigues, Tatiana Balli, Valquíria Ferreira de Lima Almeida, Viviane Evangelista Neves Santos, William Ruotti.
Leitura crítica e validação: Cristiane Aparecida Nunes; Edvaldo Cerazze; Fabiano Pereira dos Santos; Fabrício Cristian de Proença; Glauco Roberto Bertucci; Marcia Aparecida Barbosa Corrales; Maria José Constâncio Bellon; Maria Madalena Borges Gutierre; Mariângela Soares Baptistello Porto; Paula de Souza Mozaner; Raquel Salzani Fiorini; Reginaldo Inocenti; Ronaldo Cesar Alexandre Formici; Rosane de Paiva Felício; Roseli Aparecida Conceição Ota; Selma Tavares da Silva; Silvia Helena Soares.
Professores responsáveis pela organização, revisão adaptação e validação do material: Katia Regina Pessoa, Mara Lucia David, Marcos Rodrigues Ferreira, Mary Jacomine da Silva, Teônia de Abreu Ferreira.

MATEMÁTICA
Ilana Brawerman – *Equipe Curricular de Matemática*; João dos Santos Vitalino – *Equipe Curricular de Matemática;* Marcos José Traldi – *Equipe Curricular de Matemática;* Otávio Yoshio Yamanaka – Equipe Curricular de Matemática; Vanderley Aparecido Cornatione – *Equipe Curricular de Matemática;* Lilian Silva de Carvalho – *PCNP da D.E. de São Carlos;* Marcelo Balduíno – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte;* Maria Regina Duarte Lima – *PCNP da D.E. José Bonifácio;* Simone Cristina do Amaral Porto –*PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Talles Eduardo Nazar Cerizza – *PCNP da D.E. Franca;* Willian Casari de Souza – *PCNP da D.E. Araçatuba*.

TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
Adilson Vilas Boas – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Alessandro Antônio Bernardo – *PCNP da D.E. Jaú*; Alet Rosie de Campos Silva – *PCNP da D.E. Mirante do Paranapanema*; Aparecido Antonio de Almeida – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Arlete Aparecida de Almeida Oliveira – *SEDUC/COPED/ Centro de Inovação*; Aydê Pereira Salla – *PCNP da D.E. Campinas Leste*; Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/ Assessora Educação Integral*; *CIEB;* Camila Aparecida Carvalho Lopes – *SEDUC/ COPED/Assessora Técnica*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Debora Denise Dias Garofalo – *SEDUC/COPED/Assessora de Tecnologia*; Eduardo de Moura Almeida – *Assessora da Universidade de São Paulo*; *EducaMídia – Palavra Aberta;* Elaine Leite de Lima – *SEDUC/EFAPE/Técnico III*; Fabiano Pereira dos Santos – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Fábio Granella de Jesus – *PCNP da D.E. Fernandópolis*; Fabrício Cristian de Proença – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Fernanda Henrique De Oliveira – *SEDUC/EFAPE/Diretora do DETED*; Fernando Carlos Rodrigues Pinto – *PCNP da D.E. Presidente Prudente*; *Fundação Telefonica Vivo; Fundação Vanzolini;* Grasiela Cabrio dos Santos Oliveira – *PCNP da D.E. Araraquara*; *Grupo Mais Unidos;* Helder Alexandre de Oliveira – *PCNP da D.E. Tupã*; Jacqueline Peixoto Barbosa – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas;* José Armando Valente – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; Liliane Pereira – *SEDUC/COPED/ Diretora do Centro de Inovação*; Leonardo Granado Garcia – *PCNPda D.E. Franca*; Lucy Mary Padilha Domingos – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Marcelo Suwabe – *PCNP da D.E. Santos*; Márcio Greyck Guimarães Correa – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Marcos Vinícius Marcondes de Menezes – *PCNP da D.E. Andradina*; Maria Elizabeth de Almeida – *Assessora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*; Mariana Moreira Martines – *PCNP da D.E. Bauru*; Matheus Lima Piffer – *PCNP da D.E. Limeira*; Patricia Pinto Santiago – *PCNP da D.E. Registro*; *Mundo Maker;* Pedro Henrique Eneas Ferreira – *PCNP da D.E. São Carlos*; Raquel Villa Nova Pedroso de Almeida – *PCNP da D.E. Norte 1*; Rebeka de Moraes Garcia – *PCNP da D.E. Mogi das Cruzes*; Rodrigo Prizoto – *PCNP da D.E. Taubaté*; Roseli Aparecida Conceição Ota – *PCNP da D.E. São Roque*; Roxane Helena Rodrigues Rojo – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; Salete Cristina Venarusso – *PCNP da D.E. Jaú*; Sandra Heloisa Mancebo Henrique – *PCNP da D.E. Registro*; Sandra Pereira Jardim – *PCNP da D.E. Osasco*; Sidemar Rodrigues (Nino) – *PCNP da D.E. Mogi Mirim*; Silene Kuin – *SEDUC/ EFAPE/Técnico I*; Silvia Helena Soares – *PCNP da D.E. Mogi Mirim*; Sílvia Nogueira – *PCNP da D.E. Leste 1*; *Triade Educacional; Undime;* Viviane Artioli – *PCNP da D.E. Campinas Leste*; Viviane Camilo de Andrade – *PCNP da D.E. Carapicuíba*; Wagner Aparecido da Silva – *PCNP da D.E. Itapecerica da Serra*.

PROJETO DE VIDA
Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/Assessora Educação Integral*; Cassia Moraes Targa Longo – *SEDUC/COPED/CEART*; Claudia Soraia Rocha Moura – *SEDUC/COPED/ DEMOD/CEJA*; Helena Claudia Soares Achilles – *SEDUC/COPED/DECEGP*; Instituto Ayrton Senna; Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto Proaj; Simone Cristina Succi – *SEDUC/EFAPE*; Walter Aparecido Borges – *SEDUC/EFAPE*.

Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

Projeto Gráfico
Fernanda Buccelli e Ricardo Ferreira

Diagramação, Tratamento de Imagens e Colaboradores:
Aline Navarro; Ana Lúcia Charnyai; Dulce Maria de Lima Pinto; Fátima Regina de Souza Lima; Isabel Gomes Ferreira; Leonídio Gomes; Marcelo de Oliveira Daniel; Maria de Fátima Alves Gonçalves; Marilena Camargo Villavoy; Marli Santos de Jesus; Paulo César Tenório; Ricardo Ferreira; Rita de Cássia Diniz; Robson Minghini; Sandra Regina Brazão Gomes; Selma Brisolla de Campos; Teresa Lucinda Ferreira de Andrade; Tiago Cheregati e Vanessa Merizzi.