ATIVIDADES DE MATEMATICA - 3º SÉRIE A

ATENÇÃO: OS CONTEÚDOS DAS AULAS A SEGUIR SÃO REFERENTES AO CADERNO SÃO PAULO FAZ ESCOLA, QUE ESTÃO SENDO REVISADAS ATRAVÉS DAS AULAS NO CENTRO DE MÍDIAS SP, INICIADO NO DIA 27 DE ABRIL DE 2020, QUE DEVERÃO SER ACOMPANHADAS PELOS ALUNOS PARA FUTURAS INTERVENCÕES DO PROFESSOR.

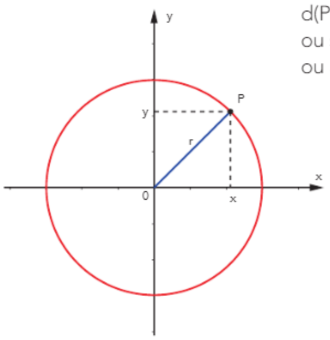
ESTE MATERIAL A SEGUIR É PARA QUE O ALUNO POSSA ESTUDAR E TRANSCREVER TODOS OS CONTEUDOS EM SEU CADERNO DE CLASSE, DE PRÓPRIO PUNHO, VAMOS TERMINAR AS ATIVIDADES DO 1º BIMESTRE, O QUANTO ANTES PARA FECHARMOS AS NOTAS. OBRIGADO.CONTO COM VOCÊS.COMPARTILHAR COM OS COLEGAS QUE NÃO POSSUIEM ACESSO A NENHUM MEIO DE ACESSO. E CORRE PRO ABRAÇO. OU ESPERE!!!! ESTAMOS DE QUARENTENA. KKKKKK

PROFESSOR WANILSON

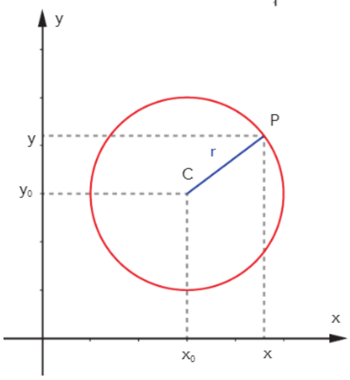
TEMA 3: CIRCUNFERÊNCIAS E CÔNICAS: SIGNIFICADOS E EQUAÇÕES

CIRCUNFERÊNCIA

A propriedade característica da circunferência é a de que seus pontos são todos equidistantes de um ponto interior chamado centro; a distância comum de cada um de seus pontos ao centro é o raio da circunferência. Assim, se o centro for a origem do sistema de coordenadas e P (x; y) um ponto de uma circunferência de raio r, a equação que relaciona as coordenadas de um ponto qualquer da circunferência é:



$d(P; O) = r$
ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$;
ou ainda, $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$



Se o centro **C** for o ponto $(x_0; y_0)$, então da igualdade característica $d(P; C) = r$ resultará:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r^2$$

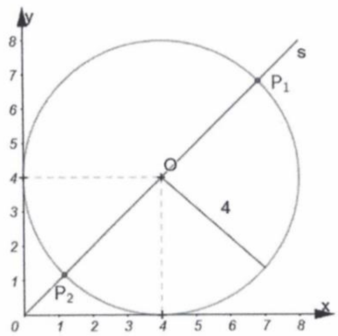
ou seja:

$$\mathbf{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Sabendo que uma circunferência de centro C $(x_0; y_0)$ e raio r tem equação $(x – x_0)^2 + (y – y_0)^2 = r^2$, considere a circunferência de centro (4; 4) e de raio 4.

a) Represente-a no plano cartesiano a seguir e determine sua equação.

A equação da circunferência é $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$, com a seguinte representação gráfica:



b) Determine a equação da reta s que passa pela origem e pelo centro da circunferência.

R: Dados dois pontos pertencente a reta s (0,0) e (4,4) é possível determinar a equação da reta usando as condições de alinhamento de três pontos, em que o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos é igual a 0. Usando os pontos por onde é sabido que a reta s passa (4,4) centro da circunferência (0,0) origem e (x, y) um ponto genérico pertencente a essa reta temos.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & y & 1 & x & y \end{array}$$

$$0 \quad -4y \quad 0 \qquad\qquad 0 \quad 4x \quad 0$$

$$4x - 4y = 0$$
$$x - y = 0$$
$$x = y$$

c) Calcule as coordenadas dos pontos P_1 e P_2, de interseção da reta s com a circunferência dada.

R: P_1 e P_2 são pontos comuns tanto a circunferência quanto a reta s, ou seja, são pontos que satisfazem as duas equações simultaneamente, formando um sistema.

$$\begin{cases} x = y \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow (y-4)^2 + (y-4)^2 = 16$$

$$2\,(y-4)^2 = 16$$
$$2(y^2 - 8y + 16) = 16$$
$$2y^2 - 16y + 32 = 16$$
$$2y^2 - 16y + 16 = 0 = y^2 - 8y + 8 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$y_1 = 4 + 2\sqrt{2} \qquad y_2 = 4 - 2\sqrt{2}$$
$$x_1 = 4 + 2\sqrt{2} \qquad x_2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$P_1 = \left(4 + 2\sqrt{2}\,;\, 4 + 2\sqrt{2}\right)$$
$$P_2 = \left(4 - 2\sqrt{2}\,;\, 4 - 2\sqrt{2}\right)$$

d) Calcule a distância entre P_1 e P_2.

A distância entre os pontos de intersecção é igual ao diâmetro (d) da circunferência.

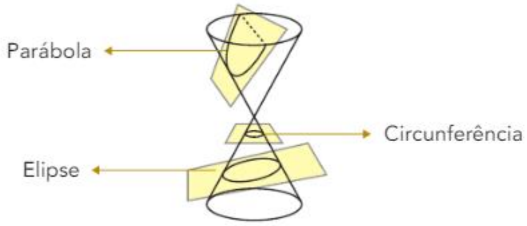
$d = 2 \cdot r$ (r igual ao raio da circunferência)

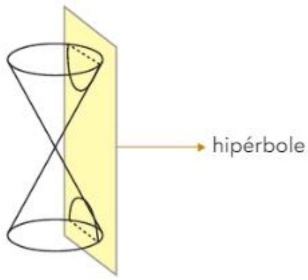
$d = 2 \cdot 4$

$d = 8.$

CÔNICAS

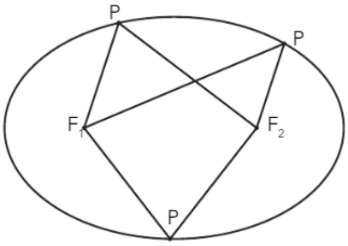
As cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) são curvas que podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis.





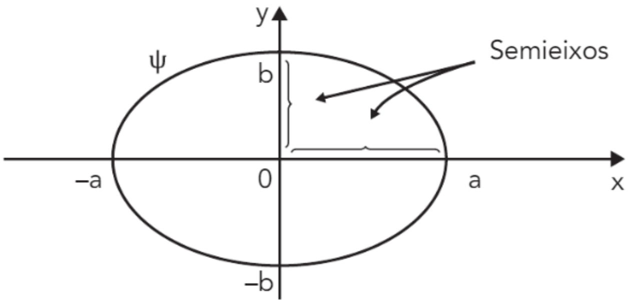
ELIPSE

Uma propriedade fundamental pode ser utilizada para caracterizar uma elipse: qualquer ponto da elipse é tal que a soma das distâncias até esses dois pontos fixados, que são os focos, é constante, como mostra a figura a seguir:



$d(P_1, F_1) + d(P_1, F_2) = \text{constante}$

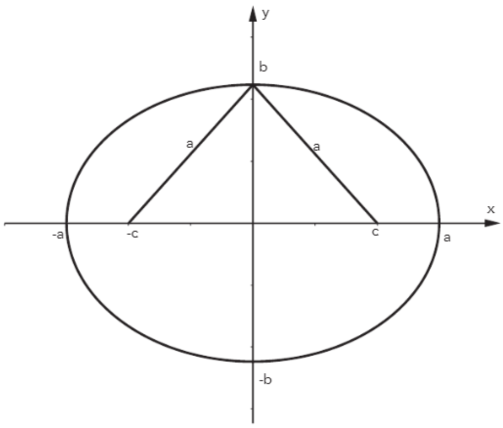
A elipse apresenta dois eixos de simetria: o semieixo maior costuma ser representado por a, e o menor por b. Assim, os dois eixos são 2a e 2b.



Desta forma, podemos dizer que uma elipse é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, cuja equação será representada da seguinte maneira:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Em uma elipse com centro na origem e semieixo maior a no eixo OX, os pontos (0; b) e (0; –b) distam do centro menos do que a. Os pontos do eixo OX que estão a uma distância a de (0; b) e (0; –b) têm coordenadas (c; 0) e (–c; 0), são particularmente importantes, sendo chamados focos da elipse. O valor c é chamado de distância focal da elipse. Por construção, a soma das distâncias dos pontos (0; b) e (0; –b) até os focos é igual a 2a. É possível mostrar que, para todo ponto P (x; y) do plano, se $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$, então a soma das distâncias de P até os focos (c; 0) e (–c; 0) é igual a 2a. A razão $\frac{c}{a}$ é chamada excentricidade da elipse, sendo representada pela letra e.



ATIVIDADE 2

De acordo com os fundamentos teóricos apresentados:

a) Mostre que, entre a, b e c, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$

R: Observando o triangulo retângulo formado na figura de hipotenusa a e catetos b e c, concluímos usando o teorema de Pitágoras que diz: o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

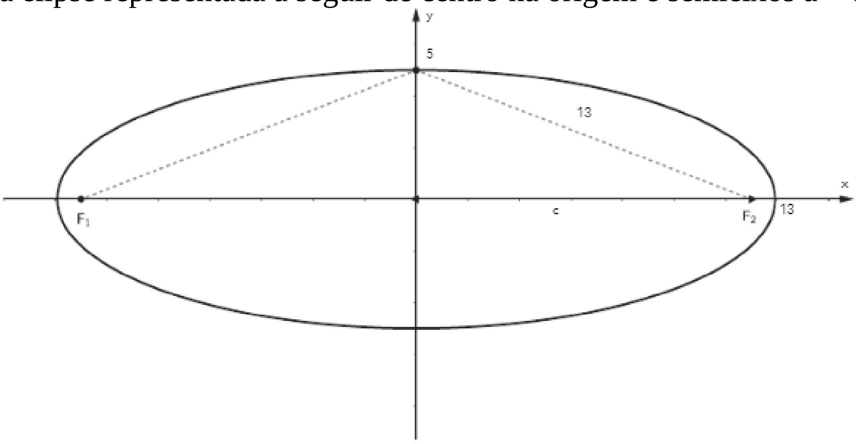
$$a^2 = b^2 + c^2$$

b) Mostre que, fixado o valor de a, quanto menor for o valor de b, mais a excentricidade se aproxima de 1 e a elipse se aproxima de um segmento de reta; e quanto mais próximo de a for o valor de b, mais a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência.

R: Como $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ notamos que, sendo fixado o valor de **a**, quanto maior for o valor de **b**, menor será **c**, e portanto, menor a excentricidade, (e) mais a elipse se aproxima de uma circunferência; quanto menor o valor de **b**, mais próximo de **a**, é o valor de **c**, e portanto, mais é a excentricidade, que se aproxima do valor 1

ATIVIDADE 3

Considere a elipse representada a seguir de centro na origem e semieixos a = 13 e b = 5.



Determine.

a) A equação da elipse;

De acordo com os dados da atividade, temos que: a = 13 e b = 5, temos que:

Então, a equação da elipse será dada por:

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

b) A excentricidade da elipse;

A excentricidade da elipse é dada por: $e = \frac{c}{a}$

Sabemos que: $a^2 = b^2 + c^2$ então, $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Então:

$$c = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

Desta forma, a excentricidade da elipse será:

$$e = \frac{12}{13} \cong 0{,}92$$

c) Os focos da elipse;

Os focos da elipse são os pontos de coordenadas (c; 0) e (−c; 0), ou seja, são os pontos (12; 0) e (−12; 0)

d) O valor de k para que o ponto P (5; k), do primeiro quadrante, pertença a elipse;

Para que o ponto (5, k) pertença à elipse, devemos ter:

$$\frac{5^2}{13^2} + \frac{k^2}{5^2} = 1$$

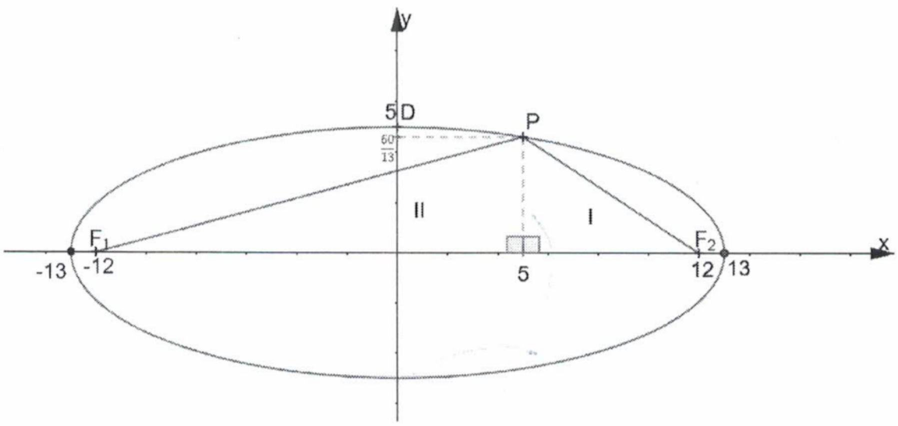
$$\frac{625 + 169k^2}{4225} = \frac{4225}{4225}$$

$$625 + 169k^2 = 4225 \Rightarrow 169k^2 = 4225 - 625 \Rightarrow 169\,k^2 = 3600 \Rightarrow k^2 = \frac{3600}{169} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{3600}{169}} \Rightarrow k = \pm\frac{60}{13}$$

Sendo P do primeiro quadrante, segue que $k = \frac{60}{13}$

e) A soma das distâncias de P aos focos da elipse.

Seja a figura que representa a elipse a seguir:



Da figura temos que os triângulos I e II são retângulos, e portanto:

$$d_{\overline{PF_1}} = \sqrt{7^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \sqrt{49 + 21{,}30} = \sqrt{70{,}30} \cong 8{,}38$$

$$d_{\overline{PF_2}} = \sqrt{17^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \sqrt{289 + 21{,}30} = \sqrt{310{,}30} \cong 17{,}62$$

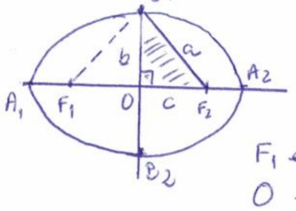
*Então, a soma das distâncias de **P** aos focos da elipse, será:*

$$D = d_{\overline{PF_1}} + d_{\overline{PF_2}} = 8{,}38 + 17{,}62 \cong 26$$

Nota-se que tal resultado é numericamente equivalente a $2 \cdot a = 26$.

Cônicas

Elipse: Formula da Equação



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Elementos Principais

F_1 e F_2 → Focos	$2c$ → distância focal
O → centro	$2a$ → medida do eixo maior
A_1A_2 → eixo maior	$2b$ → medida do eixo menor
B_1B_2 → eixo menor	$e = \frac{c}{a}$ → excentricidade

Teorema Pitágoras: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ ou $c^2 = a^2 - b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

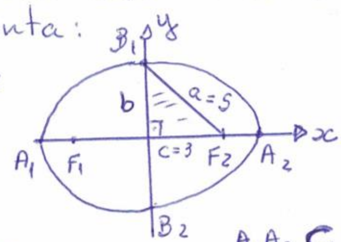
Exemplo: ① Uma elipse com eixo maior 10 e distância focal 6 apresenta:

$\left.\begin{matrix} a = 5 \\ c = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 25 - 9$

$b = \sqrt{16}$

$b = 4$



se a posição da eclipse é a indicada na figura, isto é:

$A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$

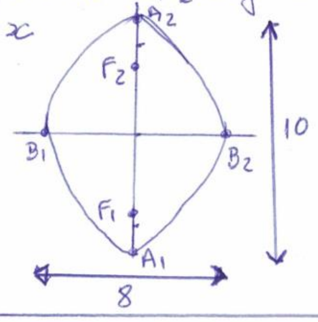
está Contido

então a equação é:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$\subset$ - está Contido

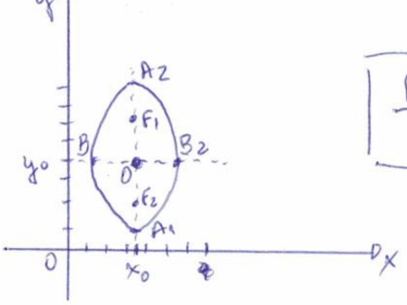
② Uma eclipse com eixo maior 10 e eixo menor 8, na posição indicada na figura; isto é: $A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$



tem equação

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

③ Uma eclipse tem centro no ponto $O(7,8)$, semi eixo maior $a = 5$ e semi-eixo menor $b = 4$ apresenta equação:



$\boxed{\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-8)^2}{16} = 1}$ se $A_1A_2 \parallel x$

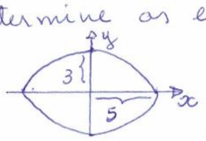
$\boxed{\frac{(x-7)^2}{16} + \frac{(y-8)^2}{25} = 1}$ se $A_1A_2 \parallel y$

$\parallel$ paralelo

Exercícios

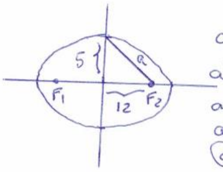
① Determine as equações das elipses seguintes:

a)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

b)



$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 12^2 + 5^2$

$a^2 = 144 + 25$

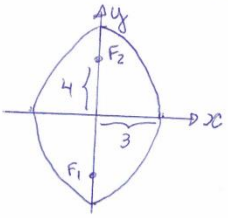
$a = \sqrt{169}$

$a = 13$

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

c)



$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 4^2 + 3^2$

$a^2 = 25$

$a = \sqrt{25}$

$\boxed{a = 5}$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1}$$

② Determine as coordenadas dos focos de cada elipse acima

a) $a^2 = b^2 + c^2$ $\quad c^2 = 25 - 9$ $\quad$ Focos: $F_1(-4,0)$ e $F_2(4,0)$

$5^2 = 3^2 + c^2$ $\quad c = \sqrt{16}$

$c = 4$

b) $c = 12$ $\quad$ Focos: $F_1(-12,0)$ e $F_2(12,0)$ eixo x

c) $c = 4$ $\quad$ Focos: $F_1(0,-4)$ e $F_2(0,4)$ está no eixo y

③ Excentricidade

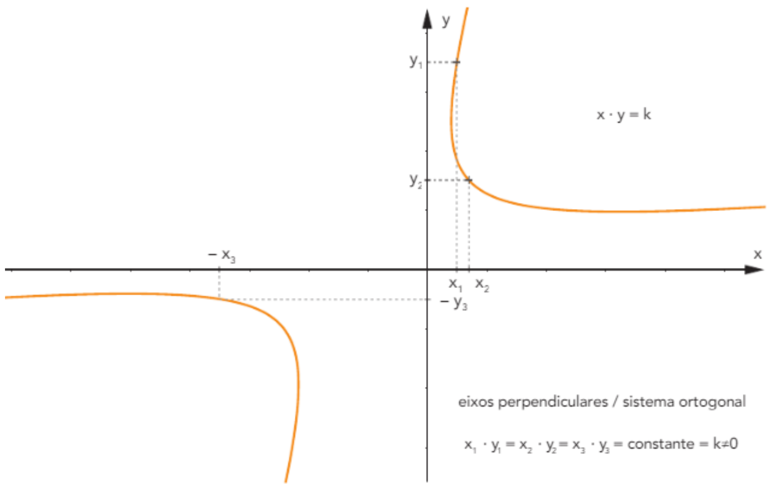
a) $e = \frac{c}{a}$ $\quad e = \frac{4}{5}$ $\quad$ 40 | 5 → 0 0,8 $\quad e = 0{,}8$

b) $e = \frac{c}{a}$ $\quad e = \frac{12}{13}$ $\quad$ 120 | 13; −117 → 0,92; 30; −26; 4 $\quad e = 0{,}92$

c) $e = \frac{c}{a}$ $\quad e = \frac{4}{5}$ $\quad e = 0{,}8$

HIPÉRBOLE

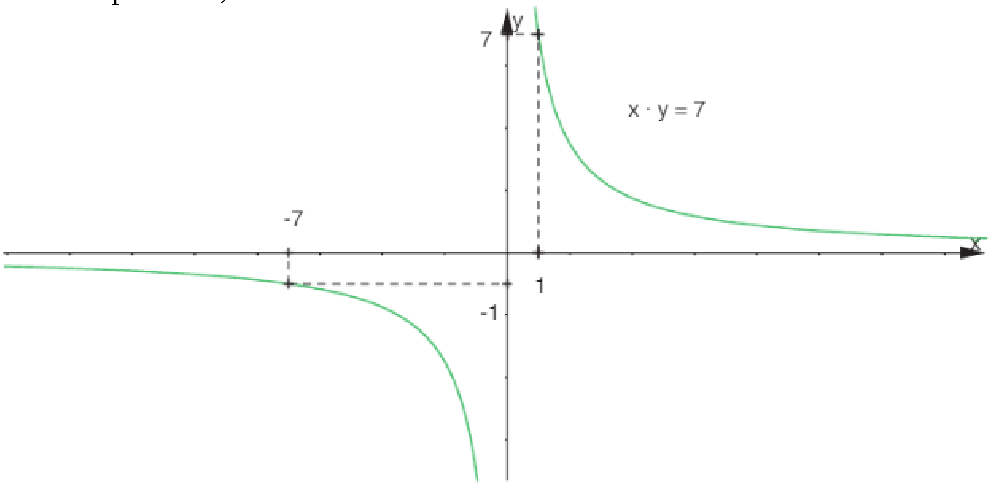
Quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas que são inversamente proporcionais, isto é, cujo produto x · y é constante e não nulo, a curva obtida é uma hipérbole.

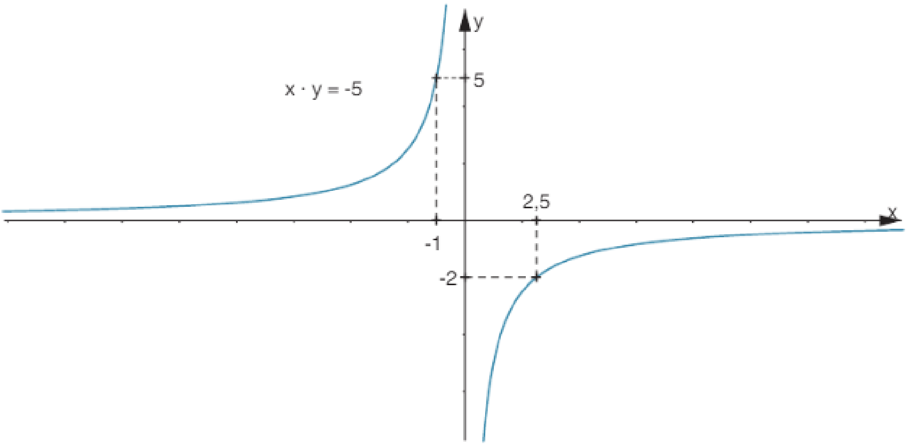


A hipérbole é obtida quando selecionamos um cone circular reto junto ao plano que forma com o plano da base, um ângulo maior do que aquele formado por uma geratriz do cone com a base.

Para escrever a equação da hipérbole, podemos partir da representação de grandezas inversamente proporcionais. No caso de um sistema XOY, em que os eixos cartesianos são ortogonais, a hipérbole é chamada equilátera e os dois ramos da curva se aproximam indefinidamente dos eixos coordenados são chamados, nesse caso, de assíntotas da hipérbole.

Por exemplo, as curvas formadas pelos pontos cujas coordenadas satisfazem as relações a seguir são hipérboles, tendo como assíntotas os eixos coordenados:





ATIVIDADE 1

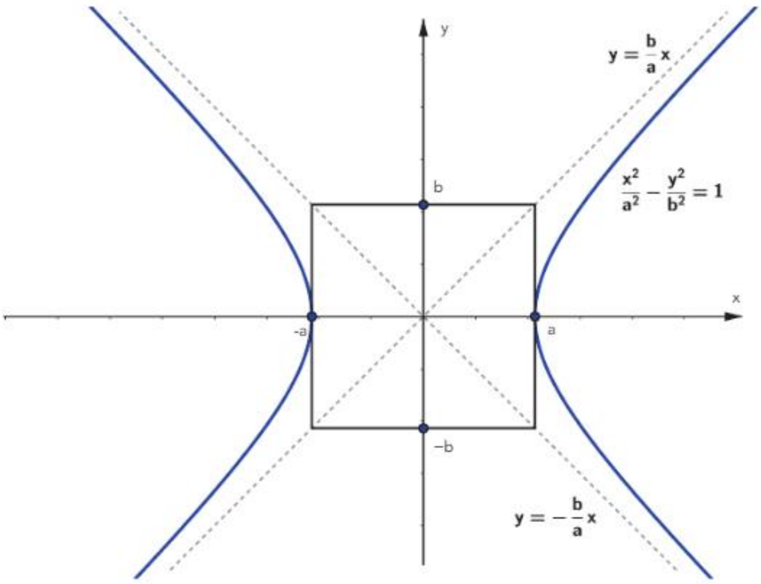
A equação $4x^2 - 9y^2 = 36$ pode ser considerada uma hipérbole. Fatore o primeiro membro e obtenha X e Y tal que X · Y = 36. Em seguida, determine as assíntotas e faça uma representação gráfica da hipérbole, obtendo (2x – 3y) (2x + 3y) = 36, ou seja, X · Y = 36.

$4x^2 - 9\,y^2 = 36$

$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$ $\qquad$ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \; ou \; \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

ATIVIDADE 2

A equação de uma hipérbole representada no plano cartesiano, com centro na origem, é do tipo $x^2 - y^2 = 1$ a^2 b^2, em que a é a soma do vértice da hipérbole, nas condições representadas na figura seguinte:



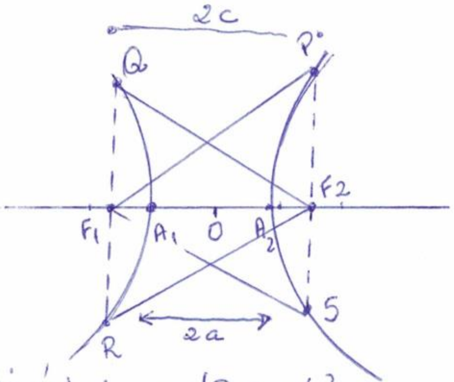
a) Sabendo isso, determine a equação da hipérbole que passa pelo ponto (3; 0) e tem como assíntotas as retas $y = \frac{4}{3}x \ e \ y = -\frac{4}{3}x$.

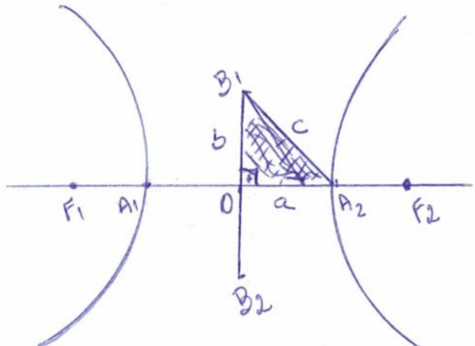
$a)\ y = \frac{b}{a}x \ \rightarrow temos: \begin{cases} b = 4 \\ a = 3 \end{cases}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Hipérbole

Definição: Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um Plano α(alfa), seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos de α(alfa) cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$)





hipérbole = $\{P \in \alpha\}$

$\{PF_1 - PF_2\} = 2a\}$

$QF_2 - QF_1 = 2a$
$RF_2 - RF_1 = 2a$
$SF_1 - SF_2 = 2a$

$A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$
$A_2F_1 - A_2F_2 = 2a$

Teorema Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

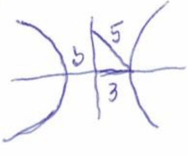
Elementos Principais:

F_1 e F_2 → focos
O → centro
A_1A_2 → eixo real ou transverso
B_1B_2 → eixo imaginário
$2c$ → distância focal
$2a$ → medida do eixo real
$2b$ → medida do eixo imaginário
$\frac{c}{a}$ → excentricidade

Equação Reduzida

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Exemplo: ① Uma hipérbole com eixo real 6 e distância focal 10 apresenta.

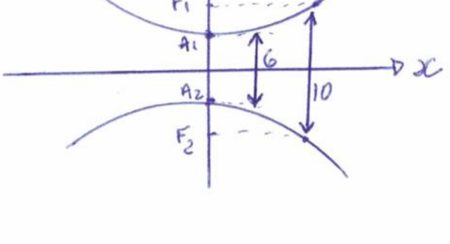


$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9$

$b = \sqrt{16}$ $\boxed{b = 4}$

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$$

② Uma hipérbole com eixo real 6 e distância focal 10, na posição Indicada na figura, isto é, $A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$, tem equação:



então temos

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$

$b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = 25 - 9$
$b = \sqrt{16}$
$b = 4$

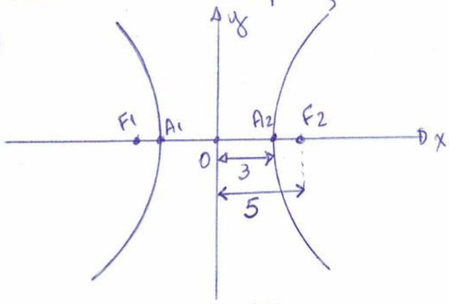
$$\boxed{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1}$$

Exercícios

indicados sobre os eixos coordenados.

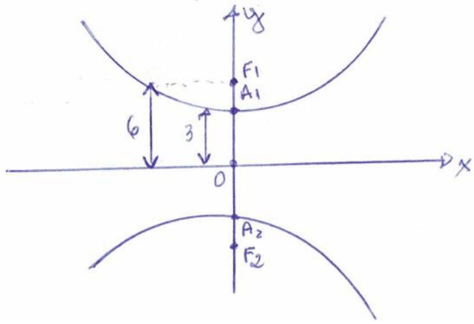
① Determine as equações das hipérboles:

a)



$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$b^2 = 5^2 - 3^2$$
$$b^2 = 25 - 9 \qquad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$
$$b = \sqrt{16}$$
$$b = 4 \qquad \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$$

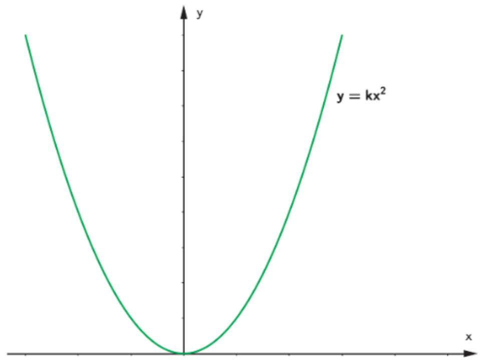
b)



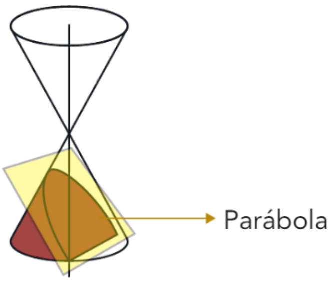
$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
$$b^2 = 6^2 - 3^2$$
$$b^2 = 36 - 9 \qquad \frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{27} = 1$$
$$b^2 = 27 \qquad \boxed{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1}$$

PARÁBOLA

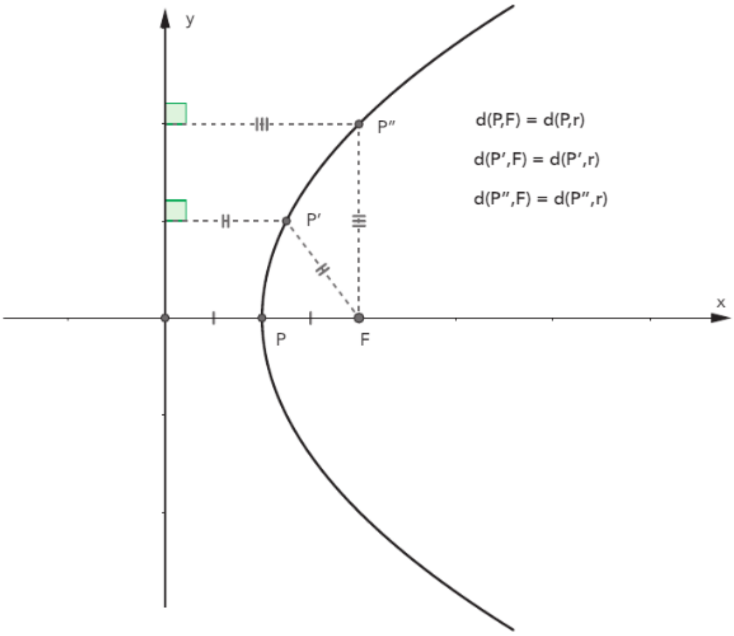
Em geral, quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas tais que y é diretamente proporcional ao quadrado de x ($y=kx^2$, k constante e $k\neq0$), a curva correspondente no plano cartesiano é uma parábola.



Quando seccionamos um cone circular reto por um plano que forma com a base um ângulo exatamente igual ao que uma geratriz do cone forma com a base, obtemos também uma parábola.



A parábola tem certas propriedades características que podem ser utilizadas para defini-la. Uma delas é a existência de um ponto F, fixado, e de uma reta r, fixada, tais que a distância de cada ponto P da parábola até F é igual à distância de P até r. F é o foco da parábola e r é sua diretriz.



ATIVIDADE 1

Determine o foco e a diretriz das parábolas que podem ser representadas no plano cartesiano por equações do tipo:

Resolução:

Consideremos a parábola $y = kx^2$.

Se o foco for o ponto F(0, c), então a diretriz r será a reta y = –c, pois o ponto (0, 0) pertence à parábola distância dele ao foco deve ser a mesma que a distância dele à diretriz.

Sendo P(x, y) um ponto qualquer da parábola, a distância de P ao foco deve ser igual à distância de P foco deve ser igual à distância até a diretriz, ou seja:

$d(P,F) = \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = y + c = d(P, r).$

Logo, $x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$

Substituindo y por kx^2 e efetuando os cálculos, obtemos;

$x^2 + \left(kx^2 - c\right)^2 = (kx + c)^2$

$x^2 + k^2x^4 + c^2 - 2kx^2c = k^2x^4 + c^2 + 2kcx^2$

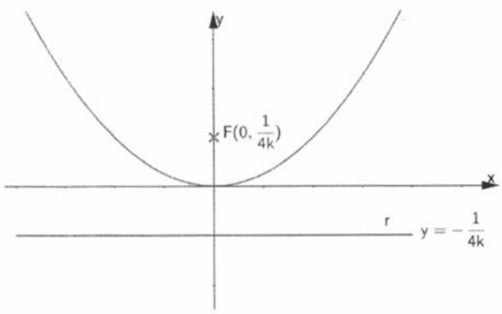
$x^2(1 - 4kc) = 0$

Sendo assim, concluímos que, para a igualdade valer para todo x, devemos ter:

$$c = \frac{1}{4k}$$

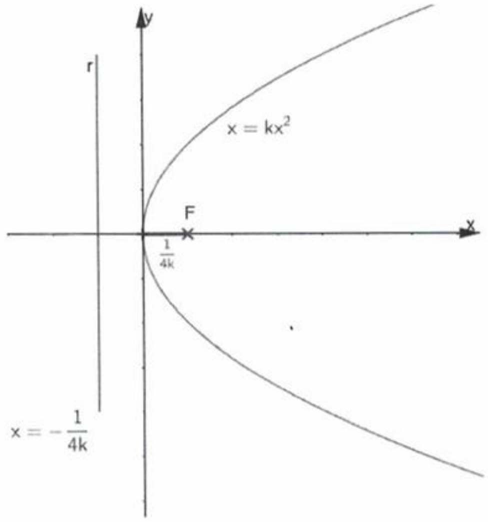
Logo, o foco é o ponto $\left(0, \frac{1}{4k}\right)$, e a diretriz é a reta $y = -\frac{1}{4k}$.

a) $y = kx^2$ Ex: $y = 2x^2$



b) $y = ky^2$ Ex: $y = 2y^2$

Da mesma maneira, se a parábola fosse $x = ky^2$, teríamos: foco $\left(\frac{1}{4k}; 0\right)$ e diretriz $x = -\frac{1}{4k}$



c) $y = kx^2+h$ Ex: $y = 2x^2 + 5$

Para uma parábola de equação $y = kx^2 + h$, o foco e a diretriz seriam transladados na direção do e

Ou de um valor h, ou seja teríamos:

$F\left(0; h + \frac{1}{4k}\right)$ e r: $y = h - \frac{1}{4k}$