ATIVIDADES – 3º COLEGIAL A

TEMA 2 – DAS FÓRMULAS À ANÁLISE QUANTITATIVA – COEFICIENTES E RAÍZES

ATENÇÃO: ESTUDAR OS CONTEÚDOS DAS PÁGINAS 13, 14, 15, 16, 17 E 18 DO CADERNO DO ALUNO PARA ENTENDER OS EXERÍCIOS ABAIXO

1º - Dada a Fórmula fatorada; tendo como raízes **p** e **m** temos:
$(x - p) . (x - m) = 0$ ou $x^2 - (p + m)x + p.m = 0$ daí temos: $x^2 - Sx + P = 0$ onde S é a soma das raízes e P é o produto das raízes:

EXERCÍCIOS

1) Dada as raízes 2 e 3 escreva a Equação do 2º Grau:
Forma fatorada: $(x - 2) . (x - 3) = 0$
$x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
Forma da Soma e Produto: $S = 2 + 3 = 5$ e $P - 2 . 3 = 6$ pela fórmula temos:
$x^2 - 5x + 6 = 0$

2) Dada as raízes: - 3 e 1, escreva a Equação do 2º Grau:
$S = -3 + 1 = -2$
$P = -3 . 1 = -3$
$x^2 - Sx + P = 0$
$x^2 - (-2)x + (-3) = 0$
$\boxed{x^2 + 2x - 3 = 0}$

3) Quais são as equações de 2º Grau, onde a Soma e o Produto são:
a) Produto P = 10 e Soma S = - 7
$P = -2 \times -5 = 10$ multiplicações de resultado 10: 1 . 10 = 10 e 2 . 5 = 10
$S = -2 + -5 = -7$ soma que poderá dar -7, só temos: (-2) + (-5) = -7
$x^2 - Sx + P = 0$
$\boxed{x^2 - 7x + 10 = 0}$

b) Produto P = -12 e Soma S = -1
$P = -4 \times 3 = -12$ multiplicações de resultado 12: 1 . 12 = 12; 2 . 6 = 12; 4 . 3 = 12
$S = -4 + 3 = -1$ soma que poderá dar -1, só temos: (-2) + (-5) = -7
$x^2 - Sx + P = 0$
$x^2 - (-1)x + (-12) = 0$
$\boxed{x^2 + 1x - 12 = 0}$

c) Produto P = -42 e Soma S = 1 (RESOLVER)

2º - Equação do 3º Grau: Dado as raízes r_1, r_2 e r_3, temos:
Forma fatorada: $(x - r_1) . (x - r_2) . (x - r_3) = 0$

$$x^3 - \underbrace{(r_1 + r_2 + r_3)}_{\substack{S_1 \\ \text{Soma 1}}}.x + \underbrace{(r_1 . r_2 + r_1 . r_3 + r_2 . r_3)}_{\substack{S_2 \\ \text{Soma 2}}}.x - \underbrace{(r_1 . r_2 . r_3)}_{\substack{P \\ \text{Produto}}} = 0$$

$$\boxed{x^3 - S1x^2 + S^2x - P = 0}$$

Exemplo

1) Se uma equação do 3º grau tiver as raízes 2, 3 e 5, então podemos escrever:
Forma fatorada: $(x - r_1) . (x - r_2) . (x - r_3) = 0$

$(x - 2) . (x - 3) . (x - 5) = 0$ $x . x = x^2$: $x . -3 = -3x$: $-2 . x = -2x$

$(x^2 - 3x - 2x + 6) . (x - 5) = 0$

$(x^2 - 5x + 6) . (x - 5) = 0$

$(x^3 - 5x^2 - 5x^2 + 25x + 6x - 30) = 0$

$\boxed{x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0}$

Formula da Soma e do Produto:

$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 = 2 + 3 + 5 = 10$

$S_2 = r_1 . r_2 + r_1 . r_3 + r_2 . r_3 = (2 . 3) + (2 . 5) + (3 . 5) = 6 + 10 + 15 = 31$

$P = r_1 . r_2 . r_3 = 2 . 3 . 5 = 30$

$x^3 - S_1x^2 + S_2x - P = 0$

$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$

3º - A formula da Soma e do Produto vale para equações de 4º grau, 5º grau, e assim sucessivamente. Na equação de 4º grau temos:

$\boxed{x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + P = 0}$

$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$

$S_2 = r_1 . r_2 + r_1 . r_3 + r_1 . r_4 + r_2 . r_3 + r_2 . r_4 + r_3 . r_4$

$S_3 = r_1 . r_2 . r_3 + r_1 . r_2 . r_4 + r_2 . r_3 . r_4$

$P = r_1 . r_2 . r_3 . r_4$

Exemplo: Escreva nessa formula $x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + P = 0$, uma equação de grau 4, cuja raízes são -2, 3, 4 e -5.

$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = (-2) + 3 + 4 (-5) = 0$

$S_2 = r_1 . r_2 + r_1 . r_3 + r_1 . r_4 + r_2 . r_3 + r_2 . r_4 + r_3 . r_4 = (-2 . 3) + (-2 . 4) + (-2 . (-5)) + (3 . 4) + (3 . (-5)) + (4 . (-5)) = (-6) + (-8) + 10 + 12 + (-15) + (-20) = (-27)$

$S_3 = r_1 . r_2 . r_3 + r_1 . r_2 . r_4 + r_2 . r_3 . r_4 = (-2 . 3 . 4) + (-2 . 3 . (-5)) + (3 . 4 . (-5) = (-54)$

$P = r_1 . r_2 . r_3 . r_4 = (-2) . 3 . 4 . (-5) = 120$

$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + P = 0$

$x^4 - 0x^3 + (-27)x^2 - (-54)x + 120 = 0$

$x^4 -27x^2 + 54x + 120 = 0$

Obs.: Não esquecer sinal da equação: $x^4 - x^3 + x^2 - x + p$. Usar regra quando for - . - = +

ATIVIDADE

1 – Encontre ao menos uma raiz das seguintes equações do 3º Grau:

a) $x^3 + x - 10 = 0$
R: raiz 2, pois: $2^3 + 2 - 10 = 0 =$
$8 + 2 - 10 = 0$
$0 = 0$

b) $x^3 - 5x + 6x = 0$
R: raiz 0, pois: $0^3 - 5.0 + 6.0 = 0$
$0 - 0 + 0 = 0$
$0 = 0$

c) $8 + x^3 = 0$
R: raiz -2, pois: $8 + (-2)^3 = 0$
$8 - 8 = 0$
$0 = 0$

d) $2x^3 + 4x - 2x - 4 = 0$
R: raiz 1, pois: $2 . 1^3 + 4 . 1 - 2 . 1 - 4 = 0$
$2 + 4 - 2 - 4 = 0 = 6 - 6 = 0$
$0 = 0$

ATIVIDADE

1) Situação de aprendizagem, usando soma e produto das raízes, para equações de 3º grau.

a) Escreva na forma fatorada uma equação de 3º grau com raízes **m, p** e **k**

R) $(x - m) . (x - p) . (x - k) = 0$

2) escreva na forma fatorada de uma equação de 3º grau com raízes 2, 3 e 4

R) $(x - 2) . (x - 3) . (x - 4) = 0$

3) Determine a equação anterior aplicando a propriedade distributiva pela Soma e Produto das raízes:

R) raízes: 2, 3 e 4

$S1 = 2 + 3 + 4 = 9$

$S2 = (2 . 3) + (2 . 4) + (3 . 4) = 6 + 8 + 12 = 26$

$P = 2 . 3 . 4 = 24$

$x^3 - 9x^2 + 26x + 24 = 0$

2) Se uma equação de 3º grau tem raízes -2, 3 e 4 calcule S1 , S2 e P.

R) $S1 = -2 + 3 + 4 = 5$

$S2 = (-2) . 3 + (-2) . 4 + 3 . 4 = - 6 - 8 + 12 = -2$

$P = (-2) . 3 . 4 = -24$

a) Escreva a equação na forma fatorada

R) $(x - (-2)) . (x - 3) . (x - 4) = 0$

$(x + 2) . (x - 3) . (x - 4) = 0$

b) aplicando a distributiva ou usando a fórmula da soma e produto temos:

R) $x^3 - 5x^2 - 2x - (-24) = 0$ ou $(x + 2) . (x - 3) . (x - 4) = 0$

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

$(x^2 - 3x + 2x - 6) . (x - 4) = 0$

$(x^2 - x - 6) . (x - 4) = 0$

$x^3 - 4x^2 - x^2 + 4x - 6x + 24 = 0$

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

4) Escreva na forma fatorada $x^3 - S1\, x^2 + S2\, x - P = 0$ uma equação algébrica de 3º grau cujas raízes são:

a) -2, -3 e 4

$S1 = (-2) + (-3) + 4 = -5 + 4 = -1$

$S2 = (-2).(-3) + (-2).(4) + (-3). (4) = 6 - 8 - 12 = -14$

$P = (-2) . (-3) . (4) = 24$

$x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

b) 2, 7 e -3 (FAZER COMO TAREFA)

c) 2, 5 e 1 (FAZER COMO TAREFA)

5) Escreva na forma fatorada uma equação algébrica de grau 4 cujas raízes são:

a) 2, 3, 4 e 5; (FAZER COMO TAREFA)

b) –2, 3, 4 e –5;

R = $(x + 2) . (x - 3) . (x - 4) . (x + 5) = 0$

c) 1, 0, 3 e 7.

R = $(x - 1) . x . (x - 3) . (x - 7) = 0$

6) Escreva todas as equações do Exercício 5 na forma: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Para isso, faça as multiplicações que forem indicadas.

Resolução:

Da equação: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, vamos dividir todos os coeficientes por a, então temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

onde:

$$\frac{b}{a} = -(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$$

$$\frac{c}{a} = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4 + r_3 \cdot r_4$$

$$\frac{d}{a} = -(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4)$$

$$\frac{e}{a} = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$$

a) 2, 3, 4 e 5; (FAZER COMO TAREFA)

b) –2, 3, 4 e –5;

$S_1 = -(-2 + 3 + 4 - 5) = 0$

$S_2 = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-5) = (-6) + (-8) + 10 + 12 + (-15) + (-20) = -27$

$S_3 = -\big((-2) \cdot 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + (-5) + (-2) \cdot 4 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 \cdot (-5)\big) =$

$= -\big((-24) + 30 + 40 + (-60)\big) = -(-14) = 14$

$S_4 = (-2) \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-5) = 120$

A equação cujas raízes são: –2, 3, 4 e –5 será dada por: $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$

c) 1, 0, 3 e 7.

$S_1 = -(1 + 0 + 3 + 7) = -11$

$S_2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 3 + 7 + 21 = 31$

$S_3 = -(1 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \cdot 7) = -21$

$S_4 = 1 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 7 = 0$

A equação cujas raízes são: 1, 0, 3 e 7 será dada por: $x^4 - 11x^3 + 31x^2 - 21x = 0$

7) Dada a equação polinomial $x^3 - 8x^2 + kx - 24 = 0$, responda:

a) Quais são as possíveis raízes inteiras da equação?

b) Se a equação tiver duas raízes simétricas, qual será a terceira raiz?

c) Se uma das raízes for o inverso da outra, qual será a terceira raiz?

d) É possível que a equação tenha uma raiz nula?

Resolução:

a)

Observando os coeficientes, concluímos que 24 é igual ao produto das três raízes. Logo, os divisores de 24 são possíveis raízes inteiras da equação, ou seja, ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 e ±24. Naturalmente, dependendo do valor de **k**, tal equação pode não admitir qualquer um desses divisores como raiz. O que se pode afirmar é precisamente o fato de que, se houver raiz inteira, ela terá de ser um dos divisores de 24.

b)

Como a soma das raízes simétricas é zero e a soma das três raízes é 8, então a terceira raiz deverá ser igual a 24.

c)

Como o produto das duas raízes inversas é igual a 1 e o produto das três raízes é 24, então a terceira raiz deverá ser igual a 24.

d)

Não é possível que a equação tenha raiz nula, pois, nesse caso, o produto das raízes seria zero, e já vimos que o produto das raízes é igual a 24.

8) Considere a equação polinomial $3x^4 - 12x^3 + kx^2 - 6x + 3 = 0$.
a) Quais são as possíveis raízes inteiras da equação?
b) Quais são os valores de k que fazem com que a equação proposta tenha raízes inteiras?
Resolução:

a)

Dividindo os coeficientes da equação por 3, que é o coeficiente do termo de maior grau, obtemos a equação equivalente (com as mesmas raízes) expressa na forma:

$x^4 - 4x^3 + \frac{k}{3}x^2 - 2x + 1 = 0$

Comparando com a forma $x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$, concluímos que o produto das raízes da equação é igual a $S_4 = 1$. Logo, as possíveis raízes inteiras da equação são os divisores de 1, ou seja, +1 ou –1.

b)

Para que a equação tenha raízes inteiras, ou seja, para que ela tenha +1 ou –1 como raízes, quando substituirmos os valores de **x** por +1 ou por –1 no primeiro membro da equação, o resultado deve ser igual ao segundo membro, ou seja, zero.
Para $x = 1$, temos:
$1^4 - 4 \cdot 1^3 + \frac{k}{3} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$, ou seja $k = 12$
Para $x = -1$, temos:
$(-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + \frac{k}{3} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1$, ou seja $k = -24$

9) Sabendo que 1 é raiz da equação $x^3 + 7x^2 + kx - 15 = 0$, determine o valor de k e encontre as outras raízes.
Resolução:
Como 1 é raiz, substituindo **x** por 1 devemos ter a igualdade verdadeira, logo, $1 + 7 + k - 15 = 0$, e então, $k = 7$.
Como a soma das três raízes é igual a –7, sendo uma delas igual a 1, a soma das outras duas deve ser igual a –8.
Como o produto das três raízes é igual a 15, sendo uma delas igual a 1, o produto das outras duas é igual a 15.
Logo, além da raiz dada $r_1 = 1$, as outras duas raízes da equação são tais que sua soma é –8 e seu produto é 15, sendo as raízes da equação de segundo grau $x^2 + 8x + 15 = 0$.
Resolvendo tal equação, obtemos $r_2 = -3$ e $r_3 = -5$.
Concluímos que a equação proposta no enunciado tem como raízes os números reais 1, –3 e –5.