Matematyka

Zadanie 1.

Poprawna odpowiedź
E

Wyjaśnienia
Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć drugą potęgę liczby wymiernej oraz czy potrafisz porównać liczby.

- W pierwszej kolejności musisz zamienić liczbę mieszaną $\left(-1\frac{2}{3}\right)$ na ułamek niewłaściwy $\left(-\frac{5}{3}\right)$, aby móc zastosować własność potęgi ilorazu.
- Otrzymany ułamek $\left(-\frac{5}{3}\right)$ podnieś do potęgi drugiej, stosując własność potęgowania ilorazu, czyli:

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}$$

- Otrzymany wynik zapisz w postaci mieszanej, czyli

$$\frac{25}{9}=2\frac{7}{9}$$

- Porównaj otrzymany wynik $2\frac{7}{9}$ z podanymi liczbami i wybierz spośród nich najmniejszą liczbę całkowitą, która jest większa od powyższej. Jest to liczba 3.

Zadanie 2.

Poprawna odpowiedź
PP

Wyjaśnienia
Zadanie sprawdza, czy potrafisz porównać wartości wyrażeń, w których występują potęgi o tych samych podstawach, wykorzystując do tego własność potęgowania iloczynu.

Pierwsze zdanie:
Wartość wyrażenia $12\cdot 7^{13}$ jest większa od wartości wyrażenia $13\cdot 7^{12}$.
- Aby stwierdzić, czy to zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe należy porównać ze sobą wartości wyrażeń:

$$12\cdot 7^{13} \quad \text{i} \quad 13\cdot 7^{12}$$

- W tym celu skorzystamy z zapisu potęgowego liczby po lewej stronie:

$$12\cdot 7\cdot 7^{12} \quad \text{i} \quad 13\cdot 7^{12}$$

Zauważ, że każde z wyrażeń można zapić w postaci iloczynu liczby całkowitej oraz potęgi liczby 7^{12}:

$$84 \cdot 7^{12} \quad \text{i} \quad 13 \cdot 7^{12}$$

- W obu wyrażeniach wystarczy zatem porównać liczby, przez które została pomnożona potęga 7^{12}:

$$84 > 13$$

- Liczba po lewej stronie jest większa, więc zdanie jest prawdziwe.

Drugie zdanie:
Liczba 3^{50} jest większa od liczby 6^{25}.

- Aby stwierdzić, czy to zdanie jest prawdziwe czy fałszywe, należy porównać ze sobą liczby:

$$3^{50} \quad \text{i} \quad 6^{25}$$

- Obie liczby zapiszemy tak, aby wystąpiły potęgi o tych samych podstawach. W tym celu skorzystamy z własności iloczynu potęg:

$$3^{50} = 3^{25+25} = 3^{25} \cdot 3^{25} \quad \text{i} \quad (2 \cdot 3)^{25}$$
$$3^{25} \cdot 3^{25} \quad \text{i} \quad 2^{25} \cdot 3^{25}$$

- Zauważ, że w obu liczbach występuje ten sam czynnik 3^{25}. W związku z tym wystarczy porównać liczby mnożące ten czynnik:

$$3^{25} > 2^{25}$$

- Liczba po lewej stronie jest większa, więc zdanie jest prawdziwe.

Zadanie 3.

Poprawna odpowiedź
BD

Wyjaśnienia
To zadanie sprawdza, czy potrafisz mnożyć i dzielić wyrażenia arytmetyczne, w których występują pierwiastki.

Pierwsze zdanie:
- Aby stwierdzić, która odpowiedź jest prawidłowa, oblicz iloczyn liczb a i b:

$$ab = 9\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 27\sqrt{2^2} = 27 \cdot 2 = 54$$

- Aby stwierdzić, która odpowiedź jest prawidłowa, oblicz iloraz liczb a i b:

$$\frac{a}{b} = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 3$$

Zadanie 4.

Przykładowe rozwiązanie

$$\frac{36^6}{27^5 \cdot 8^5} = \frac{\left(6^2\right)^6}{\left(3^3\right)^5 \cdot \left(2^3\right)^5} = \frac{6^{12}}{3^{15} \cdot 2^{15}} = \frac{6^{12}}{(3 \cdot 2)^{15}} = \frac{6^{12}}{6^{15}} = \frac{6^{12}}{6^{12} \cdot 6^3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

Wyjaśnienia
To zadanie sprawdza, czy potrafisz wykonywać obliczenia z wykorzystaniem własności działań na potęgach oraz mnożenie i dzielenie potęg, czyli umiejętności, które ćwiczyłeś, rozwiązując zadania 1.–2., a także podnoszenie potęgi do potęgi.

Zadanie 5.

Przykładowe rozwiązanie

Obliczymy wartość wyrażenia. Na początku skorzystamy z własności, że iloczyn pierwiastków dwóch liczb jest równy pierwiastkowi z iloczynu tych liczb:

$$\frac{21\sqrt{15}}{\sqrt{12} + 5\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3 \cdot 5}}{\sqrt{4 \cdot 3} + 5\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}$$

Otrzymane wyrażenie przekształcamy dalej: w tym celu dodamy te same pierwiastki w mianowniku, następnie podzielimy licznik i mianownik przez ten sam pierwiastek:

$$\frac{21\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{7\sqrt{3}} = \frac{21 \cdot \sqrt{5}}{7} = 3\sqrt{5}$$

Porównamy otrzymaną wartość wyrażenia z liczbą 7:

$$3\sqrt{5} \quad \text{i} \quad 7$$

W tym celu obie dodatnie liczby podniesiemy do kwadratu:

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 45 \quad \text{i} \quad 7^2 = 49$$

Ponieważ $45 < 49$, więc $3\sqrt{5} < 7$.

Wyjaśnienia
To zadanie sprawdza, czy potrafisz wykonywać złożone obliczenia z wykorzystaniem własności działań na pierwiastkach oraz czy potrafisz porównać dodatnie wyrażenia zawierające pierwiastki.

Zadanie 6.

Przykładowe rozwiązanie

Dane zapiszemy w takiej postaci, aby ułatwić obliczenia:

$S = 0{,}001\ \mathrm{m}^2 = \dfrac{1}{10^3}\ \mathrm{m}^2$

$y = 0{,}000001\ \mathrm{m} = \dfrac{1}{10^6}\ \mathrm{m}$

$d = 19\,300\ \mathrm{kg/m^3} = 1{,}93 \cdot 10^4\ \mathrm{kg/m^3}$

Masę złota obliczymy, korzystając z podanego wzoru na gęstość substancji oraz ze wzoru na objętość:

$$m = dV = dyS = 1{,}93 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{1}{10^6}\ \mathrm{m} \cdot \frac{1}{10^3}\ \mathrm{m}^2 = 1{,}93 \cdot \frac{10^4}{10^9}\ \mathrm{kg} = 1{,}93 \cdot 10^{4-9}\ \mathrm{kg}$$

$$m = 1{,}93 \cdot 10^{4-9}\ \mathrm{kg} = 1{,}93 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg}$$

Wyjaśnienia
Zadanie sprawdza, czy potrafisz odczytać i zapisać liczby w notacji wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdy $1 \leq a < 10$, k jest liczbą całkowitą.

Zwróć uwagę na to, że gdy zapiszesz duże lub małe liczby w notacji wykładniczej, i skorzystasz z praw działań na potęgach, to obliczenia się upraszczają.