ŠESTEROKUT
HEXAGONE

2021

OPIS - DESCRIPTION

Opis

Ovaj ogledni zadatak služi kako bismo vam predstavili drugačiji format ovogodišnjeg natjecanja i kako će ono izgledati. Također, želimo vam s njime demonstrirati u kojem smjeru bi vaša rješenja trebala ići. Rješenje ovdje naravno ne morate slijediti do slova, niti to očekujemo, no želimo vam pokazati što očekujemo. Točnije, želimo vidjeti fizikalni pristup, detaljan opis i vaše razmišljanje i intuiciju. Uz to, želimo da se u ovom zadatku i poigrate s jednom jako zanimljivom pojavom.

Description

The goal of this example is to show you the format of our competition and how it will look. In addition, we wish to show you the direction in which your solution should go. The solution presented here doesn't have to be followed precisely, it's just a guideline and contains the author's personal style. But, what we wish to see, and what the solution here expresses, is a physical approach, a description of your way of thinking and the intuition behind the problem. With this example, we also want you to play around with a very interesting effect that occurs in nature.

FRANÇAIS

Problème

Les oiseaux volent et les poissons nagent. Mais certains oiseaux volent en nuées. Vous avez peut-être eu la chance d'apercevoir des murmurations, ces rassemblements de nombreux oiseaux effectuant de formidables manœuvres, comme celle de l'image ci-dessous. Vous pouvez observer ce phénomène dans cette vidéo.

Mais les oiseaux ne sont pas les seuls à se comporter ainsi. Les poissons, les insectes et même les bactéries peuvent créer ces formes de comportements collectifs. C'est le sujet de ce problème.

(a) Une murmuration

(b) Un banc de poissons

Vous allez peut-être vous demander quel est le rapport avec la physique ? Une des premières modélisations de ce mouvement a été proposé par des physiciens et demeure encore aujourd'hui un sujet de recherche actif en physique statistique, biophysique et en matière active. Il existe aussi certains liens avec le magnétisme.

1. question [2 points] En utilisant vos propres termes, décrivez pourquoi, à votre avis, ce type de comportement se produit. Pensez-vous que la décision d'un seul individu de la nuée puisse changer complètement le mouvement de l'ensemble des oiseaux ?

2. question [2 points] À votre avis, quels sont les paramètres physiques qui permettent de décrire le vol de chaque oiseau et sa relation avec la nuée ?

Voyons maintenant un modèle simplifié permettant de décrire le mouvement des oiseaux. Nous allons nous intéresser au cas à deux dimensions, contenu dans un carré de taille fini avec des conditions périodiques au limites (c.-à-d. si un oiseau dépasse le bord gauche, il ressort du bord droit). Chaque oiseau est repéré par les coordonnées de sa position x et y, sa vitesse v que l'on peut décomposer en ces composantes v_x et v_y, et son orientation repérée par l'angle θ repéré par rapport à l'axe des abscisses. Notre modèle est le suivant : connaissant la position et l'orientation au temps t, nous cherchons les valeurs de ces variables à l'instant d'après $t + \Delta t$ pour un oiseau en particulier

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x \Delta t \tag{11}$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + v_y \Delta t \tag{12}$$

$$\theta(t+\Delta t) = \mathrm{Avg}_{r<R}(\theta_r^{voisins}) + \eta\zeta(t) \tag{13}$$

où $\mathrm{Avg}_{r<R}$ est l'orientation moyenne des oiseaux voisins de l'individu choisi, en ne considérant que les voisins contenus dans un cercle de rayon R. $\zeta(t)$ est un nombre aléatoire dont la valeur change à chaque instant pour rendre compte d'un bruit. η est un nombre positif qui représente l'amplitude de ce bruit. L'amplitude du bruit détermine à quel point les oiseaux s'alignent entre eux. Par exemple, s'ils ne peuvent se voir parce que c'est la nuit, cette amplitude est très élevée.

3. question [2 points] Dans un premier temps, le bruit est négligé de telle sorte que $\eta = 0$. Pouvez-vous dire à quoi le mouvement des oiseaux va ressembler ? Pourquoi ? (Aucune résolution d'équation n'est demandée, donnez simplement une réponse descriptive et intuitive.)

4. question [2 points] Supposons maintenant que η est très grand. À quoi ressemble le mouvement des oiseaux dans ce cas ? Pourquoi ? (De la même façon que précédemment, une explication basée sur le raisonnement et l'intuition est demandée.)

Passons maintenant à la simulation du mouvement des oiseaux. Une simulation avec des paramètres ajustables est disponibles ici. Vous pouvez modifier l'amplitude du bruit η et le nombre d'oiseaux N et observer deux régimes : l'un correspondant à un état ordonné ou des nuées sont visibles, l'autre associé à un état désordonné où aucun comportement collectif n'est visible. Nous allons nous intéresser à la transition d'un état à l'autre.

5. question [3 points] Ouvrez la simulation et pour un nombre fixé d'oiseau $N = 1000$, modifier l'amplitude du bruit. Que remarquez-vous ? Cela confirme-t-il vos réponses aux questions précédentes ? (**Remarque** : si vous changez soudainement l'amplitude du bruit de 0 à 20, ou effectuez un changement important de l'amplitude, il faudra du temps pour que le système s'adapte au nouvel état : c'est que l'on appelle le temps de relaxation. Attendez simplement 10 à 20 secondes après chaque changement).

Appelons $\vec{s_i}$ le vecteur associé au i-ième oiseau. La direction de ce vecteur est la même que celle de la vitesse de l'oiseau (c.-à-d. la direction de son mouvement) mais la norme de ce vecteur vaut toujours 1. Nous introduisons maintenant le paramètre $\vec{\varphi}$ appelé paramètre d'ordre vectoriel :

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{N}\sum_i^N \vec{s_i} \tag{14}$$

$$\varphi = |\vec{\varphi}| \tag{15}$$

La première ligne correspond simplement à la moyenne des vecteurs $\vec{s_i}$. La deuxième introduit le paramètre d'ordre scalaire φ qui correspond à la norme du vecteur définit avant.

6. question [3 points] Que peut-on dire du paramètre d'ordre scalaire dans l'état ordonné puis dans l'état désordonné ? Quelle est son interprétation physique ?

7. question [4 points] Comment le paramètre φ va-t-il évoluer si on passe d'une grande valeur de η à 0 ? Quelle est sa valeur quand $\eta = 0$? (ici, une démonstration mathématique et une confirmation basée sur la simulation sont attendues.)

8. question [5 points] En repassant à la simulation, augmenter le nombre d'oisieau et choisir $N = 5000$ ou plus (mais moins de 11000 sinon la simulation est trop lente). Pour différentes valeurs de l'amplitude du bruit η, relever la valeur du paramètre d'ordre scalaire φ et tracer le graphe de φ en fonction de η. Que remarquez-vous ? (Les mesures du paramètre d'ordre sont bruitées : il faut les moyenner en réalisant plusieurs mesures.)

9. question [2 points] Intéressons-nous maintenant la densité d'oiseaux, c.-à-d. au nombre d'oiseaux. À votre avis, comment varie la valeur critique de l'amplitude du bruit pour laquelle le comportement des oiseaux passe d'un régime à l'autre quand on augmente la densité d'oiseaux ? Pourquoi ?

10. question [5 points] Nous introduisons dorénavant deux longueurs : la longueur l qui mesure la distance moyenne qu'un oiseau parcours avant d'en rencontrer un autre et la longueur l_p qui correspond à la distance moyenne après laquelle l'oiseau a oublié son orientation initiale, c.-à-d. la distance après laquelle l'orientation est complètement différente. Comparer ces deux distances dans le cas ordonné et dans le cas désordonné. Comment la longueur l est-elle reliée à la densité d'oiseaux ρ_0 ? Si $l_p \propto v_o/\eta^2$, comment l'amplitude critique du bruit dépend-elle de la densité ? Représenter sur le diagramme de phase (ρ, η), la courbe séparant les deux états en situant chaque état sur le diagramme.

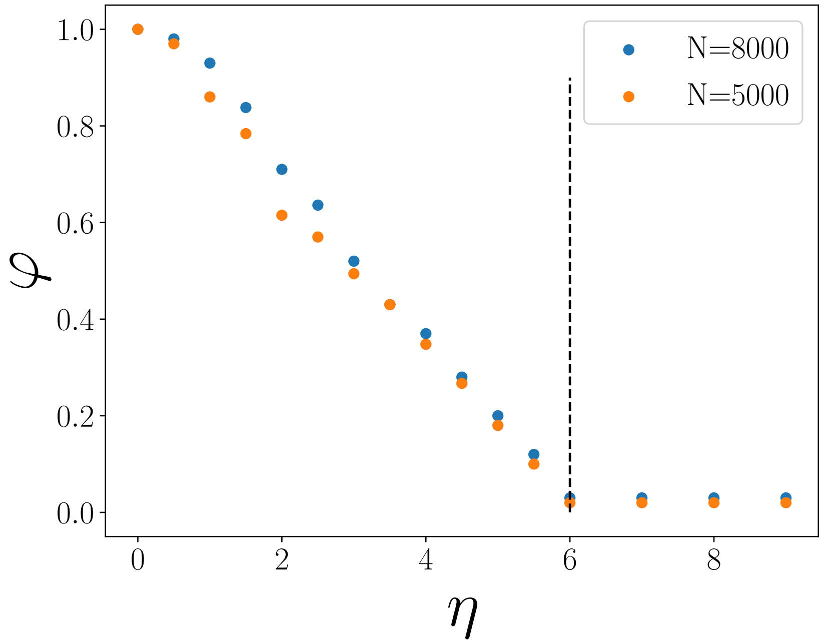
Dans ce problème, npus avons vu un phénomène que vous observez en réalité tous les jours : la transition de phase. L'exemple le plus connu est sans doute la transition liquide-vapeur de l'eau. Comme on l'a vu, les transitions de phases sont caractérisées par des paramètres d'ordre qui sont très importants dans leur description.

11. question [3 points] Quel est le paramètre d'ordre utilisé dans une transition liquide-gaz ? Est-il raisonnable de comparer cette transition avec le cas des oiseaux ?

Solution

1. question Les raisons qui expliquent ce comportement sont multiples. Les oiseaux, les poisson et d'autres animaux font beaucoup de choses tout en bougeant à l'intérieur du groupe. Le principal mécanisme que l'on peut identifier est l'alignement : les oiseaux essaient de s'aligner avec leurs voisins mais ils ne peuvent le faire qu'avec les quelques individus autour d'eux mais pas avec l'ensemble de la nuée. C'est justement ce comportement local qui est la clé : il n'y a pas de cohésion générale de la nuée, seulement des cohésions locales qui amène à un comportement collectif. Ensuite, les oiseaux ont une vitesse dont la valeur, et pas forcément la direction, est ajustée à celle de la nuée. On peut aussi considérer d'autres effets : par exemple, les oiseux peuvent s'entrechoquer donc ils préservent une certaine distance minimale entre eux. On a donc à la fois un comportement attractif pour l'alignement et un comportement répulsif quand ils sont trop proches.

C'est un système qui n'est pas à l'équilibre, et même s'il peut sembler l'être, il n'est pas stable. La stabilité implique que le système n'évolue pas dans le temps ce qui ne s'applique évidemment pas aux oiseaux. Nous pouvons donc conclure que même une



Slika 6: Évolution du paramètre d'ordre φ en fonction de l'amplitude du bruit pour deux densités d'oiseaux, c.-à-d. deux nombres N d'oiseaux.

petite fluctuation peut provoquer des changements importants : il est possible qu'un seul oiseau puisse altérer tout le mouvement complet de la nuée.

2. question Les paramètres physiques qui peuvent potentiellement entrer dans la description du problème sont la vitesse des oiseaux, les variations de vitesse, la direction des oiseaux, s'ils voient correctement ou non, le nombre d'oiseaux, une certaine distance moyenne entre eux, peut-être même la résistance de l'air...

3. question Si l'amplitude du bruit est nulle, $\eta = 0$, alors il n'y a aucune perturbation dans l'orientation. Cela signifie que tous les oiseaux se dirigent dans la direction moyenne de leurs voisins. Petit à petit, tous les oiseaux s'alignent et après un temps suffisamment long, ils se déplacerons tous dans la même direction (déterminée par les positions et orientations initiales qu'ils avaient dans la nuée.)

4. question Dans ce cas, le bruit est tellement grand que les oiseaux ne s'alignent pas avec leurs voisins et évoluent simplement dans des directions aléatoires : il n'y a pas de direction privilégiée. Sans alignement, il n'y a pas de "force directrice".

5. question En choisissant d'abord $\eta = 0$, on voit que les oiseaux commencent à former des nuées, mais après un temps suffisamment long ils bougent tous dans la même direction. En augmentant l'amplitude du bruit, ils forment des nuées plus petites qui bougent chacune dans leur propre direction. Des structures cohérentes locales apparaissent sans obtenir un alignement global. En augmentant encore davantage l'amplitude du bruit, les mouvements ne forment aucune structure ni alignement global : chaque oiseau vole individuellement. Ceci correspond à ce qui a été dit auparavant.

6. question Dans un état ordonné, les oiseaux bougent plus ou moins ensembles et préfèrent, au moins localement, une direction particulière. Ce paramètre représente et mesure la direction moyenne dans laquelle les oiseaux se déplacent. S'ils préfèrent une direction, il y aura davantage de vecteurs qui pointent dans cette direction et le paramètre scalaire sera non nul. Dans un état désordonné, les oiseaux bougent dans toutes les directions : en moyenne $\varphi = 0$.

7. question En suivant le raisonnement de la question précédente, φ a la plus grande valeur quand $\eta = 0$ et va diminuer jusqu'à 0 quand on augmente l'amplitude du bruit. Si $\eta = 0$, alors

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{N} \sum_i^N \vec{s}_i \tag{16}$$

$$\varphi_x = \frac{1}{N} \sum_i^N s_{x,i} \quad \varphi_y = \frac{1}{N} \sum_i^N s_{y,i} \tag{17}$$

où on décompose $\vec{\varphi}$ en ses composantes selon x et y. Si tous les oiseaux bougent dans la même direction, toutes leurs composantes seront les mêmes, c.-à-d. que les $s_{x,i}$ ont la même valeur pour tout i. En appelant simplement cette valeur s_x et en procédant de même selon y,

$$\varphi_x = \frac{1}{N} \cdot N s_x \quad \varphi_y = \frac{1}{N} \cdot N s_y \tag{18}$$

On a ensuite

$$\varphi = |\vec{\varphi}| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 1 \tag{19}$$

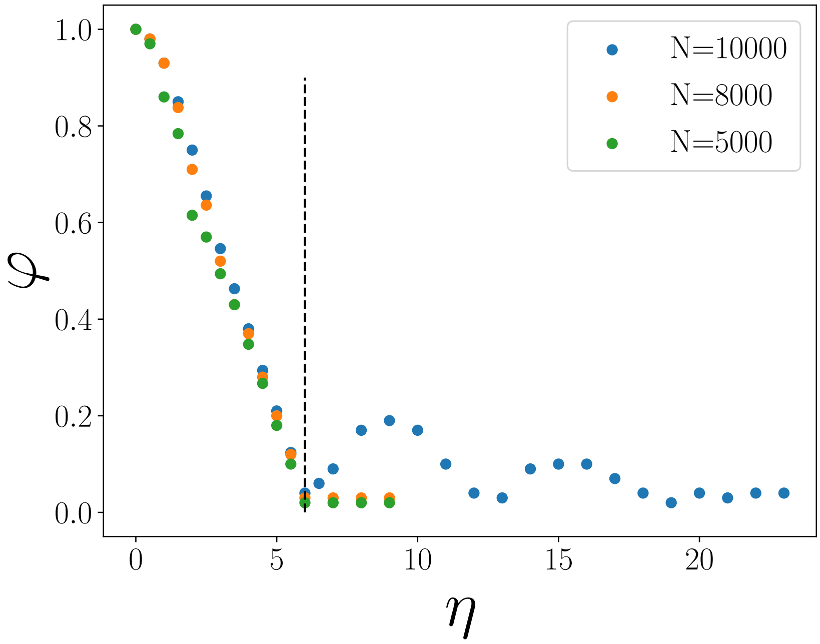
car la norme des $\vec{s}_i$ valait par définition 1. Ce résultat est confirmé par la simulation.

8. question Pour chaque valeur de l'amplitude du bruit, on réalise 15 mesures du paramètre d'ordre φ et on calcule la moyenne de ces valeurs. On effectue cela pour chaque valeur de η par pas de 0,5 pour obtenir la Fig. 6.

On peut remarquer qu'au-delà d'une certaine amplitude de bruit, le paramètre de bruit s'annule (à une erreur près, on remarquera certains effets qui proviennent du nombre fini d'oiseaux).

En regardant plus attentivement et en choisissant $N = 10000$, on remarque que quelque chose d'étrange se produit à la transition d'un état à l'autre. En observant le graphe de la Fig. 7, on remarque que le paramètre d'ordre augmente légèrement avant de s'annuler à nouveau. Cela se produit deux fois. Ce qui se produit n'a été découvert que récemment et les recherches se poursuivent sur le sujet. En observant attentivement ce qui se passe avec les oiseaux, on peut voir des courants d'oiseaux allant dans une direction, même si leur mouvement est désordonné. Il y a un mouvement collectif au sein d'une "mer" de mouvement chaotique. (Remarque : si la simulation était plus raffinée, avec plus d'oiseaux, différentes boites, on pourrait voir des lignes d'oiseaux traversant l'écran.

9. question En augmentant le nombre d'oiseaux, il y aura en moyenne plus de voisins autour de chaque oiseau, ce qui veut dire qu'il s'alignera avec plus d'oiseaux en moyenne. On peut dire que l'effet d'alignement est plus important. Autrement dit, il faudra une amplitude de bruit plus importante pour perturber l'alignement et passer à l'état désordonné. Il s'en suit que l'amplitude critique de bruit augmente avec la densité d'oiseaux, c.-à-d. le nombre d'oiseaux.



Slika 7: Évolution du paramètre d'ordre φ en fonction de l'amplitude du bruit η pour trois densités différentes. On remarque deux rebonds après la transition entre les deux états.

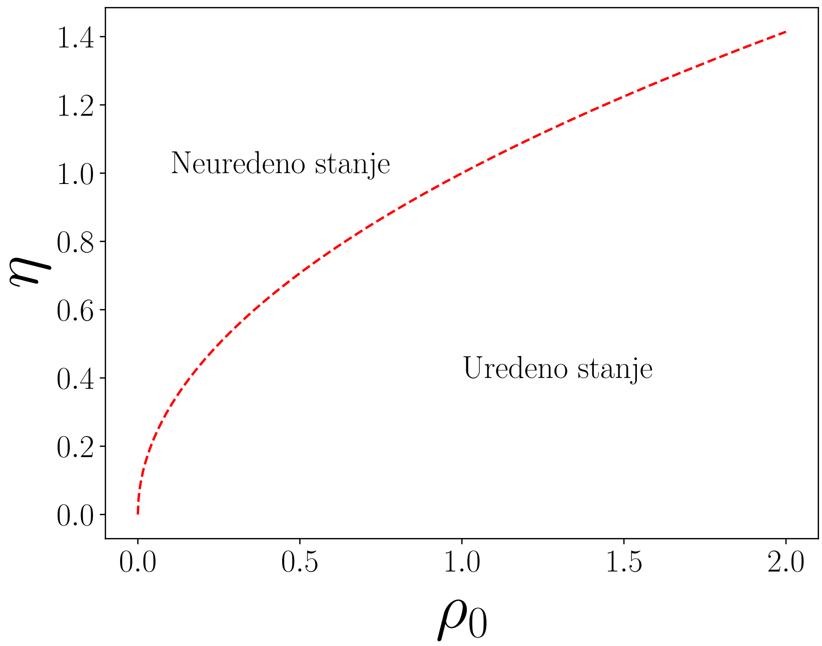
10. question Si la densité d'oiseaux est très faible, les oiseaux parcourront une grande distance avant d'entrer en collision. Si la densité est importante, ils s'entrechoqueront souvent et la distance l sera petite. On peut approximer le comportement d'oiseaux par le mouvement de particules dans un gaz. C'est une approximation raisonnable car quand on a des nuées dans l'état ordonné, les oiseaux ne s'entrechoquent pas au sein d'une nuée. En revanche une nuée peut en rencontrer une autre. On peut ensuite considérer chaque nuée comme un oiseaux seul ou comme une particule de fluide. Dans un état désordonné, chaque oiseau bouge aléatoirement et peut être assimilé à une particule se déplaçant aléatoirement dans un gaz. En consultant par exemple ce site, on peut voir que

$$\ell \propto \frac{1}{\rho_0}. \tag{20}$$

Dans un état parfaitement ordonné, les oiseaux n'oublient jamais leur orientation, si bien que la longueur l_p est très grande et $l_p > l$. Dans un état désordonné, $l_p < l$ car les oiseaux se déplacent au hasard et oublient rapidement leur direction. On peut conclure qu'au point de transition, on a $l_p \approx l$ et $\eta_c \propto \sqrt{\rho_0}$. On obtient le diagramme de phase visible sur la Fig. 8.

11. question Pour des gaz et des liquides, l'amplitude du bruit correspond à la température. En augmentant la température, on passe de l'état liquide à l'état gazeux. Une recherche internet permet de trouver que le paramètre d'ordre dans ce cas est la différence de densité (ou de masse volumique) entre celle du système et celle du liquide $\varphi = \Delta\rho = \rho - \rho_{liquide}$, où ρ est la masse volumique de la substance à laquelle on s'intéresse. Ici, on suppose que la masse volumique du liquide $\rho_{liquide}$ ne change pas avec la température jusqu'à la transition de phase. Dans l'état liquide, on a donc $\varphi = 0$, alors que dans l'état gazeux φ est non nul.

Ces deux systèmes présentent des transitions de phase. Toutefois dans le cas des oiseaux, un mécanisme correctif altère la direction de leur mouvement, ce qui ne se produit pas dans le cas des gaz et des liquides. Pour cette raison, les oiseaux constituent un



Slika 8: Phase diagram with the separating line

système beaucoup plus riche, même si la théorie des transitions de phases peut toujours s'appliquer aux oiseaux et aux nuées.

Commentaire : Les êtres vivants ne sont pas les seuls à donner naissances à de tels mouvements. Les robots et nanorobots peuvent aussi se mouvoir de manière semblable, tout comme certaines particules appelées "particules automotrices" (*self-propelled particles*) qui sont fabriquées à l'aide de deux matériaux différents qui leurs donnent des propriétés physico-chimiques particulières. Le domaine de la physique qui s'intéresse à ces phénomènes est appelé *matière active* qui s'est développé rapidement au cours des 20 dernières années. Même de petites simulations relativement simples comme celle étudiée ici peuvent mener à des évolutions scientifiques importantes dans de nouvelles directions. (Par exemple, pendant la rédaction du problème, l'auteur ne s'attendais pas à observer les deux rebonds après la transition entre l'état ordonné et l'état désordonné. C'est seulement après avoir parcouru la littérature qu'il a découvert leur signification et la raison de leur apparition.)