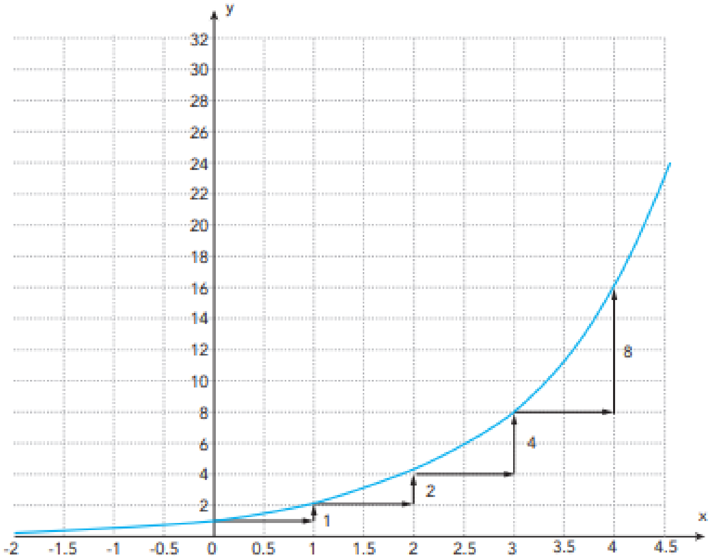
ATIVIDADES DO 3º SERIE A – 3º BIMESTRE

TEMA 4: CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO EXPONENCIAL: O NÚMERO e

Durante o curso, você já deve ter resolvido vários problemas que envolvem a função exponencial, $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Neste momento, destacaremos uma propriedade característica que pode ter passado despercebida. Para exemplificar, vamos considerar a função $f(x) = 2^x$ e seu gráfico. Iniciaremos o cálculo de f(x), com valores inteiros de x, começando com x = 0.
O gráfico da função, será representado da seguinte maneira:



x	2^x	f(x + 1) – f(x)
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	8
4	16	16
5	32	32
6	64	64
7	128	...

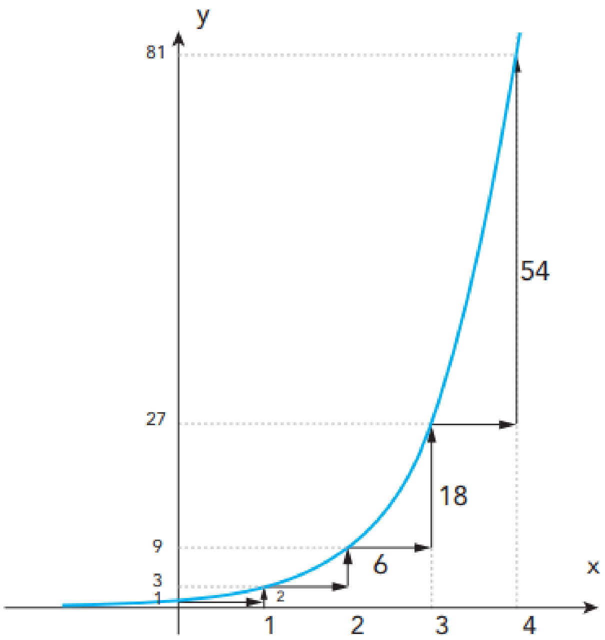
Notamos que quando x aumenta 1 unidade, a partir de x = 0, a variação em f(x) é igual, sucessivamente, a 1, 2, 4, 8, 16,..., ou seja, a taxa de variação unitária, que é igual a f(x+1) – f(x), é igual ao valor de f(x).

f(1) – f(0) = f(0)
f(2) – f(1) = f(1)
f(3) – f(2) = f(2)
f(4) – f(3) = f(3)
f(5) – f(4) = f(4)
e assim por diante.

A taxa de variação unitária de $f(x) = 2^x$ é portanto, igual a f(x).
Chamaremos essa taxa de $f_1(x)$. Calculando f1(x) para um valor qualquer de x, temos, de fato:

$$f_1(x) = f(x + 1) – f(x) = 2^{x+1} – 2^x = 2^x \,.\; (2 – 1) = 2^x$$

ATIVIDADE 1 - Analogamente ao que foi feito antes para $f(x) = 2^x$, calcule a taxa de variação unitária para $f(x) = 3^x$. Para isso, inicialmente complete a tabela a seguir:



x	3^x	f(x+1) – f(x)
0	1	2
1	3	6
2	9	18
3	27	54
4	81	162
5	243	486
6	729	1458
7	2187	4374

Notamos que, quando x aumenta 1 unidade, a partir de x = 0), a variação em f(x) é igual, sucessivamente, a 2, 6, 8, 18, 54, 162, ..., ou seja, a taxa de variação unitária, que é igual a f(x + 1) – f(x), é igual ao dobro do valor de f(x).

f(1) – f(0) = 2f(0) = 2

f(2) – f(1) = 2f(1) = 6

f(3) – f(2) = 2f(2) = 18

f(4) – f(3) = 2f(3) = 54

f(5) – f(4) = 2F(4) = 162

e assim por diante.

A taxa de variação unitária de f(x) = 3 é, portanto, igual a 2f(x). Chamando anteriormente, a taxa unitária de $f_1(x)$ e calculando seu valor para um x qualquer, temos, de fato:

f1(x) = f(x+1) – f(x) = $3^{x+1} - 3^x = 3^x \cdot (3-1) = 2 \cdot 3^x$.

ATIVIDADE 2 - Uma população p de bactérias aumenta com uma rapidez diretamente proporcional ao seu valor, em cada instante, ou seja, quanto maior é o valor de **p**, mais rapidamente a população aumenta. Partindo de um valor P_0 = 1 000, observa-se que a população dobra a cada hora, ou seja, o valor de **p** pode ser expresso pela função:

$$P = f(t) = 1000 \cdot 2^t \text{ (t em horas)}$$

a) Calcule a taxa de variação unitária nos instantes t = 1h e t = 2h.

R = $f_1(1)$ = f(2) – f(1) = 4000 – 2000 = 2000

$f_1(2)$ = f(3) – f(2) = 8000 – 4000 = 4000

b) Mostre que o aumento no valor de p entre os instantes t = 6h e t = 7h é igual ao valor da população para t = 6h.

R = O aumento citado é igual a: f(7) – f(6) =$1000 \cdot (2^7 - 2^6) = 1000 \cdot 2^6 (2-1) = 1000 \cdot 2^6$ = f(6), ou seja, a taxa de variação unitária para t = 6 é igual ao valor de f(6).

ATIVIDADE 3 - A população N de cães, de certa região, cresce exponencialmente de acordo com a expressão N = f(t) = $600 \cdot 10^t$, sendo t em décadas.

a) Calcule a taxa de variação unitária para t = 2 décadas.

R = $f_1(2)$ = f(3) – f(2) = $600 \cdot 10^3 - 600 \cdot 10^2$ = 540000

b) Mostre que o aumento no valor de N entre os instantes t = 7 e t = 8 é igual a 9 vezes o valor da população para t = 7.

R = O aumento pedido é igual a f(8) – f(7) = $600 \cdot (10^8 - 10^7) = 600 \cdot 10^7 \cdot (10-1) = 600 \cdot 10^7 \cdot 9 = 9 \cdot$ f(7), ou seja, a taxa de variação unitária para t = 7 é igual a 9 vezes o valor de f(7).

Fenômenos naturais e crescimento exponencial – o nascimento do número e.

Você sabia que os números mais frequentemente utilizados, como base de um sistema de logaritmo, são 10 e o número e = 2,71828....

Este número não é resultado de uma fração decimal periódica, no entanto ele é irracional, ou seja, ele não pode ser obtido por meio do quociente de dois inteiros. (e = p⁄q)

Então por que este número é tão importante?

A resposta para a indagação proposta está na variação proporcional das grandezas.

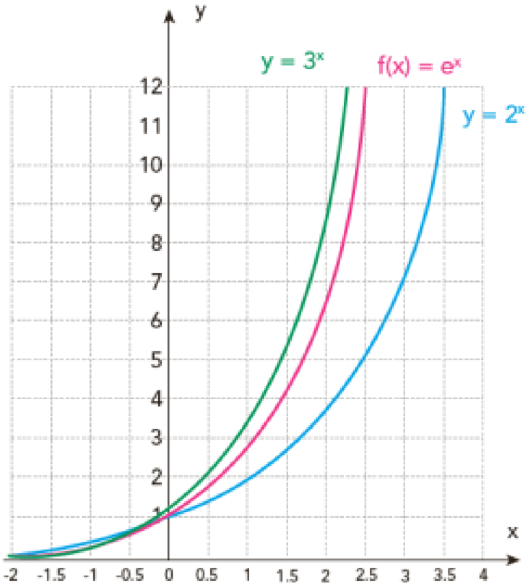
Um tipo de variação mais simples e comumente encontrada, consiste no crescimento (ou decrescimento) da grandeza em cada instante, é proporcional ao valor da grandeza naquele instante. Este tipo de variação ocorre, por exemplo, em questões de juros compostos, crescimento populacional (pessoas ou bactérias), desintegração radioativa etc.

Em todos os fenômenos dessa natureza, o número e aparece de modo natural e insubstituível, conforme estudaremos nas atividades a serem propostas.

Assim, reafirmamos: sempre que tentamos descrever matematicamente, o modo como variam as funções presentes em fenômenos naturais de diferentes tipos ou financeiras, que têm em comum o fato de que envolvem grandezas que crescem ou decrescem com uma rapidez é diretamente proporcional ao valor da grandeza em cada instante, naturalmente encontramos o número e.

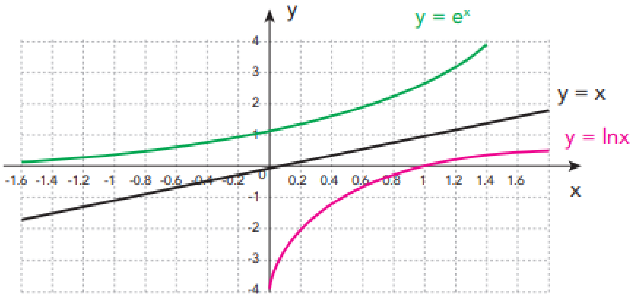
Um valor aproximado de e pode ser obtido a partir da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$: quanto maior o valor de n, mais próximos estaremos do número e. Para todos os fins práticos e=2,71828, ou, com uma aproximação melhor, e= 2,71828182459045.

Em consequência, em situações concretas que descrevem fenômenos naturais que apresentem crescimento ou decrescimento exponencial, a função f(x) = e^x, cujo gráfico apresentamos a seguir, tem uma presença marcante.



A função g(x) = $\log_e x$ costuma ser representada por g(x) = ln x , uma abreviatura para “logaritmo natural de x”. Os gráficos de f(x) = e^x e de sua inversa, g(x) = ln x , são representados a seguir.

É interessante notar que, como funções inversas, a cada ponto (a; b) do gráfico de f(x) corresponde um ponto (b; a) do gráfico de g(x), ou seja, os gráficos são simétricos em relação à reta y = x.



ATIVIDADE 4 - Um investidor aplica uma quantia de R$ 1.000,00 a uma taxa de juros de 12% ao ano. Calcule o valor do capital investido ao final do primeiro ano, supondo que:

a) os juros serão incorporados ao capital apenas ao final de cada ano (juros simples);

R = Se os juros são simples, então o capital C_1 ao final do primeiro ano será 12% maior, ou seja, $C_1 = 1{,}12 \,.\, C_0$, o que implica $C_1 = 1{,}12 \,.\, 1000 = 1120$ reais.

b) os juros serão distribuídos uniformemente, sendo incorporados ao capital ao final de cada mês;

R = Se os juros são distribuídos (1% ao mês) e incorporados ao capital mês a mês, temos:

ao final do 1º mês: $C_{\frac{1}{12}} = 1{,}01 \,.\, C_0$

ao final do 2º mês: $C_{\frac{1}{12}} = (1{,}01)^2 \,.\, C_0$

de modo análogo ao final do 12º mês:

$C_1 = (1{,}01)^{12} \,.\, C_0$. Ou seja:

$C_1 \cong 1{,}1268 \,.\, 1000 = 1126{,}80$ reais

c) os juros serão incorporados continuamente ao capital (juros compostos) ao longo do ano. (Dado: $e^{0,12}$ = 1,1275)

R = Se os juros são incorporados continuamente ao capital, temos: $C = C_0 \cdot e^{0,12t}$

Ao final do primeiro ano, ou seja, par t = 1, temos: $C_1 = C_0 \,.\, e^{0,12}$, ou seja, $C_1 \cong 1{,}1275 \,.\, C_0 \cong 1127{,}50$ reais.

ATIVIDADE 5 - Quando uma substância radioativa se decompõe, a rapidez com que ela se transforma é diretamente proporcional à quantidade restante em cada momento, ou seja, seu decrescimento é exponencial. Sabendo que a massa inicial m_o de certa substância radioativa é 60 g, e que ela se reduz à metade, a cada 4 h, determine a expressão de sua massa m em função do tempo t em horas:

a) supondo que $m(t) = m_0 \cdot 2^{bt}$, determine o valor de b;

R = Supondo $m(t) = m_0 \,.\, 2^{b\,.\,t}$, ou seja, $m(t) = 60 \,.\, 2^{b\,.\,t}$ e sabendo que, quando t = 4, temos m = 30, resulta: $30 = 60 \cdot 2^{4b}$, ou seja, $2^{4b} = \frac{1}{2}$.

Em consequência, $4b = \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$

Como $\log_2 (2)=1$, segue que $4b = -1$, pois,

$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 (1) - \log_2 (2) = -\log_2 (2) = -1$

Segue que b = –0,25; então, $m(t) = 60 \,.\, 2^{-0,25t}$

b) supondo que $m(t) = e^{at}$, determine o valor de a;

R = Supondo $m(t)= m_0 \cdot e^{at}$ ou seja, $m(t)= 60 \cdot e^{at}$ e sabendo que, quando t = 4, temos m = 30, resulta: $30 = 60 \cdot e^{4a}$.

Ou seja, $e^{4a} = \left(\frac{1}{2}\right)$. . Em consequência, $4a = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

Obtendo o valor de ln 2 em uma calculadora, obtemos $\ln 2 \cong 0{,}6932$ de onde segue que $4a \cong -0{,}6932$, ou seja, $a \cong -0{,}1733$.

c) mostre que as expressões obtidas nos itens a) e b) são equivalentes;

R = Calculando $2^{-0,25}$, usando uma calculadora (ou uma tabela de logaritmos), obtemos 0,8409, calculando $e^{-0,1733}$, obtemos o mesmo valor, o que significa que $(2^{-0,25})^t = (e^{-0,17733})^t$, ou seja, as duas expressões para a função m(t) são equivalentes, respeitadas as aproximações.

d) calcule a massa restante após 8 horas;

R = Em qualquer uma das expressões para m(t), substituindo t por 8, obtemos a massa restante após 8h:
$m(8)= 60 \cdot 2^{-0,25} \cdot 8 =$
$= 60 \cdot 2^{-2} = 15$ g.

e) após quanto tempo a massa restante será igual a 12g?

R = Para saber após quanto tempo a massa será reduzida a 12g, basta determinar o valor de t em qualquer uma das expressões:

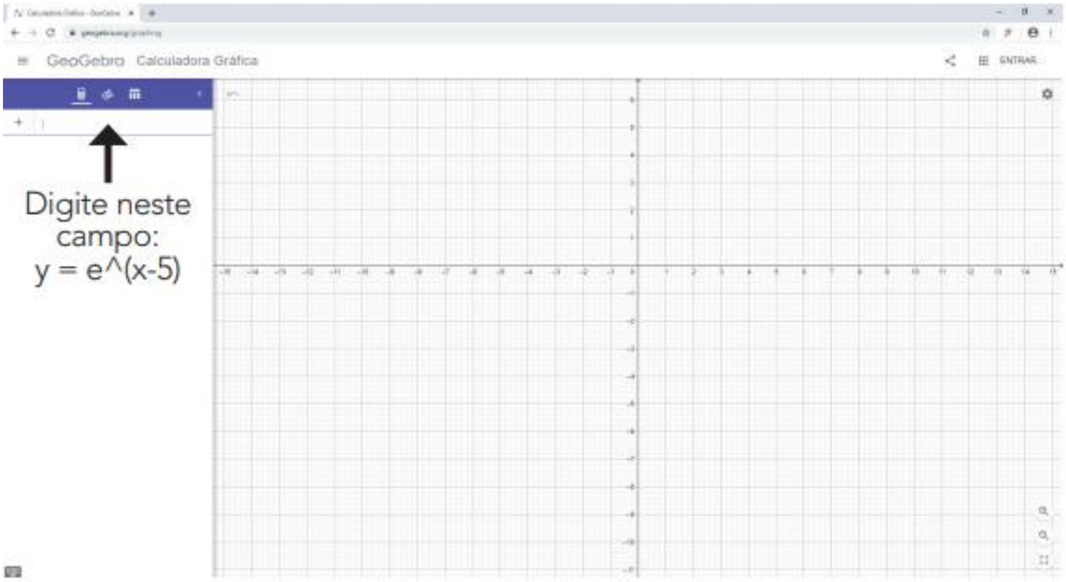
$12 = 60 \cdot e^{-0,1733t}$, ou seja, $-0{,}1733t = \ln\left(\frac{12}{60}\right)$, isto é, $-0{,}1733t = -\ln 5$.

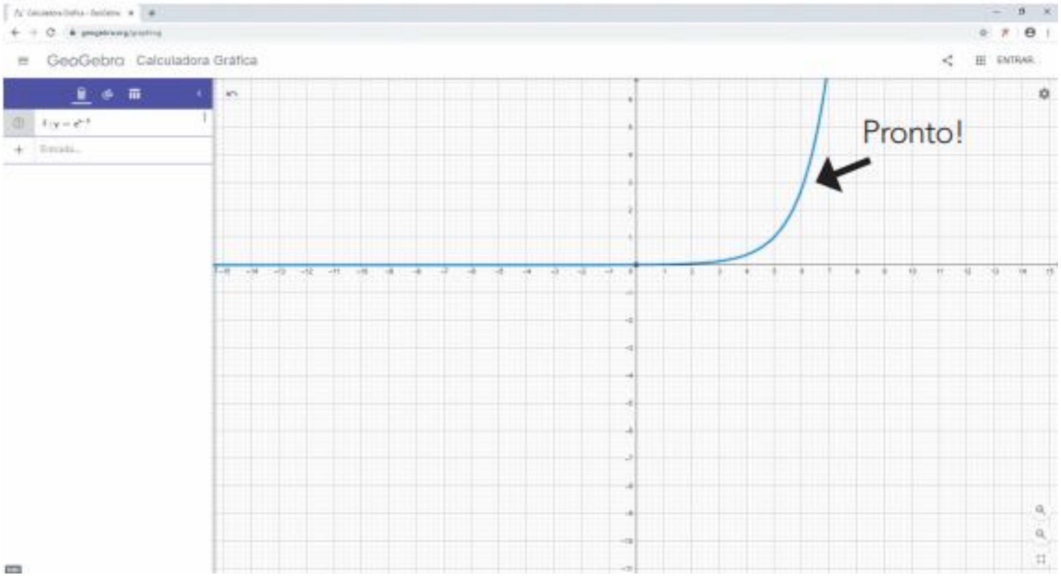
Recorrendo a uma calculadora (ou a uma tabela de logaritmos), obtemos $\ln 5 \cong 1{,}6094$; segue que $t \cong 9{,}29$ h, ou seja, aproximadamente 9 horas e 17 minutos

ATIVIDADE 6

MOMENTO DIGITAL

Construção de gráficos com o auxílio de um software.
Alguns softwares livres, como o Graphmatica, GeoGebra ou o Winplot, podem ser utilizados para construir gráficos de funções de vários tipos.
Para aprofundar os estudos propostos, neste caderno, você poderá efetuar o download de alguns dos programas de geometria dinâmica, mencionados anteriormente.
Tomaremos como exemplo a utilização do software GeoGebra, que pode ser utilizado tanto em computadores pessoais, bem como em aparelhos móveis (tablets ou celulares).
Para baixar os diferentes produtos oferecidos, acesse pela internet o site do GeoGebra. Disponível em https://www.geogebra.org/, acesso em 09/04/2019.
No nosso caso, sugerimos que efetuem o download do programa denominado GeoGebra
Clássico, para utilizar em computadores pessoais.
O programa mencionado possui duas funcionalidades, além do usuário explorar todas as funcionalidades da Geometria Dinâmica, ele também é um
plotador gráfico.
Para a utilização em aparelhos móveis sugerimos dois programas: a Calculadora gráfica e o Geometria
Para aparelhos móveis que utilizam o sistema Android o download, da Calculadora Gráfica, pode ser obtido por meio da leitura do seguinte QR code:
Para aparelhos que utilizam o sistema IOS o download, da Calculadora Gráfica, pode ser obtido por meio da leitura do seguinte QR code.
O GeoGebra on-line está disponível na URL ou no QR code: https://www.geogebra.org/graphing, acesso em 09/04/2019:
Como exemplo de aplicação do software construiremos o gráfico de y = e ^ (x – 5)





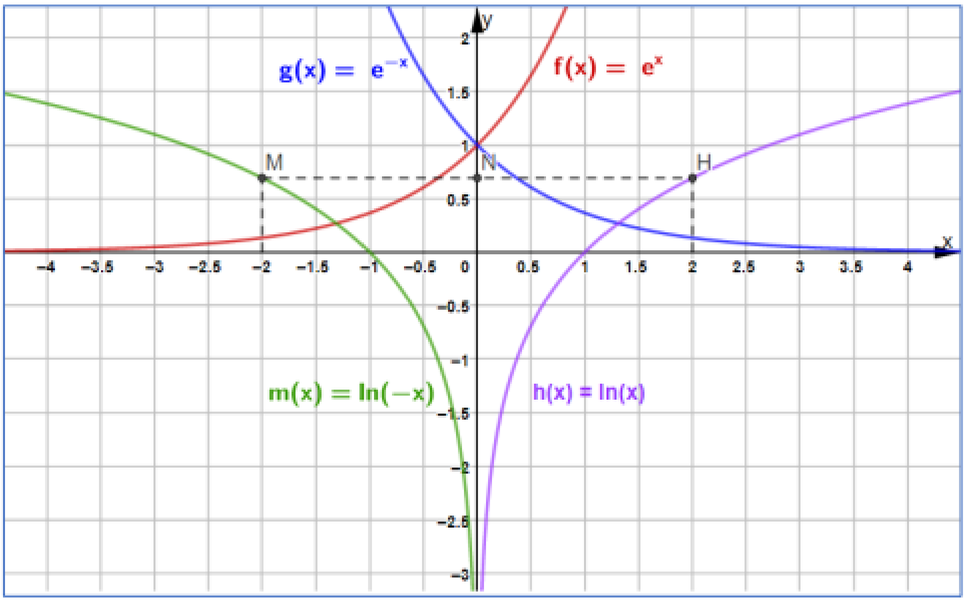
ATIVIDADE 7 - Dado as seguintes funções respondo as alternativas a seguir:

$f(x) = e^x$

$g(x) = e^{-x}$

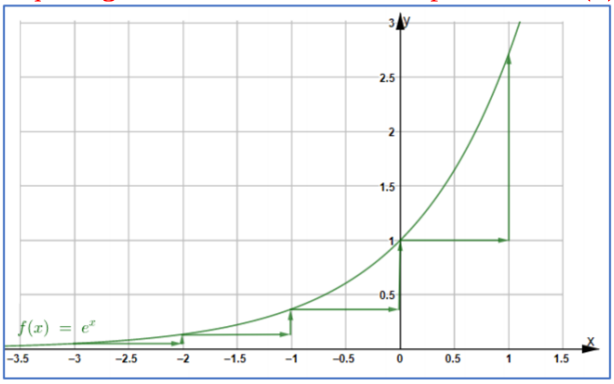
$h(x) = \ln x$ $(h > 0)$

$m(x) = \ln(-x)$ $(x < 0)$

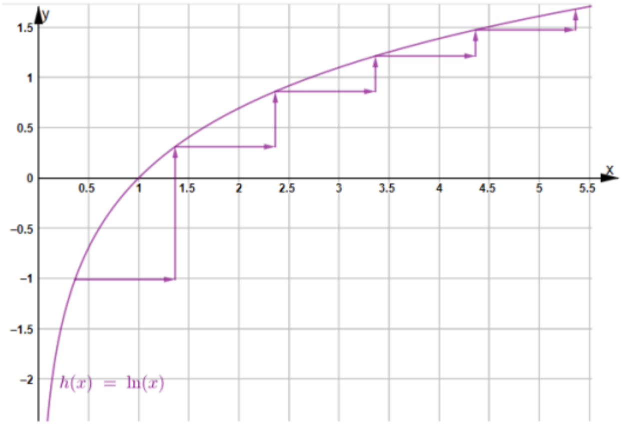


Os gráficos de f(x) e de g(x) são simétricos em relação ao eixo y, uma vez que os valores de f(x), quando trocamos x por (–x), coincidem com os valores de g(x). Os gráficos de m(x) e h(x) também são simétricos em relação ao eixo y. Notamos que, para x = –2, a função m(x) assume o mesmo valor que a função h(x) para x = 2. Naturalmente, o domínio de h(x) é o conjunto dos números reais positivos, enquanto o domínio de m(x) é o conjunto dos números reais negativos.

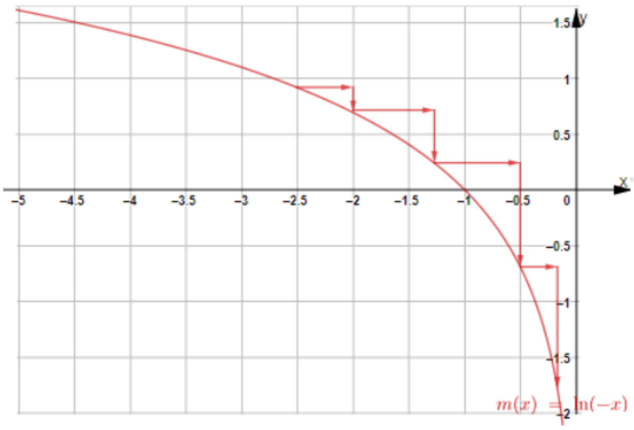
a) Qual das funções cresce a taxas crescentes?
R = Observando os gráficos e lembrando o significado da taxa de variação unitária, notamos que ela é crescente em f(x), o que faz com que o gráfico resulte encurvado para cima; f(x) é crescente a taxas crescentes.



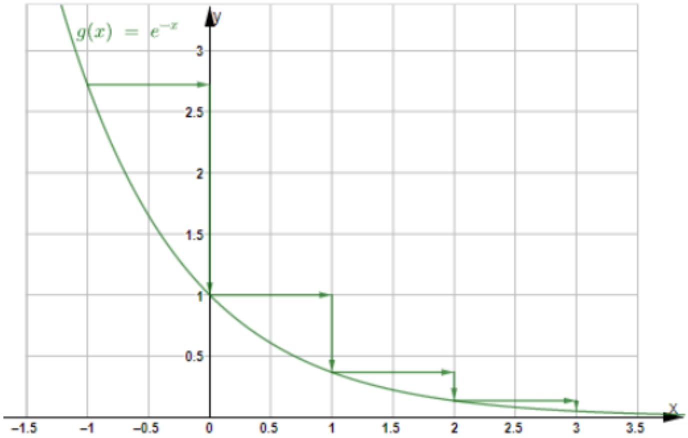
b) Qual das funções cresce a taxas decrescentes?
R = No gráfico de h(x) = lnx, notamos que a taxa de variação unitária é decrescente, o que faz com que o gráfico seja encurvado para baixo; h(x) é crescente a taxas decrescentes.



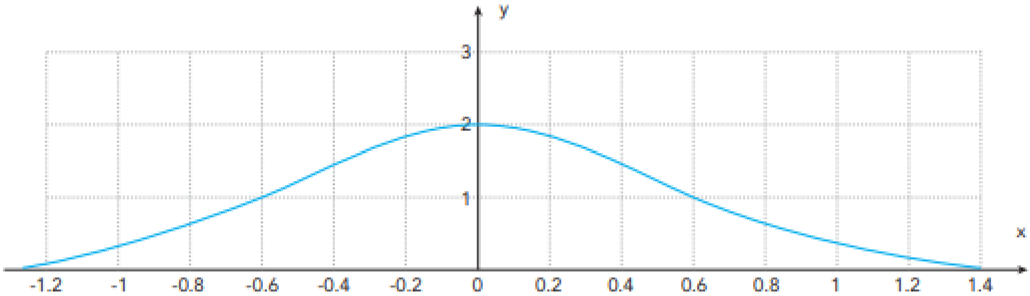
c) Qual das funções decresce a taxas crescentes?
R = O gráfico de m(x) representa uma função decrescente, e notamos que as taxas de variação são crescentes em valor absoluto, m(x) decresce a taxas crescentes.



d) Qual das funções decresce a taxas decrescentes?
R = O gráfico de g(x) representa uma função decrescente, e notamos que as taxas de variação são decrescentes em valor absoluto; g(x) decresce a taxas decrescentes.



ATIVIDADE 8 - O gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$ é chamado “curva normal” e representa a distribuição, em torno do valor médio das frequências de ocorrência de um experimento aleatório em uma população. Muitas medidas de características físicas, como altura, massa, dimensões dos pés, dos colarinhos, entre outras ao serem representadas estatisticamente, conduzem a uma curva normal. De forma geral, as diversas curvas do tipo normal (ou curva de Gauss) são do tipo $f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2}$, com diversos valores para os parâmetros a e b.
A seguir temos um exemplo de uma curva normal, dada pela função $f(x) = 2 \cdot e^{-2 \cdot x^2}$



Utilizando um programa para construção de gráficos, elabore algumas curvas de Gauss, variando os valores dos parâmetros **a** e **b**.