Matematyka

Zadanie 1.

Poprawna odpowiedź
C

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć objętość prostopadłościanu oraz zamienić jednostki długości i objętości.

Sposób 1.

- W pierwszej kolejności wyraź w decymetrach wszystkie wymiary potrzebne do obliczeń:
  1 m = 10 dm
  1,5 cm = 0,15 dm
- Zauważ, że zgromadzona w zbiorniku woda „przyjmuje" kształt prostopadłościanu o podstawie takiej, jaką ma dno zbiornika, czyli kwadratu o boku długości 10 dm i wysokości 0,15 dm.
- Oblicz objętość takiego prostopadłościanu, korzystając ze wzoru:
  $V = P_p \cdot h$, gdzie P_p – pole podstawy prostopadłościanu, a h – wysokość prostopadłościanu

  $V = 10 \cdot 10 \cdot 0{,}15 = 15\ (\text{dm}^3)$
  $V = 15\ \text{dm}^3 = 15\ \text{l}$

Sposób 2.

- W pierwszej kolejności wyraź wszystkie potrzebne do obliczeń wymiary w jednakowych jednostkach długości, np. w centymetrach
  1 m = 100 cm
- Zauważ, że zgromadzona w zbiorniku woda „przyjmuje" kształt prostopadłościanu o podstawie takiej, jaką ma dno zbiornika, czyli kwadratu o boku długości 100 cm i wysokości 1,5 cm.
- Oblicz objętość prostopadłościanu, korzystając ze wzoru:
  $V = P_p \cdot h$, gdzie P_p – pole podstawy prostopadłościanu, a h – wysokość prostopadłościanu

  $V = 100^2 \cdot 1{,}5 = 15\ 000\ (\text{cm}^3)$

- Pamiętaj o wyrażeniu obliczonej objętości w litrach, korzystając z faktu, że 1 litr = 1 dm^3 oraz 1 dm = 10 cm
- $V = 15\ 000\ \text{cm}^3 = 15\ \text{dm}^3 = 15\ \text{l}$

Sposób 3.

- Pojemność zbiornika w kształcie sześcianu możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:
  $V_{zb} = a^3$, gdzie a – długość krawędzi sześcianu
  $V_{zb} = 1^3 = 1\ (\text{m}^3)$
  $V_{zb} = 1\ \text{m}^3 = 1\ 000\ \text{dm}^3$

- Zauważ, że wysokość, do jakiej sięga woda w zbiorniku stanowi $\frac{1,5}{100}$ wysokości zbiornika. Woda w zbiorniku ma zatem objętość:

  $$\frac{1,5}{100} \cdot 1000 = 15 \ (\text{dm}^3)$$

  $$V_w = 15 \text{ dm}^3 = 15 \text{ l}$$

Zadanie 2.

Poprawna odpowiedź
B

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć pole powierzchni prostopadłościanu oraz opisać je za pomocą wyrażenia algebraicznego.

- W pierwszej kolejności należy policzyć, ile kwadratów jednostkowych tworzy powierzchnię zbudowanego prostopadłościanu:
  - na każdej z czterech ścian bocznych jest 12 kwadratów jednostkowych,
  - na każdej z dwóch podstaw jest 9 kwadratów jednostkowych,

  zatem łączna liczba kwadratów tworzących powierzchnię całkowitą zbudowanego prostopadłościanu wynosi:

  $$4 \cdot 12 + 2 \cdot 9 = 48 + 18 = 66$$

- Skorzystaj teraz z informacji, że x oznacza pole powierzchni całkowitej każdej z sześciennych kostek, z których zbudowano prostopadłościan. Każda z sześciu ścian sześcianu ma pole równe $\frac{1}{6}x$
- Pole powierzchni całkowitej zbudowanego prostopadłościanu jest zatem równe:

  $$66 \cdot \frac{1}{6}x = 11x$$

Zadanie 3.

Poprawna odpowiedź
FF

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć sumę długości wszystkich krawędzi graniastosłupa oraz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

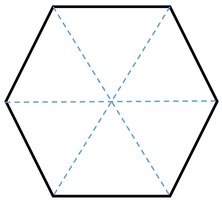
Pierwsze zdanie:
- Zauważ, że skoro każda ściana boczna jest kwadratem, to zarówno krawędzie boczne, jak i krawędzie obu podstaw mają jednakowe długości równe długości boku kwadratu o polu 9 cm^2.

- Oblicz długość boku kwadratu, korzystając ze wzoru na pole kwadratu:
  $a^2 = 9$, zatem $a = 3$ (cm)
- Następnie wyznacz liczbę krawędzi bryły – jest 6 krawędzi bocznych oraz po 6 krawędzi w każdej z dwóch podstaw. Łącznie jest 18 krawędzi.
- Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi graniastosłupa:
  $18 \cdot 3 = 54$ (cm)

Drugie zdanie:

Sposób 1.

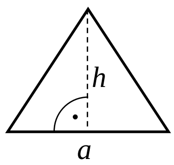
- Zauważ, że obie podstawy graniastosłupa są sześciokątami foremnymi.
- Dłuższe przekątne sześciokąta foremnego dzielą go na sześć trójkątów równobocznych, każdy o boku długości 3 cm.



- Oblicz wysokość jednego takiego trójkąta równobocznego, następnie oblicz pole podstawy, złożonej z sześciu trójkątów równobocznych. Skorzystaj ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego i ze wzoru na pole trójkąta:

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, gdzie a – długość boku trójkąta

$h = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\sqrt{3}$ (cm)



$$P_P = 6 \cdot \frac{3 \cdot 1{,}5\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \ (\text{cm}^2)$$

- Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa ze wzoru:
  $P_c = 2 \cdot P_p + P_b$, gdzie P_p – pole podstawy graniastosłupa, a P_b – pole powierzchni bocznej graniastosłupa

$$P_p = 2 \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot 9 = 54 + 27\sqrt{3} \ (\text{cm}^2)$$

Sposób 2.

- Zauważ, że obie podstawy graniastosłupa są sześciokątami foremnymi.
- Dłuższe przekątne sześciokąta foremnego dzielą go na sześć trójkątów równobocznych, każdy o boku długości 3 cm.
- Oblicz pole jednego takiego trójkąta równobocznego, skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta równobocznego o boku a.

$P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a – długość boku trójkąta

$$P_{\Delta} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$$

- Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa ze wzoru:
  $P_c = 2 \cdot 6 \cdot P_{\Delta} + P_b$, gdzie P_{Δ} – pole trójkąta równobocznego, P_b – pole powierzchni bocznej graniastosłupa

$$P_c = 2 \cdot 6 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 9 = 54 + 27\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

Sposób 3.

- Pole każdej ściany bocznej jest równe 9 cm^2, zatem pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe $6 \cdot 9\ \text{cm}^2 = 54\ \text{cm}^2$. Aby obliczyć pole powierzchni całkowitej graniastosłupa należy pole powierzchni bocznej powiększyć o sumę pól obu podstaw. Zatem pole powierzchni całkowitej jest większe od 54 cm^2.

Zadanie 4.

Poprawna odpowiedź
BC

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz porównać własności graniastosłupa i ostrosłupa o podanych podstawach.

- Zauważ, że ostrosłup pięciokątny w podstawie ma pięciokąt, a jego powierzchnię boczną tworzy 5 trójkątów o wspólnym wierzchołku, który jest wierzchołkiem tego ostrosłupa.
  Każdy ostrosłup ma następujące własności:
  – liczba jego krawędzi jest 2 razy większa od liczby boków wielokąta, który jest jego podstawą,
  – liczba jego wierzchołków jest o 1 większa od liczby wierzchołków wielokąta, który jest jego podstawą.

- Zauważ, że graniastosłup dziesięciokątny ma dwie podstawy, którymi są dziesięciokąty, a jego powierzchnię boczną tworzy 10 prostokątów.
  Każdy graniastosłup ma następujące własności:
  – liczba jego krawędzi jest 3 razy większa od liczby boków wielokąta, który jest jego podstawą,
  – liczba jego wierzchołków jest 2 razy większa od liczby wierzchołków wielokąta, który jest jego podstawą.

	Ostrosłup pięciokątny	Graniastosłup dziesięciokątny
Liczba krawędzi	$2 \cdot 5 = 10$	$3 \cdot 10 = 30$
Liczba wierzchołków	$5 + 1 = 6$	$2 \cdot 10 = 20$

Pierwsze zdanie:

- Oblicz iloraz liczby krawędzi ostrosłupa i liczby krawędzi graniastosłupa:
  $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

Drugie zdanie:

- Oblicz różnicę liczby wierzchołków graniastosłupa i liczby wierzchołków ostrosłupa:
  $20 - 6 = 14$

Zadanie 5.

Przykładowe rozwiązania

Sposób 1.

Powierzchnia podstawy wazonu:

$P = 12{,}5 \cdot 16 = 200$ (cm^2)

Objętość odlanej wody:

$V = 0{,}5$ l $= 0{,}5$ dm^3 $= 500$ cm^3
h – wysokość, o jaką obniżył się poziom wody w wazonie po jej odlaniu

$V = P \cdot h$
$h = 500 : 200 = 2{,}5$ (cm)

Odpowiedź: Poziom wody w wazonie obniżył się o 2,5 cm.

Sposób 2.

Objętość odlanej wody (0,5 l) jest równa objętości prostopadłościanu o wymiarach:
12,5 cm, 16 cm i x cm, gdzie x oznacza wysokość, o jaką obniżył się poziom wody w wazonie po jej odlaniu.

12,5 cm = 1,25 dm
16 cm = 1,6 dm
0,5 l = 0,5 dm^3

$0{,}5 = 1{,}25 \cdot 1{,}6 \cdot x$
$0{,}5 = 2x$
$x = 0{,}25$
0,25 dm = 2,5 cm

Odpowiedź: Poziom wody w wazonie obniżył się o 2,5 cm.

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć objętość prostopadłościanu oraz zamieniać jednostki długości i objętości w kontekście praktycznym.

Pamiętaj, że jest to zadanie otwarte. Na egzaminie we wskazanym miejscu umieść pełne rozwiązanie.

Zadanie 6.

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy przez a bok kwadratu, który jest ścianą boczną graniastosłupa, natomiast przez b pozostałe krawędzie tego graniastosłupa. Dno zbiornika ma wymiary $a \times b$. Woda w zbiorniku „przyjęła” kształt prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times 5$, zatem jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu:

$V = a \cdot b \cdot 5 = 120$, zatem

$a \cdot b = 24$

Każda krawędź graniastosłupa ma długość większą od 2 dm, zatem rozważamy następujące przypadki:

$a = 3$ dm, $b = 8$ dm
$a = 4$ dm, $b = 6$ dm
$a = 6$ dm, $b = 4$ dm
$a = 8$ dm, $b = 3$ dm

Wysokość zbiornika musi być taka sama, jak jeden z wymiarów dna tego zbiornika i jednocześnie równa lub większa od 5 dm, ponieważ woda sięga do wysokości 5 dm.
Zatem możliwe wymiary zbiornika to:

6 dm × 4 dm × 6 dm
8 dm × 3 dm × 8 dm

Odpowiedź: Zbiornik może mieć wymiary 6 dm × 4 dm × 6 dm lub 8 dm × 3 dm × 8 dm.

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz w opisanej sytuacji praktycznej zbudować prostopadłościan i na podstawie podanej objętości wyznaczyć jego wymiary spełniające warunki zadania.

Pamiętaj, że jest to zadanie otwarte. Na egzaminie we wskazanym miejscu umieść pełne rozwiązanie.

Zadanie 7.

Przykładowe rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia:
x – krótszy bok prostokąta
$x + 2$ – dłuższy bok prostokąta

Obwód prostokąta jest równy 28 cm, zatem:

$$2(x + 2) + 2x = 28$$
$$2x + 4 + 2x = 28$$
$$4x = 24$$
$$x = 6 \text{ (cm)}$$
$$x + 2 = 8 \text{ (cm)}$$

Wysokość H ostrosłupa jest równa przekątnej podstawy. Przekątną podstawy obliczymy z twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = 8^2 + 6^2$$
$$H^2 = 64 + 36$$
$$H^2 = 100$$
$$H = 10 \text{ (cm)}$$

Objętość ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

zatem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 10 = 16 \cdot 10 = 160 \ \ (\text{cm}^3)$$

Odpowiedź: Ostrosłup ma objętość równą 160 cm^3.

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć objętość ostrosłupa.

Pamiętaj, że jest to zadanie otwarte. Na egzaminie we wskazanym miejscu umieść pełne rozwiązanie.

Zadanie 8.

Przykładowe rozwiązania

Sposób 1.

Objętość jednej części odpadu jest równa:

$$V = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 75 = 450 \ \ (\text{cm}^3)$$

Objętość odpadów po wyprodukowaniu jednej nogi wynosi:

$450 \cdot 4 = 1800$ (cm^3)

Objętość odpadów po jednej godzinie pracy wynosi:

$1800 \cdot 15 = 27000$ (cm^3)

Masa odpadów wytwarzanych w ciągu jednej godziny pracy wynosi:

$27000 \cdot 0{,}5 = 13500$ (g)
13500 g = 13,5 kg

Odpowiedź: Przy produkcji nóg do stołów w ciągu jednej godziny wytwarzanych jest 13,5 kg odpadów.

Sposób 2.

Objętość jednej części odpadu jest równa:

$$V = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 75 = 450 \ (\text{cm}^3)$$

Masa jednej części odpadu wynosi:

$450 \cdot 0{,}5 = 225$ (g)

Masa odpadów wytwarzanych w ciągu jednej godziny jest równa:

$225 \cdot 4 \cdot 15 = 13500$ (g)
13500 g = 13,5 kg

Odpowiedź: Przy produkcji nóg do stołów w ciągu jednej godziny wytwarzanych jest 13,5 kg odpadów.

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć objętość graniastosłupa oraz do przedstawionej sytuacji praktycznej skorzystać z proporcjonalności w celu obliczenia masy bryły.

Pamiętaj, że jest to zadanie otwarte. Na egzaminie we wskazanym miejscu umieść pełne rozwiązanie.