NÚMEROS COMPLEXOS

Sendo a e b números reais e i a unidade imaginária de numero complexo a todo número Z na forma: Z = a + bi, onde a é a parte real e bi é a parte imaginária.

Exemplos: 4 + 3i; 7 – i; 11i; -3 + 0i = -3; 0 + 3i = 3i

Então o número Complexo pode ser:

a) Se b = 0; Z = a (Z é uma número real) Ex: Z = 5 + 0i = 5: $Z = -\frac{3}{4} + 0i = -\frac{3}{4}$

b) Se a e b diferentes de zero (Z é imaginário) Ex: 6 + 2i; $-5 + \frac{1}{2}i$; 3 + 3i

c) Se a = 0 e b diferente de zero (Z é imaginário puro) Ex: 7i; $\frac{1}{4}i$; -11i; i;

OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO: Soma e ou Subtrai as partes reais, e as partes imaginárias separadamente.

EXEMPLOS:

1) Sendo Z = 4 + 5i e Z = 2 + 6i temos

(4 + 2) + (5i + 6i) = 6 + 11i

2) (4 – 3i) + (-2 – 7i) = (4 – 2) + (-3i – 7i) = 2 + (-10i) = 2 – 10i

3) (3 – 2i) + (5 – 5i) – (2 – 4i) – (-7 + 3i) (eliminar os parênteses utilizando regra de sinal)

temos: 3 – 2i + 5 – 5i – 2 + 4i + 7 – 3i (junte os números inteiros e partes imaginárias)

(3 + 5 – 2 + 7) + (-2i – 5i + 4i – 3i) = 13 + (-6i) = 13 – 6i

EXERCÍCIOS – (FAZER E ENTREGAR PARA NOTAS)

1) Efetue: (pode fazer direto os cálculos se você tiver facilidade)

a) (3 + 2i) + (5 + 7i)

b) (-4 + 5i) + (3 + 8i)

c) (-2 + 3i) + (-3 – i)

d) (- 8 – i) + (4 + 2i) – (2 – 3i)

e) (-10 -3i) + (9 – 7i) + (3 + i) – (4 – 11i)

MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS: Consideramos como binômios, multiplicamos membro a membro e substituímos i^2 por -1.
EXEMPLOS:

1) Sendo $Z1 = 4 + 5i$ e $Z2 = 2 + 6i$

$Z1 \, . \, Z2 = (4 + 5i) . (2 + 6i) = (4 . 2) + (4 . 6i) + (5i . 2) + (5i . 6i)$

$8 + 24i + 10i + 30i^2$ $\quad (i^2 = -1)$

$8 + 34i + 30(-1)$

$8 + 34i - 30 = -22 + 34i$

2) Efetue: $(-2 + 3i) . (5 - 4i) = (-2 . 5) + (-2 . -4i) + (3i . 5) + (3i . -4i)$

$- 10 + (+8i) + 15i + (-12i^2)$

$- 10 + 23i + (-12 . -1)$

$- 10 + 23i + 12 = 2 + 23i$

3) Efetue e entregue para NOTAS:

a) $(5 + 3i) . (2 + 4i)$

b) $(-4 - 4i) . (2 - 3i)$

c) $(-7i) . (-7i)$

d) $(-10) . (-3i)$

e) $(4 - 2i) . (-1 + 2i)$

POTÊNCIAS DE i

Considere o valor de i^n, onde n é natural

$n = 0 \;=\; i^0 = 1$

$n = 1 \;=\; i^1 = i$

$n = 2 \;=\; i^2 = -1$

$n = 3 \;=\; i^3 = i^2 . i^1 = -1 . i = -i$

$n = 4 \;=\; i^4 = i^2 , i^2 = -1 . -1 = 1$

$n = 5 \;=\; i^5 = i^3 . i^2 = -i . -1 = i$

$n = 6 \;=\; i^6 = i^2 . i^2 . i^2 = -1 . -1 . -1 = -1$

$n = 7 \;=\; i^7 = i^2 . i^2 . i^2 . i^1 = -1 . -1 . -1 . i = -i$

$n = 8 \;=\; i^8 = i^2 . i^2 . i^2 . i^2 = -1 . -1 . -1 . -1 = 1$

As potências sucessivas de i se repetem periodicamente de acordo com a sequência: 1, i, -1, -i; daí temos que: i = i, onde r é o resto da divisão de n por 4. De fato: n/4 = p de resto r ; então n = 4p + r.

EXEMPLOS

1) Calcule as seguintes potências:

a) $i^{63} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 4 \\ \underline{-4} & 15 \\ 23 & \\ \underline{-20} & \\ 03 & \end{array}$$

b) $i^{72} = i^0 = 1$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 4 \\ \underline{-4} & 18 \\ 32 & \\ \underline{-32} & \\ 00 & \end{array}$$

c) $i^{35} = i^3 = -i$

d) $i^{94} = i^2 = -1$

e) $i^{42} = i^2 = -1$

f) $i^{171} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 171 & 4 \\ \underline{-16} & 42 \\ 11 & \\ \underline{-8} & \\ 03 & \end{array}$$

g) $i^{100} = i^0 = 1$

h) $i^{458} = i^2 = -1$

2) Efetue:

a) $3i^8 = 3 \,.\, i^2 . i^2 . i^2 . i^2 = 3 \,.\, (-1).(-1).(-1).(-1) = 3$ ou $3i^8 = 3i^0 = 3 \,.\, 1 = 3$

b) $5i^{40} + 8\,i^{35} - i$

c) $i^5 \,.\, i^{37} \,.\, i^{302}$

d) $5i^{37} \,.\, 6i^{72}$

e) $(-2i)^5 = (-2)^5 \,.\, i^5 = (-2)\,.\,(-2)\,.\,(-2)\,.\,(-2)\,.\,(-2)\,.\,i^1 = -32i$ *ou* $(-2i)^5 = (-2)^5 \,.\, i^2 \,.\, i^2 \,.\, i^1 = -32 \,.\, -1 \,.\, -1 \,.\, i = -32i$

f) $(-i)^8$

g) $(1+i)^{10} = \{(1+i)^2\}^5 = \{1^2 + 2 \,.\, 1 \,.\, i + i^2\}^5$
$= \{1 + 2i + (-1)\}^5$
$= \{2i\}^5 = 32i$

DIVISÃO DE COMPLEXOS: Conjugado de um número complexo Z = a + bi é o número $\overline{Z}$ = a – bi.

EXEMPLO

1) Calcule $\frac{5+3i}{2-i} = \frac{(5+3i)}{(2-i)} \frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{10+5i+6i+3i^2}{4+2i-2i+1} = \frac{10+11i+3(-1)}{5} = \frac{7+11i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$

2) Calcule $\frac{8+3i}{-5i} = \frac{(8+3i)}{(-5i)} \frac{(5i)}{(5i)} = \frac{40i+15i^2}{-25i^2} = \frac{40i+15(-1)}{-25(-1)} = \frac{40i-15}{25} = -\frac{15}{25} + \frac{40}{25}i = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5}i$