Table des matières

INTRODUCTION A LA THEORIE DES OPERATEURS LINEAIRES

BERRABAH BENDOUKHA
Professeur de mathématiques au centre universitaire de Naama (Algérie)

Semestre 2 (2018/2019)

Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET ESPACES DE BANACH

Durant tout ce cours, $\mathbb{K}$ désignera le corps des nombres réels ou complexes.

1.1 Quelques inégalités célèbres

Commençons ce chapitre par certaines inégalités célèbres et très utiles pour la suite.

Lemme 1.1.1 *(Inégalité de Young) Soient $p, q \in]1, +\infty[$ et vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour tous réels positifs a et b,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Preuve. Rappelons tout d'abord que la fonction logarythme népérien est une fonction concave :

$$\left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \quad et \quad y \geq 0 \\ \alpha \geq 0 \quad , \quad \beta \geq 0 \quad et \quad \alpha + \beta = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha \ln(x) + \beta \ln(y) \leq \ln(\alpha x + \beta y) \tag{1.1}$$

Posons :

$$x = a^p, \quad y = b^q, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}$$

Alors, d'après 1.1,

$$\ln(ab) = \ln\left((a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}} \right) = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right).$$

En passant à l'exponentielle, on obtient le résultat souhaité. ■

Proposition 1.1.2 *(Inégalité de Cauchy[1]-Schwarz[2]) Soient $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ et $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ deux suites de nombres réels ou complexes,*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \prec +\infty \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2 \prec +\infty$$

[1] Auguste Louis Cauchy : mathématicien français, né le 21 août 1789 à Paris, mort le 23 mai 1857 à Sceaux.

[2] Hermann Amandus Schwarz : mathématicien allemand, né le 25 janvier 1843 à Hermsdorf, mort le 30 novembre 1921 à Berlin.

Alors,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve. *Il suffit de montrer que :*

$$\forall N \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'obtient alors, en faisant tendre N vers $+\infty$.
Pour tout réel λ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} (|x_i| + \lambda |y_i|)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| + \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 .$$

$P(\lambda)$ est un polynôme du second degré en λ, vérifiant $P(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, son déscriminant réduit Δ', vérifie la condition :

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \right)^2 - \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \leq 0.$$

D'où,

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 . \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 .$$

■

Proposition 1.1.3 *(Inégalité de Hölder[3]) Soient $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ et $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ deux suites de nombres réels ou complexes,*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \prec +\infty \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q \prec +\infty \qquad \left(p, q \in]1, \ +\infty[\quad et \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Preuve. *Supposons en premier supposer que :*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q = 1, \tag{1.3}$$

D'après le lemme,

$$(\forall i = 1, 2, ...) : \qquad |x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}.$$

D'où en sommant et en tenant compte du fait que $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q = 1$, on obtient que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

[3] Otto Hölder : matématicien allemand, né le 22 décembre 1859 à Stuttgart, mort le 29 août 1937 à Leipzig.

Considérons maintenant le cas général et posons :

$$\begin{cases} x = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \,, \qquad X_i = \frac{x_i}{x} \\ \\ y = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q \,, \qquad Y_i = \frac{y_i}{y} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, ...) \,.$$

On a,

$$\sum_{i=1}^{N} |X_i|^p = \sum_{i=1}^{N} |Y_i|^q = 1.$$

Donc, d'après ce qui précéde :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} |X_i Y_i| &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i y_i|}{xy} = \frac{1}{xy} \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |X_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |Y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{xy} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} . \end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

■

Remarque. L'inégalité de Cauchy - Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder ($p = q = 2$). ■

Proposition 1.1.4 *(Inégalité de Minkovski[4]) Soient* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *et* $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ *deux suites de nombres réels ou complexes,*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \prec +\infty \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p \prec +\infty \qquad (p \in [1, \ +\infty[)$$

Alors,

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve. *Remarquons tout d'abord que le cas* $p = 1$ *est trivial. Supposons donc que* $p \succ 1$ *alors,*

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leq |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} . \tag{1.4}$$

Soit q *le nombre réel positif, vérifiant* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *, en appliquant l'inégalité de Hölder aux suites finies*

$$(x_i)_{i=1}^{N} \quad et \quad \left(|x_i + y_i|^{p-1} \right)_{i=1}^{N} ,$$

[4]Hermann Minkovski (ou Minkowski) : Mathématicien et physicien Allemand né en 1864 en Russie et mort en 1909 en Allemagne.

on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.5}$$

De la même manière, en appliquant l'inégalité de Hölder aux suites finies

$$(y_i)_{i=1}^{N} \quad et \quad \left(|x_i + y_i|^{p-1} \right)_{i=1}^{N},$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.6}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{N} |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right) . \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p \right)^{-1+\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans 1.7, on obtient l'inégalité recherchée. ■

Il est connu du cours de "mesure et intègration" que les inégalités précédentes admettent les versions intègrales suivantes :

Proposition 1.1.5 *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle fini $I = [a, \ b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que pour tous $p, q \in \left]1, \ +\infty\right[$,*

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx \prec +\infty \qquad et \qquad \int_a^b |g(x)|^q \, dx \prec +\infty.$$

Alors, on a les inégalités suivantes :

1. *Intègrale de Hölder* $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

2. *Dans le cas particulier,* $p=q=2$*, on obtient l'inégalité intègrale de Cauchy-Schwarz :*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

3. *Inégalité intègrale de Minkovsky* $(p=q)$

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Remarque. Comme dans le cas discret, l'inégalité intègrale de Minkovsky, reste vraie même pour $p=1$. ■

1.2 Espaces vectoriels normés (evn)

Définition 1.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application* $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$*, vérifiant :*

N1. $\forall x \in E : \quad \|x\| \geq 0 \quad et \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$

N2. *Inégalité triangulaire.* $\forall x, y \in E : \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

N3. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad \|\lambda \bullet x\| = |\lambda| . \|x\|$.

Remarques.

1. Toute norme définit une distance suivant la formule :

$$\forall x, y \in E : \quad d(x,y) = \|x-y\| ;$$

On dit dans ce cas que la métrique d dérive de la norme $\|.\|$.

2. Si une distance d sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E vérifie les conditions :

$$\forall x, y, z \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : \; d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad et \quad d(\lambda \bullet x, \lambda \bullet y) = |\lambda|\, d(x,y)$$

alors, l'application $\|.\|$ définie sur E par : $\|x\| = d(x,0)$, définit sur E une norme de laquelle, dérive la métrique d (démontrer).

■

Définition 1.2.2 *Un espace normé (evn) est un couple* $(E,\ \|.\|)$*, constitué d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et d'une norme $\|.\|$ sur cet espace.*

Remarque. Dans un espace normé, on a l'inégalité triangulaire inversée :

$$\forall x, y \in E : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| \tag{1.8}$$

■

Exemples. Les espaces suivants sont tous des espaces normés (vérifier).

1. $E = \mathbb{K}^n$,
$$x = (x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$
2. $E = \mathbb{K}^n$,
$$x = (x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$
3. $E = \mathbb{K}^n$,
$$x = (x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$
4. $E = l^p(\mathbb{K})$, $(p \geq 1)$,
$$l^p(\mathbb{K}) = x = (x_1, ..., x_n, ...) : x_i \in \mathbb{K} \quad (\forall i) \quad et \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \prec +\infty$$
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$
5. $E = L^p(I)$ -ensemble des fonctions définies sur $I = [a,\ b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant,
$$\int_I |f(x)|^p \, dx \prec +\infty,$$
on obtient une norme en posant :
$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} . \quad p \geq 1$$
Dans l'espace $E = L^p(I)$, deux fonctions égales presque partout sont supposées identiques.
6. $E = \mathbb{K}[X]$ - l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n \Longrightarrow \|P\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |a_i| .$$

■

Remarque. Dans tous les exemples cités plus haut (sauf l'exemple 5), l'inégalité triangulaire s'obtient par application de l'inégalité de Minkovski. ■

Définition 1.2.3 *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E. $\|.\|_1$ est dite équivalente à $\|.\|_2$ si,*
$$\exists \alpha \succ 0 \quad et \quad \exists \beta \succ 0 : \ \forall x \in E; \quad \alpha. \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta. \|x\|_2 \tag{1.9}$$

Remarques.
1. Si $\|.\|_1$ est équivalente à $\|.\|_2$ alors, $\|.\|_2$ est équivalente à $\|.\|_1$.
2. Dans $E = \mathbb{K}^n$, les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. Cela découle des inégalités évidentes suivantes :
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \qquad et \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \tag{1.10}$$

3. D'une manière générale, dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (Voir TD).
4. En dimension infinie, on peut trouver dans un même espace deux normes non équivalentes.

■

Proposition 1.2.4 *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E. Alors, ces deux normes ne sont pas équivalentes si et seulement si, il existe une suite d'éléments de E telles que l'une des deux suites numériques* $\left(\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}\right)_n$ *et* $\left(\frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}\right)_n$ *n'est pas bornée.*

Preuve. Supposons que les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes. On a donc,

$$\forall \alpha \succ 0 \ \ et \ \ \forall \beta \succ 0; \ \exists x = x(\alpha, \beta) \neq 0 \in E : \quad \alpha . \|x\|_2 \succ \|x\|_1 \quad ou \quad \|x\|_1 \succ \beta . \|x\|_2 . \tag{1.11}$$

En prenant dans 1.11, $\alpha = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}^*$ et $\beta = n$, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_n \in E : \quad \|x_n\|_2 \succ n . \|x_n\|_1 \quad ou \quad \|x_n\|_1 \succ n . \|x_n\|_2 .$$

Donc, au moins l'une des deux suites $\left(\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}\right)_n$ et $\left(\frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}\right)_n$ n'est pas bornée.

Inversement, supposons que l'une des deux suites par exemple $\left(\frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}\right)_n$ n'est pas bornée. On aura donc,

$$\forall M \succ 0, \quad \exists n_M \in \mathbb{N} : \quad \frac{\|x_{n_M}\|_1}{\|x_{n_M}\|_2} \succ M \tag{1.12}$$

Si les deux normes étaient équivalentes, on aurait :

$$\exists M_1 \succ 0 \ \ et \ \ \exists M_2 \succ 0 : \ \forall x \in E; \quad M_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2 \|x\|_2$$

D'où,

$$\exists M_2 \succ 0 : \ \forall x \in E : \quad \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq M_2 \tag{1.13}$$

Il est clair que les relations 1.12 et 1.13 ne peuvent pas être vérifiées en même temps. Donc, les deux normes ne sont pas équivalentes. ■

1.3 Concepts de Base

Etant donné un evn $(E, \ \|.\|)$, on a les concepts de base suivants :

Définition 1.3.1 *Soit* $(E, \ \|.\|)$ *un evn. On appelle :*

$\mathbf{B_O}$. *boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \succ 0$ l'ensemble,*

$$B_O(a, r) = \{x \in E; \quad \|x - a\| \prec r\} ;$$

$\mathbf{B_F}$. *boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \succ 0$ l'ensemble,*

$$B_F(a, r) = \{x \in E; \quad \|x - a\| \leq r\} .$$

On a toujours, $B_O(a, r) \subset B_F(a, r)$.

Remarque. D'une manière générale, dans un evn E, on peut trouver des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées. ■

Définition 1.3.2 *Soient $(E,\ \|.\|)$ un evn et une partie M non vide de M. On appelle diamètre de M le réel positif ou nul :*

$$\delta(M) = \sup_{x,\ y\ \in\ M} \|x-y\|. \tag{1.14}$$

Remarque. On a :

$$\delta(B_O(a,r)) = \delta(B_F(a,r)) = 2r$$

■

Définition 1.3.3 *Une partie M non vide de E est bornée dans $(E,\ \|.\|)$ si on peut l'inclure dans une boule ouverte ou fermée de $(E,\ \|.\|)$ de rayon fini.*

Exercice 1.3.4 *Une partie M non vide de E est bornée dans $(E,\ \|.\|)$ si et seulement si, son diamètre est fini.*

Définition 1.3.5 *Une partie M non vide de E est dite ouverte dans $(E,\ \|.\|)$ si, tout point $a \in M$ est le centre d'une boule ouverte entièrement contenue dans M. M est dite fermée dans $(E,\ \|.\|)$ si, son complémentaire est ouvert dans $(E,\ \|.\|)$.*

Exercice 1.3.6 *Une partie M non vide d'un evn $(E,\ \|.\|)$ est ouverte dans $(E,\ \|.\|)$ si et seulement si, elle peut s'écrire sous forme d'une réunion de boules ouvertes de centres, apartenant tous à M :*

$$M \text{ ouvert de } (E,\ \|.\|) \Longleftrightarrow M = \bigcup_{i \in I} B_O(a_i, r_i)\,; \quad a_i \in M, \quad r_i \succ 0.$$

Définition 1.3.7 *On dit qu'un point $a \in E$ adhère au sous-ensemble M de E, si toute boule ouverte de centre a, rencontre M. L'ensemble des points de E, adhérant à M se note $\overline{M}$ (adhérence de M) :*

$$a \in \overline{M} \Longleftrightarrow \forall r \succ 0 :\ M \cap B_O(a,r) \neq \varnothing$$

Géométriquement, cela signifie qu'il est impossible d'isoler a de M par une boule ouverte de centre a.

Exercice 1.3.8 *Le point $a \in E$ adhère à M si et seulement si, tout ouvert de E contenant a, rencontre M.*

Définition 1.3.9 *Soit $(E,\ \|.\|)$ un evn. Une partie M non vide de E est dite dense dans E $\left(\text{ on écrit } \overline{M} = E\right)$ si, toute boule ouverte de E rencontre M.*

Exemple 1.3.10 *L'ensemble des nombres rationnels est partout dense dans l'ensemble des réels. Plus généralement, $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ (démontrer !).*

Définition 1.3.11 *Un evn $(E,\ \|.\|)$ est dit séparable s'il existe un ensemble dénombrable dense dans E.*

Exemple 1.3.12 *Tous les espaces cités plus haut sont des espaces séparables.*

1.4 Espaces de Banach

Définition 1.4.1 *Soit $(E,\ \|.\|)$ un evn. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ si,*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n \succ n_\varepsilon;\quad \|x_n - x\| \prec \varepsilon \qquad \left(\text{on écrit : } \lim_{n\ \longrightarrow\ +\ \infty} x_n = x\right) \tag{1.15}$$

On dit aussi que la suite $(x_n)_n$ converge vers x dans $(E,\ \|.\|)$ ou que $(x_n)_n$ converge vers x pour la norme $\|\|$.

Remarque. La définition de la convergence vers x signifie tout simplement que toute boule ouverte centrée en x, contient tous les éléments de la suite $(x_n)_n$ sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. ■

Remarque. Dans un evn, la limité d'une suite convergente est unique. ■

Définition 1.4.2 *Soit $(E, \ \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle suite de Cauchy dans $(E, \ \|.\|)$ toute suite d'éléments de E, vérifiant la condition :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\| \prec \varepsilon \tag{1.16}$$

Remarque. Dans les relations 1.15 et 1.16, on peut remplacer $\underline{\varepsilon}$ par $\underline{m\varepsilon}$ où $\underline{m}$ est n'importe quelle constante strictement positive, . ■

Proposition 1.4.3 *Soit $(E, \ \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas vrai.*

Preuve. *Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers x dans l'espace $(E, \ \|.\|)$. On a :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x\| \prec \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où,

$$\forall n, m \succ n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) + (x - x_m)\| \leq \|(x_n - x)\| + \|x - x_m\| \prec \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pour montrer que l'inverse n'est pas vrai, il suffit de considérer dans l'espace $(\mathbb{Q}, \ |.|)$ la suite $\left(x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n.}$. C'est une suite de Cauchy mais sa limite est le nombre $e \notin \mathbb{Q}$. ■

Définition 1.4.4 *Un espace vectoriel normé $(E, \ \|.\|)$ est dit de Banach*[5] *ou tout simplement B -espace s'il est complet pour la norme $\|.\|$ c'est à dire que toute suite de Cauchy de $(E, \ \|.\|)$ converge dans $(E, \ \|.\|)$. En d'autres termes, un espace de Banach est un evn dans lequel les notions de suite convergente et suite de Cauchy coïncident.*

Exemples.

1. L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est un B -espace (cours d'analyse mathématique).

2. L'espace $(\mathbb{C}, |.|)$ est un B -espace. En effet, soit $(z_n = x_n + iy_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad |z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \prec \varepsilon$$

Il s'ensuit que :

$$\forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \begin{cases} |x_n - x_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2} \leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \prec \varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad et \\ |y_n - y_m| = \sqrt{(y_n - y_m)^2} \leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \prec \varepsilon \end{cases}$$

En d'autres termes, les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont des suites de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$ qui est complet (de Banach). Il existe donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x \qquad et \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = y$$

[5] Stefan Banach : mathématicien polonais, né le 30 mars 1892 à Cracovie (Pologe), mort le 31 aout 1945 à Lviv (Ukraine).

Par conséquent,

$$\forall\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists n_{1\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \exists n_{2\varepsilon} \in \mathbb{N} : \quad \begin{cases} \forall n \succ n_{1\varepsilon}; \quad |x_n - x| \prec \varepsilon \\ \qquad\qquad et \\ \forall n \succ n_{2\varepsilon}; \quad |x_n - x| \prec \varepsilon \end{cases}$$

Posons $n_\varepsilon = \max(n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon})$ et $z = x + iy$. Alors,

$$n \succ n_\varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} n \succ n_{1\varepsilon} \\ et \\ n \succ n_{2\varepsilon} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x| \prec \varepsilon \\ et \\ |x_n - x| \prec \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow |z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = \varepsilon\sqrt{2}$$

c'est à dire que la suite converge $(z_n)_n$ vers z dans $(\mathbb{C}, |.|)$.

3. L'espace $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty)$ est un B -espace de dimension finie. En effet, soit $\left(x_n = \left(x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}, ...,\ x_n^{(p)}\right)\right)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty)$. On a :

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{1 \le k \le p} \left|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\right| \prec \varepsilon$$

D'où,

$$\forall\ 1 \le k \le p,\ \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \left|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\right| \prec \varepsilon$$

En d'autres termes, pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, la suite $\left(x_n^{(k)}\right)_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{K}, |.|)$ qui est complet (de Banach). Par conséquent,

$$\forall\ 1 \le k \le p,\ \ \exists x^{(k)} \in \mathbb{K} : \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n^{(k)} = x^{(k)}$$

Posons $x = \left(x^{(1)}, ..., x^{(p)}\right)$ alors,

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \forall\ 1 \le k \le p,\ \exists n_{k\varepsilon} \in \mathbb{N} :\ \forall n \succ n_{k\varepsilon}; \quad \left|x_n^{(k)} - x^{(k)}\right| \prec \varepsilon \tag{1.17}$$

Soit $n_\varepsilon = \max(n_{1\varepsilon}, .\quad, n_{p\varepsilon})$ alors, d'après 1.17,

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \forall\ 1 \le k \le p,\ \forall n \succ n_\varepsilon; \quad \left|x_n^{(k)} - x^{(k)}\right| \prec \varepsilon \Longrightarrow \forall\varepsilon \succ 0, \forall n \succ n_\varepsilon;\ \|x_n - x\|_\infty \prec \varepsilon.$$

C'est à dire que $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty)$ est un B -espace.

■

Proposition 1.4.5 *Soit E un espace vectoriel et soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes dans E. alors, pour toute suite $(x_n)_n$ dans E,*

1.

$$(x_n)_n \text{ de Cauchy pour la norme } \|.\|_1 \Longrightarrow (x_n)_n \text{ de Cauchy pour la norme } \|.\|_2$$

2.

$$(x_n)_n \text{ converge vers } x \text{ dans } (E,\ \|.\|_1) \Longrightarrow (x_n)_n \text{ converge vers } x \text{ dans } (E,\ \|.\|_2)$$

Preuve.

1. *Par hypothèse, il existe deux constantes* $\alpha \succ 0$ *et* $\beta \succ 0$ *telles que :*

$$\forall y \in E : \quad \alpha \|y\|_2 \leq \|y\|_1 \leq \beta \|y\|_2$$

Supposons que la suite $(x_n)_n$ *est de Cauchy pour la norme* $\|.\|_1$. *Alors,*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\|_1 \prec \varepsilon$$

D'où,

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\|_2 \leq \frac{\|x_n - x_m\|_1}{\alpha} \prec \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

ce qui en vertu de la remarque 1.4, signifie que la suite $(x_n)_n$ *est aussi de Cauchy pour la norme* $\|.\|_2$.

2. *S'obtient en remplaçant dans le raisonnement précédent* x_m *par* x.

■

Corollaire 1.4.6 *Les espaces* $(\mathbb{K}^p, \|.\|_1)$ *et* $(\mathbb{K}^p, \|.\|_2)$ *sont des* B *-espaces de dimension finie.*

Définition 1.4.7 *Une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments d'un evn* $(E, \ \|.\|)$ *est dite bornée si :*

$$\exists r \succ 0 : \ \|x_n\| \leq r \quad \forall n \qquad (\Longleftrightarrow \forall n, \ x_n \in B_F(0, r))$$

Comme dans le cas réel, on démpontre facilement qu'une suite convergente ou de Cauchy est bornée, mais que l'inverse n'est pas vrai.

Définition 1.4.8 *Soient* $(E, \ \|.\|)$ *un evn et* $(E_n)_n$ *une suite de sous-ensembles de* E. *On dit que les* E_n *sont emboîtés si, pour tout* n, $E_{n+1} \subset E_n$.

Theorème 1.4.9 *(des boules emboîtées) Un evn* $(E, \ \|.\|)$ *est complet (de Banach) si et seulement si, toute suite* $(E_n)_n$ *de boules fermées emboîtées dont la suite* $(r_n)_n$ *des rayons tend vers* 0, *a une intersection non vide.*

Preuve. *Supposons que l'espace* $(E, \ \|.\|)$ *est complet et soit* $(E_n)_n$ *une suite de boules fermées emboîtées dont la suite des rayons tend vers* 0.*Il faut montrer que*

$$\bigcap_n E_n \neq \varnothing.$$

On a par hypothèse,

$$\forall n : \ E_n = B_F(a_n, \ r_n) \quad avec \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} r_n = 0, \ (a_n \in E, \ est\ le\ centre\ de\ la\ boule\ E_n). \tag{1.18}$$

Par ailleurs,

$$E_m \subset E_n \quad (\forall n, \quad \forall m \succ n) \Longrightarrow \|a_n - a_m\| \leq r_n \quad . \tag{1.19}$$

Comme $\lim_{n \longrightarrow +\infty} r_n = 0$ *alors, il découle de la formule 1.19 que la suite* $(a_n)_n$ *des centres est de Cauchy et donc, converge vers un point* $a \in E$. *Montrons que*

$$a \in \bigcap_n E_n.$$

En effet, pour tout n, *la boule* E_n *contient tous les centres* $a_{n+1}, \ a_{n+2}, \ \ldots..$ *La suite* $(a_k)_{k \geq n}$ *étant extraite de la suite* $(a_n)_n$ *converge aussi vers* a. *De plus,*

$$E_n \quad fermée \ \ et \quad (a_k)_{k \geq n} \subset E_n \Longrightarrow a \in E_n \quad \forall n$$

Inversement, supposons que l'intersection de toute suite $(E_n)_n$ *de boules fermées, emboîtées et dont la suite des rayons tend vers* 0 *est non vide et montrons que l'espace* E *est complet. Soit donc* $(a_n)_n$ *une suite de Cauchy d'éléments de* E*. Ainsi donc,*

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall m \geq n_\varepsilon;\quad \|a_n - a_m\| \prec \varepsilon. \tag{1.20}$$

En posant dans 1.20 $\varepsilon = \varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}$*, on obtient qu'il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\|a_n - a_{n_1}\| \prec \frac{1}{2} \qquad (\forall n \geq n_1).$$

Désignons par E_1 *la boule fermée de centre* $b_1 = a_{n_1}$ *et de rayon* $r_1 = 1$*. La suite* $(a_n)_{n \succ n_1}$ *est aussi de Cauchy. Donc, pour* $\varepsilon = \varepsilon_2 = \dfrac{1}{2^2}$*, on peut trouver* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n_2 \succ n_1 \quad et \quad \|a_n - a_{n_2}\| \prec \frac{1}{2^2} \qquad (\forall n \geq n_2).$$

Désignons par E_2 *la boule fermée de centre* $b_2 = a_{n_2}$ *et de rayon* $r_2 = \dfrac{1}{2}$*. On a alors,*

$$x \in E_2 \Longrightarrow \|a_n - a_{n_2}\| \leq \|x - a_{n_2}\| + \|a_{n_2} - a_{n_1}\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow x \in E_1.$$

D'où, $E_2 \subset E_1$*. De la même manière, la suite* $(a_n)_{n \succ n_2}$ *est aussi de Cauchy. Donc, pour* $\varepsilon = \varepsilon_3 = \dfrac{1}{2^3}$*, on peut trouver* $n_3 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n_3 \succ n_2 \succ n_1 \quad et \quad \|a_n - a_{n_3}\| \prec \frac{1}{2^3} \qquad (\forall n \geq n_3).$$

Désignons par E_3 *la boule fermée de centre* $b_3 = a_{n_3}$ *et de rayon* $r_3 = \dfrac{1}{2^2}$*. On a alors,*

$$x \in E_3 \Longrightarrow \|x - a_{n_2}\| \leq \|x - a_{n_3}\| + \|a_{n_3} - a_{n_2}\| \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \prec \frac{1}{2} \Longrightarrow x \in E_2.$$

D'où, $E_3 \subset E_2$*. En continuant ce processus, on obtient une suite* $(E_k)_{k\geq 1}$ *de boules fermées emboîtées de centres respectifs* $b_k = a_{n_k}$ *et de rayons* $r_k = \dfrac{1}{2^{k-1}}$*.* $\left(\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} r_k = 0\right)$*. D'après l'hypothèse, il existe au moins un point* a *appartenant à tous les* E_k*. Par construction,* $0 \leq \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \|a_k - a\| = \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} r_k = 0$*. Ainsi donc, la suite de Cauchy* $(a_n)_n$ *converge dans* E *qui est donc complet.* ■

Remarque. L'intersection des boules fermées et emboîtées X_n contient en réalité un seul point (vérifier !). ■

1.5 L'espace fonctionnel $C\left((E,\ F), \|.\|_\infty\right)$

Nous allons dans cette partie, introduire un espace de Banach très utilisé en analyse fonctionnelle. Il s'agit de l'espace des fonctions continues $C_{(E,\ F)}$.

Définition 1.5.1 *Soient* $(E,\ \|.\|_E)$ *et* $(F,\ \|.\|_F)$ *deux evn sur le même corps* $\mathbb{K}$*. Une application* $f : (E,\ \|.\|_E) \longrightarrow (F,\ \|.\|_F)$ *est dite continue au point* $a \in E$ *si,*

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists\delta = \delta(a, \varepsilon) \succ 0:\ \forall x \in E,\quad \|x - a\|_E \prec \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \prec \varepsilon \tag{1.21}$$

Si f *est continue en tout point de* E*, on dit qu'elle est continue.*

Exemple 1.5.2 *Si* $(E,\ \|.\|_E)$ *est un evn alors l'application* $x \mapsto \|x\|_E$ *est continue de* $(E,\ \|.\|_E)$ *dans* $(\mathbb{R},\ |.|)$.

Par passage de la norme à la distance engendrée, on obtient les propriétés déjà connues des applications continues entre espaces métriques .

Proposition 1.5.3 *Si* $f : (E,\ \|.\|_E) \longrightarrow (F,\ \|.\|_F)$ *est continue alors, elle reste continue si on remplace* $\|.\|_E$ *et* $\|.\|_F$ *par des normes équivalentes.*

Définition 1.5.4 *Une fonction* $f : (E,\ \|.\|_E) \longrightarrow (F,\ \|.\|_F)$ *est dite séquentiellement continue en a si, pour toute suite* $(a_n)_n$ *d'éléments de E qui converge vers a dans* $(E,\ \|.\|_E)$*, la suite des images* $(f(a_n))_n$ *converge vers* $f(a)$ *dans* $(F,\ \|.\|_F)$.

Proposition 1.5.5 *Une fonction* $f : (E,\ \|.\|_E) \longrightarrow (F,\ \|.\|_F)$ *est continue en a si et seulement si, elle est séquentiellement continue en a.*

Désignons par $C_{(E,\ F)}$ l'ensemble des fonctions continues de E dans F. $C_{(E,\ F)}$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel en posant :
1. $\forall f, g \in C_{(E,\ F)},\ \forall x \in E : \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)\,;$
2. $\forall f \in C_{(E,\ F)},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E : \ (\lambda \bullet f)(x) = \lambda \bullet f(x)\,.$

On définit une norme dans $C_{(E,\ F)}$ par la formule,

$$\forall f \in C_{(E,\ F)} : \quad \|f\|_{\infty} = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F\,.$$

Proposition 1.5.6 *Si l'espace F est de Banach alors* $\left(C_{(E,\ F)},\ \|.\|_{\infty}\right)$ *est aussi de Banach.*
Preuve. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite dans de Cauchy dans* $\left(C_{(E,\ F)},\ \|.\|_{\infty}\right)$*. On a donc,*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \sup_{x\in E} \|f_n(x) - f_m(x)\|_F \prec \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in E, : \quad \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \|f_n(x) - f_m(x)\|_F \prec \varepsilon. \tag{1.22}$$

La formule 1.22, signifie que pour tout $x \in E$ *(fixé), la suite* $(f_n(x))_n$ *est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach* $(F,\ \|.\|_F)$*. Elle converge donc vers un élément qu'on notera y de* $(F,\ \|.\|_F)$*. On obtient ainsi une fonction :*

$$f : E \longrightarrow F; \quad x \longmapsto y = f(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \tag{1.23}$$

Montrons que la fonction f ainsi obtenue est un élément de $C_{(E,\ F)}$ *(c'est à dire qu'elle est continue). Soit* $\varepsilon \succ 0$ *alors,* $\forall x,\ a \in E$ *:*

$$d_F(f(x),\ f(a)) = \|f(x) - f(a)\|_F \leq \|f(x) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f_n(a)\|_F + \|f_n(a) - f(a)\|_F\,. \tag{1.24}$$

D'après 1.23,

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \succ n_\varepsilon; \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \prec \varepsilon, \quad \forall x \in E \quad et \qquad \|f_n(a) - f(a)\|_F \prec \varepsilon. \tag{1.25}$$

Par ailleurs,

$$f_n \quad continue \Longrightarrow \exists \delta_\varepsilon \succ 0 : \quad \|x - a\|_E \prec \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|f_n(x) - f_n(a)\|_F \prec \varepsilon. \tag{1.26}$$

Les formules 1.24, 1.25 et 1.26 nous donnent,

$$\exists \delta_\varepsilon \succ 0 : \quad \|x - a\|_E \prec \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|f_n(x) - f_n(a)\|_F \prec 3\varepsilon.$$

D'où la continuité de la fonction f. Il nous reste à montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $\left(C_{(E,\ F)},\ \|.\|_\infty\right)$. En utilisant la continuité de l'application norme dans la formule 1.22, on obtient par passage à la limite :

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\quad \forall x \in E,:\quad \forall n \succ n_\varepsilon;\quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \prec \varepsilon.$$

En d'autres termes,

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\quad \forall n \succ n_\varepsilon;\quad \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in E} \|f_n(x) - f(x)\|_F \prec \varepsilon.$$

La proposition est ainsi démontrée. ■

Remarques.

1. Dans la preuve du théorème précédent, on n'exige pas de l'espace E qu'il soit de Banach.
2. Il ressort de la preuve du théorème que si une suite $(f_n)_n$ de fonctions de $\left(C_{(E,\ F)},\ \|.\|_\infty\right)$ converge (on dit aussi converge uniformément) vers la fonction f alors, elle converge vers f simplement :
$$\forall x \in E,\ \exists \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$
De plus, f est continue de E dans F.
3. D'après ce qui précède, si un espace de dimention finie est de Banach pour une norme donnée alors, il est de Banach pour toute autre norme (équivalence des normes en dimension finie). En dimension infinie, un espace peut être de Banach pour une norme et ne pas l'être pour une autre norme non équivalente (voir TD).

■

1.6 Théorème du point fixe

Définition 1.6.1 *Soit $(E,\ \|.\|)$ un espace de Banach. Une application $f : E \longrightarrow E$ est dite contractante s'il existe $0 \prec k \prec 1$ vérifiant :*

$$\|f(x) - f(y)\| \le k. \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in E \tag{1.27}$$

Proposition 1.6.2 *Une application contractante est toujours continue.*
Preuve. *Pour tout $\varepsilon \succ 0$ et pour tous $x,\ y \in E$:*

$$\|x - y\| \prec \frac{\varepsilon}{k} \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \prec \varepsilon$$

■

Theorème 1.6.3 *(du point fixe) Soient $(E,\ \|.\|)$ un espace de Banach et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante alors, l'équation*

$$f(x) = x \tag{1.28}$$

admet une solution unique dans E.
Preuve. *Soit $a \in E$ fixé et considérons dans E la suite $(x_n)_n$, définie par la formule de récurrence :*

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

Pour tous naturels $n \prec m$,

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + ... + (x_{m-1} - x_m)\|$$

En utilisant l'inégalité,

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n \|x_0 - x_1\| \qquad \forall n \geq 1$$

on obtient que :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \left(k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1}\right) \|x_0 - x_1\| = k^n \left(1 + k^1 + ... + k^{m-n-1}\right) \|x_0 - x_1\| \\ &= k^n \frac{(1 - k^{m-n})}{1-k} \|x_0 - x_1\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - x_1\| \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - x_1\| = 0$$

alors,

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall m \geq n \succ N_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - x_1\| \prec \varepsilon$$

La suite $(x_n)_n$ est donc de Cauchy et par conséquent admet une limite $x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n$. Montrons que la limite x est l'unique solution de l'équation 1.28. En effet, en vertu de la continuité de f,

$$f(x) = f\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_{n+1} = x$$

D'autre part, si y est une autre solution de l'équation 1.28 alors,

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \prec \|x - y\|$$

On aboutit donc à une contradiction. Donc, x est l'unique solution de l'équation 1.28. ■

Remarque. Le théorème du point fixe n'est pas spécifique aux espaces de Banach, il reste vrai dans tout espace métrique complet (E, d). Dans ce cas, la condition de contraction 1.27 devient,

$$\exists\ 0 \leq k \prec 1 :\ d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y), \qquad \forall x, y \in E \tag{1.29}$$

■

Chapitre 2

Opérateurs linéaires bornés dans les espaces normés

2.1 Définitions générales

Définition 2.1.1 *Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire de X dans Y est une application A définie sur X, à valeurs dans Y et vérifiant,* $\forall x,\ y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \qquad et \qquad A(\lambda \bullet x) = \lambda \bullet A(x) \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2 *Soient X et Y deux espaces normés de normes respectives $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$. Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est dit borné si,*

$$\exists M \geq 0 : \quad \forall x \in X; \quad \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X . \tag{2.2}$$

Exemples. Les opérateurs linéaires suivants sont tous bornés :

1. L'opérateur identité : $Id_X : X \longrightarrow X, \qquad x \longmapsto Id_X(x) = x;$

$$\forall x \in X : \ \|Id_X(x)\| = \|x\|$$

2. L'opérateur nul : $\theta : X \longrightarrow Y, \qquad x \longmapsto \theta(x) = 0_Y$ (*vecteur nul de Y*);

$$\forall x \in X : \ \|\theta(x)\| = \|0_Y\| = 0 = 0. \|x\|_X$$

3. L'homothétie vectorielle de rapport k : $H_k : X \longrightarrow X, \qquad x \longmapsto H_k(x) = k \bullet x;$

$$\forall x \in X : \ \|H_k(x)\| = \|k \bullet x\| = |k| \|x\|$$

4. L'opérateur de décalage (shift) :
$S : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \longmapsto A(x) = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$

$$\forall x \in l^p(\mathbb{R}) : \ \|S(x)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (S(x))_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

■

Exercice 2.1.3 *Donner la forme générale de l'opérateur linéaire A dans le cas où, X et Y sont de dimension finies.*

Proposition 2.1.4 *Un opérateur linéaire A, défini de X dans Y est borné si et seulement si, il transforme tout sous-ensemble borné de X en un sous-ensemble borné de Y.*

Preuve. (exercice). ■

Exercice 2.1.5 *Montrer qu'un opérateur A, défini de X dans Y est non borné si et seulement si, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que :*

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

Exercice 2.1.6 *Montrer que l'opérateur $A : (\mathbb{R}[X], \|.\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, défini par :*

$$A(P) = P'(1)$$

n'est pas borné.

Proposition 2.1.7 *Si $A : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire borné alors, il reste borné si on remplace les normes dans X et Y par des normes équivalentes.*
Preuve. *(exercice)* ■

Notation 2.1.8 *Etant donnés deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, on désigne par $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y (Si $X = Y$, on écrit $\mathcal{L}(X)$ au lieu de $\mathcal{L}(X,Y)$). On vérifie facilement que :*

1. $$(A,\ B) \in (\mathcal{L}(X,Y))^2 \quad et \quad \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow A + \lambda B \in \mathcal{L}(X,Y)\ ;$$

   En d'autres termes, $\mathcal{L}(X,Y)$ est aussi un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (On verra plus loin qu'on peut définir une norme dans cet espace).

2. $$A \in \mathcal{L}(X,Y) \quad et \quad B \in \mathcal{L}(Y,Z) \Longrightarrow B \circ A \in \mathcal{L}(X,Z)$$

Theorème 2.1.9 *Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est borné ;*
2. *A est continu sur tout l'espace X ;*
3. *A est continu en 0.*

Preuve. *L'implication $(1 \Longrightarrow 2)$, découle du fait qu'un opérateur borné est une application Lypschitzienne donc continue. L'implication $(2 \Longrightarrow 3)$ est évidente. Il suffit de démonter l'implication $(3 \Longrightarrow 1)$. Supposons donc que l'application linéaire A est continue au point 0 de X. On a alors,*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists \delta_\varepsilon \succ 0 :\ x \in X \quad et \quad \|x\|_X \prec \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|A(x) - A(0_X)\|_Y = \|A(x)\|_Y \prec \varepsilon.$$

Soit maintenant $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \neq 0$. Alors,

$$\left\| \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta_\varepsilon}{2} \prec \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left\| A\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y = \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \prec \varepsilon.$$

En d'autres termes,

$$x \in X \quad et \quad \|x\|_X \neq 0 \Longrightarrow \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \prec \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon}$$

Par conséquent,

$$\forall x \in X \Longrightarrow \|A(x)\|_Y \prec \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \|x\|_X .$$

■

Theorème 2.1.10 *Si l'espace vectoriels X est de dimension finie, alors tout opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est borné.*
Preuve. *En effet, soit $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base X. L'application*

$$\|.\|_\infty : X \longrightarrow \mathbb{K}; \quad \left\| x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bullet e_i \right\|_\infty = \sup_{1 \le i \le n} |\alpha_i|$$

définit une norme sur X, équivalente à la norme initiale $\|.\|_X$. Il suffit donc de démontrer la continuité pour la norme $\|.\|_\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\|A(x)\|_Y &= \left\| A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bullet e_i \right) \right\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bullet A(e_i) \right\|_Y \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \bullet \|A(e_i)\|_Y \le \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{1 \le i \le n} |\alpha_i| \right) \bullet \|A(e_i)\|_Y \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty \bullet \|A(e_i)\|_Y = M. \|x\|_\infty, \quad M = \sum_{i=1}^{n} \|A(e_i)\|_Y \succ 0.
\end{aligned}$$

■

2.2 Norme d'un opérateur borné

Définition 2.2.1 *Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. On appelle norme de l'opérateur A le nombre $\|A\|$, défini par :*

$$\|A\| = \inf \{ M \ge 0 : \ \|A(x)\|_Y \le M \|x\|_X \qquad (\forall x \in X) \} \tag{2.3}$$

Proposition 2.2.2 *Si $A : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire borné alors,*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| = 1} \|A(x)\| \tag{2.4}$$

Preuve. *Posons :*

$$\mathcal{M}_A = \{ M \ge 0 : \forall x \in X; \quad \|A(x)\|_Y \le M \|x\|_X \ \},$$

$$\alpha = \sup_{\|x\| \le 1} \|A(x)\|_Y, \quad \beta = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}, \quad \gamma = \sup_{\|x\| = 1} \|A(x)\|_Y.$$

Il est clair que $\|A\| = \inf(\mathcal{M}_A)$, $\alpha \ge \gamma$ et $\beta = \gamma$. Par ailleurs,

$$x \in X \text{ et } x \neq 0 \Longrightarrow \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \le \beta \Longrightarrow \|A(x)\|_Y \le \beta \|x\|_X \Longrightarrow \beta \in \mathcal{M}_A \Longrightarrow \|A\| \le \beta.$$

D'autre part,

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists x_\varepsilon \neq 0 : \ \beta - \varepsilon \prec \frac{\|A(x_\varepsilon)\|_Y}{\|x_\varepsilon\|_X} \le \beta.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists x_\varepsilon \neq 0 : \quad (\beta - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|_X \prec \|A(x_\varepsilon)\|_Y \le \|A\| \|x_\varepsilon\|_X$$

Cela signifie que $(\beta - \varepsilon) \prec \|A\|$. Comme ε est positif et arbitraire alors, $\beta \le \|A\|$.
Il reste à prouver que $\alpha \le \|A\|$. On a,

$$\begin{aligned}
\|A(x)\|_Y &\le \|A\| \|x\|_X, \quad \forall x \in X \Longrightarrow \|A(x)\|_Y \le \|A\| \|x\|_X, \quad \forall x \in X \ : \ \|x\|_X \le 1 \\
&\Longrightarrow \sup_{\|x\| \le 1} \|A(x)\|_Y \le \|A\| \Longrightarrow \alpha \le \|A\|.
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.2.3 *L'identité, l'opérateur, l'homothétie de rapport k et l'opérateur de décallage (Shift) S, ont pour normes respectives :*

$$\|Id_X\| = 1, \quad \|\theta\| = 0, \quad \|H_k\| = |k|, \quad \|S\| = 1$$

Dans la pratique, trouver la norme d'un opérateur n'est pas aussi direct et aussi simple que ne le laissent penser les exemples cités. Le résultat que nous allons maintenant énoncer est une règle pratique pour le calcul de la norme d'un opérateur borné.

Proposition 2.2.4 *Soient $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné et $M \geq 0$. On suppose que $\|A\| \leq M$ alors, pour avoir $\|A\| = M$, il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

1. *Il existe $x \in X$ vérifiant,*
$$\|x\| = 1 \quad et \quad \|A(x)\|_Y = M$$
2. *Il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X, vérifiant :*
$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A(x_n)\|_Y = M$$

Preuve. *La première assertion est une conséquence directe de la définition de la norme et du* sup. *Montrons la deuxième. Sous les hypothèses énoncées on a,*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \succ n_\varepsilon, \quad M - \varepsilon \prec \|A(x_n)\|_Y$$

Il s'ensuit que,

$$\forall \varepsilon \succ 0, \quad \|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|A(x)\| \geq M - \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0 dans cette dernière inégalité, on obtient : $\|A\| \geq M$. ■

Exemple 2.2.5 *Montrer que l'opérateur suivant est bien défini et trouver sa norme :*

$$A : (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty) \longrightarrow \left(L^2_{[0, 1]}, \|.\|_2\right); \quad Af(x) = xf(x)$$

Solution.

1. *Montrer que l'opérateur A est bien défini signifie qu'il faut montrer l'implication suivante :*
$$f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \Longrightarrow A(f) \in L^2_{[0, 1]}$$
On a :
$$\begin{aligned} \int_0^1 |Af(x)|^2 dx &= \int_0^1 |xf(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^2 \left(\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|\right)^2 dx \\ &= \|f\|_\infty^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \|f\|_\infty^2 \prec +\infty \end{aligned}$$
Par conséquent, $A(f) \in L^2_{[0, 1]}$ et l'opérateur A est donc bien défini.
2. *D'après la formule précédente, l'opérateur A est borné et $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Montrons qu'en fait, $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour cela, considérons la fonction constante $f(x) = 1 \ \forall x \in [0, 1]$. On a :*
$$f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \quad et \quad \|f\|_\infty = 1$$
De plus,
$$\|A(f)\|_2^2 = \int_0^1 |Af(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$
D'après le point 1 de la proposition 2.2.4, on a l'égalité $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

■

Exemple 2.2.6 *Montrer que l'opérateur suivant est bien défini et trouver sa norme :*

$$A : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}) ; \quad A(x = x_1,\ x_2, ...,\ x_n, ...) = \left(0,\ \frac{x_2}{2}, ..., \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n, ...\right)$$

Solution.

1. *Pour tout* $x = (x_1,\ x_2, ...,\ x_n, ...) \in l^2(\mathbb{R})$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} |A(x)_k|^2 = \sum_{k=2}^{+\infty} \left|\left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$
Par conséquent, l'opérateur $A(x) \in l^2(\mathbb{R})$ *et l'opérateur* A *est bien défini.*
2. *D'après la question précédente, l'opérateur* A *est borné et* $\|A\| \leq 1$. *Montrons que* $\|A\| = 1$. *Pour cela, considérons la suite :*
$$\left(x^{(n)} = \left(\underbrace{0, ..., 0, 1}_{n}, 0, ...\right)\right)_n$$
Il est clair que $\left\|x^{(n)}\right\|_2 = 1 \quad \forall n \geq 1$. *De plus,*
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left\|A\left(x^{(n)}\right)\right\|_2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left\|\left(\underbrace{0, ..., 0, \left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{n}, 0, ...\right)\right\|_2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$
D'après le point 2 de la proposition 2.2.4, on a l'égalité $\|A\| = 1$.

■

Proposition 2.2.7 *On a les propriétés suivantes :*

1. $$\forall A \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \|A(x)\|_Y \leq \|A\| \|x\|_X \qquad \forall x \in X$$
2. $$\begin{cases} A \in \mathcal{L}(X, Y) \ \ et \ \ \|A\| = 0 \Longrightarrow A = 0 \ (\textit{opérateur nul}) \\ \|\lambda \bullet A\| = |\lambda| \|A\| \quad \forall A \in \mathcal{L}(X, Y) \ \ et \ \ \lambda \in \mathbb{K} \\ \forall A,\ B \in \mathcal{L}(X, Y) ; \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{cases}$$
On déduit de ce point en particulier que l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ *est normé.*
3. $$A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad et \quad B \in A \in \mathcal{L}(Y, Z) \Longrightarrow \begin{cases} B \circ A \in A \in \mathcal{L}(X, Z) \\ et \\ \|B \circ A\| \leq \|A\| \|B\| \end{cases}$$

Theorème 2.2.8 *Si* Y *est de Banach alors, muni de la norme d'opérateur (formules 2.3 et 2.4), l'espace* $\mathcal{L}(X, Y)$ *est aussi de Banach.*
Preuve. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite de Cauchy d'éléments de* $\mathcal{L}(X, Y)$. *Cela signifie que :*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n,\ m \geq N_\varepsilon,\ \|A_n - A_m\| = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|A_n(x) - A_m(x)\|_Y}{\|x\|_X}\right) \prec \varepsilon \qquad (2.5)$$

On en déduit que,

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad \forall n,\ m \succ N_\varepsilon, \quad \|A_n(x) - A_m(x)\|_Y \prec \varepsilon \|x\|_X \qquad \forall x \in X \tag{2.6}$$

La formule 2.6 signifie que pour tout $x \in X$, la suite $(A_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach Y. Considérons maintenant l'opérateur,

$$A : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto A(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n(x) \tag{2.7}$$

L'opérateur A est bien défini (car $\lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n(x)$ existe) et il est linéaire. Montrons que la suite $(A_n)_n$ converge vers A au sens de la norme de $\mathcal{L}(X,Y)$. En faisant tendre m vers $+\infty$ dans la formule 2.6, on obtient :

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad n \succ N_\varepsilon \text{ et } x \in X \Longrightarrow \|A_n(x) - A(x)\|_Y = \|(A_n - A)(x)\|_Y \prec \varepsilon \|x\|_X$$

Ce qui signifie que

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad n \succ N_\varepsilon \Longrightarrow \|A_n - A\| \prec \varepsilon \tag{2.8}$$

De plus,

$$x \in X \quad \text{et} \quad n \succ N_\varepsilon \Longrightarrow \|A(x)\|_Y \leq \|(A - A_n)(x)\|_Y + \|A_n(x)\|_Y \leq (\varepsilon + \|A_n\|) \|x\|_X \tag{2.9}$$

Les formules 2.8 et 2.9 signifient que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n = A$ au sens de la norme de $\mathcal{L}(X,Y)$. ■

2.3 Prolongement par continuité d'un opérateur linéaire

Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ était défini sur tout X. Il peut arriver cependant que A soit défini seulement sur un sous-espace $D(A)$ (domaine de A) de X. Dans ce cas, deux possibilités se présentent :

1. **Première possibilité** :

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = X \quad \text{et} \quad \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \left\| \frac{A(x)}{\|x\|_X} \right\|_Y = M \prec +\infty$$

   Dans ce cas, l'opérateur A peut être prolongé à tout X par continuité avec conservation de la norme.

2. **Deuxième possibilité** :

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = X \quad \text{et} \quad \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \left\| \frac{A(x)}{\|x\|_X} \right\|_Y = +\infty$$

   Ce cas de figure sort du cadre du présent cours.

Proposition 2.3.1 *(Prolongement par continuité) Supposons que l'espace Y est de Banach et que,*

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = X \quad \text{et} \quad \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \left\| \frac{A(x)}{\|x\|_X} \right\|_Y = M \prec +\infty$$

Alors, il existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ tel que :

$$\widetilde{A}(x) = A(x) \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{et} \qquad \left\|\widetilde{A}\right\| = M$$

L'opérateur $\widetilde{A}$ est appelé prolongement par continuité de A.
Preuve. *Puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ alors,*

$$\forall x \in X, \quad \exists (x_n)_n \subset \mathcal{D}(A): \quad x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n$$

D'autre part,

$$\|A(x_n) - A(x_m)\|_Y \leq M \|x_n - x_m\|_X$$

Il découle de cette dernière inégalité que la suite $(A(x_n))_n$ est de Cauchy (car $(x_n)_n$ est de Cauchy). Par conséquent,

$$\exists y \in Y: \ y = \lim_{n \longrightarrow +\infty} A(x_n) \tag{2.10}$$

Supposons que $(x'_n)_n \subset \mathcal{D}(A)$ est une autre suite d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ convergente vers x et posons : $y' = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} A(x'_n)$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y - y'\| \leq \|y - A(x_n)\| + \|A(x_n) - A(x'_n)\| + \|A(x'_n) - y'\| \\ &\leq \|y - A(x_n)\| + M\|x_n - x'_n\| + \|A(x'_n) - y'\| \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient que $y = y'$. On a ainsi montré que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} A(x_n)$ existe toujours et est indépendant du choix de la suite $(x_n)_n$ convergente vers x.
Posons

$$\widetilde{A}: X \longrightarrow Y; \quad x \longmapsto \widetilde{A}(x) = y = \lim_{n \longrightarrow +\infty} A(x_n) \quad (d'après\ formule\ 2.10)$$

Il est clair que $\widetilde{A}$ est linéaie et vérifie $\widetilde{A}(x) = A(x)$ pour tout $x \neq 0 \in \mathcal{D}(A)$. D'autre part, pour tout $x \in X$,

$$\widetilde{A}(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} A(x_n) \Longrightarrow \left\| \frac{\widetilde{A}(x)}{\|x\|_X} \right\|_Y = \left\| \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{A(x_n)}{\|x_n\|_X} \right\|_Y = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left\| \frac{A(x_n)}{\|x_n\|_X} \right\| \leq M$$

Cette dernière formule montre que

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \left\| \frac{\widetilde{A}(x)}{\|x\|_X} \right\|_Y \leq M \tag{2.11}$$

D'autre part,

$$\mathcal{D}(A) \subset X \Longrightarrow M = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \left\| \frac{A(x)}{\|x\|_X} \right\|_Y = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \left\| \frac{\widetilde{A}(x)}{\|x\|_X} \right\|_Y \leq \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \left\| \frac{\widetilde{A}(x)}{\|x\|_X} \right\|_Y \tag{2.12}$$

Les formules 2.11 et 2.12 nous donnent l'égalité, $\left\|\widetilde{A}\right\| = M$. ■

2.4 Convergence simple, convergence uniforme

Définition 2.4.1 *Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. On dit qu'une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{L}(X,Y)$ converge vers $A \in \mathcal{L}(X,Y)$:*

1. *fortement si,*

$$\forall x \in X, \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n(x) - A(x)\|_Y = 0. \tag{2.13}$$

   Dans ce cas, on écrit : $A_n \xrightarrow{s} A$ (le symbole s vient du mot anglais "strongly" qui signifie fortement).

2. uniformèment si,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n - A\| = 0 \tag{2.14}$$

Dans ce cas, on écrit : $A_n \overset{u}{\longrightarrow} A$ *ou* $A_n \rightrightarrows A$.

Remarque.

1. La convergence uniforme d'une suite d'opérateurs bornés est la convergence dans l'espace $\mathcal{L}(X,Y)$.
2. $$\left(A_n \overset{u}{\longrightarrow} A\right) \Longrightarrow \left(A_n \overset{s}{\longrightarrow} A\right)$$

   En effet, puisque pour tout n, l'opérateur $A_n - A$ est un élément de $\mathcal{L}(X,Y)$ alors,

   $$0 \leq \|A_n(x) - A(x)\|_Y \leq \|A_n - A\| \|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

   D'où, par passage à la limite,

   $$0 \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n(x) - A(x)\|_Y \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n - A\| \|x\|_X = 0 \qquad \forall x \in X$$
3. Il existe des suites fortement convergentes mais qui ne convergent pas uniformément. Soit $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ une base Hilbertienne de l'espace $l^2(\mathbb{R})$. Considérons dans cet espace, la suite d'oprateurs :

   $$P_n : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R})\,; \qquad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \prec x,\ e_k \succ e_k \ \longmapsto P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \prec x,\ e_k \succ e_k.$$

   Pour tout x dans $l^2(\mathbb{R})$,

   $$\|P_n(x) - x\|_2^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \prec x,\ e_k \succ e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\prec x,\ e_k \succ|^2$$

   Cette quantité est le reste de la série convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} |\prec x,\ e_k \succ|^2 = \|x\|_2^2$. Elle converge donc vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$. Ainsi,

   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|(P_n - Id)(x)\|_2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|P_n(x) - x\|_2 = \sqrt{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\prec x,\ e_k \succ|^2} = 0 \quad \forall x \in l^2(\mathbb{R})$$

   Donc, $P_n \overset{s}{\longrightarrow} Id$. Montrons qu'on n'a pas cependant la convergence uniforme. En effet, pour tout naturel $n \geq 1$, posons $x_n = e_1 + ... + e_n + e_{n+1}$. Alors,

   $$\|(P_n - Id)(x_n)\|_2 = \|P_n(x_n) - x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\prec e_{n+1},\ e_k \succ|^2} = 1$$

   D'où, $\|P_n - Id\|_2 \geq 1$ pour tout naturel $n \geq 1$. Par conséquent, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|P_n - Id\|_2 \geq 1$ et on n'a donc pas $P_n \rightrightarrows Id$.
4. $$(A_n \rightrightarrows A) \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n\| = \|A\|$$

   Cela découle directement de l'inégalité

   $$|\|A_n\| - \|A\|| \leq \|A_n\| = \|A_n - A\|$$

   Comme le montre l'exemple précédent, l'inverse n'est pas vrai. En effet, on n'a pas $P_n \rightrightarrows Id$ mais,

   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|P_n\| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (1) = 1 = \|Id\|$$

■

2.5 Principe de la borne uniforme, théorème de Banach-Steinhaus

Définition 2.5.1 *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces vectoriels normés. Une famille* $(A_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* $\mathcal{L}(X,Y)$ *est dite :*

1. uniformément bornée, si $\sup\limits_{i\in I}\|A_i\| \prec +\infty$, c'est à dire :

$$\exists\, 0 \leq M \prec +\infty : \ \|A_i\| \leq M \quad \forall i \in I \tag{2.15}$$

simplement bornée si, $\forall x \in X, \ \sup\limits_{i\in I}\|A_i(x)\|_Y \prec +\infty$, c'est à dire :

$$\forall x \in X, \ \exists\, 0 \leq M_x \prec +\infty : \ \|A_i(x)\| \leq M_x \quad \forall i \in I \tag{2.16}$$

Remarque. Il est clair que

$$(A_i)_{i\in I} \ \ uniform\acute{e}ment\ born\acute{e}e \quad \Longrightarrow (A_i)_{i\in I} \ simplement\ born\acute{e}e$$

En général, l'inverse n'est pas vrai. Cependant, le théorème de Banach-Steinhaus que nous allons immédiatement énoncer (sans démonstration[1]), nous fournit une situation où ces deux notions coïncident. ■

Theorème 2.5.2 *(de Banach-Steinhaus) Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces vectoriels normés. On suppose que* $(X, \|.\|_X)$ *est de Banach. Alors,*

$$(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{L}(X,Y) \ uniform\acute{e}ment\ born\acute{e}e \Longleftrightarrow (A_i)_{i\in I} \ simplement\ born\acute{e}e.$$

Corollaire 2.5.3 *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces vectoriels normés. On suppose que* $(X, \|.\|_X)$ *est de Banach. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'éléments de* $\mathcal{L}(X,Y)$ *telle que pour tout* $x \in X$*, la limite* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} A_n(x)$ *existe dans* Y*. Alors, l'application* A *définie de* X *dans* Y *par :*

$$A : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto A(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} A_n(x)$$

est un élément de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Preuve. La linéarité de A est évidente. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
(A_n(x))_n \ converge\ pour\ tout\ x \quad &\Longrightarrow \quad (A_n(x))_n \ born\acute{e}e\ pour\ tout\ x \\
&\Longrightarrow \quad \forall x \in X, \ \exists M_x \succ 0 : \ \|A_n(x)\|_Y \leq M_x, \quad \forall n \\
&\Longrightarrow \quad \forall x \in X, \ \sup_{n\in\mathbb{N}}\|A_n(x)\|_Y \leq M_x \prec +\infty \\
&\Longrightarrow \quad \forall x \in X, \ la\ famille \ \ (A_n(x))_n \ \ est\ simplement\ born\acute{e}e
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Banach-Steionhaus, la famille $(A_n)_n$ est uniformément bornée, c'est à dire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout n, $\|A_n\| \leq M$. D'où,

$$\forall x \in X; \ \ \|A(x)\|_Y = \left\|\lim_{n\longrightarrow+\infty} A_n(x)\right\|_Y = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\|A_n(x)\|_Y \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty}\|A_n\|\,\|x\|_X \leq M\,\|x\|_X$$

■

[1] La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de Baire qui sort du cadre du présent cours)

2.6 Théorème de Banach sur l'opérateur inverse

Définition 2.6.1 *Soient* $(X,\ \|.\|_X)$ *et* $(Y,\ \|.\|_Y)$ *deux espaces normés. Une application* $A : X \longrightarrow Y$ *est dite ouverte si l'image de tout ouvert de* X *est un ouvert de* Y*.*

Remarques.

1. Tout homéomorphisme de X dans Y est une application ouverte.
2. Une application constante de X dans Y ne peut être ouverte car, l'image de tout sous-ensemble de X est un singleton donc fermé de Y.

■

Pour les éléments de $\mathcal{L}(X,Y)$, on a le résultat très utile suivant (nous admettrons ce résultat sans démonstration).

Theorème 2.6.2 *(de l'application ouverte) Soient* $(X,\ \|.\|_X)$ *et* $(Y,\ \|.\|_Y)$ *deux espaces de Banach. Alors, tout élément surjectif* A *de* $\mathcal{L}(X,Y)$ *est une application ouverte.*

Définition 2.6.3 *Soient* $(X,\ \|.\|_X)$ *et* $(Y,\ \|.\|_Y)$ *deux espaces normés. On appelle isomorphisme entre* X *et* Y *tout opérateur* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *inversible et à inverse borné de* Y *dans* X*.*

Notation 2.6.4 *L'ensemble des isomorphismes entre* X *et* Y *est noté* $Iso(X,\ Y)$*. Ainsi,*

$$A \in Iso(X,\ Y) \Longleftrightarrow \begin{cases} A \text{ bijection entre } X \text{ et } Y \\ A \in \mathcal{L}(X,Y) \\ A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X) \end{cases} \tag{2.17}$$

Si $X = Y$*, on écrit* $Iso(X)$ *au lieu de* $Iso(X,\ X)$*.*

Theorème 2.6.5 *(de l'isomorphisme de Banach) Soient* $(X,\ \|.\|_X)$ *et* $(Y,\ \|.\|_Y)$ *deux espaces de Banach et* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$*. Alors,*

$$A \text{ bijection entre } X \text{ et } Y \Longrightarrow A \in Iso(X,\ Y)$$

Preuve. Notons tout d'abord que ce théorème signifie tout simplement que l'inverse d'un opérateur linéaire borné et bijectif est aussi un opérateur linéaire borné. Pour la preuve, il suffit de remarquer que d'après le théorème de l'application ouverte,

$$\begin{aligned} A \text{ linéaire, bornée et bijective} &\Longrightarrow A \text{ linéaire, bornée et surjective} \\ &\Longrightarrow A \text{ linéaire, bornée et l'image par } A \text{ de tout} \\ &\qquad \text{ouvert de } X \text{ est un ouvert de } Y \\ &\Longrightarrow \text{l'image par } \left(A^{-1}\right)^{-1} = A \text{ de tout ouvert} \\ &\qquad \text{de } X \text{ est un ouvert de } Y \\ &\Longrightarrow \text{l'application } A^{-1} \text{ est continue de } Y \text{ dans } X \\ &\Longrightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X). \end{aligned}$$

■

Theorème 2.6.6 *Si X et Y sont de Banach alors, l'ensemble $Iso\,(X,\ Y)$ est un ouvert de $\mathcal{L}\,(X, Y)$.*

Preuve. *Pour établir ce résultat, nous allons montrer que pour tout $A \in Iso\,(X,\ Y)$, la boule ouverte $B_O\left(A,\ \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$ est entièrement incluse dans $Iso\,(X,\ Y)$. Cela revient à montrer que :*

$$B \in \mathcal{L}\,(X, Y) \qquad et \quad \|B\| \prec \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Longrightarrow A + B \in Iso\,(X,\ Y)$$

Pour tout $y \in Y$ (fixé), considérons l'application :

$$C_y : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto C_y\,(x) = A^{-1}\,(y) - A^{-1}B\,(x) \tag{2.18}$$

Pour tous $x_1,\ x_2 \in X$,

$$\|C_y\,(x_1) - C_y\,(x_2)\| = \left\|A^{-1}B\,(x_2) - A^{-1}B\,(x_1)\right\| = \left\|A^{-1}B\,(x_1 - x_2)\right\| \leq \left\|A^{-1}B\right\| \|x_1 - x_2\|$$

On a par hypothèse,

$$k = \left\|A^{-1}B\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|B\| \prec \left\|A^{-1}\right\| . \frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1.$$

L'application C_y est donc k -lypschitzienne avec $k \prec 1$. D'après le théorème du point fixe, il existe un unique $x \in X$ tel que $C_y\,(x) = x$.
On en déduit que,

$$\forall y \in Y,\ \exists! x \in X : A^{-1}\,(y) - A^{-1}B\,(x) = x$$

ou sous forme équivalente,

$$\forall y \in Y,\ \exists! x \in X : y = A\,(x) + B\,(x) = (A + B)\,(x) \tag{2.19}$$

Ainsi donc, l'opérateur $A + B$ est défini sur tout X, borné et inversible. D'après le théorème sur l'opérateur inverse, l'opérateur $(A + B)^{-1}$ est aussi borné d'où, $A + B \in Iso\,(X,\ Y)$. ■

Chapitre 3

Dualité

3.1 Identifications entre espaces normés

Définition 3.1.1 *Soient* $(X,\ \|.\|_X)$ *et* $(Y,\ \|.\|_Y)$ *deux espaces normés. Un opérateur linéaire* $A : X \longrightarrow Y$ *est appelé isométrie si,*

$$\|A(x)\|_Y = \|x\|_X \qquad \forall x \in X \tag{3.1}$$

Il est clair que :

1. Une isométrie est un opérateur borné de norme 1.
2. Une isométrie est toujours injective.
3. Si A est une isométrie surjective alors, $A \in Iso(X,\ Y)$ et A^{-1} est une isométrie de Y dans X.
4. Si les espaces X et Y sont deux espaces de Hilbert alors,

$$A \text{ isométrie} \iff \forall x_1,\ x_2 \in X :\ \prec A(x_1),\ A(x_2) \succ_Y = \prec x_1,\ x_2 \succ_X$$

$$\Leftrightarrow \quad A^* A = Id_X$$

Exercice 3.1.2 *L'opérateur de décalage (Shift) S dans l^2, est une isométrie non surjective.*

Exercice 3.1.3 *L'opérateur de multiplication par la fonction e^{it} dans $L^2_{[0,\ 1]}$ est une isométrie surjective.*

Définition 3.1.4 *Deux* $\mathbb{K}$ *-espaces normés* $(X,\ \|.\|_X)$ *et* $(Y,\ \|.\|_Y)$*, sont dits isométriques s'il existe une isométrie A définie de X dans Y. Si en plus, l'isométrie A est surjective alors, ils sont dits isométriquement isomorphes et l'opérateur A est appelé isomorphisme isométrique.*

Remarques.

1. Si A est un isomorphisme isométrique de $(X,\ \|.\|_X)$ dans $(Y,\ \|.\|_Y)$ alors, A^{-1} est un isomorphisme isométrique de $(Y,\ \|.\|_Y)$ dans $(X,\ \|.\|_X)$.
2. Si A est un isomorphisme isométrique de $(X,\ \|.\|_X)$ dans $(Y,\ \|.\|_Y)$ et B est un isomorphisme isométrique de $(Y,\ \|.\|_Y)$ dans $(Z,\ \|.\|_Z)$ alors, $B \circ A$ est un isomorphisme isométrique de $(X,\ \|.\|_X)$ dans $(Z,\ \|.\|_Z)$.
3. On dit de deux espaces normés $(X,\ \|.\|_X)$ et $(Y,\ \|.\|_Y)$ isométriquement isomorphes qu'ils s'identifient l'un à l'autre ou qu'ils sont les réalisations d'un même espace. Dans ce cas, on écrit $(X,\ \|.\|_X) = (Y,\ \|.\|_Y)$.

■

Proposition 3.1.5 *Si X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On peut alors définir sur une norme $\|.\|$ telle que les espaces normés $(X,\ \|.\|_X)$ et $(\mathbb{K}^n,\ \|.\|_\infty)$ soient isométriquent isomorphes.*

Preuve. Rappelons que la norme $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{K}^n$ est donnée par la formule :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...,\ \alpha_n\ ) \in \mathbb{K}^n \Longrightarrow \|\alpha\|_\infty = \sup_{1\ \le\ i\ \le\ n} |\alpha_i|$$

Soit donc $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de X. L'application,

$$\left\| x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet e_i \right\| = \sup_{1\ \le\ i\ \le\ n} |x_i|$$

définit une norme sur X. Considérons l'opérateur :

$$A : X \longrightarrow \mathbb{K}^n; \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet e_i \longmapsto A(x) = (x_1, x_2, ...,\ x_n\ ) \tag{3.2}$$

Il est très facile de montrer que A est un isomorphisme isométrique de X dans $\mathbb{K}^n$. ■

Corollaire 3.1.6 *Si X et Y sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie n alors, on peut alors définir une norme $\|.\|_X$ sur X et une norme $\|.\|_Y$ sur Y telles que les espaces normés $(X,\ \|.\|_X)$ et $(Y,\ \|.\|_Y)$ soient isométriquement isomorphes.*

La proposition précédente, a son équivalent en dimension infinie pour les espaces de Hilbert séparable.

Proposition 3.1.7 *Tout espace de Hilbert séparable est isométriquement isomorphe à l^2.*

Preuve. Soit H un espace de Hilbert sépaerable, muni du produit scalaire $\prec .,. \succ$. Il existe donc dans H une base hilbertienne $(e_i)_{i=1}^{+\infty}$ vérifiant :

$$x \in H \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{+\infty} \prec x, e_i \succ \bullet\ e_i \quad et \quad \|x\|^2 = \prec x,\ x \succ = \sum_{i=1}^{+\infty} |\prec x, e_i \succ|^2 \tag{3.3}$$

Considérons l'opérateur $A : H \longrightarrow l^2$ donné par la formule :

$$A\left(x = \sum_{i=1}^{+\infty} \prec x, e_i \succ \bullet\ e_i\right) = (\prec x, e_i \succ)_{i=1}^{+\infty} \tag{3.4}$$

On vérifie aisément que l'opérateur est bien défini et que c'est isomorphisme isométrique entre H et l^2 (démontrer). ■

Corollaire 3.1.8 *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes entre eux.*

Remarque. Soient $(X,\ \|.\|_X)$ et $(Y,\ \|.\|_Y)$ deux $\mathbb{C}$ -espaces ectoriels normés. Une application $A : X \longrightarrow Y$ est dite anti-linéaire si :

$$\forall (x,\ y) \in X \times X, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \ \ A(x + \lambda \bullet y) = A(x) + \overline{\lambda} \bullet A(y)$$

Dans ce cas, $\|A\|$ se définit de la même manière que dans le cas linéaire et les résultats de continuité et de bornétude restent vrais. De même, on pourra identifier X à Y s'il existe un isomorphisme isométrique anti-linéaire entre eux. Notons enfin que la composée de deux applications antilinéaires est une application linéaire et que la composée d'une application antilinéaire avec une application linéaire est une application antilinéaire. On adoptera donc la définition suivante d'espaces complexes isométriquement isomorphes . ■

Définition 3.1.9 *Deux $\mathbb{C}$ -espaces normés complexes $(X,\ \|.\|_X)$ et $(Y,\ \|.\|_Y)$ sont dits isométriquement isomorphes s'il existe un isomorphisme (linéaire ou antilinéaire) isométrique entre eux.*

Proposition 3.1.10 *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes.*

3.2 Espace dual d'un espace normé

Définition 3.2.1 *Soit $(X,\ \|.\|_X)$ un e.v.n. On appele :*

1. *dual algèbrique de X, l'ensemble des applications linéaires sur X. Le dual algèbrique de X est noté $X^{\#}$.*
2. *dual topologique de X l'ensemble $\mathcal{L}(X,\ \mathbb{K})$ des applications linéaires continues de X dans $\mathbb{K}$. Le dual topologique de X est noté X^{*}*
3. *Les éléments de l'espace $X^{*} = \mathcal{L}(X,\ \mathbb{K})$, sont appelés fonctionnelles linéaires continues (bornées).*

Remarques.

1. D'une manière générale, $X^{*} \subset X^{\#}$. En dimension finie, ils coïncident.
2. Le dual topologique $X^{*} = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace de Banach.

■

Proposition 3.2.2 *Pour tout naturel non nul n, le dual topologique de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ s'identifie à $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ lui même ($\|.\|_2$ désigne la norme euclidéenne).*

Preuve. Rappelons que

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit donc $B_n = \{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout élément $f \in (\mathbb{R}^n)^*$,

$$x \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet\ e_i \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i . f(\ e_i)$$

D'où,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i . f(e_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| . |f\ \ (e_i)| \qquad (3.5) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on pose

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{-\frac{1}{2}} (f(e_1), ...,\ f(e_n)) \tag{3.6}$$

alors,

$$\|a\|_2 = 1 \quad et \qquad |f(a)| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

Les formules 3.5, 3.6 et 3.7 montrent que,

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f\,(\,e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

Considérons maintenant l'opérateur :

$$T : (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)\,; \qquad f \longmapsto T\,(f) = \sum_{i=1}^{n} f\,(e_i) \bullet\ e_i \tag{3.9}$$

On vérifie facilement que T est un isomorphisme isométrique (démontrer). ■

Proposition 3.2.3 *Pour tout* $p \in]1,\ +\infty[$, $\left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*$ *s'identifie à* $\left(l^q,\ \|.\|_q\right)$ *où,* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *Plus précisèment,*

$$f \in \left(l^p,\ \|.\|_p\right)^* \Longleftrightarrow \exists! a = (a_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^q : \left\{\begin{array}{c} f\,(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} a_i.x_i \qquad \forall x = (x_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^p \\ et \\ \|f\| = \|a\|_q = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Preuve. Supposons pour fixer les idées que le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout $a = (a_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^q$, on définit l'application $L_a : l^p \longrightarrow \mathbb{C}$ par la relation

$$L_a\left(x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i.x_i \tag{3.11}$$

L'appication L_a est bien définie en vertu de l'inégalité de Holder. Elle est aussi linéaire et pour tout $x = (x_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^p$,

$$|L_a\,(x)| = \left|\sum_{i=1}^{+\infty} a_i.x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i.x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_q\,\|x\|_p$$

D'où,

$$\|L_a\| \leq \|a\|_q\,.$$

Par ailleurs,

$$b = \left(\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^q\right)^{-\frac{1}{p}} sign\,(a_i)\,|a_i|^{q-1}\right)_{i=1}^{+\infty} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \|b\|_p = 1 \\ et \\ |L_a\,(b)| = \|a\|_q \end{array}\right. \Longrightarrow \|L_a\| = \|a\|_q\,.$$

Ainsi donc, pour tout $a = (a_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^q$, $L_a \in \left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*$.
Considérons maintenant l'application

$$L : l^q \longrightarrow \left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*; \qquad a \in l^q \longmapsto L\,(a) = L_a \tag{3.12}$$

On a,

$$L\,(a + \lambda b) = L_a + \lambda L_b \qquad \forall a,\ b \in l^q\ \ et\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Donc, l'application L est linéaire et isométrique (donc injective) de l^q dans $\left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*$. Si on démontre qu'elle est en plus surjective, on aura établi que l^q et $\left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*$ sont isométriquement isomorphes. Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ la base canonique de l^p et soit $f \in \left(l^p,\ \|.\|_p\right)^*$. Alors

$$x \in l^p \Longrightarrow \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bullet e_i \\ \quad avec \\ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \prec +\infty \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i . f(e_i). \tag{3.13}$$

Posons $a = (f(e_i))_{i=1}^{+\infty}$. Il est clair que $f = L(a)$. Montrons que $a \in l^q$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, posons

$$c = (c_i)_{i=1}^{+\infty} \quad avec \quad c_i = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^q\right)^{-\frac{1}{p}} sign\,(f(e_i))\,|f(e_i)|^{q-1} & si \quad i \leq N \\ 0 & si \ i \succ N \end{cases}$$

On alors, $c \in l^p$ et $\|c\|_p = 1$. De plus,

$$\begin{aligned} |f(c)| &= \left(\sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q\right)^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q = \left(\sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| \end{aligned} \tag{3.14}$$

Comme la relation 3.14 est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ alors,

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |f(e_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

c'est à dire que $a = (f(e_i))_{i=1}^{+\infty} \in l^q$. ■

Exercice 3.2.4 *Traiter le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en posant,*

$$L_a\left(x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i . \overline{a_i}$$

Pour les espaces de fonctions à puissances intègrables, on a le résultat similaire suivant :

Proposition 3.2.5 *Pour tout $p \in]1,\ +\infty[$, l'espace réel $\left(L^p(\Omega),\ \|.\|_p\right)^*$ s'identifie à l'espace réel $\left(L^q(\Omega),\ \|.\|_q\right)$ où, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Plus précisèment,*

$$f \in \left(L^p(\Omega),\ \|.\|_p\right)^* \Longleftrightarrow \exists! g \in \left(L^q(\Omega),\ \|.\|_p\right) : \begin{cases} f(x) = \int_\Omega x(t)\, g(t)\, dt \\ et \\ \|f\| = \|g\|_q = \left(\int_\Omega |g(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{cases} \tag{3.15}$$

Dans le cas complexe, la fonctionnelle f est de la forme :

$$f(x) = \int_\Omega x(t)\,\overline{g(t)}dt$$

Pour les espaces de Hilbert, on a le théorème d'identifiaction suivant.

Theorème 3.2.6 *(de représentation de Riesz) Pour tout espace de Hilbert H (réel ou complexe), le dual topologique H^* s'identifie à H.*

Preuve. Soit H un espace de Hilbert (qu'on supposera complexe pour fixer les idées), muni du produit scalaire $\prec .,. \succ$. Pour tout $a \in H$, désignons par f_a l'application définie par :

$$f_a : H \longrightarrow \mathbb{C}; \quad x \longmapsto f_a(x) = \prec x, a \succ \tag{3.16}$$

L'application f_a ainsi définie est linéaire. De plus, pour tout $x \in H$ on d'après l'inégalité de Cauchy-schwartz

$$|f_a(x)| = |\prec x, a \succ| \leq \|a\|_H \,.\, \|x\|_H \Longrightarrow \|f\| \leq \|a\|_H$$

Par ailleurs,

$$b = \frac{a}{\|a\|_H} \Longrightarrow \|b\|_H = 1 \quad et \quad |f_a(b)| = \|a\|_H$$

Donc, $\|f\| = \|a\|_H$. On en conclut que $f_a \in H^*$.

Considérons maintenant l'application

$$L : H \longrightarrow H^*; \quad a \longmapsto L(a) = f_a \tag{3.17}$$

D'après ce qui précéde, L est bien définie, elle est antilinéaire et isométrique donc, injective. Pour montrer que H^* s'identifie à H, il suffit de montrer qu'elle est surjective. Soit donc $f \in H^*$ et montrons qu'il existe $a \in H$ tel que $f = L(a) = f_a$. On supposera que f n'est pas identiquement nulle (car dans le cas contraire, on a $f = L(0_H)$). Soit $N(f) = \{x \in H : \; f(x) = 0\}$. C'est un sous-espace fermé de H (car f est continue). f n'étant pas identiquement nulle, le sous-espace $(N(f))^\perp$ est de dimension 1. Ainsi donc,

$$x \in H \Longrightarrow x = y + \lambda \bullet b, \quad y \in N(f), \;\; b \in (N(f))^\perp \;\; et \;\; \|b\|_H = 1 \tag{3.18}$$

Par conséquent,

$$f(x) = \lambda f(b) = \prec x, \; \overline{f(b)} \bullet b \succ = \prec x, \; a \succ, \quad a = \overline{f(b)} \bullet b \in H. \tag{3.19}$$

D'où, $f = L(a) = f_a$. ■

3.3 Espaces réflexifs

Soient X un espace normé et X^* son dual topologique. Comme X^* est aussi un espace normé, on peut donc parler du dual $(X^*)^*$ de X^*. L'ensemble $(X^*)^*$ se note X^{**} et est appelé bidual de X. Notre but dans cette section est d'établir le lien pouvant exister entre un espace normé et son bidual.

Soit donc X un espace normé et X^* son dual topologique. Pour tout $x \in X$, considérons l'application :

$$\widetilde{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}; \quad f \longmapsto \widetilde{x}(f) = f(x) \tag{3.20}$$

On vérifie facilement que l'application $\widetilde{x}$ est linéaire. De plus,

$$\|\widetilde{x}\| = \sup_{\|f\|=1} |\widetilde{x}(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \sup_{\|f\|=1} \|f\| \, \|x\|_X = \|x\|_X \,. \tag{3.21}$$

C'est à dire que $\|\widetilde{x}\| \leq \|x\|_X$. Par ailleurs, d'après le théorème de Hahn-Banach (conséquences du théorème dans les espaces normés), il existe $f \in X^*$ telle que :

$$\|f\| = 1 \quad et \quad f(x) = \|x\|_X \tag{3.22}$$

Donc, $\|\widetilde{x}\| = \|x\|_X$. En d'autres termes, pour tout $x \in X$, $\widetilde{x}$ est un élément de X^{**}.

Soit maintenant l'application :

$$J : X \longrightarrow X^{**}; \qquad x \longmapsto J(x) = \widetilde{x} \tag{3.23}$$

D'après ce qui précède, J est bien définie et isométrique (donc injective). De plus, on vérifie facilement qu'elle est linéaire.

Définition 3.3.1 *L'espace normé X est dit réflexif si l'application J est surjective (c'est à dire bijective). Cela signifie que X s'identifie isométriquement avec son bidual X^{**}.*

Proposition 3.3.2 *Un espace normé réflexif X est nécessairement de Banach.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X. Comme l'application J est une isométrie entre X et X^{**}, elle est uniformément continue. Donc, $(J(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans X^{**} qui est complet. Soit $y = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n)$. Alors,

$$J^{-1}(y) \in X \quad et \quad J^{-1}(y) = J^{-1}\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n)\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} J^{-1}(J(x_n)) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n.$$

■

Remarque. D'après la proposition que nous venons juste d'établir, les espaces normés non complets fournissent des exemples d'espaces non réflexifs. Il est à noter cependant qu'il aussi existe des espaces de Banach qui ne sont pas réflexifs. Par exemple, les espaces l^1 et $L^1(\Omega)$ ne sont pas réflexifs. En effet, le raisonnement suivi dans la preuve de la proposition 3.2.3, s'applique au cas $p = 1$ ce qui donne $\left(l^1, \|.\|_1\right)^* = (l^\infty, \|.\|_\infty)$ avec :

$$l^\infty = \left\{x = (x_i)_{i=1}^{+\infty} : \ x_i \in \mathbb{K} \ \ et \ \sup_i |x_i| \prec +\infty\right\} \quad et \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i| \tag{3.24}$$

On démontre cependant que $\left(l^1, \|.\|_1\right) \subset (l^\infty, \|.\|_1)^*$ (inclusion stricte).

De même, on peut montrer que$\left(L^1(\Omega), \|.\|_1\right)^* = (L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty)$ avec :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} : \ \ f \text{ bornée } \ p.p. \text{ sur } \Omega\} \quad et \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |f(t)| \tag{3.25}$$

■

Proposition 3.3.3 *Tout espace de Hilbert est reflexif.*

Preuve. Il suffit de démontrer que dans ce cas, l'application J est surjective. Soit donc $g \in X^{**}$. On a

$$g : X^* \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad f \longmapsto g(f)$$

Par ailleurs, d'après le théorème de représentation de Riesz 3.2.6,

$$f \in X^* \Longrightarrow \exists! a \in X : \ f = L(a) = \prec ., \ a \succ \quad et \quad g(f) = (goL)(a) \tag{3.26}$$

L'application : $x \longmapsto \overline{(goL)(x)}$ définit une fonctionnelle linéaire continue sur X. Donc, toujours d'après le théorème de représentation de Riesz 3.2.6,

$$\exists! b \in X : \quad \overline{(goL)(x)} = \prec x, \ b \succ \quad \forall x \in X \tag{3.27}$$

Par conséquent,

$$\forall f \in X^*, \quad g(f) = (goL)(a) = \overline{\prec a, \ b \succ} = \ \prec b, \ a \succ = \ f(b) = \widetilde{b}(f)$$

D'où, $g = J(b)$. ■

Proposition 3.3.4 *Pour tout $p \in \left]1, +\infty\right[$, l'espace l^p et l'espace $L^p(\Omega)$ sont réflexifs.*

Preuve. Découle directement de la preuve de la proposition 3.2.3. ■

3.4 Opérateur Adjoint (Définition et propriétés générales)

Définition 3.4.1 *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces de Banach et* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *On appelle adjoint de* A *l'opérateur* A^* *défini par :*

$$A^* : Y^* \longrightarrow X^*; \qquad f \longmapsto A^*(f) = f \circ A \tag{3.28}$$

Proposition 3.4.2 $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ *et* $\|A^*\| = \|A\|$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que l'opérateur est bien défini et son domaine est l'espace Y^* tout entier. Par ailleurs, pour tous $f,\ g \in Y^*$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} A^*(f + \lambda \bullet g) &= (f + \lambda \bullet g) \circ A = f \circ A + (\lambda \bullet g) \circ A \\ &= f \circ A + \lambda \bullet (g \circ A) = A^*(f) + \lambda \bullet A^*(g) \end{aligned}$$

Donc, l'opérateur A^* est linéaire. D'autre part, pour tout $f \in Y^*$,

$$\|A^*(f)\| = \|f \circ A\| \leq \|f\| . \|A\| \Longrightarrow \|A^*\| \leq \|A\| \tag{3.29}$$

On en déduit que $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Montrons qu'on a en réalité égalité des normes entre A et A^*. En effet, soit $x \in X$ tel que $A(x) \neq 0$ et posons $y = \frac{A(x)}{\|A(x)\|_Y}$. Comme $\|y\|_Y = 1$, il existe d'après le théorème de Hahn-Banach une fonctionnelle linéaire g définie sur Y telle que : $\|g\| = 1$ et $g(y) = \|y\|_Y = 1$. En d'autres termes, $g(A(x)) = \|A(x)\|$. Des relations,

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= g(A(x)) = |(A^*(g))(x)| \leq \|A^*(g)\| \, \|x\|_X \\ &\leq \|A^*\| \, \|g\| \, \|x\|_X = \|A^*\| \, \|x\|_X \end{aligned}$$

découle que $\|A\| \leq \|A^*\|$. ■

Corollaire 3.4.3 *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces de Banach et* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Alors,*

$$A = 0 \Longleftrightarrow f \circ A = 0 \qquad \forall f \in Y^*$$

Preuve. on a :

$$A = 0 \Longleftrightarrow \|A\| = 0 \Longleftrightarrow \|A^*\| = 0 \Longleftrightarrow A^* = 0.$$

D'où,

$$A = 0 \Longleftrightarrow A^*(f) = 0 = f \circ A \qquad \forall f \in Y^*$$

■

3.5 Cas des espaces des espaces de Hilbert

Soient maintenant H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert munis des produits scalaires $\prec .,. \succ_1$ et $\prec .,. \succ_2$ respectivement et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Notre but immédiat est de donner une formule simple reliant l'opérateur A et son adjoint A^* avec les produits scalaires $\prec .,. \succ_1$ et $\prec .,. \succ_2$. Soit donc $f \in {H_2}^*$. D'après le théorème de représentation de Riesz, f s'identifie à un élément unique $b \in H_2$ tel que :

$$\|f\| = \|b\|_2 \quad et \quad \forall y \in H_2, \quad f(y) = \prec y,\ b \succ_2 \tag{3.30}$$

Par ailleurs, $A^*(f) \in {H_1}^*$. Donc, de la même manière et pour les mêmes raisons, $A^*(f)$ s'identifie à un élément unique $a \in H_1$ tel que :

$$\|f\| = \|a\|_1 \quad et \quad \forall x \in H_1, \quad A^*(f)(x) = \prec x,\ a \succ_1 \tag{3.31}$$

Comme $A^*(f)(x) = (foA)(x) = f(A(x))$ alors, on obtient compte des identications $f = b$ et $a = A^*(f)$:

$$\forall x \in H_1, \qquad \prec A(x),\ b \succ_2 = \prec x,\ A^*(b) \succ_1$$

Définition 3.5.1 *Soient maintenant H_1 et H_2 deux espaces munis des produits scalaires $\prec .,. \succ_1$ et $\prec .,. \succ_2$ respectivement et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors l'opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H_2,\ H_1)$ et est défini par la relation :*

$$\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2 :\ \prec A(x),\ y \succ_2 = \prec x,\ A^*(y) \succ_1 . \tag{3.32}$$

Remarque. Avant de passer à des exemples illustratifs, notons que dans le cas hilbertien, l'adjoint de l'opérateur nul est l'opérateur nul et que l'adjoint de l'dentité est l'identité elle-même. ■

Exemples.

1. Considérons maintenant l'opérateur linéaire :

$$B : l^2(\mathbb{C}) \longrightarrow l^2(\mathbb{C}); \quad B(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ..., x_n, ...).$$

Il est clair que $B \in \mathcal{L}\left(l^2(\mathbb{C})\right)$ et que $\|B\| = 1$. Comme le produit scalaire dans $l^2(\mathbb{C})$ est donné par la formule :

$$\prec x,\ y \succ = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$$

alors de la relation

$$\prec B(x),\ y \succ = \prec x,\ B^*(y) \succ \qquad \forall x,\ y \in l^2(\mathbb{C}),$$

découle que,

$$\prec x,\ B^*(y) \succ = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+1}\overline{y_k} = \sum_{p=2}^{+\infty} x_p \overline{y_{p-1}} = x_1.0 + \sum_{p=2}^{+\infty} x_p \overline{y_{p-1}}$$

D'où,

$$B^*(y) = (0,\ y_1,\ y_2, ..., y_n, ...) \tag{3.33}$$

2. Soit l'opérateur linéaire borné

$$C : L^2_{[0,\ 1]} \longrightarrow L^2_{[0,\ 1]}; \qquad C(f)(x) = i\int_x^1 f(t)\,dt$$

Le produit scalaire dans $L^2_{[0,\ 1]}$ est donné par la formule :

$$\prec f,\ g \succ = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\prec \quad C(f),\ g \succ &= \int_0^1 (C(f))(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 \left(i\int_x^1 f(t)\,dt\right)\overline{g(x)}dx \\
&= i\int_0^1\int_x^1 f(t)\overline{g(x)}dtdx = i\int_0^1\int_0^t f(t)\overline{g(x)}dxdt \\
&= \int_0^1 f(t)\left(i\int_0^t \overline{g(x)}dx\right)dt = \int_0^1 f(t)\left(\int_0^t \overline{(-ig(x))}dx\right)dt \\
&= \int_0^1 f(t)\overline{\left(-i\int_0^t g(x)\,dx\right)}dt = \int_0^1 f(x)\overline{\left(-i\int_0^x g(t)\,dt\right)}dx
\end{aligned}$$

Donc,

$$\prec C(f),\ g \succ = \prec f,\ C^*(g) \succ \Longrightarrow C^*(g)(x) = -i\int_0^x g(t)\,dt$$

■

Proposition 3.5.2 *Soient H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert. Alors,*

1. $A, B \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$ et $\lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow (A + \lambda \bullet B)^* = A^* + \overline{\lambda} \bullet B^*$.
2. $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$ *et* $B \in \mathcal{L}(H_2,\ H_3)$ $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$.
3. $A \in Iso(H_1,\ H_2) \Longrightarrow \left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$.

Preuve.

1. $\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2$

$$\begin{aligned} &\prec (A + \lambda \bullet B)(x),\ y \succ_2 = \prec A(x),\ y \succ_2 + \lambda \prec B(x),\ y \succ_2 \\ &= \prec x,\ A^*(y) \succ_1 + \lambda \prec x,\ B^*(y) \succ_1 = \prec x,\ A^*(y) \succ_1 + \prec x,\ \overline{\lambda} B^*(y) \succ_1 \\ &= \prec x,\ A^*(y) + \overline{\lambda} B^*(y) \succ_1 = \prec x,\ \left(A^* + \overline{\lambda} B^*\right)(y) \succ_1 \end{aligned}$$

2. Soient $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$ *et* $B \in \mathcal{L}(H_2,\ H_3)$. Alors, $\forall x \in H_1,\ \forall z \in H_3$

$$\begin{aligned} &\prec (B \circ A)(x),\ z \succ_3 = \prec B(A(x)),\ z \succ_3 = \prec A(x),\ B^*(z) \succ_2 \\ &= \prec x,\ A^*(B^*(z)) \succ_1 = \prec x,\ (A^* \circ B^*)(z) \succ_1 \end{aligned}$$

3. Soit $A \in Iso(H_1,\ H_2)$. Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} Id_{H_1} = A^{-1} \circ A \\ \\ Id_{H_2} = A \circ A^{-1} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Id_{H_1} = \left(A^{-1} \circ A\right)^* = A^* \circ \left(A^{-1}\right)^* \\ \\ Id_{H_2} = \left(A \circ A^{-1}\right)^* = \left(A^{-1}\right)^* \circ A^* \end{array} \right. \Longrightarrow \left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$$

■

3.6 Théorème de Hahn-Banach

Ce que nous exposons dans cette partie, n'est pas le tbéorème de Hahn-Banach sous toutes ses formes mais conséquences les plus simples et non moins utiles. Le théorème en lui - même (démonstration et différentes applications fait partie du cours "d'analyse fonctionnelle 1" du niveau Master 1. Rappelons que come auparavant, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou complexes.

Theorème 3.6.1 *(de Hahn - Banach) Soient $(X,\ \|.\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et X_0 un sous-espace vectoriel de X. Soit $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonctionnelle linéaire bornée. Alors, il existe une fonctionnelle linéaire bornée $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que : $\|f\| = \|f_0\|$ et $f(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in X_0$.*

Remarque. La fonctionnelle linéaire f est appelée prolongement de f_0 avec conservation de la norme. ■

Exemple 3.6.2 *Dans l'espace* $\left(\mathbb{R}^2,\ \|.\|_2\right)$, *considérons le sous-espace* X_0 *défini par :*

$$X_0 \ = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - y = 0\right\}$$

et définissons dans ce sous-espace l'application :

$$f_0 : X_0 \ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,\ y) \longmapsto f\,(x,\ y) = 2x$$

On cherche f *sous la forme :*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f\,(x, y) = ax + by$$

On a,

$$\left\{\begin{array}{c} \|f\| = \sqrt{a^2+b^2} \\ et \\ f\,(x,x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \|f\| = \sqrt{a^2+b^2} \\ et \\ (a+b)\,x = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \|f\| = \sqrt{a^2+b^2} \\ et \\ a+b = 2 \end{array}\right.$$

D'où,

$$\left\{\begin{array}{c} b = 2 - a \\ et \\ \|f\|^2 = a^2 + (2-a)^2 = 2a^2 - 4a + 4 = F\,(a) \end{array}\right.$$

On détermine a à partir de la relation $F'\,(a) = 0$, *ce qui nous donne* $a = b = 1$. *¨Par conséquent,*

$$f\,(x, y) = x + y, \quad f\,(x, x) = 2x \qquad et \quad \|f_0\| \leq \|f\| = \sqrt{2}$$

Il reste à vérifie qu'il existe bien $(x, x) \in X_0$ *tel que :* $|f_0\,(x, x)| = \sqrt{2}$. *Il suffit pour cela de prendre* $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple 3.6.3 *Dans l'espace* $\left(\mathbb{R}^2,\ \|.\|_2\right)$, *considérons le sous-espace* X_0 *défini par :*

$$X_0 \ = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - y = 0\right\}$$

et définissons dans ce sous-espace l'application :

$$f_0 : X_0 \ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,\ y) \longmapsto f\,(x,\ y) = -x$$

On cherche f *sous la forme :*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f\,(x, y) = ax + by$$

On a,

$$\left\{\begin{array}{c} \|f\| = \sqrt{a^2+b^2} \\ et \\ f\,(x,x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \|f\| = \sqrt{a^2+b^2} \\ et \\ (a+b)\,x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \|f\| = \sqrt{a^2+b^2} \\ et \\ a+b = -1 \end{array}\right.$$

D'où,

$$\left\{\begin{array}{c} b = -1 - a \\ et \\ \|f\|^2 = a^2 + (1+a)^2 = 2a^2 + 2a + 1 = F\,(a) \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$F'\,(a) = 0 \Longrightarrow 4a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{2} = b \Longrightarrow f\,(x, y) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

On vérifie que

$$f(x,x) = -x, \qquad \|f_0\| \leq \|f\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

De plus,

$$\left\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\|_2 = 1 \qquad et \qquad \left|f_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple 3.6.4 *Dans l'espace* $\left(\mathbb{R}^3,\ \|.\|_2\right)$*, considérons le sous-espace* X_0 *défini par :*

$$X_0 = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y - z = 0\right\}$$

et définissons dans ce sous-espace l'application :

$$f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,\ y,\ z) \longmapsto f(x,\ y,\ z) = 2x$$

On cherche f *sous la forme :*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = ax + by + cz$$

On a,

$$\begin{cases} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ et \\ f(x,y,x+y) = 2x \qquad \forall x,y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ et \\ (a+c-2)\,x + (b+c)\,y = 0 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ et \\ (a+c-2) = (b+c) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ a = 2 - c \\ b = -c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2 - c \\ b = -c \\ \|f\|^2 = 3c^2 - 4c + 4 \ = F(c) \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$F'(c) = 0 \Longrightarrow c = \frac{2}{3}, \quad a = \frac{4}{3}, \quad b = -\frac{2}{3} \Longrightarrow f(x,y,z) = \frac{4x - 2y + 2z}{3}$$

On vérifie que :

$$f(x,y,x+y) = 2x \qquad et \qquad \|f_0\| \leq \|f\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

On cherche maintenant l'élément $(x,y,x+y) \in X_0$ *qui vérifie :*

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 1 \qquad et \qquad |f_0(x,y,x+y)| = \|f\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

On doit résoudre le système

$$\begin{cases} 2\,|x| = \sqrt{\frac{8}{3}} \\ \\ 2y^2 + 2xy + \left(2x^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \\ 2y^2 + 2xy + \left(2x^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que ce système admet des solutions. Par exemple,

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Longrightarrow 2y^2 + y\sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3} = 0$$

On a ainsi une équation du second degré en y *dont le discriminant* $\Delta = \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 - 4\left(2.\frac{1}{3}\right) = 0.$ *Elle admet donc une solution double.*

Remarque. L'exemple précédent montre que le prolongement répondant aux conditions de Hahn - Banach peut ne pas être unique. ■

Chapitre 4

OPERATEURS COMPACTS

4.1 Définitions et propriétés générales dans les espaces de Banach

Définition 4.1.1 *Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces de Banach et $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. A est dit compact si $\mathcal{D}(A) = X$ et pour toute suite bornée $(x_n)_n$ d'éléments de X, la suite $(y_n = A(x_n))_n$ contient une sous-suite convergente dans Y.*

On a les deux théorèmes fondamentaux suivants :

Theorème 4.1.2 *(de Riesz) Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.*

Theorème 4.1.3 *Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces de Banach et $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *A compact.*
2. *Pour toute partie bornée M de X, l'ensemble $\overline{A(M)}$ est compact[1] dans Y.*
3. *La fermeture de l'image par A de la boule unité fermée de X est un ensemble compact de Y.*

Exemples.

1. Si $A \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ est de rang fini $(\dim(R(A) = \mathrm{Im}(A)) \prec +\infty)$ alors, il est compact. En effet, dans ce cas, le sous espace $R(A)$ est fermé et donc un espace de Banach pour la norme induite par celle de l'espace Y. Pour toute partie bornée M de X, l'ensemble $\overline{A(M)}$ qui est un fermé borné de l'espace de Banach $R(A)$ est compact.
2. L'opérateur

$$A : l^2(\mathbb{K}) \longrightarrow l^2(\mathbb{K})\,; \qquad A(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...) = \left(x_1,\ \frac{1}{2}x_2,\ ...,\ \frac{1}{2^n}x_n,\ ...\right)$$

est compact. En effet, l'image de la boule unité fermée est incluse dans le parallélépipède $\prod_{p=1}^{+\infty}\left\{x_p \in \mathbb{K} :\ |x_p| \leq \frac{1}{2^p}\right\}$ qui est un produit d'espaces compacts donc, lui même compact.

[1] Dans les espaces métriques, on a la caractérisation suivante (de Bolzano-Weierstrass) de la compacité : Un sous-ensemble M d'un espace métrique X est compact si et seulement si, toute suite d'éléments de M, contient une sous-suite covergente dans M.

3. L'opérateur

$$A : l^2(\mathbb{K}) \longrightarrow l^2(\mathbb{K})\,; \qquad A(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...) = (0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...)$$

n'est pas compact. En effet, soit $M = \{e_i,\ i = 1,\ 2,\ ...\}$ la base canonique de $l^2(\mathbb{K})$. Il est clair que M est un ensemble borné de $l^2(\mathbb{K})$ .D'autre part,

$$\|A(e_{i+1}) - A(e_i)\| = \|e_{i+2} - e_{i+1}\| = \sqrt{2} \qquad \forall i = 1,\ 2,\ ...$$

Donc, l'ensemble $A(M) = \{e_{i+1},\ \ i = 1,\ 2,\ ...\}$ ne peut contenir aucune sous-suite convergente. Donc, $\overline{A(M)}$ n'est pas compact.

■

Remarques.

1. Un opérateur compact est toujours borné. En effet, le contraire signifierait l'existence d'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| = 1 \ \text{ et } \quad \|A(x_n)\| \succ n.$$

La suite $(A(x_n))_n$ ne peut donc contenir aucune sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de l'opérateur A.

2. Il existe des opérateurs bornés (en dimension infinie) qui ne sont pas compacts. En effet, l'opérateur Id_X est borné mais non compacte car, la boule unité fermée (qui est l'image d'elle même par Id_X) n'est pas compacte d'après le théorème de Riesz.

■

Notation 4.1.4 *Soient X, Y deux $\mathbb{K}$ -espaces de Banach. Alors, l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de X dans Y , sera noté $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Le résultat suivant regroupe les premières principales propriétés des opérateurs compacts dans les espaces de Banach.

Proposition 4.1.5 *Soient X, Y et Z trois $\mathbb{K}$ -espaces de Banach. Alors,*

1. L'ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$.
2. Si $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ et $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ alors, $B \circ A \in \mathcal{K}(X, Z)$. De même, si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $B \in \mathcal{K}(Y, Z)$ alors, $B \circ A \in \mathcal{K}(X, Z)$.
3. Si $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ et $\dim(X) = \dim(X) = +\infty$ alors A ne peut pas avoir un inverse borné.

Preuve. Voir TD. ■

Theorème 4.1.6 *Si une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{K}(X, Y)$ vers A dans $\mathcal{L}(X, Y)$ alors, $A \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

Preuve. Il faut montrer que pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de X, la suite $(A(x_n))_n$ contient une sous-suite convergente. L'opérateur A_1 etant compact, la suite $(x_n)_n$ contient une sous-suite $\left(x_n^{(1)}\right)_n$ telle que la suite $\left(A_1\left(x_n^{(1)}\right)\right)_n$ converge. De même, l'opérateur A_2 etant compact, la suite $\left(x_n^{(1)}\right)_n$ contient une sous-suite $\left(x_n^{(2)}\right)_n$ telle que la suite $\left(A_2\left(x_n^{(2)}\right)\right)_n$ converge. En continuant ce processus, on obtient que puisque l'opérateur A_k est compact alors la suite $\left(x_n^{(k-1)}\right)_n$ contient une sous-suite $\left(x_n^{(k)}\right)_n$ telle que la suite $\left(A_k\left(x_n^{(k)}\right)\right)_n$ converge. Considérons maintenant la suite diagonale

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(2)},\ ...,\ x_n^{(n)},\ .....$$

C'est une suite extraite de $(x_n)_n$ et chacun des opérateurs compacts $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n\,,$ .... la transforme en une suite convergente. Si on montre que l'opérateur borné A la transforme aussi en une suite convergente, on aura alors établi le théorème. On a,

$$\left\| A\left(x_n^{(n)}\right) - A\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \leq \begin{pmatrix} \left\| A\left(x_n^{(n)}\right) - A_k\left(x_n^{(n)}\right)\right\| + \left\| A_k\left(x_n^{(n)}\right) - A_k\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \\ + \left\| A_k\left(x_m^{(m)}\right) - A\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Supposons que $\|x_n\| \leq C \ \ \forall n$ et soit $\varepsilon \succ 0$. Choisissons k tel que $\|A - A_k\| \prec \dfrac{\varepsilon}{3C}$ (ceci est possible car on a convergence uniforme de A_k vers A). Soit le naturel N tel que,

$$\forall n \succ N \ \ et \ \ \forall m \succ N : \ \left\| A_k\left(x_n^{(n)}\right) - A_k\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \prec \frac{\varepsilon}{3}$$

Ceci est aussi possible en vertu de la convergence de la suite $\left(A_k\left(x_n^{(n)}\right)\right)_n$. Finalement, la formule 4.1, devient :

$$\forall n \succ N \ \ et \ \ \forall m \succ N : \left\| A\left(x_n^{(n)}\right) - A\left(x_m^{(m)}\right)\right\| \leq \|A - A_k\| \left\|x_n^{(n)}\right\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|A - A_k\| \left\|x_m^{(m)}\right\| \prec \varepsilon.$$

En d'autres termes, la suite $\left(A\left(x_n^{(n)}\right)\right)$ est de Cauchy, donc convergente. ■

Corollaire 4.1.7 *Si A est la limite uniforme d'une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs de rangs finis alors, il est compact.*

Un autre résultat utile est la proposition suivante.

Proposition 4.1.8 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. A compact ;
2. AA^* compact ;
3. A^* compact
4. A^*A compact.

4.2 Quelques classes d'opérateurs compacts

Remarque. Les types d'opérateurs cités ci-dessous sont tous compacts :

1. Les opérateurs de rang fini : $\dim(\mathrm{Im}(A)) \prec +\infty$.
2. Les opérateurs de rang presque fini : Ce sont les opérateurs qui sont limites uniformes de suites d'opérateurs de rangs finis.
   Exemple :
   $$: l^2 \longrightarrow l^2, \quad A(x_1, ..., x_n, ...) = (\alpha_1 x_1, ..., \alpha_n x_n, ...), \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$
3. Les opérateurs intégraux à noyaux continus :
   $$A : C\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right) \longrightarrow C\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right), \qquad Af(x) = \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt \tag{4.2}$$

Le noyau $K(x,t) \in C\left({}_{[a,\ b]\times[a,\ b],\ \mathbb{K}}\right)$.

Exemples :

$$A : \left(C_{[-\pi,\ \pi]}, \|.\|_\infty\right) \longrightarrow \left(C_{[-\pi,\ \pi]}, \|.\|_\infty\right), \qquad Ax(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t+s)\, x(s)\, ds,$$

$$B : \left(C_{[0,\ 1]}, \|.\|_\infty\right) \longrightarrow \left(C_{[0,\ 1]}, \|.\|_\infty\right), \quad Bx(t) = \int_0^1 ts(1-ts)\, x(s)\, ds,$$

4. Les opérateurs intégraux à noyaux carré-intègrables :

$$A : L^2\left({}_{[a,\ b],\ \mathbb{K}}\right) \longrightarrow L^2\left({}_{[a,\ b],\ \mathbb{K}}\right), \qquad Af(x) = \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt \tag{4.3}$$

Le noyau $K(x,t)$ vérifie la condition :

$$\int_a^b |K(x,t)|^2\, dtdx \prec +\infty \tag{4.4}$$

Exemples :

$$A : L^2_{[a,\ b]} \longrightarrow L^2_{[a,\ b]}, \quad Bx(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$$

$$B : L^2_{[-1,\ 1]} \longrightarrow L^2_{[-1,\ 1]}, \quad Ax(t) = t^2 \int_{-1}^1 sx(s)\, ds,$$

5. Les opérateurs de Hilbert-Schmidt : Ce sont des opérateurs A définis dans des espaces de Hilbert séparables H et vérifiant la condition : Il existe au moins une base Hilbertienne $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|A(e_k)\|^2 \prec +\infty \tag{4.5}$$

Exemples :

$$A : l^2 \longrightarrow l^2, \quad A(x_1, ..., x_n, ...) = \left(\frac{x_1}{1}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right)$$

■

Remarque.

1. S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\dim(\ker(A - \lambda Id)) = \infty$ alors, l'opérateur A n'est pas compact.
2. N'est pas compact, tout opérateur A de la forme : $A = B \pm K$ où, B admet un inverse borné et K est compact.

■

Exercice 4.2.1 *Montrer que l'opérateur*

$$A : L^2_{[0,\ 1]} \longrightarrow L^2_{[0,\ 1]}, \quad Af(x) = f(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt.$$

n'est pas compact.

Bibliographie

[1] Brézis H., Analyse fonctionnelle, Masson 1993.

[2] Dieudonné, Eléments d'analyse, tome 2, Gauthier - Villars 1974.

[3] Gourdon, Analyse, Ellipses 1994.

[4] Gonnord et Tosel, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses 1996.

[5] Hengartner W., Lambert M., Reischer C. Introduction à l'analyse fonctionnelle, Les presses de l'université du Québec.

[6] Kolmogorov A., Fomine S.. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition "MIR", Moscow, 1974 (traduit de la langue russe).

[7] Lang, Analyse réelle, InterEditions 1977.

[8] Moison et Vernotte, Topologie et séries, Ellipses1991.

[9] Eléments d'analyse pour l'agrégation, Masson 1995.

[10] Schwartz L. Topologie générale et analyse fonctionelle. Edit. Hermann.

[11] Yosida K. Functional Analysis, Springer-Verlag 6^{th} edition, 1980.

[12] Hengartner W., Lambert M., Reischer C. Introduction à l'analyse fonctionnelle, Les presses de l'université du Québec.

[13] Kolmogorov A., Fomine S.. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition "MIR", Moscow, 1974 (traduit de la langue russe).

[14] Schwartz L. Topologie générale et analyse fonctionelle. Edit. Hermann.

[15] Yosida K. Functional Analysis, Springer-Verlag 6^{th} edition, 1980.