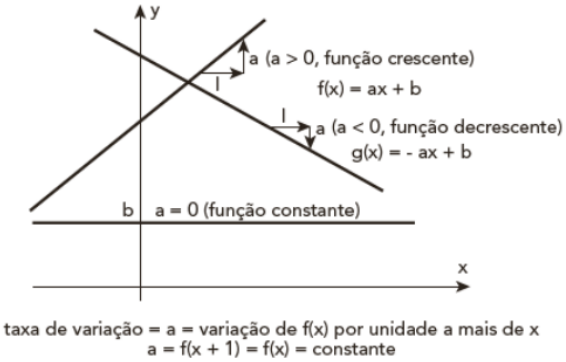
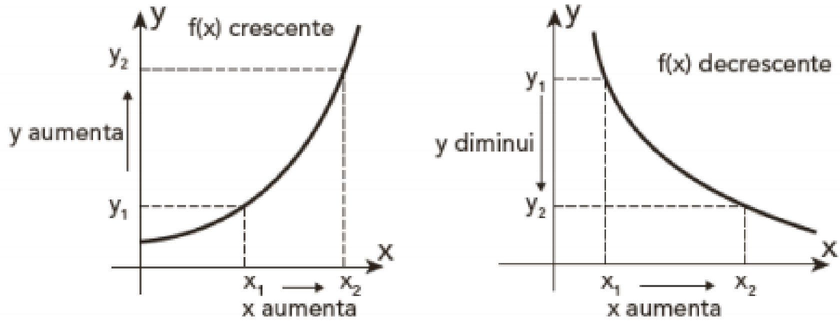
ATIVIDADES DO 3º SERIE A – 3º BIMESTRE

TEMA 3: CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE FUNÇÕES.

Na 1ª série do Ensino Médio, você já deve ter estudado que as funções polinomiais de 1º grau, expressas na forma f(x) = ax +b, são crescentes (a > 0) ou decrescentes (a < 0), sendo que o coeficiente a representa a variação em f(x), quando x aumenta em 1 unidade a partir de qualquer valor inicial. O valor de a é chamado taxa de variação unitária de f(x), ou somente taxa de variação de f(x). Naturalmente, se a = 0, ou seja, se a taxa de variação é zero, então a função f(x) é constante: f(x) = b



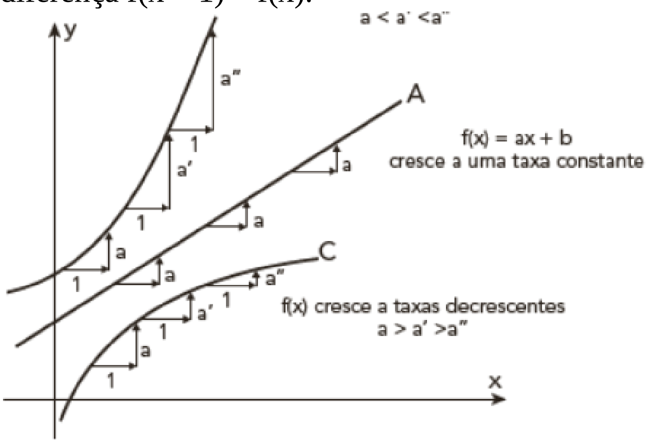
De modo geral, dizemos que uma função f(x) é crescente nos intervalos em que ocorre o seguinte: se os valores de x crescem, então os correspondentes valores de f(x) também crescem. Dizemos que f(x) é decrescente nos intervalos em que ocorre o seguinte: se os valores de x crescem, então os correspondentes valores de f(x) decrescem. O significado do crescimento ou do decrescimento do gráfico de f(x) é bastante expressivo:



Consideremos uma função que não é de 1º grau, ou seja, cujo gráfico não é uma reta. Ao observá-lo, constatamos que a taxa de variação unitária de f(x), ou seja, a variação de f(x) por unidade a mais de x, não é mais constate, isto é, a diferença f(x + 1) – f(x) passa a depender do valor de x a partir do qual ela é calculada. Por exemplo:

- se f(x) = 5x + 7, então f(x + 1) – f(x) = 5(x + 1) + 7 – (5x + 7) = 5, ou seja, a taxa de variação unitária de f(x) = 5x + 7 é constante e igual a 5, exatamente o valor de a na função a = 5;
- no entanto, se f(x) = $5x^2$ + 7, então f(x + 1) – f(x) = $5(x + 1)^2$ + 7 – ($5x^2$+ 7) = 10x + 5, ou seja, a taxa de variação unitária de f(x) = $5x^2$ + 7 é igual a 10x + 5; portanto, a taxa varia com o valor de x para o ponto considerado.

No que segue, chamaremos de taxa de variação unitária de uma função, para cada valor de x, o valor da diferença f(x + 1) – f(x).



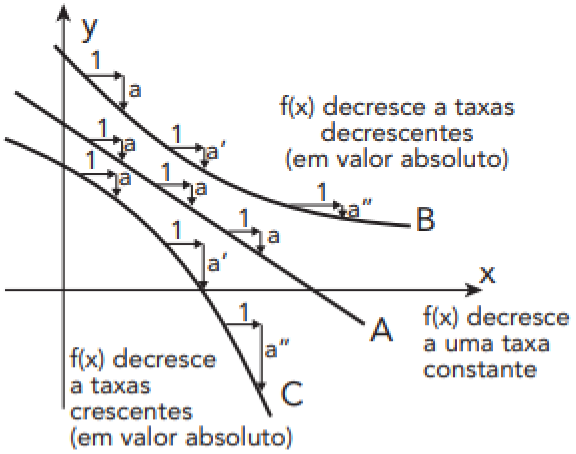
Quando uma função f(x) cresce a taxas crescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para cima; quando ela cresce a taxas decrescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo. Basicamente, em cada intervalo considerado, estas são as três formas de crescimento:

- crescer linearmente, com taxa de variação constante;
- crescer cada vez mais rapidamente, ou seja, com taxas de variação crescentes, o que faz com que o gráfico resulte encurvado para cima.

De forma análoga, em dado intervalo, uma função pode decrescer de três modos distintos:

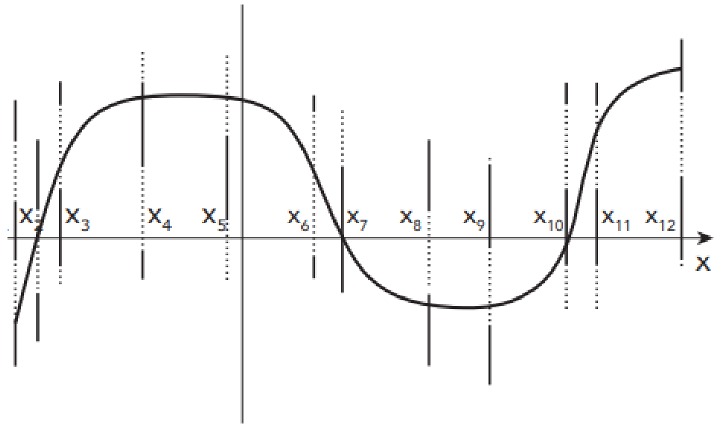
- decrescer linearmente, com taxa de variação constante;
- decrescer cada vez mais rapidamente, ou seja, com taxas de variação crescentes em valor absoluto (as taxas são negativas);
- decrescer cada vez mais lentamente, ou seja, com taxas de variação decrescentes em valor absoluto (as taxas são negativas).

O gráfico a seguir ilustra as três formas de decrescimento:



Resumindo: Quando uma função decresce a taxas decrescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para cima; quando ela decresce a taxas crescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

ATIVIDADE 1 - No gráfico a seguir, identifique os intervalos nos quais.



a) a função f(x) é positiva;

Temos f(x) > 0 para x entre x_2 e x_7 e para x entre x_{10} e x_{12}.

b) a função f(x) é negativa;

Temos f(x) < 0 para x entre x_1 e x_2 e para x entre x_7 e x_{10}.

c) a função f(x) é constante;

A função f(x) é constante para valores de x entre x_4 e x_5 e para x entre x_8 e x_9

d) a função f(x) é crescente;

A função f(x) é crescente para x entre x_1 e x_4 e para x entre x_9 e x_{12}.

e) a função f(x) é decrescente;

A função f(x) é decrescente para x entre x_5 e x_8.

f) a função f(x) cresce a taxa constante;

A função f(x) cresce a taxa constante nos intervalos em que o gráfico é um segmento de reta ascendente, ou seja, para x entre x_1 e x_3 e para x entre x_{10} e x_{11}.

g) a função f(x) decresce a taxa constante;

A função f(x) decresce a taxa constante no intervalo em que o gráfico é um segmento de reta descendente, ou seja, para x entre x_6 e x_7.

h) a função f(x) cresce a taxas crescentes;

A função f(x) cresce a taxas crescentes no intervalo em que é crescente e o gráfico é encurvado para cima, ou seja, para x entre x_9 e x_{10}.

i) a função f(x) cresce a taxas decrescentes;

A função f(x) cresce a taxas decrescentes nos intervalos em que é crescente, mas o gráfico está encurvado para baixo, ou seja, para x entre x_3 e x_4 e para x entre x_{11} e x_{12}.

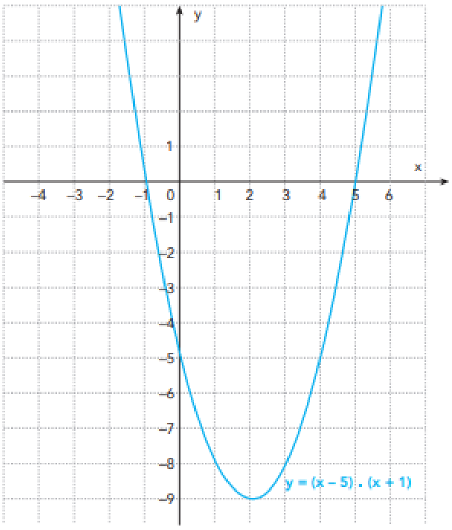
j) a função f(x) decresce a taxas crescentes;

A função f(x) decresce a taxas crescentes no intervalo em que é decrescente e o gráfico é encurvado para baixo, ou seja, para x entre x_5 e x_6.

k) a função f(x) decresce a taxas decrescentes.

A função f(x) decresce a taxas decrescentes no intervalo em que é decrescente e o gráfico é encurvado para cima, ou seja, para x entre x_7 e x_8.

ATIVIDADE 2 - Considere o gráfico da função polinomial de 2º grau f(x)= (x – 5) · (x + 1) indicado a seguir



a) Identifique os intervalos em que f(x) > 0 e os intervalos em que f(x) < 0

f(x) > 0 para x > 5, ou então para x < –1;

f(x) < 0 para x entre –1 e 5, isto é, – 1 < x < 5;

b) Identifique os intervalos em que f(x) é crescente e os intervalos em que é decrescente.

f(x) é crescente para x > 2;

f(x) é decrescente para x < 2;

c) Qualifique o crescimento e o decrescimento de f(x), informando se eles ocorrem a taxas crescentes ou a taxas decrescentes.

para x > 2, f(x) cresce a taxas crescentes (concavidade para cima);

para x < 2, f(x) decresce a taxas decrescentes (concavidade para cima).

ATIVIDADE 3 - Construa os gráficos das funções a seguir em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas. Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para resolver este exercício.

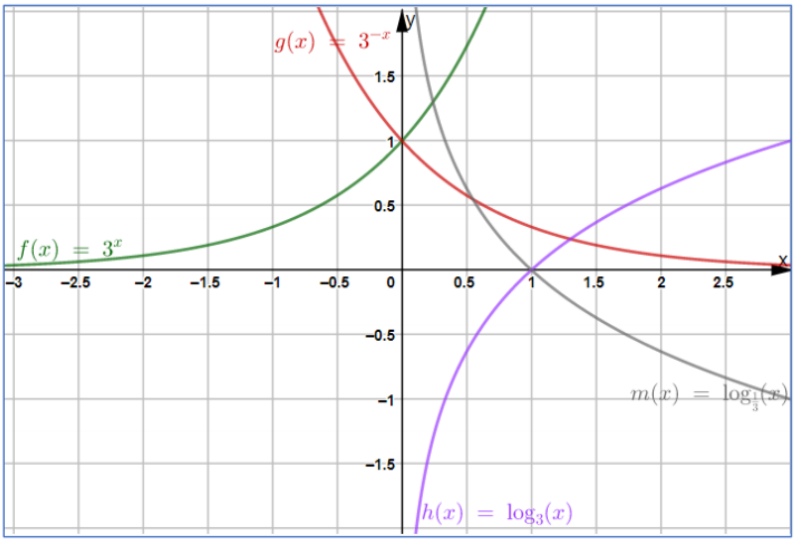
a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = 3^{-x}$

c) $h(x) = \log_3 x$

d) $m(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Identifique, em cada caso, se a função é crescente ou decrescente, bem como se o crescimento ocorre a taxas crescentes ou a taxas decrescentes.



a) f(x) cresce a taxas crescentes;

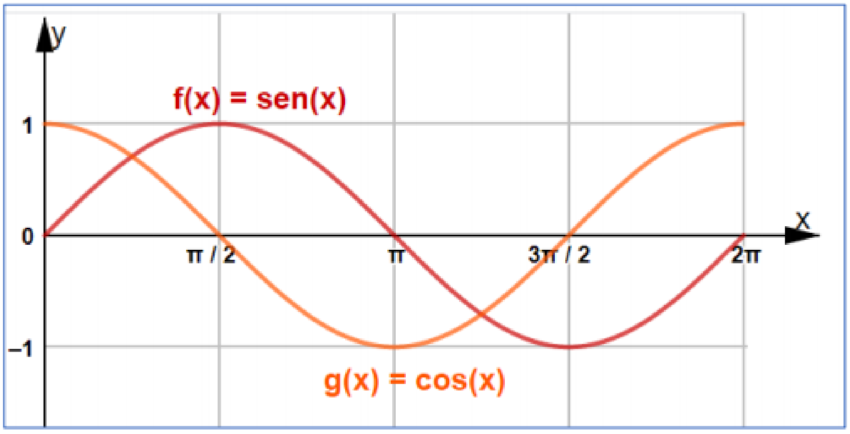
b) g(x) decresce a taxas decrescentes;

c) h(x) cresce a taxas decrescentes;

d) m(x) decresce a taxas decrescentes

ATIVIDADE 4 - No mesmo sistema de coordenadas, construa o gráfico das funções f(x) = sen x e g(x) = cos x entre x = 0 e x = 2π. Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para resolver este exercício.

a) No intervalo considerado, identifique os trechos em que f(x) e g(x) são crescentes, e os trechos em que são decrescentes.
b) Compare os gráficos de f(x) e de g(x), observando que os valores máximos de uma das funções ocorrem nos pontos em que a outra se anula e vice-versa.
c) Compare os gráficos de f(x) e de g(x), verificando que a concavidade de f(x) muda (de gráfico encurvado para baixo para gráfico encurvado para cima ou vice-versa) nos pontos em que g(x) assume valores extremos (máximos ou mínimos) e vice-versa em relação a g(x).

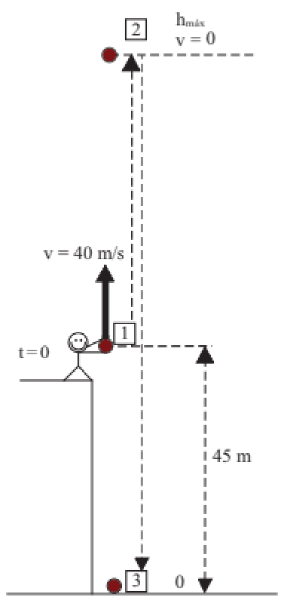


a) f(x) é crescente para x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e para x entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π;
f(x) é decrescente para x entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$
g(x) é crescente para x entre π e 2π;
g(x) é decrescente para x entre 0 e π.

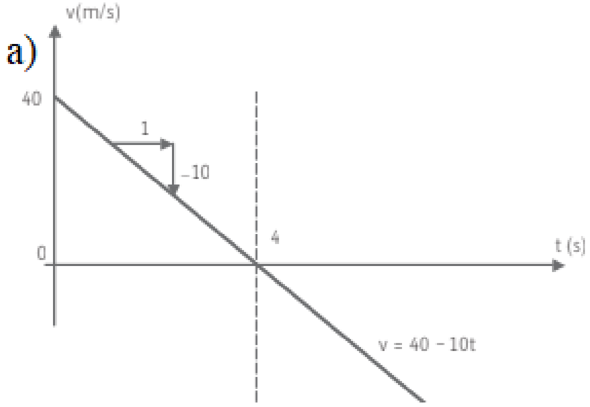
b) Notamos que o valor máximo de f(x) ocorre no ponto x = $\frac{\pi}{2}$, e o valor mínimo ocorre no ponto x = $\frac{3\pi}{2}$; nesses pontos, temos g(x) = 0.
Analogamente, o valor máximo de g(x) ocorre nos pontos x = 0 e x = 2π e o valor mínimo, no ponto x = π; nesses pontos, temos f(x) = 0.

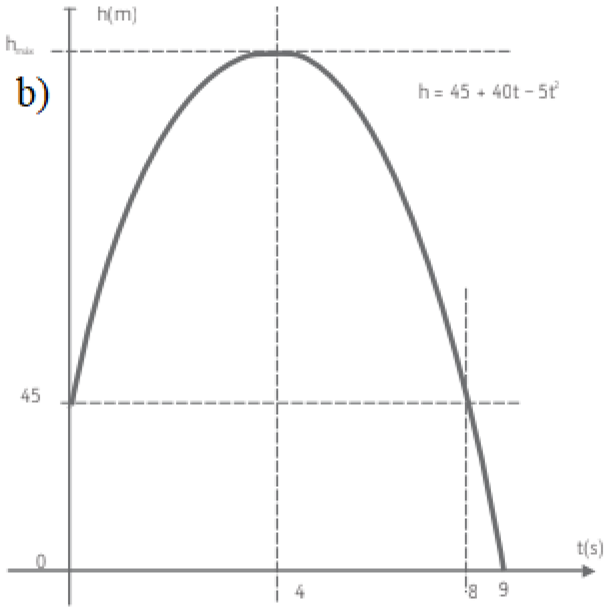
c) Notamos que o gráfico de f(x) passa de voltado para baixo a voltado para cima no ponto x = π, em que g(x) assume o valor mínimo. Analogamente, o gráfico de g(x) passa de voltado para baixo a voltado para cima no ponto x = $\frac{\pi}{2}$, que é de máximo para f(x), e volta a ficar voltado para baixo no ponto x = $\frac{3\pi}{2}$, que é de mínimo para f(x).

ATIVIDADE 5 - Quando uma pedra é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 40 m/s, a partir de uma altura inicial de 45 m, ela sobe com velocidade cada vez menor, até atingir uma altura máxima em relação ao solo, quando momentaneamente para. A partir daí, ela desce cada vez mais rapidamente até voltar ao solo. Sabemos que por causa da força da gravidade (peso), que age dobre a pedra, sua velocidade diminui a uma taxa constante de aproximadamente 10 m/s a cada segundo, no movimento de subida. Podemos descrever o movimento da pedra por meio de uma função de 1°grau, que representa sua velocidade, e de uma função de 2°grau, que representa a sua altura em relação ao solo. Nesse caso, as funções que representam a velocidade e a altura são as seguintes:
v = 40 - 10t
(a partir do valor inicial 40m/s, a velocidade diminui 10 m/s a cada segundo, ou seja, a taxa de variação da velocidade é de -10 m/s por **s**, que se escreve -10 m/s^2)
h = 45 + 40t - 5t^2
(a partir do valor inicial 45 m, a altura aumenta até um valor máximo, diminuindo posteriormente até atingir o valor zero).



Pede-se:
a) construa o gráfico de **v** em função de **t**;
b) construa o gráfico de **h** em função de **t**;
c) determine o valor máximo de **h**(**t**);
d) determine o valor de **t** quando a pedra voltar a passar pela posição inicial;
e) calcule depois de quanto tempo a pedra atinge o solo;
f) observando os gráficos de **h**(**t**) e **v**(**t**), assinale **V** (VERDADEIRO ou **F** (FALSO) nas frases seguintes:
(**V**) "A velocidade decresce a uma taxa constante."
(**V**) "A altura h cresce cada vez mais lentamente até atingir o valor máximo; depois decresce cada vez mais rapidamente."
(**V**) "A altura cresce a taxas decrescentes até o valor máximo; depois decresce a taxas crescentes."





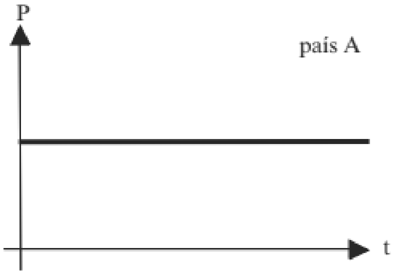
c) O gráfico da altura h em função do tempo t é um arco de parábola, iniciando no ponto (0; 45), com a concavidade para baixo. Seu ponto de máximo coincide com o instante em que a velocidade é igual a zero, ou seja, ocorre para t = 4s. A altura máxima é o valor de h(t) para t = 4 s, ou seja, é h(4) = 125 m.

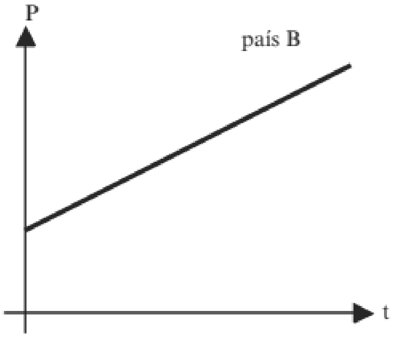
d) A pedra leva 4 s para subir até a altura máxima e demora o mesmo tempo descendo até a posição de partida, ou seja, após 8 s ela estará de volta à posição inicial.

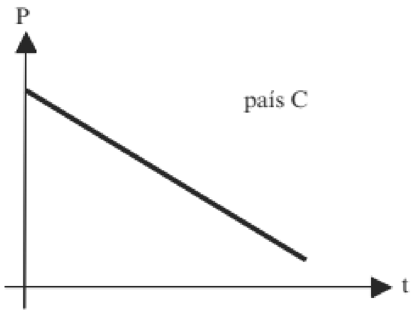
e) O instante em que ela toca o solo é o valor de t para h = 0, ou seja, é a raiz da equação $0 = 45 + 40t - 5t^2$, resolvendo-a, encontramos t = 9 s

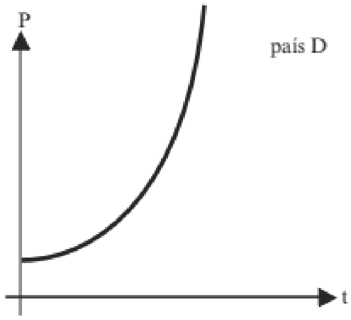
DESAFIO!

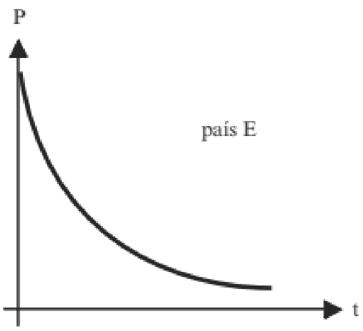
Os gráficos a seguir representam o preço médio **P** dos alimentos da mesma cesta básica, em diferentes países, em função do tempo **t**, ao longo de determinado ano.

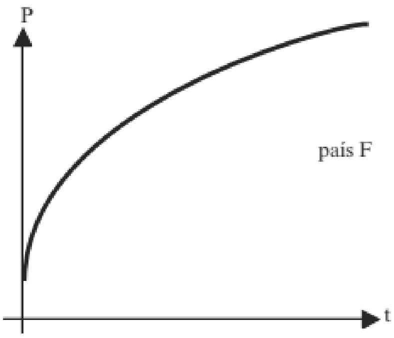


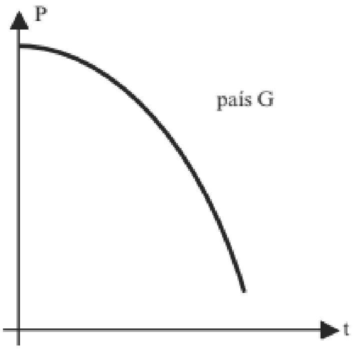


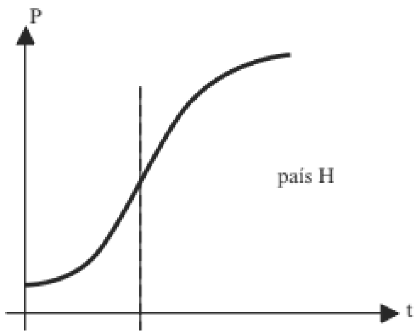


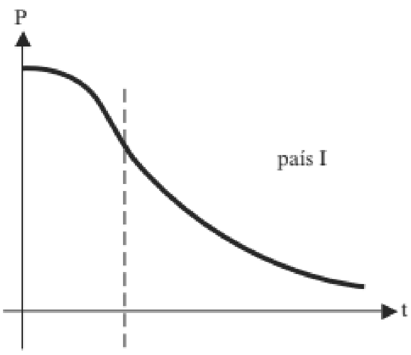


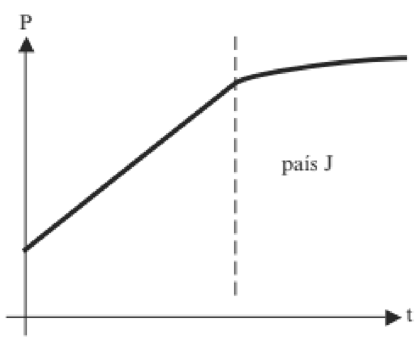












Pergunta-se: (TAREFA)

a) Em que país os preços estiveram estabilizados ao longo do ano?

b) Em que país os preços aumentaram a uma taxa constante?

c) Em que país os preços aumentaram a taxas crescentes?

d) Em que país os preços diminuíram a uma taxa constante?

e) Em que país os preços aumentaram a taxas decrescentes?

f) Em que país os preços diminuíram a taxas decrescentes?

g) Em que país os preços inicialmente aumentaram a uma taxa constante e, posteriormente, a taxas decrescentes?

h) Em que país os preços diminuíram a taxas crescentes?

i) Em que país os preços inicialmente aumentaram a taxas crescentes e depois a taxas decrescentes?

j) Em que país os preços inicialmente diminuíram a taxas crescentes, e depois aumentaram a taxas decrescentes?

RESPOSTAS DO DESAFIO

a) Em que país os preços estiveram estabilizados ao longo do ano?
R = No país A, os preços mantiveram-se constantes.

b) Em que país os preços aumentaram a uma taxa constante?
R = No país B, os preços variaram tendo como gráfico uma reta inclinada com inclinação positiva.

c) Em que país os preços aumentaram a taxas crescentes?
R = No país D, os preços cresceram tendo o gráfico encurvado para cima, o que significa taxas crescentes.

d) Em que país os preços diminuíram a uma taxa constante?
R = No país C, os preços decresceram tendo como gráfico uma reta com inclinação negativa.

e) Em que país os preços aumentaram a taxas decrescentes?
R = No país F, os preços cresceram tendo o gráfico encurvado para baixo.

f) Em que país os preços diminuíram a taxas decrescentes?
R = No país E, os preços decresceram tendo o gráfico encurvado para cima.

g) Em que país os preços inicialmente aumentaram a uma taxa constante e, posteriormente, a taxas decrescentes?
R = No país J, os preços inicialmente tiveram um gráfico retilíneo. Depois, seguiram uma curva voltada para baixo.

h) Em que país os preços diminuíram a taxas crescentes?
R = No país G, os preços decresceram tendo o gráfico encurvado para baixo.

i) Em que país os preços inicialmente aumentaram a taxas crescentes e depois a taxas decrescentes?
R = No país H, os preços inicialmente tiveram um gráfico voltado para cima. A partir de certo ponto, o gráfico encurvou-se para baixo.

j) Em que país os preços inicialmente diminuíram a taxas crescentes, e depois aumentaram a taxas decrescentes?
R = No país I, os preços decresceram segundo um gráfico voltado para baixo. Depois, segundo um gráfico voltado para cima.