SP FAZ ESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

Ensino Médio

1º BIMESTRE

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretário Executivo
Haroldo Corrêa Rocha

Chefe de Gabinete
Renilda Peres de Lima

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Leandro José Franco Damy

Caderno do Professor
2ª série do Ensino Médio
1º bimestre

Organização das grades curriculares

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Currículo Oficial – SEE-SP		**BNCC**
Tema/ Conteúdo	**Habilidades**	**Competência Geral**
Relações Trigonometria	Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas. Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o se o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos. Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como f(x) = asen (bx) + c a partir do gráfico de y = senx, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c. Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e de 2º graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Os fenômenos periódicos

As funções são maneiras que encontramos para representar a interdependência entre grandezas, sem perder a generalidade. No Ensino Médio, o estudo de números e funções é um dos mais importantes e amplia sobremaneira, em relação as etapas anteriores. Com base nessa premissa, apresentamos os tipos de funções estudados no Ensino Médio, identificando os significados que normalmente lhes são associados.

O primeiro grupo de funções com o qual os alunos tomam contato no Ensino Médio são as funções polinomiais de 1º e 2º grau, complementadas ao fim da 3ª série do Ensino Médio, com a apresentação das funções polinomiais de grau qualquer. Há uma variedade de situações possíveis de serem modeladas com funções polinomiais de diferentes graus. É comum, no início do trabalho com funções, a proposição de situações aos alunos que exijam, por exemplo, a análise de como o preço da corrida de taxi depende da quilometragem ou da verificação de que a quantidade de calor que um corpo absorve ocorre em função do aumento de sua temperatura ou, ainda, o fato de que um corpo em queda livre aumenta cada vez mais a distância que percorre a cada segundo sucessivo.

Outro grupo de funções, analisado no Ensino Médio, é aquele que discute o crescimento exponencial de uma grandeza em função da variação de outra. Nesse grupo, incluem-se, além das funções exponenciais propriamente ditas, as funções logarítmicas. Enquanto as funções exponenciais tratam dos processos de crescimento ou decrescimento rápidos, as funções logarítmicas modelam fenômenos que crescem ou decrescem de modo mais lento. Processos de crescimento populacional e também de acumulação financeira constituem contextos fecundos para a significação de funções desse grupo, e normalmente são apresentados em diversos materiais didáticos. Além disso, os logaritmos e as exponenciais estão presentes na determinação da intensidade dos terremotos, no nível de intensidade sonora e no cálculo da capacidade de armazenagem de informação.

As funções trigonométricas, que constituem o terceiro grupo das funções estudadas no Ensino Médio, caracterizam-se por permitir a modelagem de fenômenos periódicos, isto é, fenômenos que se repetem e que mantêm as características de dependência entre as grandezas envolvidas. A existência de uma gama de fenômenos dessa natureza contrasta com a baixa frequência com que as funções trigonométricas são contextualizadas nos materiais didáticos. Na maioria das vezes, o tratamento dado aos senos, cossenos e tangentes fica única e exclusivamente restrito aos cálculos de valores para arcos notáveis e seus côngruos, e para a relação algébrica entre estas funções, sem que a periodicidade, foco principal do estudo, seja analisada com a importância merecida.

Para concluir, reiteramos que a motivação pelo estudo das funções trigonométricas deve ser o reconhecimento de que elas são necessárias para a modelagem de fenômenos periódicos. Nesse sentido, antes da apresentação dos conceitos, os alunos precisam ser sensibilizados para a observação real, virtual ou imaginativa de uma série de manifestações naturais de caráter periódico.

Os tópicos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

Situação de Aprendizagem 1: O reconhecimento da periodicidade, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 12 a 22;

Situação de Aprendizagem 2: A periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 23 a 38.

Situação de Aprendizagem 3: Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos, Vol. 1, 2ª série do Ensino Médio, p. 39 a 52.

Situações de Aprendizagem 4: Equações trigonométricas, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 53 a 60.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

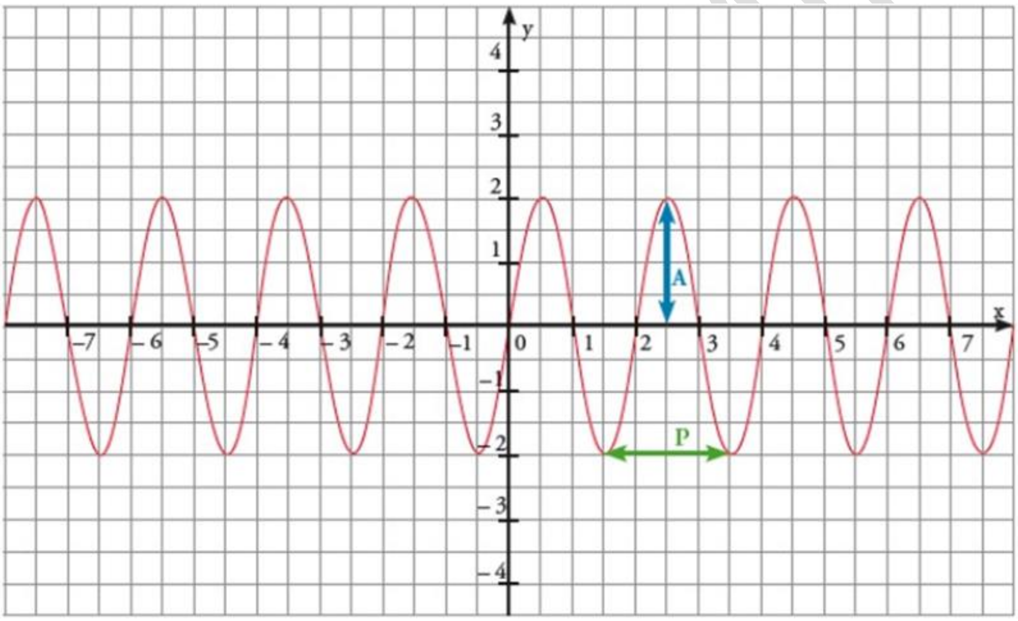
- Tempestades solares, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1353 (acesso em 28/11/2018)
- A dança do sol, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1080 (acesso em 28/11/2018)
- A roda gigante, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1364 (acesso em 28/11/2018)

Tempestades solares	A dança do sol	A roda gigante

TEMA 1 – O RECONHECIMENTO DA PERIODICIDADE – AMPLITUDE E PERÍMETRO.

ATIVIDADE 1

Observe o gráfico a seguir, em formato de onda, obtido pela observação de um fenômeno periódico.



Nesse gráfico aparecem em destaque dois conceitos importantes, associados a fenômenos periódicos: a amplitude (A) e o período (P). Período é a distância horizontal entre dois picos sucessivos da “onda”, e amplitude é a metade da distância vertical entre dois picos.

Sabendo-se disto, a amplitude e o período do fenômeno periódico ilustrado no gráfico.

Amplitude (A): ______________

Período (P): ______________

Resolução comentada

O gráfico destaca dois conceitos importantes, associados a fenômenos periódicos: a amplitude (A) e o período (P).

Período é a distância horizontal entre dois picos sucessivos da "onda" e amplitude é a metade da distância vertical entre dois picos. Vamos fazer os cálculos para identificar cada um deles.

Amplitude:

$$(A) = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$$

Período:

$$(P) = 3{,}5 - 1{,}5 = 2$$

Professor, para contextualizar esse movimento periódico, alguns exemplos podem ser apresentados aos alunos, tais como os ponteiros do relógio, o movimento de rotação da Terra ao redor do próprio eixo entre outros.

ATIVIDADE 2

Imagem de uma função é o conjunto dos valores que a função assume, ou, em outras palavras, é o conjunto dos valores de y correspondentes aos valores de x. Observe a imagem de cada uma das seguintes funções representadas em seus gráficos.

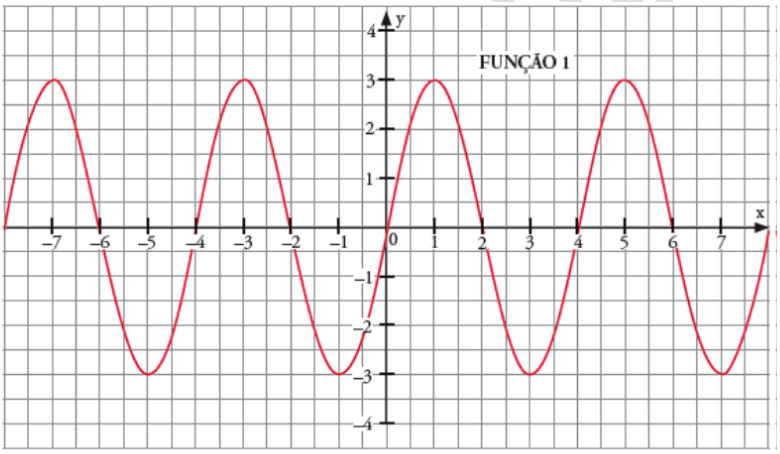


Imagem (Função 1) = ____

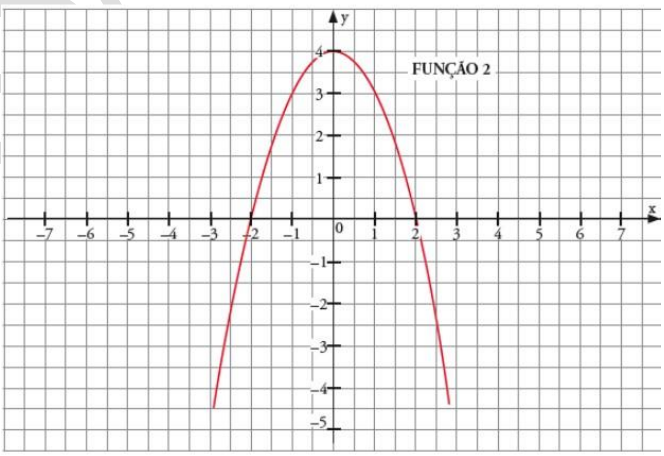


Imagem (Função 2) = ____

Resolução comentada

Professor, para resolver esta atividade é importante enfatizar os conceitos de Domínio, Contradomínio e imagem para que os alunos identifiquem cada elemento no gráfico apresentado.

O conjunto imagem de uma função é f: $x \rightarrow y$ é o conjunto de todos os elementos de Y que são imagem de um elemento de X. Notação: Im(f).

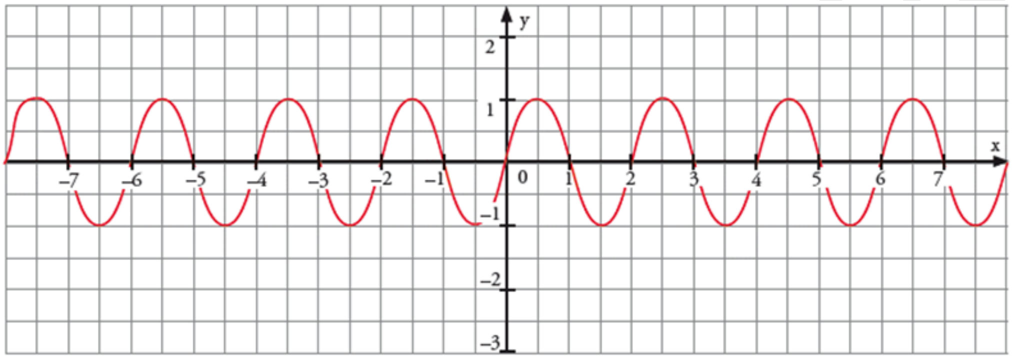
Vamos identificar a imagem das funções apresentadas:

Função 1: Im(f)=$\{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \geq 3\}$

Função 2: Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

Escreva o período, a imagem e a amplitude das funções representadas pelos gráficos seguintes:

a)

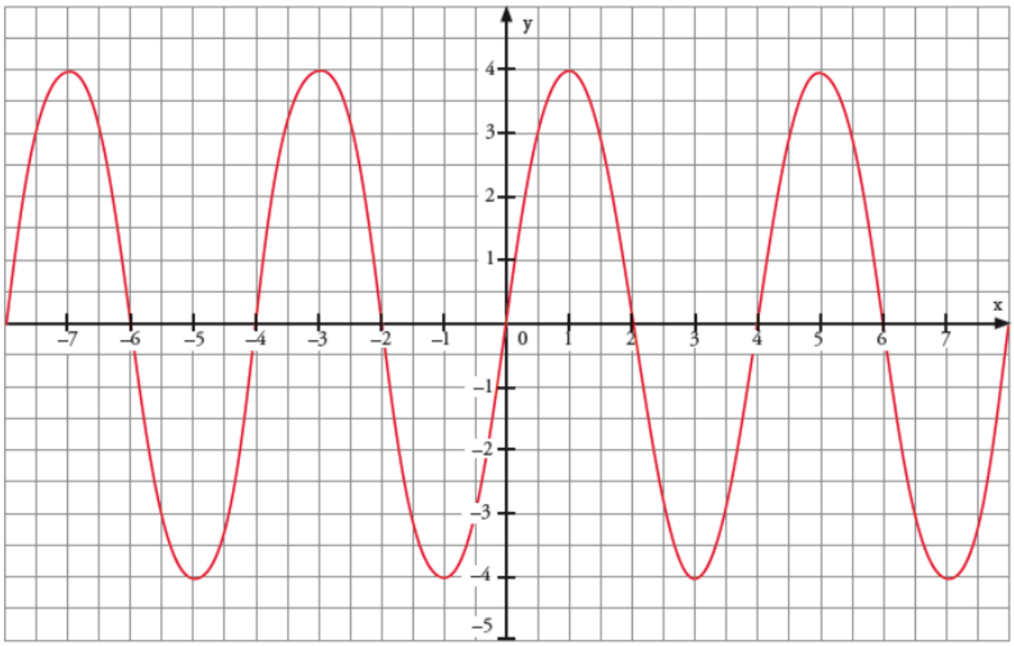


(P)= 3,5 − 1,5 = 2

(A) = $\dfrac{1-(-1)}{2} = 1$

Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \geq 1\}$ ou $[-1, 1]$

b)

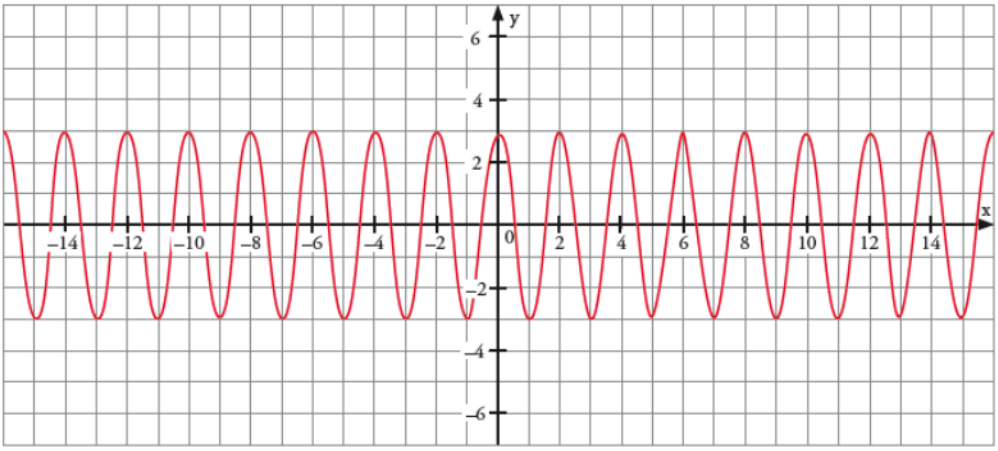


$(P) = 7 - 3 = 4$

$(A) = \dfrac{4 - (-4)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} |\ -4 \leq y \geq 4\}$ ou $[-4, 4]$

c)



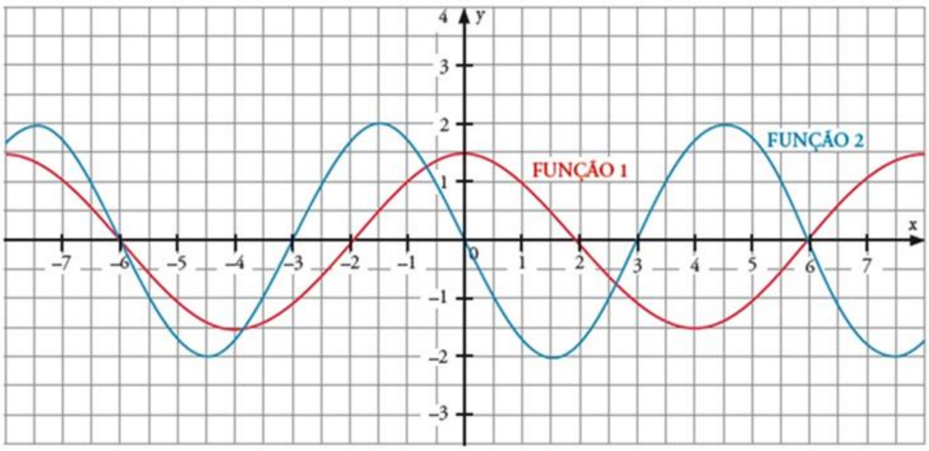
$(P) = 3 - 1 = 2$

$(A) = \dfrac{3 - (-3)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

$Im(f) = y \in \mathbb{R}\ |\ -3 \leq y \geq 3$ ou $[-3, 3]$

ATIVIDADE 3

Com base nas duas funções periódicas representadas a seguir, responda:



Função 1;

$(A) = \dfrac{1{,}5 - (-1{,}5)}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$(P) = 4 - (-4) = 8$

Função 2

$(A) = \dfrac{2 - (-2)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$(P) = 1{,}5 - (-4{,}5) = 6$

a) qual função tem o maior valor de período?

A função 1 (P=8)

b) qual função tem o maior valor de amplitude?

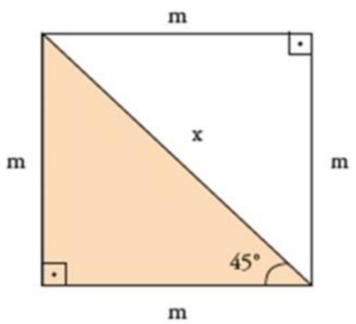
A função 2 (A=2)

TEMA 2 – A PERIODICIDADE E O MODELO DA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Antes de iniciarmos o conteúdo desta seção, será importante retomar os valores do seno e do cosseno de alguns ângulos chamados ângulos notáveis. São eles: 30º, 45º e 60º.

- Para cada item a seguir, calcule o valor de x em função de **m** (sugestão: utilize o Teorema de Pitágoras).
- Em seguida, utilizando os valores encontrados, calcule seno e cosseno dos ângulos notáveis.

a) Ângulo de 45º



$x^2 = m^2 + m^2$

$x^2 = 2m^2$

$x = \sqrt{2m^2}$

$x = m\sqrt{2}$

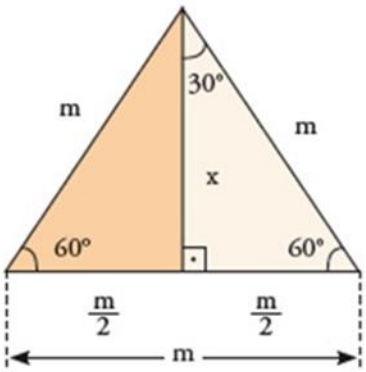
Primeiramente vamos encontrar o valor de x no quadrado de lado m a seguir utilizando o Teorema de Pitágoras.

Agora aplicando as razões trigonométricas de seno e cosseno podemos identificar os valores de (30°, 45° e 60°) e associá-los ao ciclo trigonométrico.

$$\text{sen } 45° = \frac{m}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{m}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Ângulo de 60º



Encontraremos primeiro o valor de x que representa a altura do triângulo, para isso utilizaremos o teorema de Pitágoras.

$$m^2 = x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

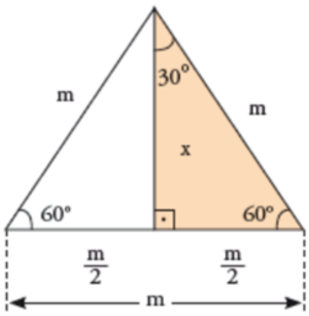
$$m^2 = x^2 + \frac{m^2}{4}$$

$$x^2 = m^2 - \frac{m^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{3m^2}{4}$$

$$x = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

c) Ângulo de 30º



Encontraremos primeiro o valor de x que representa a altura do triângulo, para isso utilizaremos o teorema de Pitágoras.

$$m^2 = x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$m^2 = x^2 + \frac{m^2}{4}$$

$$x^2 = m^2 - \frac{m^2}{4}$$

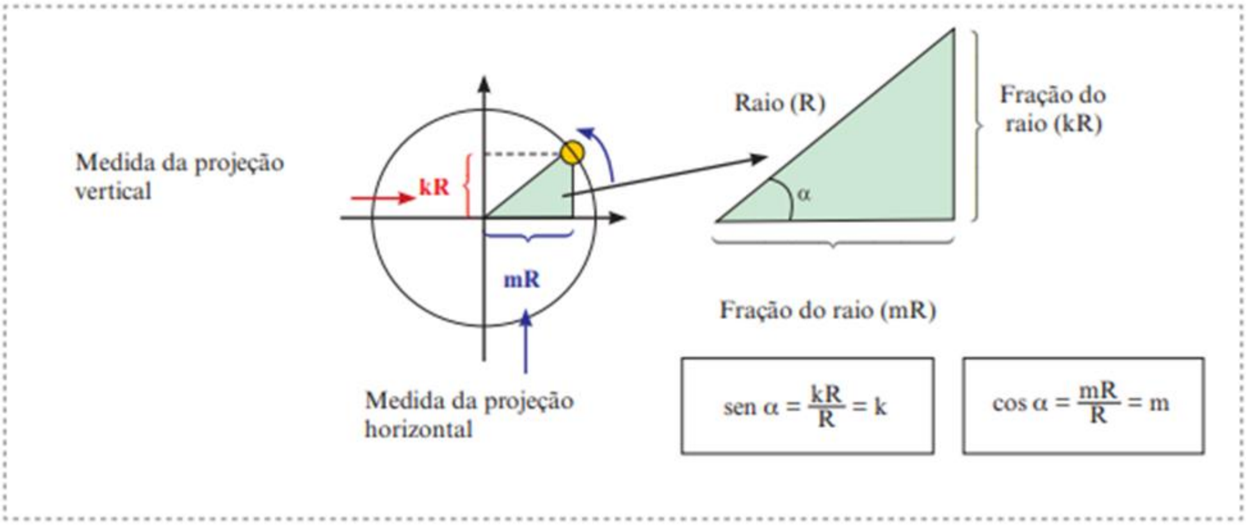
$$x^2 = \frac{3m^2}{4}$$

$$x = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{m}{2}}{m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{x}{m} = \frac{\frac{m\sqrt{3}}{2}}{m} = \frac{m\sqrt{3}}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Professor, este é o momento de fazer a associação dos valores encontrados no ciclo trigonométrico. Observe como as razões trigonométricas seno e cosseno podem ser associadas ao ângulo de giro de um ponto sobre a circunferência.



Para validar essas aprendizagens o professor pode pedir que os alunos desenhem uma circunferência trigonométrica, para que os valores de senos e cossenos dos ângulos notáveis e também dos ângulos que dividem os quadrantes sejam associados aos valores aproximados, utilizados anteriormente. Toda essa etapa pode ser proposta na atividade 01 do tema 2.

Para saber mais

Acesse os link :
http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_recursos/geogebra/circulo_trigo.html

Movimente o ponto **P** sobre o Círculo Trigonométrico. Selecione as opções Seno, Cosseno ou Tangente e observe!

https://www.geogebra.org/classic/fheda5zm
Movimente o ponto do controle deslizante e observe os valores do seno, cosseno e tangente do ângulo α.

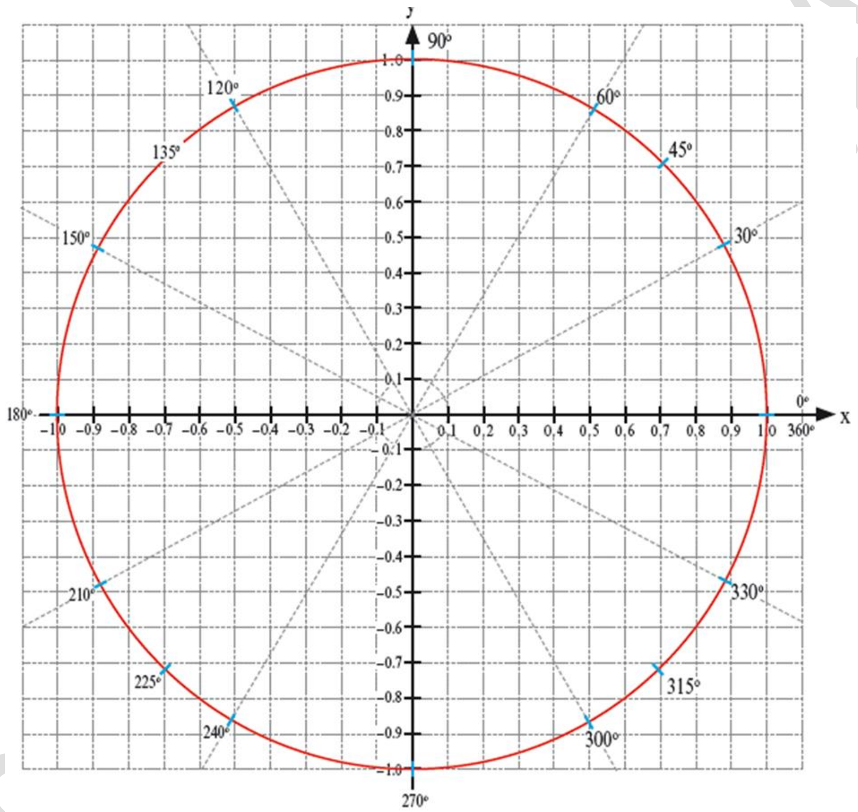
ATIVIDADE 1

Na malha quadriculada, desenhe uma circunferência trigonométrica de raio 10 unidades e, em seguida, faça o que se pede.

a) adotando a escala 1:10 unidades, divida os eixos cartesianos em subunidades, como, por exemplo, de 0,1 em 0,1.

b) assinale sobre a circunferência a extremidade final dos arcos de 30°, 45° e 60°, bem como os simétricos em relação aos eixos nos demais quadrantes. Para essa tarefa, utilize compasso ou transferidor.

Esta atividade propõe nos itens **a)** e **b)** ao aluno para desenhar um círculo de raio 10 e marcar os valores correspondentes de seno e cosseno dos ângulos notáveis bem como seus simétricos utilizando a escala 1:10. O aluno poderá utilizar o compasso para melhor precisão dos arcos.



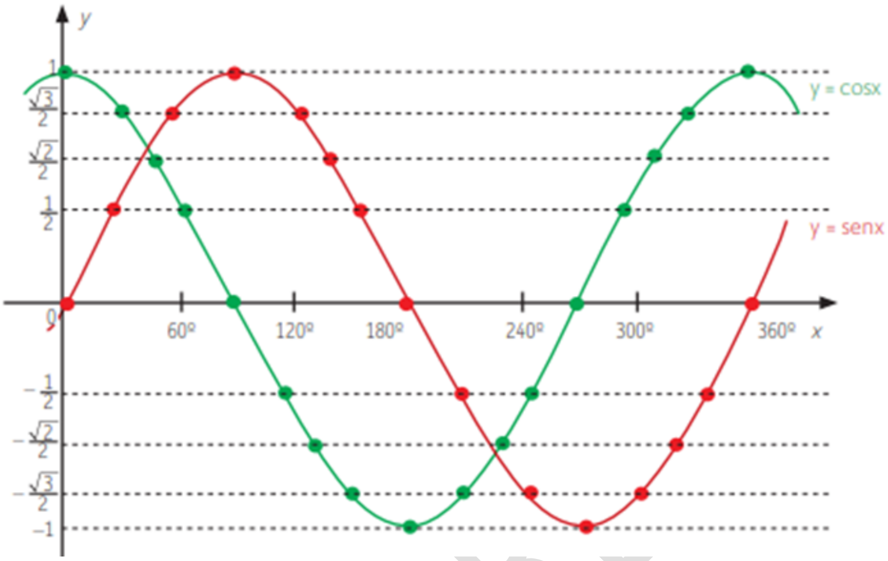
c) Complete a tabela a seguir, relacionando todos os arcos assinalados às medidas de seus senos e cossenos, lembrando que $\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7$ e que $\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$

Ângulo (º)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Seno	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0
Cosseno	1	0,9	0,7	0,5	0	–0,5	–0,7	–0,9	–1

Professor, para complementar a atividade você poderá propor que os alunos continuem a tabela com os demais ângulos simétricos até 360°.

d) Na página a seguir desenhe os gráficos das funções y = senx e de y = cosx em um mesmo sistema de eixos cartesianos. (Atenção à escala do eixo horizontal!)

Chamamos a atenção do professor para que a tabela deste exercício seja completada com os valores exatos dos senos e cossenos dos ângulos notáveis, em vez de aproximações, já utilizadas no momento de completar a tabela do item **c)** anterior. No entanto, será importante que os alunos associem os valores exatos a suas devidas aproximações no momento de assinalarem os senos e cossenos na circunferência trigonométrica que construírem.



ATIVIDADE 2

Complete

a) sen 135° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) cos 90° = 0

c) sen 180° = 0

d) sen 120° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) sen 300° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) cos 210° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ATIVIDADE 3

Professor utilize o ciclo trigonométrico para justificar as afirmações da atividade 3. A visualização é muito importante para que o aluno identifique os sinais e valores de seno e cosseno nos quadrantes

É verdade que:

a) o seno de 100º é negativo?

Não, o seno e 100° é positivo pois está no segundo quadrante.

b) o cosseno de 350º é positivo?

Sim, o cosseno no quarto quadrante é positivo.

c) o seno de 75º é maior do que o seno de 60º?

Sim, o seno de 75° é aproximadamente 0,97 enquanto o seno de 60° é aproximadamente 0,87.

d) o cosseno de 125º é maior do que o cosseno de 100º?

Não, pois cosseno de 125° é aproximadamente -0,57 e o cosseno de 100° é aproximadamente -0,17.

Ressaltamos mais uma vez o fato de que não se trata ainda de aprofundar o estudo dos gráficos das funções trigonométricas, aspecto esse que será explorado nas próximas atividades, quando os alunos tiverem contato com a identificação de arcos congruentes, quando já souberem calcular a menor determinação positiva de qualquer ângulo de medida maior do que 360º, quando conseguirem determinar a solução de algumas equações trigonométricas simples e, por fim, trabalharem com facilidade com medidas de ângulos expressas não apenas em graus, mas também em radianos. Destacamos que, nesta primeira etapa, os arcos foram medidos em graus e não em radianos. Isso é aconselhável pelo fato do grau ser a unidade de medida de arco familiar aos alunos nesse momento, uma vez que convivem com a ideia de ângulo de giro desde o 8º ano do Ensino Fundamental. No entanto, completada a primeira etapa, é aconselhável apresentar aos alunos a unidade radiano, bem como a relação de conversão entre as unidades de medida nesse caso. Para tanto, será necessário retomar alguns conceitos e apresentar outros, de maneira similar ao que se segue.

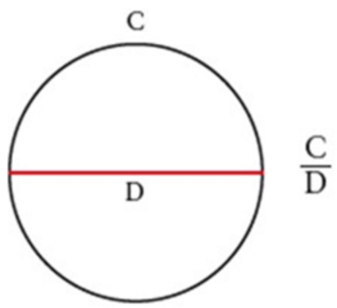
ATIVIDADE 4

O radiano

Um arco de circunferência pode ser medido em graus e também em radiano (rad). Para apresentar os radianos a seus alunos, propomos que o professor retome com eles o conteúdo, que, em princípio, deve fazer parte dos prévios conhecimentos deles:

Com base na figura, responda:

a) Em uma circunferência, qual é a razão entre o comprimento e o diâmetro?



$$\frac{\text{comprimento}}{\text{raio}} = \frac{C}{D} = 3{,}14159\ldots = \pi$$

b) em uma circunferência, qual é a razão entre o comprimento e o raio?

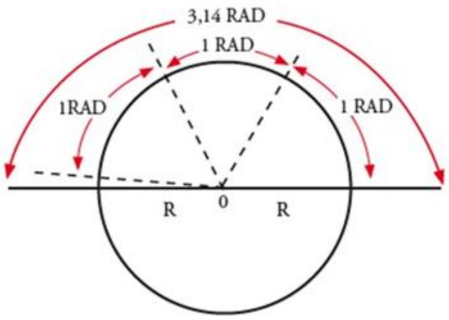
$$\frac{\text{comprimento}}{\text{raio}} = \frac{C}{r} = 2\pi = 6{,}28318...$$

A retomada dos elementos da circunferência é fundamental neste momento: Diâmetro, raio e comprimento. A razão entre as medidas do comprimento e do diâmetro de qualquer circunferência resulta sempre no mesmo valor: o número irracional $\pi = 3{,}14$.

ATIVIDADE 5

"Um radiano é a medida de um arco de comprimento igual ao do raio da circunferência."

Observe a imagem a seguir e responda às questões:



a) meia circunferência equivale a, aproximadamente, quantos radianos?

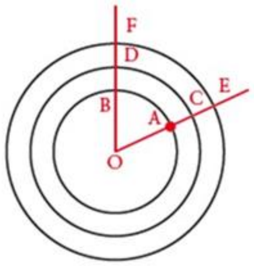
Observando o desenho, meia circunferência equivale a, aproximadamente, 3,14 rad.

b) quantos radianos mede um arco de semicircunferência?

Uma semicircunferência é equivalente a meia circunferência, como verificamos no item (a). A medida de meia circunferência equivale a, aproximadamente, 3,14 rad.

ATIVIDADE 6

O arco AB representado na figura a seguir mede 1,5 rad, e as três circunferências têm centro no ponto O.



Quanto mede, em radianos, o arco:

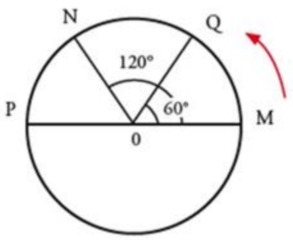
a) CD?

b) EF?

Os arcos assinalados nas circunferências têm, em radianos, medidas iguais, visto que estão delimitadas por um único ângulo central. Assim, os arcos CD e EF medem, cada um, 1,5 radiano.

ATIVIDADE 7

Na circunferência da figura a seguir estão assinalados dois ângulos centrais: um de medida 60° e outro de medida 120°.



Quanto mede, em radianos e no sentido indicado, o arco:

a) MP?

O arco MP mede aproximadamente 3,14 radianos, ou, precisamente, π radianos.

MQ?

O arco MQ é delimitado pelo ângulo central de 60°, que corresponde à terça parte de 180°. Assim, o arco MQ mede a terça parte de π, ou $\frac{\pi}{3}$ radianos.

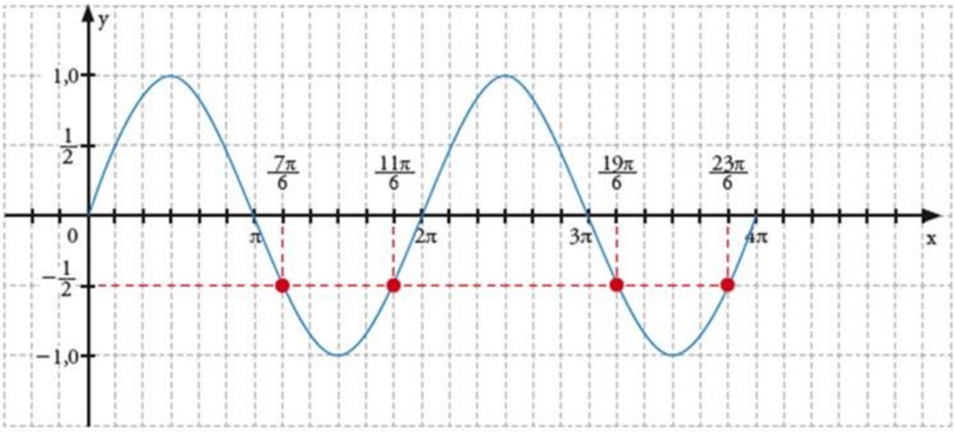
b) MN?

O arco MN é delimitado pelo ângulo central de 120°, que é igual ao dobro de 60°. Portanto, o arco MN mede $\frac{2\pi}{3}$ radianos

Ao completar as atividades do tema 2 (atividades 1 a 7), após a apresentação dos senos e cossenos dos arcos notáveis e de seus correspondentes nos demais quadrantes, o professor pode pedir que seus alunos resolvam algumas equações trigonométricas, do tipo senx = k ou cosx = m, definidas em R e também em intervalos definidos, como, por exemplo, $[0, 2\pi]$, $[0,4\pi]$, $[2\pi, 6\pi]$, etc. Para não ressaltar apenas o aspecto algébrico envolvido na resolução de equações dessa natureza, o professor pode pedir que os alunos também as resolvam graficamente, como, por exemplo, na atividade 8 a seguir:

ATIVIDADE 8

Observe o gráfico da função y = senx, desenhado no intervalo $[0, 4\pi]$. Neste gráfico estão assinalados quatro valores de x, que são soluções da equação senx $= -\frac{1}{2}$ no intervalo considerado.



Quais seriam as outras soluções dessa equação no caso dos intervalos a seguir:

Primeiramente vamos considerar alguns pontos do enunciado que devem ser considerados ao fazer a leitura.

- Mostrar aos alunos que a curva da função seno se inicia no x = 0 e termina em $x = 4\pi$, o que justifica o intervalo [0, 4π];
- Conceitos de amplitude e período podem ser retomados.;
- Associar os valores da função seno com o ciclo trigonométrico.;
- Os alunos devem identificar os valores do intervalo $[0, 4\pi]$ que tem como imagem y=$-\frac{1}{2}$ e a partir daí responder os itens **a)** e **b).**

a) [0, 6π]

$\frac{19\pi}{6}+2\pi=\frac{31\pi}{6}$

$\frac{23\pi}{6}+2\pi=\frac{35\pi}{6}$

b) [0, 8π]

$\frac{31\pi}{6}+2\pi=\frac{43\pi}{6}$

$\frac{35\pi}{6}+2\pi=\frac{47\pi}{6}$

ATIVIDADE 8

Consultando o gráfico da atividade anterior, encontre a solução de cada equação no intervalo $[0, 4\pi]$:

a) senx = 1

$\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$

b) senx = $\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$ e $\frac{17\pi}{6}$

c) senx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ e $\frac{8\pi}{3}$

Apesar de não propormos nas atividades do tema 2 que os alunos sejam apresentados a arcos com extremidades finais negativas, produzidos com base de giros no sentido horário na circunferência trigonométrica, julgamos importante que eles saibam da existência desses tipos de arcos e que, ao menos, desenhem uma circunferência e nela assinalem os arcos com extremidade final na primeira volta negativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS PARA A AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM DO TEMA 2.

O modelo da circunferência trigonométrica precisa ser compreendido para que o estudo de conceitos relacionados a ela possa ser realizado com qualidade. Ao fim desta Sequência de Atividades, é importante que o professor avalie se os alunos são capazes de:

- identificar a posição da extremidade final de um arco medido em graus;
- identificar a posição da extremidade final de um arco medido em radianos;
- converter para radianos uma medida de arco expressa em graus;
- obter a menor determinação positiva de um arco qualquer;
- reconhecer as diferenças e as semelhanças entre os gráficos das funções y = senx e y = cosx;
- resolver equações trigonométricas simples.

As diversas propostas de atividades apresentadas neste Caderno podem servir de exemplo para a elaboração de questões a fim de avaliar os alunos. Nesse sentido, destacamos a importância de o professor priorizar questões de caráter conceitual, em detrimento daquelas que exigem passagens algébricas ou formalizações além do necessário. De qualquer maneira, será importante que todos os itens de conteúdo listados anteriormente sejam contemplados de alguma forma nas avaliações do período, sejam elas individuais ou em grupos, com consulta ou não etc. Finalizada essa etapa de apresentação do modelo da circunferência trigonométrica e da construção dos gráficos das funções seno e cosseno, o passo a seguir, que será discutido no Tema 3, envolve a mobilização de todos esses conteúdos na representação da periodicidade de um fenômeno por meio de um gráfico cartesiano.

TEMA 3 – GRÁFICOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS ENVOLVENDO SENOS E COSSENOS

Roteiro de aplicação.

Fenômenos periódicos ocorrem regularmente mantendo suas características básicas, isto é, se repetem sempre da mesma maneira. Há uma enorme gama de fenômenos dessa natureza, e alguns deles serão analisados nas atividades do tema 4, que, assim como esta, tem como objetivo o estudo das funções matemáticas que modelam a periodicidade. Um processo completo de modelagem de determinado fenômeno envolve a observação da ocorrência deste, a tomada de dados, que normalmente exige a representação cartesiana dos dados obtidos, e, finalmente, exige a obtenção de uma sentença matemática que se ajusta aos dados experimentais. Por consequência, a sentença obtida poderá ser aplicada a novas situações, que venham a ocorrer em condições semelhantes às observadas durante o experimento realizado.

Vários fenômenos periódicos podem ser modelados por intermédio de uma função trigonométrica cuja representação algébrica é composta de senos e/ou cossenos. Para que seja possível aos alunos compreender em profundidade o significado da modelação de um fenômeno por meio de uma sentença que envolva senos ou cossenos, é necessário que saibam, de um lado, desenhar gráficos de funções desse tipo com base em suas representações algébricas, e, de outro, que consigam escrever a sentença de um gráfico. Com esse objetivo, propomos, nesta sequência de atividades, que os alunos construam os gráficos e reconheçam as propriedades de funções do tipo $y = C + A\text{sen}Bx$ e $y = C + A\cos Bx$, comparando-as com as funções elementares $y = \text{sen}x$ e $y = \cos x$, com que já tiveram contato anterior.

Nesse percurso, poderão avaliar as transformações que as constantes A, B e C impõem aos gráficos das funções elementares. Para compreender a importância do estudo que ora propomos, podemos analisar o processo que normalmente desenvolvemos ao apresentar as funções de 2º grau para nossos alunos.

O gráfico cartesiano que tem formato de uma parábola com o eixo de simetria na vertical, como sabemos, é a representação de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Ao observarmos uma sentença desse tipo, com coeficientes numéricos, identificamos se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo, e somos capazes de avaliar se a parábola tem ou não raízes reais, e prevemos a posição do vértice da parábola. A partir daí, conseguimos não apenas desenhar o gráfico da função, como também analisar todas suas propriedades (simetrias, imagem, domínio, sinal, etc.). Assim como fazemos com as parábolas, identificando e significando os coeficientes da representação algébrica da função e representando-a cartesianamente, também devemos ser capazes de fazer com os demais grupos de funções que estudamos no Ensino Médio, ou seja, relacionar a variação de seus coeficientes com as mudanças gráficas correspondentes.

Com as funções trigonométricas não poderia ser diferente, dada a enorme quantidade de situações contextualizadas em que se detecta sua presença. Discutiremos, nesta sequência de atividades do tema 3, apenas os gráficos das funções seno ou cosseno, deixando para segundo plano os gráficos das demais funções (tangente, cotangente, secante e cossecante). Acreditamos que o professor, decerto, vai avaliar a pertinência de apresentar a seus alunos também os demais gráficos, dependendo das condições de sua turma e do tempo disponível. A Sequência de Atividades será desenvolvida sobre três percursos, que o professor poderá trilhar total ou parcialmente, a seu critério.

- No primeiro percurso, propomos a construção dos gráficos por meio de uma tabela de valores especialmente escolhidos;
- No segundo percurso, sugerimos que o professor utilize um software de construção de gráficos para auxiliar a compreensão dos alunos e imprimir maior velocidade às conclusões.;
- No terceiro percurso, sugerimos que o professor discuta com os alunos sobre gráficos trigonométricos em que o seno e o cosseno variam em função do tempo, isto é, gráficos expressos por sentenças do tipo $y = C + A.\text{sen}B.t$, com t escrito em segundos, ou em minutos, ou em horas etc.
- Construção do gráfico a partir de tabela de valores para motivar os alunos a se envolverem com a construção e análise de gráficos trigonométricos o professor pode discutir o fato de que o modelo ondulatório está presente na explicação de uma série de fenômenos próximos ao dia a dia dos alunos, como, por exemplo, as transmissões radiofônicas ou televisivas.

Para tanto, o professor pode comentar que a frequência de transmissão de rádios em FM é da ordem de megahertz, isto é, ondas que passam por um ponto "carregando" cerca de 1 milhão de períodos (ou comprimentos de onda) por segundo. De outra forma, as estações AM transmitem na faixa dos quilohertz, isto é, uma onda de rádio dessa faixa "carrega" cerca de mil períodos (ou comprimentos de onda) por segundo. Essas variações de período e de frequência são visíveis no desenho da onda e também na escrita de sua equação, e isso será feito por meio da construção dos gráficos, que ora iniciamos. Comentaremos alguns exemplos de gráficos construídos a partir de tabela de valores, introduzindo valores de uma constante a cada vez. O professor pode utilizar-se desses mesmos exemplos ou recorrer a outros que julgar mais apropriados ao desenvolvimento de suas turmas. Todavia, sugerimos que, em qualquer caso, os alunos possam, inicialmente, utilizar papel quadriculado para desenhar os gráficos das tabelas que elaborarem.

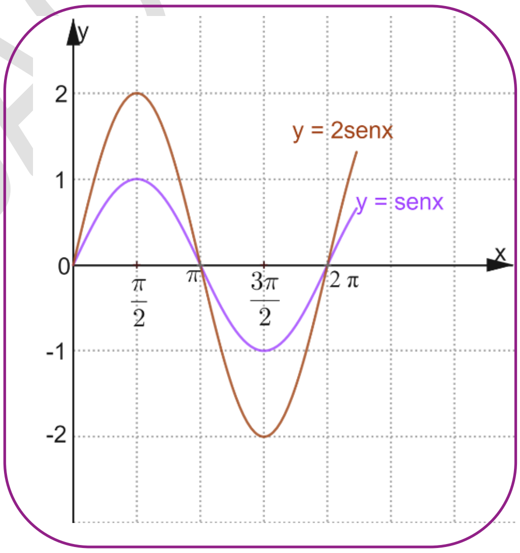
Construção do gráfico a partir da tabela de valores

A elaboração da tabela para a construção do gráfico levará em conta os valores que marcam a divisão entre os quadrantes da circunferência trigonométrica, isto é 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

Para começar a construir em um mesmo sistema de eixos cartesianos os gráficos de y = senx e de y = 2senx, você pode elaborar a seguinte tabela de valores:

x	y= senx	y = 2senx
0	**0**	**0**
$\frac{\pi}{2}$	**1**	**2**
π	**0**	**0**
$\frac{3\pi}{2}$	**–1**	**–2**
2π	**0**	**0**

Os dados tabelados permitem que seja desenhado o seguinte gráfico:



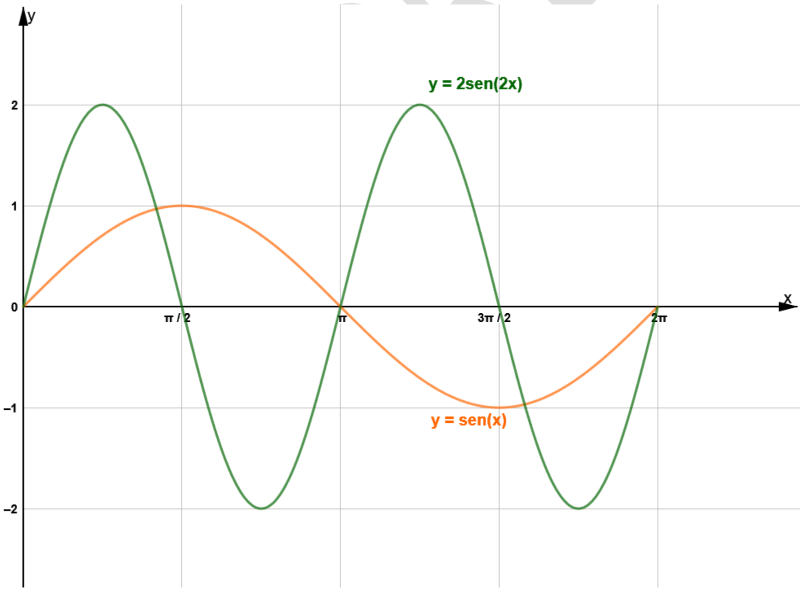
ATIVIDADE 1

a) complete a tabela a seguir:

2x	x	y = sen2x	
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	2
π	$\frac{\pi}{2}$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	−1	−2
2π	π	0	0

Perceba que a primeira coluna da tabela, a cima, contém os valores divisórios dos quadrantes, que são adotados para facilitar a construção. Para demonstrar melhor a importância do fator 2, introduzido na sentença algébrica, desenhamos os gráficos de y = senx e de y = 2sen2x em um único sistema de eixos cartesianos, conforme representado no item b:

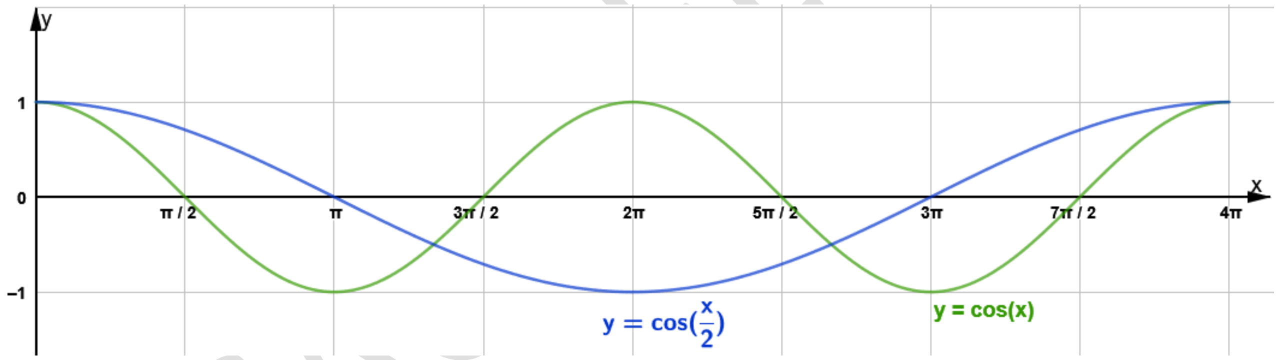
b) esboce o gráfico, no plano cartesiano a seguir com os dados apresentados na tabela.



ATIVIDADE 2

a) Complete a tabela e desenhe em um mesmo sistema de eixos cartesianos, no papel quadriculado, os gráficos de $y = \cos x$ e de $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, no intervalo $[0, 4\pi]$

$\frac{x}{2}$	x	$y = \cos x$	$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	π	-1	0
π	2π	1	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-1	0
2π	4π	1	-1



b) Escreva uma diferença entre os gráficos das funções $y = \cos x$ e $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Espera-se que os alunos percebam que o gráfico de $y = \cos x$ completa um período em 2π, enquanto o gráfico de $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ completa apenas meio período em 2π, o que significa que o período desta última função é 4π

ATIVIDADE 3

Observe a tabela a seguir, que contém valores de pares ordenados das funções y = sen 4x, y = 2 sen 4x e y = 1 + 2 sen 4x.

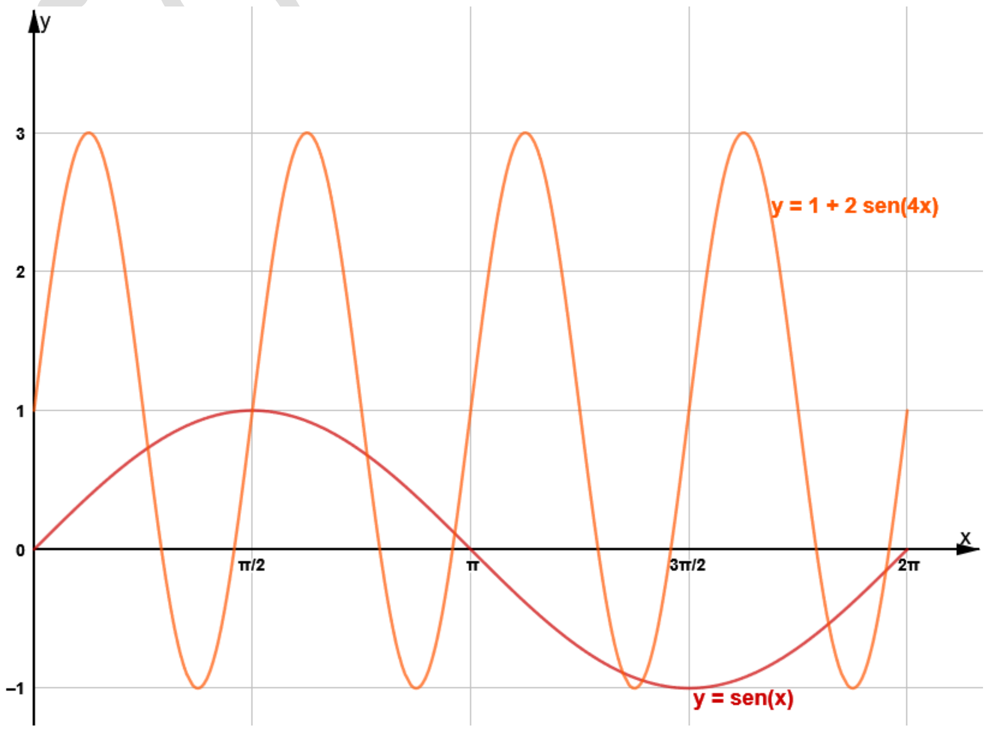
a) complete a tabela

4x	x	y = sen4x	y = 2sen4x	y=1+2sen4x
0	0	0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1	2	3
π	$\frac{\pi}{4}$	0	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	−1	−2	−1
2π	$\frac{\pi}{2}$	0	0	1

Perceba que foram atribuídos para 4x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, que são os valores que dividem os quadrantes da circunferência.

b) Esboce os gráficos de y = senx e de y = 1 + 2 sen4x em um único sistema de eixos coordenados.

O desenho dos gráficos de y = senx e de y = 1 + 2.sen4x em um único sistema de eixos coordenados permite que sejam discutidas as modificações que as constantes introduzidas na equação causam ao gráfico elementar.



c) Repare que, em relação ao gráfico de y = senx, o gráfico de y = 1 + 2sen4x foi deslocado verticalmente, 1 unidade para cima, e teve seu período diminuído 4 vezes e sua amplitude do- brada, efeitos esses causados, respectivamente, pelas constantes 1, 4 e 2. A partir dessa observação, complete a tabela a seguir:

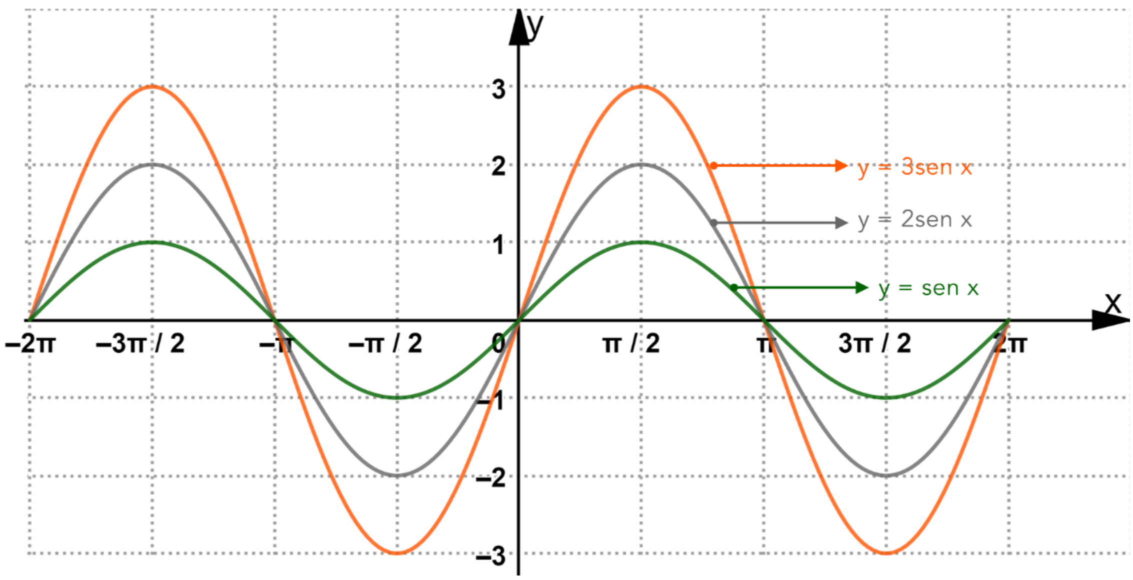
Comparação entre os dois gráficos		
Função	y = sen x	y = 1 + 2sen4x
Período	2π	$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
Imagem	$[-1, 1]$	$[-1, 3]$
Amplitude	1	2

Construção de gráficos com o auxílio de um aplicativo de geometria dinâmica

Atualmente existem alguns aplicativos de geometria dinâmica que podem ser utilizados em *smartphones* e computadores pessoais, como por exemplo o GeoGebra.

O *download* do aplicativo está disponível no *site*: https://www.geogebra.org/?lang=pt.

Veja, por exemplo, os gráficos seguintes, das funções y = senx, y= 2 senx e y = 3 senx, desenhados com o auxílio do aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra.



ATIVIDADE 4

Observando os gráficos construídos, responda: qual é a alteração produzida no gráfico de y = sen x quando multiplicamos toda a função por um valor constante A ≠ 0?

Observando as funções y=senx, y=2senx e y=3senx construídas com o auxílio do software Geogebra, podemos concluir que houve variação na amplitude do gráfico e, portanto, também a imagem da função.

ATIVIDADE 5

Observando todos os gráficos desenhados e responda:

a) qual é o domínio de uma função do tipo y = Asenx?

Domínio da função: todos os números reais $\mathbb{R}$

b) qual é a imagem de uma função do tipo y = Asenx?

Considerando A ≠ 0, a imagem da função y = Asenx é o intervalo [–A, A].

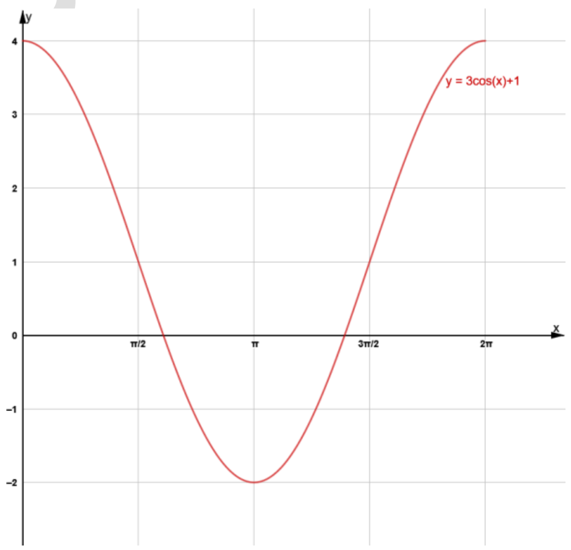
c) qual é o período de uma função do tipo y = Asenx?

O período da função y = Asenx é 2π

ATIVIDADE 6

Com o auxílio da tabela a seguir, construa o gráfico de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = 3 \cdot \cos x + 1$

x	cos x	$y = 3 \cdot \cos x + 1$
0	1	3+1=4
$\pi/2$	0	0+1=1
π	–1	–3+1=–2
$3\pi/2$	0	0+1=1
2π	1	3+1=4



ATIVIDADE 7

Com o auxílio da tabela a seguir, construa o gráfico de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 1 + \cos 2x$

x	2x	cos 2x	y = 1 + cos 2x
0	0	1	$1+1=2$
$\frac{\pi}{4}$	$\pi/2$	0	$1+0=1$
$\frac{\pi}{2}$	π	-1	$1+(-1)=0$
$\frac{3\pi}{4}$	$3\pi/2$	0	$1+0=1$
π	2π	1	$1+1=2$

Após a realização da atividade o professor poderá retomar alguns conceitos trabalhados anteriormente, tais como domínio, imagem, período e amplitude da função.

Para saber mais..

Professor, indicamos a seguir os links, que poderão auxiliar no estudo gráfico das funções trigonométricas, seno e cosseno.

Se houver a possibilidade de utilização, proponha aos alunos que explorem ao máximo os aplicativos disponibilizados.

https://www.geogebra.org/classic/bd9kunch

https://www.geogebra.org/classic/hvhj96kq

TEMA 4 – EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Roteiro de Aplicação.

As equações trigonométricas envolvendo seno ou cosseno exigem a determinação de uma medida de arco para qual o seno ou cosseno assume determinado valor, como, por exemplo, determinar x para que senx = $\frac{1}{2}$, ou cosx = −1. Casos como esses, frequentemente apresentados e resolvidos em cursos de Ensino Médio, se forem compreendidos à luz da modelagem de funções trigonométricas, podem ampliar sobremaneira os significados associados a esse tipo de função. Entre os diversos fenômenos periódicos possíveis de serem modelados por sentenças algébricas envolvendo senos ou cossenos, foram selecionados três, apresentados a seguir, com a proposta de resolução de algumas equações. As atividades a seguir consistem em fornecer aos alunos o texto descritivo de cada fenômeno, solicitar a leitura, eliminar eventuais dúvidas e, finalmente, pedir a eles que resolvam algumas questões.

Cálculo do período de claridade de uma cidade

A inclinação do eixo de rotação da Terra é o fator responsável pela alteração da quantidade de insolação que uma cidade recebe durante o ano. Essa alteração da quantidade de horas de luz solar marca as estações: primavera, verão, outono e inverno.

Em cidades próximas à linha do Equador quase não se percebe a passagem das estações, pois o índice de claridade anual é praticamente o mesmo durante todo o ano, cerca de 12 horas por dia, que também vale para a temperatura média mensal. Já em regiões mais afastadas do Equador, a inclinação do eixo terrestre faz que o verão tenha dias bem longos, com alto índice de insolação, enquanto no inverno a situação se inverte, com dias bem curtos, e com poucas horas de claridade.

Em uma região um pouco afastada do Equador como, por exemplo, no Sul de nosso país, se registrarmos durante um ano o número de horas de claridade diária, perceberemos que os dados obtidos podem ser ajustados por uma função trigonométrica, isto é, que a quantidade de horas de claridade diária varia periodicamente em função do tempo. A equação seguinte traduz essa situação para determinada localidade, que chamaremos cidade B.

$$N= \frac{35}{7} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{365}\right)$$

A variável x dessa equação corresponde ao número de dias contados a partir do dia 23 de setembro, quando começa a primavera no Hemisfério Sul, dia esse chamado equinócio de primavera. O arco $\frac{2\pi x}{365}$ é medido em radianos e N é a quantidade de horas de claridade diária. Assim, no dia 23 de setembro, x = 0 e o valor de N pode ser assim obtido:

$$N= \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot 0}{365}\right) = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen}0 = \frac{35}{3} \cong 11{,}7 \text{ horas}$$

ATIVIDADE 1

Como era de se esperar, nos dias de equinócio o número de horas de claridade é próximo da metade da duração de um dia.

a) Qual é o número aproximado de horas diárias de insolação da cidade **B** no dia 21 de dezembro, dia solstício, que marca a entrada do verão no Hemisfério Sul?

Considerando x = 90 o número de dias no período, temos que:

$N= \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \text{sen} \left(\frac{2\pi . 90}{365}\right)$. Se aproximarmos 365 ≅ 4 · 90, podemos escrever a expressão:

$$N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 90}{4 \cdot 90}\right) = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{então } N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot 1$$

$$N = \frac{42}{3}$$

$$\boxed{N = 14 \text{ horas}}$$

b) qual é o número de horas diárias de insolação da cidade B no dia 21 de junho, solstício de inverno no Hemisfério Sul?

Adotando x = 90, visto que junho antecede setembro em três meses, e adotando a simplificação realizada no item anterior, temos:

$$N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot (-1)$$

$$\boxed{N = \frac{28}{3} = 9{,}3\ horas}$$

c) de posse de uma tabela trigonométrica, ou de uma calculadora científica, determine os dias do ano em que o número de horas de claridade na cidade B seja igual a 13 horas.

$$13 = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right) = \frac{13 - \frac{35}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{39-35}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{4}{7} \cong 0{,}6$$

Precisamos responder: qual é o arco, em radianos, cujo seno é igual a 0,6?
A resposta, de acordo com a calculadora científica, é 0,64.
Assim:

$\frac{2\pi x}{365} \cong 0{,}64 \Rightarrow x = 37{,}2$ dias. Veja:

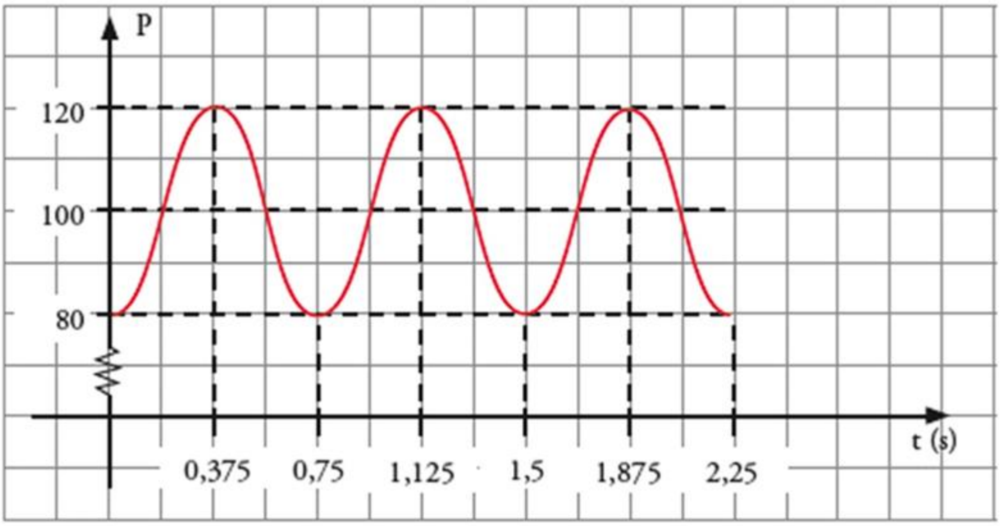
$$\frac{2\pi x}{365} = 0{,}64 \Rightarrow 2\pi x = 233{,}6 \Rightarrow x = \frac{233{,}6}{2\pi} \Rightarrow \boxed{x \cong 37{,}2}$$

Para encontrar o dia desejado, precisamos contar 37 dias a partir de 23 de setembro. Feito isso, obteremos 30 de outubro.

ATIVIDADE 2

A periodicidade da pressão sanguínea

O gráfico a seguir representa a variação da pressão (P, em milímetros de mercúrio, mmHg) nas paredes dos vasos sanguíneos em função do instante (t, em segundos) em que a medida da pressão foi realizada.



Observando que a imagem da função é o intervalo [80, 120], que a amplitude é 20 e que o período é $0{,}75 = \frac{3}{4}$, podemos escrever a equação da função:

$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$$

a) calcule a medida da pressão no instante 2 segundos.

$$P(2) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)$$

$$P(2) = 100 - 20 \cdot (-0{,}5)$$

$$P(2) = 100 + 10 = 110$$

Portanto no instante 2 segundos, a pressão será de aproximadamente 110 mmHg.

b) quais são os instantes de tempo entre 0 e 1 segundo em que a pressão sanguínea é igual a 100 mmHg?

Para que a pressão sanguínea seja igual a 100mmHg, temos que P(t) = 100, então:

$$P(t) = 100 - 20 \cdot cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) \Rightarrow 100 = 100 - 20 \cdot cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$$

$$20 \cdot cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) = 100 - 100 \Rightarrow cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) = \frac{100 - 100}{20} \Rightarrow cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) = 0$$

Podemos concluir então, que:

$$\frac{8\pi t}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{16\pi t}{6} = \frac{3\pi + 6k\pi}{6} \Rightarrow 16\pi t = 3\pi + 6k\pi$$

$$16\pi t = 3\pi(1 + 6k) \Rightarrow t = \frac{3\pi(1 + 6k)}{16\pi} \Rightarrow t = \frac{3(1 + 2k)}{16}$$

Para que o tempo (t), esteja no intervalo de 0 a 1 segundo, os valores de k são: 0, 1 e 2 obtendo assim

$$t(0) = \frac{3(1 + 2 \cdot 0)}{16} = \frac{3}{16}\ s$$
$$t(1) = \frac{3(1 + 2 \cdot 1)}{16} = \frac{9}{16}\ s$$
$$t(2) = \frac{3(1 + 2 \cdot 2)}{16} = \frac{15}{16}\ s$$

ATIVIDADE 3

(UNESP) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que o mesmo era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2cos\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)t + \left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

onde t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação (t=0) e P(t) é a profundidade da água (em metros) no instante t.

a) resolva a equação, $cos[(\pi/6)t + (5\pi/4)] = 1$, para $t > 0$

Para que $cos\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)t + \left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = 1$, temos que $\left(\frac{\pi}{6}\right)t + \frac{5\pi}{4} = 2\pi \cdot n$, com $n \in Z$

Vamos encontrar o valor de t em função de n.

$$\left(\frac{\pi}{6}\right)t + \left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\pi \cdot n \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)t = 2\pi \cdot n - \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)t = \frac{8\pi n - 5\pi}{4}, \text{ então}$$

$$t = \frac{\frac{\pi(8n-5)}{4}}{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow t = \frac{\pi(8n-5)}{4} \cdot \frac{6}{\pi} = \frac{48n - 30}{4} \Rightarrow t = \frac{48}{4}n - \frac{30}{4} \Rightarrow \boxed{t = 12n - \frac{15}{2}}$$

b) determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

No item anterior, encontramos uma expressão para t em função de n. A primeira maré alta ocorreu quando n = 1, portanto,:

$$t = 12n - \frac{15}{2} \Rightarrow t = 12 - \frac{15}{2} \Rightarrow \boxed{t = \frac{9}{2}h = 4h30min}$$

Considerações importantes sobre a avaliação

A escala apropriada para o desenvolvimento de cada conteúdo só pode ser devidamente indicada pelo professor na articulação entre o conhecimento que tem sobre sua turma de alunos e as metas de seu plano de ensino. De forma semelhante, entendemos que, nas diferentes etapas de avaliação, deve ser levada em conta a pertinência de instrumentos, o percurso estabelecido e os conteúdos abordados. Vale destacar que, dada a relevância de determinados conceitos, é importante que estes tenham sua compreensão avaliada em vários momentos. No entanto, apesar da variedade de formas e conteúdos/objetos de conhecimento, algumas premissas precisam ser adotadas. Como ponto de partida, convém buscar resposta a duas questões de suma importância:

- Quais as principais habilidades que devem ser avaliadas?
- Quais instrumentos podem avaliar as habilidades selecionadas?

Com relação à atividade 01 do tema 4, referente às principais habilidades que os alunos precisam mobilizar para serem avaliados, é necessário que eles consigam:

- Identificar a posição da extremidade final dos arcos notáveis na circunferência, associando-os aos correspondentes valores de senos, cossenos, tangentes e cotangentes.
- Obter a menor determinação positiva de arcos medidos em radianos ou em graus.
- Representar os gráficos das funções trigonométricas e reconhecer suas propriedades.
- Determinar o conjunto solução de equações ou de inequações trigonométricas, mesmo daquelas envolvidas por contextos não apenas matemáticos.

No processo de avaliação, sugere-se que o professor utilize diferentes instrumentos de forma que o quadro final da avaliação retrate tanto as características do trabalho realizado como as diversas competências que cada um de seus alunos consegue ou não mobilizar na resolução de situações-problema de Trigonometria. Dessa forma, é possível considerar que:

- Uma atividade avaliativa individual deve ser realizada com o objetivo de permitir que os alunos busquem e discorram sobre situações do cotidiano em que se observa claramente a periodicidade.
- As atividades desenvolvidas em sala de aula, cumpridas em grupos ou individual mente, devem ser avaliadas continuamente, a fim de compor um quadro que considere todos os passos do processo de construção conceitual. Algumas vezes, portanto, avalia-se não só o que foi "feito" pelo aluno, mas principalmente, seu processo de trabalho..
- Todas as atividades aplicadas para os alunos poderão ser resolvidas em duplas ou trios, cabendo ao professor acompanhar as equipes durante a realização, sanando dúvidas e eliminando dificuldades. Ao final, todos os alunos podem entregar sua produção para que o professor as comente e avalie.
- Resolver equações trigonométricas é uma habilidade esperada dos alunos ao fim do estudo. Cabe ao professor definir quais tipos de equações vão exigir resolução, de acordo com aquilo que apresentou e discutiu anteriormente. No entanto, vale salientar a importância de que algumas dessas equações sejam apresentadas e resolvidas com base em situações do cotidiano, como é o caso das equações que compõem o tema 4 desta sequência de atividades, e que, posteriormente, passem a compor instrumentos de avaliação objetiva.

Livros didáticos contêm, via de regra, uma série de equações trigonométricas para os alunos resolverem. Estas séries são indicadas especialmente para os alunos que, por algum motivo, não tenham conseguido se apropriar do conhecimento desejado durante a realização das atividades propostas no caderno do aluno

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Valéria Arcari Muhi

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Carolina dos Santos Batista Murauskas

ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

BIOLOGIA
Aparecida Kida Sanches – *Equipe Curricular de Biologia*; Beatriz Felice Ponzio – *Equipe Curricular de Biologia*; Airton dos Santos Bartolotto – *PCNP da D.E. de Santos*; Evandro Rodrigues Vargas Silvério – *PCNP da D.E. de Apiaí*; Ludmila Sadokoff – *PCNP da D.E. de Caraguatatuba*; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – *PCNP da D.E. de São Vicente*; Marly Aparecida Giraldelli Marsulo – *PCNP da D.E. de Piracicaba*; Paula Aparecida Borges de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 3*

FÍSICA
Ana Claudia Cossini Martins – *PCNP D.E. José Bonifácio*; Debora Cíntia Rabello – *PCNP D.E. Santos*; Carina Emy Kagohara *PCNP D.E. Sul 1* – Dimas Daniel de Barros – *PCNP D.E. São Roque*; Jefferson Heleno Tsuchiya – *Equipe Curricular de Física*; José Rubens Antoniazzi Silva – *PCNP D.E. Tupã*; Juliana Pereira Thomazo – *PCNP D.E. São Bernardo do Campo*; Jussara Alves Martins Ferrari – *PCNP D.E. Adamantina; Sara* dos Santos Dias – *PCNP D.E. Mauá; Thaís* de Oliveira Müzel – *PCNP D.E. Itapeva;* Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – *PCNP DE Leste 5*.

QUÍMICA
Alexandra Fraga Vasquez – *Equipe Curricular de Química*; Cristiane Marani Coppini – *PCNP D.E. São Roque*; Gerson Novais Silva – *PCNP D.E. Região de São Vicente;* Laura Camargo de Andrade Xavier – *PCNP D.E. Registro*; Natalina de Fátima Mateus – *PCNP D.E. Guarulhos Sul;* Wilian Guirra de Jesus – *PCNP D.E. Franca*; Xenia Aparecida Sabino – *PCNP D.E. Leste 5*.

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

GEOGRAFIA
Andréia Cristina Barroso Cardoso – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Sergio Luiz Damiati – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; André Baroni - *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Alexandre Cursino Borges Júnior – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Beatriz Michele Moço Dias – *PCNP da D.E. Taubaté*; Bruna Capóia Trescenti – *PCNP da D.E Itu*; Daniel Ladeira Almeida – *PCNP da D.E. São Bernardo do Campo*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Cleunice Dias de Oliveira Gaspar – *PCNP da D.E. São Vicente*; Cristiane Cristina Olímpio – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba*; Dulcinéa da Silveira Ballestero – *PCNP da D.E. Leste 5*; Elizete Buranello Perez – *PCNP da D.E. Penápolis*; Maria Julia Ramos Sant'Ana – *PCNP da D.E. Adamantina*; Márcio Eduardo Pedrozo – *PCNP da D.E. Americana*; Patrícia Silvestre Águas; Regina Célia Batista – *PCNP da D.E. Piraju*; Roseli Pereira De Araujo – *PCNP da D.E. Bauru*; Rosenei Aparecida Ribeiro Libório – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Sandra Raquel Scassola Dias – *PCNP da D.E. Tupã*; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 2*; Shirley Schweizer – *PCNP da D.E. Botucatu*; Simone Regiane de Almeida Cuba – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Telma Riggio – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Viviane Maria Bispo – *PCNP da D.E. José Bonifácio*.

FILOSOFIA
Produção, organização e revisão: Erica Cristina Frau – *PCNP da DRE Campinas Oeste*; Tânia Gonçalves – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular*

HISTÓRIA
1ª Série – Edi Wilson Silveira – *COPED – SEDUC*; Bruno Ferreira Matsumoto – *PCNP da D.E. de Itapetininga*. **2ª Série** – Tadeu Pamplona Pagnossa – *PCNP da D.E. de Guaratinguetá*. **3ª Série** – Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED – SEDUC; Rodrigo Costa Silva – PCNP da D.E. de Assis*.
Organização e revisão
Edi Wilson Silveira – *COPED – SEDUC;* Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED – SEDUC*

Colaboradora – Revisora de Língua Portuguesa
Caroline Cavalli.

SOCIOLOGIA
Emerson Costa – SEDUC/COPED/CEM – *Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Revisão
Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Organização
Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*

ÁREA DE LINGUAGENS

ARTE
Carlos Eduardo Povinha – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Eduardo Martins kebbe – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Adriana Marques Ursini Santás – *PCNP da D.E. Santos;* Ana Maria Minari de Siqueira – *PCNP da D.E. são José dos Campos*; Débora David Guidolín – *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Djalma Abel Novaes – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Eliana Florindo – *PCNP da D.E. Suzano*; Elisangela Vicente Prismit – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Madalena Ponce Rodrigues – *PCNP da D.E. Botucatu*; Marilia Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – *PCNP da D.E. São Vicente*; Patrícia de Lima Takaoka – *PCNP da D.E. Caraguatatuba;* Pedro Kazuo Nagasse – *PCNP da D.E. Jales*; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Caieiras*; Roberta Jorge Luz – *PCNP da D.E. Sorocaba*; Rodrigo Mendes – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Silmara Lourdes Truzzi – *PCNP da D.E. Marília;* Sonia Tobias Prado – *PCNP da D.E. Lins*.

EDUCAÇÃO FÍSICA
Luiz Fernando Vagliengo – *Equipe Curricular de Educação Física*; Marcelo Ortega Amorim – *Equipe Curricular de Educação Física;* Mirna Leia Violin Brandt – *Equipe Curricular de Educação Física;* Sandra Pereira Mendes – *Equipe Curricular de Educação Física*; Diego Diaz Sanchez – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Felipe Augusto Lucci – *PCNP da D.E. Itu*; Flavia Naomi Kunihira Peixoto – *PCNP da D.E. Suzano*; Gislaine Procópio Querido – *PCNP da D.E. São Roque*; Isabela Muniz dos Santos Cáceres – *PCNP da D.E. Votorantim*; Janaina Pazeto Domingos – *PCNP da D.E. Sul 3*; Katia Mendes Silva – *PCNP da D.E. Andradina*; Lígia Estronioli de Castro – *PCNP da D.E. Bauru*; Maria Izildinha Marcelino – *PCNP da D.E. Osasco*; Nabil José Awad – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Neara Isabel de Freitas Lima – *PCNP da D.E. Sorocaba*; Sandra Regina Valadão – *PCNP da D.E. Taboão da Serra*; Tiago Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Lins* ; Thaisa Pedrosa Silva Nunes – *PCNP da D.E. Tupã*

INGLÊS
Aderson Toledo Moreno – *PCNP da D.E. SUL 1*; Catarina Reis Matos da Cruz – *PCNP da D.E. Leste2*; Cíntia Perrenoud de Almeida – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba;* Eliana Aparecida Oliveira Burian – *COPED – CEM – LEM*; Emerson Thiago Kaishi Ono – *COPED - CEFAF – LEM;* Gilmara Aparecida Prado Cavalcante – *PCNP da D.E. Mauá;* Jucimeire de Souza Bispo – *COPED – CEFAF – LEM;* Liana Maura Antunes da Silva Barreto – *PCNP da D.E. Centro*; Luiz Afonso Baddini – *PCNP da D.E Santos;* Marisa Mota Novais Porto – PCNP – *D.E. Carapicuíba*; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – *PCNP – D.E. Centro-Oeste*; Pamella de Paula da Silva Santos – *COPED – CEM – LEM;* Renata Andreia Placa Orosco de Souza – *PCNP da D.E. Presidente Prudente;* Rosane de Carvalho – *PCNP da D.E. Adamantina;* Sérgio Antonio da Silva Teressaka – *PCNP da D.E Jacareí;* Viviane Barcellos Isidorio – *PCNP – D.E. São José dos Campos;* Vlademir Oliveira Ismael – *PCNP da D.E. SUL 1*.

LÍNGUA PORTUGUESA
Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo, Alzira Maria Sá Magalhães Cavalcante, Andrea Righeto, Cristiane Alves de Oliveira, Daniel Carvalho Nhani; Danubia Fernandes Sobreira Tasca, Débora Silva Batista Eilliar, Eliane Cristina Gonçalves Ramos, Helena Pereira dos Santos, Igor Rodrigo Valério Matias, Jacqueline da Silva Souza, João Mário Santana, Katia Amâncio Cruz, Letícia Maria de Barros Lima Viviani, Lidiane Máximo Feitosa, Luiz Eduardo Divino da Fonseca, Luiz Fernando Biasi, Márcia Regina Xavier Gardenal, Maria Madalena Borges Gutierre, Martha Wassif Salloume Garcia, Neuza de Mello Lopes Schonherr, Patrícia Fernanda Morande Roveri, Reginaldo Inocenti, Rodrigo Cesar Gonçalves, Shirlei Pio Pereira Fernandes, Sônia Maria Rodrigues, Tatiana Balli, Valquíria Ferreira de Lima Almeida, Viviane Evangelista Neves Santos, William Ruotti.
Leitura crítica e validação: Cristiane Aparecida Nunes; Edvaldo Cerazze; Fabiano Pereira dos Santos; Fabrício Cristian de Proença; Glauco Roberto Bertucci; Marcia Aparecida Barbosa Corrales; Maria José Constâncio Bellon; Maria Madalena Borges Gutierre; Mariângela Soares Baptistello Porto; Paula de Souza Mozaner; Raquel Salzani Fiorini; Reginaldo Inocenti; Ronaldo Cesar Alexandre Formici; Rosane de Paiva Felício; Roseli Aparecida Conceição Ota; Selma Tavares da Silva; Silvia Helena Soares.
Professores responsáveis pela organização, revisão adaptação e validação do material: Katia Regina Pessoa, Mara Lucia David, Marcos Rodrigues Ferreira, Mary Jacomine da Silva, Teônia de Abreu Ferreira.

MATEMÁTICA
Ilana Brawerman – *Equipe Curricular de Matemática*; João dos Santos Vitalino – *Equipe Curricular de Matemática;* Marcos José Traldi – *Equipe Curricular de Matemática;* Otávio Yoshio Yamanaka – Equipe Curricular de Matemática; Vanderley Aparecido Cornatione – *Equipe Curricular de Matemática;* Lilian Silva de Carvalho – *PCNP da D.E. de São Carlos;* Marcelo Balduíno – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte;* Maria Regina Duarte Lima – *PCNP da D.E. José Bonifácio;* Simone Cristina do Amaral Porto –*PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Talles Eduardo Nazar Cerizza – *PCNP da D.E. Franca;* Willian Casari de Souza – *PCNP da D.E. Araçatuba*.

TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
Adilson Vilas Boas – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Alessandro Antônio Bernardo – *PCNP da D.E. Jaú*; Alet Rosie de Campos Silva – *PCNP da D.E. Mirante do Paranapanema*; Aparecido Antonio de Almeida – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Arlete Aparecida de Almeida Oliveira – *SEDUC/COPED/ Centro de Inovação*; Aydê Pereira Salla – *PCNP da D.E. Campinas Leste*; Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/ Assessora Educação Integral*; *CIEB;* Camila Aparecida Carvalho Lopes – *SEDUC/ COPED/Assessora Técnica*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Debora Denise Dias Garofalo – *SEDUC/COPED/Assessora de Tecnologia*; Eduardo de Moura Almeida – *Assessora da Universidade de São Paulo*; *EducaMídia – Palavra Aberta;* Elaine Leite de Lima – *SEDUC/EFAPE/Técnico III*; Fabiano Pereira dos Santos – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Fábio Granella de Jesus – *PCNP da D.E. Fernandópolis*; Fabrício Cristian de Proença – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Fernanda Henrique De Oliveira – *SEDUC/EFAPE/Diretora do DETED*; Fernando Carlos Rodrigues Pinto – *PCNP da D.E. Presidente Prudente*; *Fundação Telefonica Vivo; Fundação Vanzolini;* Grasiela Cabrio dos Santos Oliveira – *PCNP da D.E. Araraquara*; *Grupo Mais Unidos;* Helder Alexandre de Oliveira – *PCNP da D.E. Tupã*; Jacqueline Peixoto Barbosa – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; José Armando Valente – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; Liliane Pereira – *SEDUC/COPED/ Diretora do Centro de Inovação*; Leonardo Granado Garcia – *PCNPda D.E. Franca*; Lucy Mary Padilha Domingos – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Marcelo Suwabe – *PCNP da D.E. Santos*; Márcio Greyck Guimarães Correa – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Marcos Vinícius Marcondes de Menezes – *PCNP da D.E. Andradina*; Maria Elizabeth de Almeida – *Assessora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*; Mariana Moreira Martines – *PCNP da D.E. Bauru*; Matheus Lima Piffer – *PCNP da D.E. Limeira*; Patricia Pinto Santiago – *PCNP da D.E. Registro*; *Mundo Maker;* Pedro Henrique Eneas Ferreira – *PCNP da D.E. São Carlos*; Raquel Villa Nova Pedroso de Almeida – *PCNP da D.E. Norte 1*; Rebeka de Moraes Garcia – *PCNP da D.E. Mogi das Cruzes*; Rodrigo Prizoto – *PCNP da D.E. Taubaté*; Roseli Aparecida Conceição Ota – *PCNP da D.E. São Roque*; Roxane Helena Rodrigues Rojo – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; Salete Cristina Venarusso – *PCNP da D.E. Jaú*; Sandra Heloisa Mancebo Henrique – *PCNP da D.E. Registro*; Sandra Pereira Jardim – *PCNP da D.E. Osasco*; Sidemar Rodrigues (Nino) – *PCNP da D.E. Mogi Mirim*; Silene Kuin – *SEDUC/ EFAPE/Técnico I*; Silvia Helena Soares – *PCNP da D.E. Mogi Mirim*; Sílvia Nogueira – *PCNP da D.E. Leste 1*; *Triade Educacional; Undime;* Viviane Artioli – *PCNP da D.E. Campinas Leste*; Viviane Camilo de Andrade – *PCNP da D.E. Carapicuíba*; Wagner Aparecido da Silva – *PCNP da D.E. Itapecerica da Serra*.

PROJETO DE VIDA
Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/Assessora Educação Integral*; Cassia Moraes Targa Longo – *SEDUC/COPED/CEART*; Claudia Soraia Rocha Moura – *SEDUC/COPED/ DEMOD/CEJA*; Helena Claudia Soares Achilles – *SEDUC/COPED/DECEGP*; Instituto Ayrton Senna; Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto Proaj; Simone Cristina Succi – *SEDUC/EFAPE*; Walter Aparecido Borges – *SEDUC/EFAPE*.

Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

Projeto Gráfico
Fernanda Buccelli e Ricardo Ferreira

Diagramação, Tratamento de Imagens e Colaboradores:
Aline Navarro; Ana Lúcia Charnyai; Dulce Maria de Lima Pinto; Fátima Regina de Souza Lima; Isabel Gomes Ferreira; Leonídio Gomes; Marcelo de Oliveira Daniel; Maria de Fátima Alves Gonçalves; Marilena Camargo Villavoy; Marli Santos de Jesus; Paulo César Tenório; Ricardo Ferreira; Rita de Cássia Diniz; Robson Minghini; Sandra Regina Brazão Gomes; Selma Brisolla de Campos; Teresa Lucinda Ferreira de Andrade; Tiago Cheregati e Vanessa Merizzi.