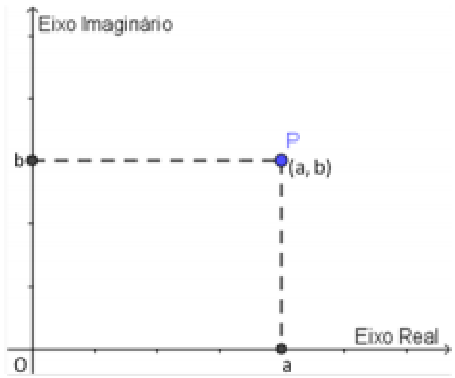
A representação geométrica de um número complexo foi associada aos estudos dos matemáticos Wessel, Argand e Gauss. Os números a e b do número complexo a + bi (sendo *a* a parte real e *b* a parte imaginária) são associados a coordenadas de um ponto no plano, criando uma representação geométrica para o complexo.

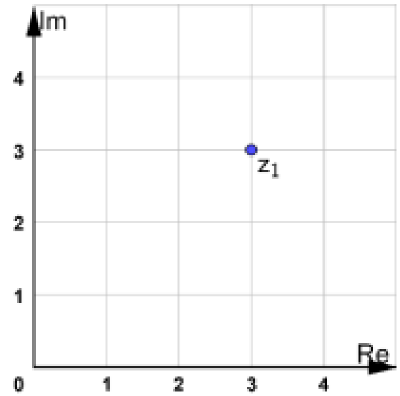


Fonte: Elaborada pelo autor.

ATIVIDADE 4

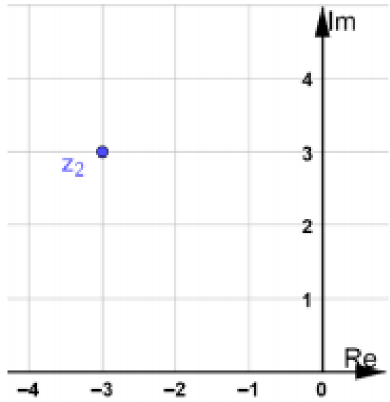
Dados os complexos a seguir, represente-os no plano complexo.

a) $z_1 = 3 + 3i$



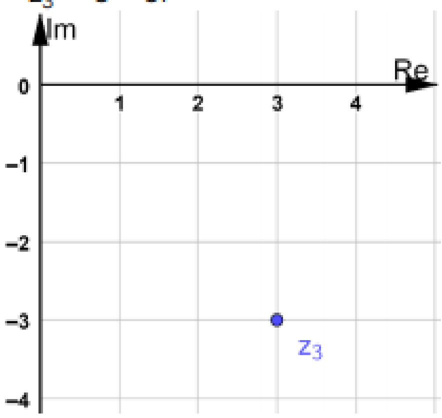
Fonte: Elaborado pelo autor.

b) $z_2 = -3 + 3i$



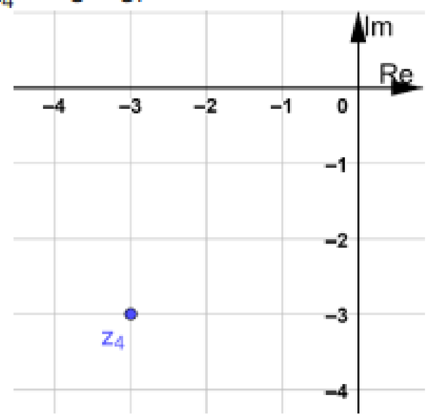
Fonte: Elaborado pelo autor.

c) $z_3 = 3 - 3i$



Fonte: Elaborado pelo autor.

d) $z_4 = -3 - 3i$

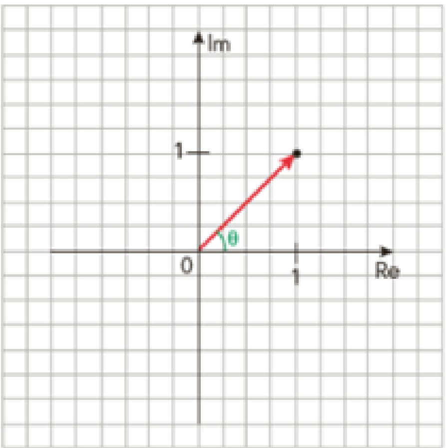


Fonte: Elaborado pelo autor.

ATIVIDADE 5

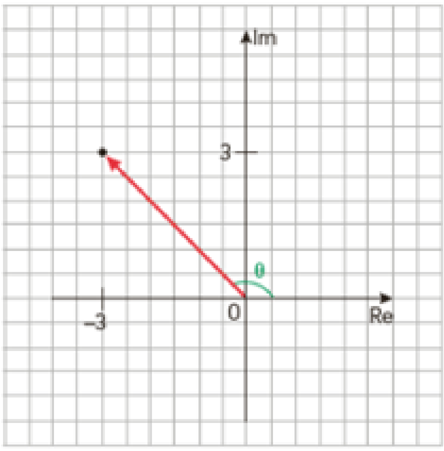
Observe os números complexos a + b_i representados no plano de *Argand–Gauss* e determine, para cada um, a medida do ângulo θ e do segmento que une o ponto (a; b) à origem do sistema.

a)



Fonte: Elaborada pelo autor.

b)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução:

a) $z = 1 + i$

$p^2 = a^2 + b^2$

$p^2 = 1^2 + 1^2$

$p^2 = 1 + 1$

$p = \sqrt{2}$

$\theta = \text{Arg}(z)$

$tg\,\theta = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

$tg\,\theta = \dfrac{1}{1} = 1$

Assim sendo, $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $z = -3 + 3i$

$p^2 = a^2 + b^2$

$p^2 = (-3)^2 + 3^2$

$p^2 = 9 + 9$

$p = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} \Longrightarrow p = 3\sqrt{2}$

$\theta = \text{Arg}(z)$

$tg\theta = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

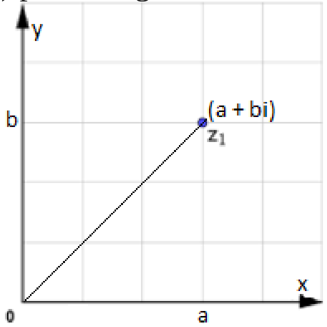
$tg\theta = \dfrac{-1}{1} = -1$

Assim sendo, $\theta = 135° = \frac{3\pi}{4}$ rad

FORMA TRIGNOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Chama-se um módulo ou valor absoluto de um número complexo Z = a + bi ao número $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
É usual empregarmos a letra ρ (leia-se: rô) para designarmos o módulo de um número complexo: $\rho = |z|$



Obs: ρ é a distância do afixo do número complexo à origem do sistema cartesiano: $\rho^2 = a^2 + b^2$

Exemplo:

a) $Z = 3 + 4i$

$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{9 + 16} = \rho = \sqrt{25} = \rho = 5$

b) $Z = 2 - i$

$\rho = \sqrt{2^2 + (-1)^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{4 + 1} = \rho = \sqrt{5}$

c) $Z = -3i$

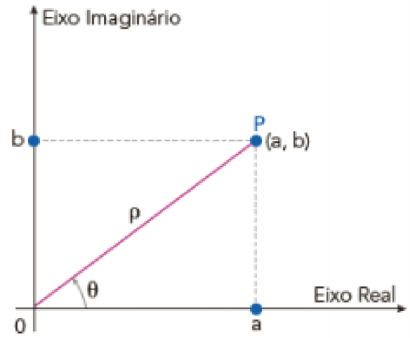
$\rho = \sqrt{0^2 + (-3)^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{9} = \rho = 3$

EXERCÍCIOS

1 – Determine o módulo dos seguintes números complexos:

$a)\ Z = 8 + 6i$
b) $Z = 3 - 2i$
$c)\ Z = 5$
$d)\ Z = 7i$
$e)\ Z = -4i$

ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na imagem acima, foi evidenciada a distância de P até origem O representada pela letra grega ρ(Rho). Esse segmento ρ representa o módulo do número complexo (a + bi) e pode ser encontrado usando o Teorema de Pitágoras, em que a e b representam os catetos do triângulo, e ρ, a hipotenusa. O ângulo formado entre o Eixo Real e o seguimento ρ, aqui representado pela letra grega ϴ(theta), é o argumento do número complexo (a + bi). Determinado o triângulo retângulo aOP, podemos fazer uso das razões trigonométricas estudadas nos anos anteriores, mais especificamente sen ϴ, cos ϴ e tg ϴ.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\ }{\rho}\ ,\ \cos\theta = \frac{\ }{\rho}\ ,\ \text{tg}\,\theta = \frac{b}{a}$$

Possibilitando a representação trigonométrica ou polar do complexo (a + bi), temos:

$$\rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$\text{sen}\,\theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = sen\,\theta = \frac{b}{\rho}$

$\cos\theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = cos\,\theta = \frac{a}{\rho}$

$tg\,\theta = \frac{sen}{cos} = tg\,\theta = \frac{b}{\cancel{\rho}} \cdot \frac{\cancel{\rho}}{a} = \frac{b}{a}$

EXEMPLOS:

a) Z = 1 + i

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1^2 + 1^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^o$

$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho} = \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^o$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$

α	30°	45°	60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

b) Z = -2

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} \Rightarrow \rho = 2$

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \cos\theta = \frac{-2}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-2}{2} \Rightarrow \cos\theta = -1$

$\text{sen}\,\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{0}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$

Logo, $\theta = \pi$

Transformar graus em radianos: Exemplos

$180^o = \pi$
$45^o = x$
$180^o\,x = 45^o\pi$
$x = \frac{45^o\pi \div 5}{180^o \div 5} = \frac{9^o\pi \div 9}{36^o \div 9}$
$x = \frac{1\pi}{4}$

$180^o = \pi$
$36^o = x$
$180^o x = 36^o\pi$
$x = \frac{36^o\pi \div 9}{180^o \div 9} = \frac{4^o\pi \div 4}{20^o \div 4}$
$x = \frac{1\pi}{5}$

$180^o = \pi$
$25^o = x$
$180^o x = 25^o\pi$
$x = \frac{25^o\pi \div 5}{180^o \div 5}$
$x = \frac{5\pi}{36}$

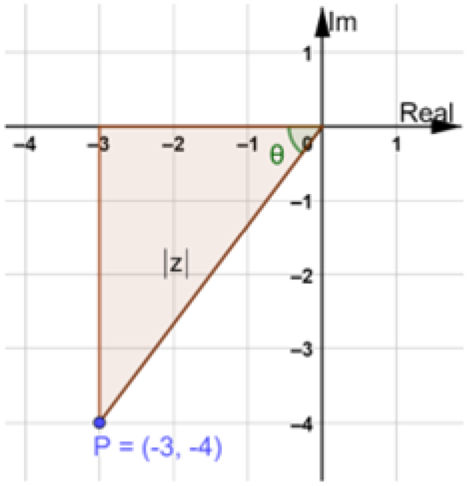
$180^o = \pi$
$120^o = x$
$180^o x = 120^o\pi$
$x = \frac{120^o\pi \div 10}{180^o \div 10} = \frac{12^o\pi \div 9}{18^o \div 9}$
$x = \frac{2\pi}{3}$

ATIVIDADE 6

Determine o argumento do número complexo z = – 3 – 4i.

θ	tg θ
50°	1,1918
51°	1,2349
52°	1,2799
53°	1,3270
54°	1,3764
55°	1,4281
56°	1,4826

Resolução:



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinar o argumento do número complexo $z = -3 - 4i$, precisamos calcular o valor de $|z|$. Como $a = -3$ e $b = -4$, teremos:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Segue que:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{-4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{-3}{5}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-4}{5} \cdot \frac{5}{-3} = \frac{-4}{-3} = 1{,}3333...$$

Portanto, o argumento (θ) será o arco cuja tangente é 1,3333, que é aproximadamente a 53,13°.

ATIVIDADE 7

a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

b) $z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$

c) $z_3 = -\sqrt{3} + 3i$

d) $z_4 = \sqrt{3} - i$

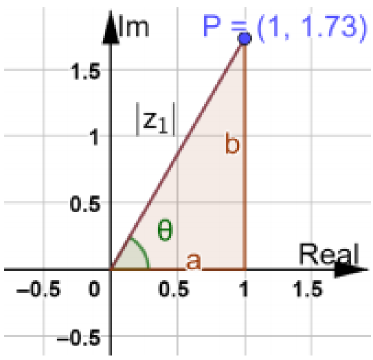
a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

$$|z_1| = \left|\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}\right| = \left|\sqrt{1+3}\right| = \left|\sqrt{4}\right| = 2$$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60° \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\boxed{\therefore z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\ \frac{\pi}{3}\right)}$$

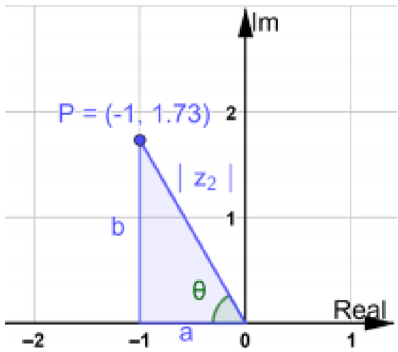
b) $z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$

$$|z_2| = \left|\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\right| = \left|\sqrt{1+3}\right| = \left|\sqrt{4}\right| = 2$$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{2}{1} = -\sqrt{3}\ \text{(3° quadrante)} \Rightarrow \theta = 60° \text{ ou } \theta = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\boxed{\therefore z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\ \frac{2\pi}{3}\right)}$$

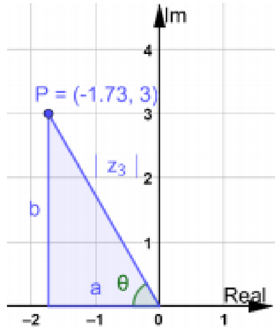
c) $z_3 = -\sqrt{3} + 3i$

$$|z_3| = \left|\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2}\right| = \left|\sqrt{3+9}\right| = \left|\sqrt{12}\right| = 3\sqrt{2}$$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{-\sqrt{3}} = \frac{6}{-2\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}\ \text{(2° quadrante)} \Rightarrow \theta = 60° = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\boxed{\therefore z_3 = 3\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\ \frac{2\pi}{3}\right)}$$

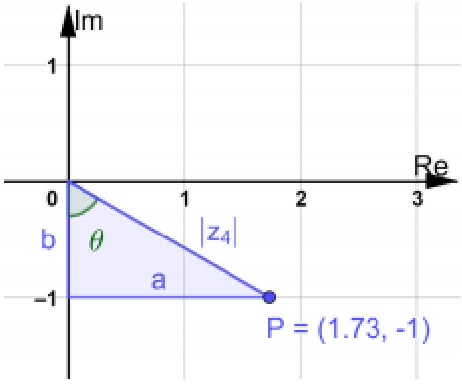
d) $z_4 = \sqrt{3} - i$

$$|z_4| = \left|\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}\right| = \left|\sqrt{3+1}\right| = \left|\sqrt{4}\right| = 2$$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{2}{1} = -\sqrt{3}\ \text{(4° quadrante)} \Rightarrow \theta = 60° = \frac{5\pi}{3}\ \text{rad}$$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\boxed{\therefore z_4 = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\text{sen}\ \frac{5\pi}{3}\right)}$$