

Cours d'analyse fonctionnelle et complexe

2^e édition

Yves CAUMEL

Docteur en mathématiques,
diplômé en philosophie des sciences.

Professeur de mathématiques à l',
responsable de l'unité de formation mathématiques
à l'ENSICA.

Cépaduès-Éditions

111, rue Nicolas Vauquelin
31100 TOULOUSE – France
Tél. : 05 61 40 57 36 – Fax : 05 61 41 79 89
www.cephadues.com

Courriel : cephadues@cephadues.com

Coordonnées GPS en WGS 84

N 43° 34' 43,2''

E 001° 24' 21,5''

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Robustesse et commande optimale	Alazard D. et al.
Éléments d'analyse numérique	Attéia M., Pradel M.
Simulation et algorithmes stochastiques	Bartoli N., Del Moral P.
Mesure et intégration. Intégrale de Lebesgue	Bouyssel M.
Modélisation probabiliste et statistique.....	Garel B.
Mathématiques et résolution des équations aux dérivées partielles classiques	Giraud G., Dufour J.P.
Les fonctions spéciales vues par les problèmes.....	Groux R., Soulat Ph.
Principes généraux et méthodes fondamentales	Groux R.
Polynômes orthogonaux et transformations intégrales.....	Groux R.
Les structures et les morphismes vus par les problèmes	Groux R., Soulat Ph.
Analyse : la convergence vue par les problèmes	Groux R., Soulat Ph.
Algèbre linéaire, 2e éd.	Grifone J.
Exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire	Hiriart-Urruty J.-B., Plusquellec Y.
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale	Intissar A.
Invitation à l'Algèbre	Jeanneret A., Lines D.
Probabilités et statistique appliquées	Lacaze B., Mailhes C., Maubourguet M.M., Tourneret J.-Y.
Résolution numérique des équations aux dérivées partielles	Le Pourhiet A.
Probabilités et statistiques pour ingénieurs et commerciaux	Pellaumail J., Perret A., Basle L.
Que savez-vous de l'outil mathématique ? Collection en six fascicules.....	Plusquellec Y., Agullo M., Boudet R., Fabre J., Guérin R.
Mathématiques générales, 1er cycle et formation continue	Rovira P.
Analyse fonctionnelle	Samuelides M., Touzillier L.
Analyse harmonique	Samuelides M., Touzillier L.
Problèmes d'analyses fonctionnelle et harmonique	Samuelides M., Touzillier L.
Introduction à la Topologie.....	Sondaz D., Morvan R.

© CEPAD 2003-2009

ISBN : 2.85428.914.5



Le code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants-droit. Or, cette pratique en se généralisant provoquerait une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, du présent ouvrage est interdite sans autorisation de l'Éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC - 3, rue d'Hautefeuille - 75006 Paris).

Dépôt légal : novembre 2009

N° éditeur : 914

Table des matières

Introduction	7
1 Théorie de la mesure et de l'intégration	9
1.1 Mesures et tribus	9
1.1.1 Les tribus	9
1.1.2 Mesure des ensembles	10
1.1.3 Fonctions mesurables	13
1.2 L'intégrale de Lebesgue et ses propriétés	16
1.2.1 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives	16
1.2.2 Intégrale de Lebesgue des fonctions quelconques et ses propriétés	18
1.2.3 Propriétés de continuité et de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre	25
1.2.4 Espaces L^p	29
1.3 La convolution des fonctions	32
1.4 La transformation de Laplace des fonctions	38
1.5 Thème d'étude : applications de la transformation de Laplace	41
1.6 Corrigés des exercices	44
2 Espaces vectoriels normés	51
2.1 Espaces métriques	51
2.1.1 Notions basiques	52
2.1.2 Espaces complets	56
2.1.3 Espaces compacts	57
2.1.4 Espaces connexes	58
2.2 Espaces vectoriels normés	60
2.3 Espaces de Hilbert	64
2.3.1 Propriétés d'orthogonalité	65
2.3.2 Familles et bases orthonormales	72
2.4 Approximation des fonctions	75
2.4.1 Approximation dans les espaces préhilbertiens et hilbertiens	75
2.4.2 Méthode des moindres carrés	76
2.4.3 Méthode d'approximation uniforme	78
2.5 Thème d'étude : les polynômes de Legendre	80
2.6 Corrigés des exercices	82

3	Séries et transformation de Fourier des fonctions	89
3.1	Séries trigonométriques	89
3.2	Séries de Fourier des fonctions périodiques localement intégrables	92
3.3	Séries de Fourier des fonctions périodiques de classe $L_p^2(0, T)$	98
3.4	Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	100
3.5	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	107
3.6	Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	107
3.7	Introduction à la transformée de Fourier discrète.	112
3.8	Un mot sur les ondelettes.	113
3.8.1	Limitations de l'analyse de Fourier	113
3.8.2	La transformation de Gabor	114
3.8.3	Transformation en ondelettes	114
3.9	Thème d'étude : résolution de l'équation de la chaleur	116
3.10	Corrigés des exercices	118
4	Distributions	127
4.1	Une approche physique	127
4.2	L'espace des distributions D'	128
4.3	Dérivation des distributions	131
4.4	Produit d'une distribution par une fonction C^∞	136
4.5	Convolution des distributions	137
4.6	Transformation de Fourier des distributions tempérées	141
4.7	Séries de Fourier des distributions périodiques	145
4.8	Transformation de Laplace des distributions.	149
4.9	Les filtres	150
4.10	Corrigés des exercices	153
5	Fonctions holomorphes, transformations conformes	159
5.1	Fonctions d'une variable complexe	159
5.2	Fonctions holomorphes	162
5.3	Transformations conformes	167
5.4	Intégrale d'une fonction complexe	173
5.5	Le théorème de Cauchy et ses corollaires	176
5.6	Résolution du problème de Dirichlet	182
5.7	Thème d'étude : application à la mécanique des fluides	185
5.8	Corrigés des exercices	188
6	Séries entières et de Laurent ; calcul des résidus	197
6.1	Rappels sur les séries de fonctions d'une variable complexe	197
6.2	Séries entières et fonctions analytiques	200
6.3	Les séries de Laurent	205
6.4	Applications des séries de Laurent.	208
6.4.1	Calcul des séries de Fourier	208
6.4.2	La transformation en Z	208
6.5	Classification des singularités	210
6.6	Théorème des résidus : applications au calcul d'intégrales	211
6.7	Corrigés des exercices	217

A Le corps des complexes	221
B Rappels divers	223
C Transformées de Fourier et de Laplace	225
D Représentation des signaux et leurs propriétés	231
Bibliographie commentée	233

Introduction

Le cours d'analyse d'une école d'ingénieurs est le socle conceptuel sur lequel reposent les autres enseignements mathématiques, constituant ensemble le cadre naturel de la modélisation des enseignements scientifiques. Bien qu'inspiré par le profil et les besoins en mathématiques du futur ingénieur, ce livre convient à une introduction à l'analyse, destinée aux étudiants de licence et de maîtrise des filières mathématiques. J'ai donc choisi d'exposer un cours d'analyse allégé des concepts et des résultats à faible plus-value pratique, qui nécessitent souvent un investissement lourd tant pour l'enseignant que pour l'élève. Tel est le cas, par exemple, des concepts de mesure complexe ou de topologie définie par des familles de semi-normes, qui ne seront pas abordés ici.

Adeptes d'une pédagogie constructive et autant que possible motivante, essayant d'éviter la pesante et souvent inefficace linéarité de l'exposé déductif, qui n'est pas praticable dans les limites horaires d'un tel cours, j'ai semé le parcours du néophyte de nombreux exercices et problèmes corrigés, d'appels à l'intuition géométrique, d'applications à la physique, d'analogies et de remarques qui devraient en faciliter la lente digestion. Seuls sont démontrés les théorèmes importants, à condition toutefois que leurs preuves ne soient ni trop techniques, ni trop longues ; en revanche, certaines démonstrations, abordables dans le cadre de ce cours et mettant en œuvre une idée ou une méthode originale, sont proposées comme exercices, afin d'en faciliter la compréhension et l'assimilation.

Six chapitres composent cet ouvrage : les quatre premiers sont dédiés à l'analyse fonctionnelle et harmonique, les deux autres exposent la théorie des fonctions holomorphes.

Le premier chapitre est un exposé de la théorie ensembliste de la mesure et de l'intégration, qui se conclut par la présentation des concepts-outils fondamentaux pour la modélisation des systèmes linéaires, que sont le produit de convolution et la transformation de Laplace.

Après de nécessaires rappels de topologie métrique, suivis d'un exposé rapide des bases de la théorie des espaces vectoriels normés, le deuxième chapitre présente de façon suffisamment détaillée la théorie des espaces hilbertiens et ses applications à l'approximation fonctionnelle dans les espaces L^2 .

Le chapitre trois concerne l'analyse et la synthèse harmonique des fonctions réelles en séries et transformées de Fourier.

Le chapitre quatre est une introduction à la théorie des distributions, motivée et illustrée par la théorie du signal.

Les fonctions analytiques et leurs applications incontournables que sont la transformation conforme, la transformée en Z et le calcul d'intégrales par la méthode des résidus, font l'objet des deux derniers chapitres.

Les courtes biographies qui émaillent ce cours voudraient donner un peu d'épaisseur humaine et rendre hommage à ces immenses créateurs souvent méconnus, que sont les grands mathématiciens.

Que mes collègues Christian Bès, Xavier Buff, Jean-Michel Builles, Jean-Baptiste Caillau, Yves Coudières, Etienne Fieux, Daniel Gourion, Stéphane Grihon, Nicolas Gruyer, Frédéric Rodriguez, Frank Seigneuret, qui ont enseigné ce cours ou l'enseignent encore aux élèves de première année de l'ENSICA, trouvent ici mon amicale gratitude pour la qualité de leur engagement pédagogique et les lectures qu'ils ont faites d'un manuscrit en perpétuelle gestation. Ces remerciements s'adressent bien sûr à Manuel Samuelides, Professeur de mathématiques à Sup Aéro qui me donna naguère l'opportunité d'enseigner l'analyse fonctionnelle dans son école, ainsi qu'à Louis Pinchard, maître de conférences à l'ISIM, à Jacques Audounet, Jean Gaches, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Professeurs à l'Université Paul Sabatier, avec une mention particulière pour Michel Salaün, maître de conférences au CNAM, dont les critiques et les nombreuses suggestions m'ont été précieuses.

Chapitre 1

Théorie de la mesure et de l'intégration

En 1823, Cauchy construisit l'intégrale d'une fonction continue f , définie sur l'intervalle $[a, b]$, comme limite, quand $n \rightarrow +\infty$ de la somme $\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$, définition qui fut plus tard étendue par Riemann aux fonctions continues sauf en un ensemble fini de points. Mais l'intégrale de Riemann se heurta rapidement à d'incontournables limitations ; ainsi la limite d'une suite de fonctions Riemann-intégrables ne l'est pas nécessairement ou encore la primitive $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ n'est pas nécessairement dérivable en tout x et de dérivée égale à $f(x)$, sauf aux points de continuité. Après de nombreuses tentatives dues à Jordan (1838–1922) et à Borel (1871-1956), Lebesgue (1875-1941) s'appuyant sur les travaux de ce dernier sur le concept de mesure, proposa au début du siècle une nouvelle notion d'intégrale plus robuste que celle de Riemann, définie sur un ensemble plus étendu de fonctions. La théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue est aujourd'hui à la base de l'édifice de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des probabilités grâce aux travaux du probabiliste soviétique Kolmogorov au cours des années trente.

1.1 Mesures et tribus

1.1.1 Les tribus

Nous avons tous l'intuition de la notion de mesure, par exemple en considérant l'application l qui associe à tout intervalle I de la droite réelle, sa longueur $l(I)$, ou encore l'application s qui associe à tout sous-ensemble A de \mathbb{R}^2 "suffisamment régulier" (en un sens qui sera précisé) sa surface $s(A)$.

Nous allons définir pour tout ensemble E , fini ou infini, un sous-ensemble \mathcal{T} de parties de E accessibles à la mesure, appelé tribu.

Définition 1 : Une famille de parties \mathcal{T} d'un ensemble E donné est une **tribu** si elle contient l'ensemble E et si elle est stable par :

- **Complémentation** : pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\complement A \in \mathcal{T}$,
- **Union dénombrable** : pour toute famille $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$ où $I \subset \mathbb{N}$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Une tribu est aussi nommée σ -algèbre.

Définition 2 : Un ensemble E muni d'une tribu \mathcal{T} est un **espace mesurable**, noté (E, \mathcal{T}) : tout élément de \mathcal{T} est dit sous-ensemble **mesurable**.

Toute tribu \mathcal{T} est incluse dans la plus grande tribu constructible sur E , à savoir l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E , et inclut la plus petite d'entre elles : $\{\emptyset, E\}$.

Définition 3 : Étant donné un sous-ensemble \mathcal{F} de $\mathcal{P}(E)$, on génère grâce aux opérations de complémentation et d'union dénombrable, la plus petite tribu contenant \mathcal{F} , appelée **tribu engendrée** par \mathcal{F} .

Théorème 1 Si f est une application d'un ensemble E dans un espace mesurable (F, \mathcal{T}) , l'image inverse de \mathcal{T} par f est une tribu sur E .

E 1

- (1) Construire la tribu engendrée par le sous-ensemble $\{A, B\}$ de $\mathcal{P}(E)$.
- (2) Démontrer le Théorème 1.

Définition 4 : La **tribu des boréliens** sur \mathbb{R} est la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de \mathbb{R} ; on la notera $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. De façon générale, la tribu des boréliens définie sur un espace topologique (E, \mathcal{O}) est la tribu engendrée par l'ensemble \mathcal{O} des ouverts.

De toutes les tribus constructibles sur \mathbb{R} , la tribu des boréliens, du nom de son créateur Emile Borel, est celle qui convient en analyse classique. Il est facile d'établir que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ peut être aussi générée par l'ensemble des intervalles fermés de \mathbb{R} , ou bien par l'ensemble des intervalles ouverts; malgré la richesse et la diversité de ses éléments, la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ne s'identifie pas à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des parties de \mathbb{R} . En effet, on sait construire, difficilement il est vrai et grâce à l'axiome du choix, une partie de \mathbb{R} qui n'est pas un borélien. La généralisation à la tribu des boréliens définie sur \mathbb{R}^k est immédiate, si l'on considère l'ensemble générateur des pavés ouverts, définis comme les produits cartésiens des intervalles ouverts.

1.1.2 Mesure des ensembles

Il s'agit maintenant de se doter d'un concept permettant de mesurer les éléments d'une tribu, naturellement nommé *mesure*, et généralisant les concepts classiques de longueur, d'aire et de volume.

Notation : l'union dénombrable des parties deux à deux disjointes A_i s'écrit $\bigsqcup_i A_i$.

Définition 5 : Une **mesure positive** μ sur l'ensemble mesurable (E, \mathcal{T}) est une application de \mathcal{T} dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant les axiomes :

(M1) **Axiome de σ -additivité :** $\mu\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$ où I est un ensemble dénombrable.

(M2) $\mu(\emptyset) = 0$.

Remarque : Toutes les mesures introduites dans ce cours sont positives.

Théorème 2 Toute mesure positive μ est **continue monotone**. Autrement dit, pour toute suite croissante d'ensembles $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ appartenant à la tribu \mathcal{T} (i.e. $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$), on a :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(B_i) = \mu \left(\lim_{i \rightarrow +\infty} B_i \right).$$

E 2

- (1) Démontrer le théorème 2.
- (2) Démontrer que si $(A_i)_i$ est une suite décroissante telle que $\mu(A_0) < +\infty$, alors :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_i) = \mu \left(\bigcap_i A_i \right) .$$

Définition 6 : Un ensemble mesurable (E, \mathcal{T}) sur lequel est définie une mesure μ est dit **ensemble mesuré** et noté (E, \mathcal{T}, μ) .

Définition 7 : On établit dans le cadre rigoureux de la théorie de la mesure, qu'il existe sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ une mesure unique m qui attribue à tout intervalle $I = (a, b)$, sa longueur $m(I) = b - a$. Cette mesure dite **mesure de Lebesgue**, associe à tout borélien B , sa mesure $m(B)$.

Théorème 3 (Propriétés de la mesure de Lebesgue)

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R} : m(\{x\}) = 0$.
- (2) Pour tout intervalle (a, b) et pour tout réel $r :$

$$m((a + r, b + r)) = m((a, b)) \quad (\text{Invariance par translation}) .$$

Définition 8 :

- (1) La **mesure de Dirac** δ_x est définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par :

Pour tout borélien B , $\delta_x(B)$ est égal à 1 si $x \in B$, et à 0 sinon.

- (2) Une **mesure discrète** quelconque μ_D est une combinaison linéaire à coefficients positifs de mesures de Dirac :

$$\mu_D = \sum_{i \in I} a_i \delta_{x_i} ,$$

où les a_i sont des réels positifs et les x_i des réels quelconques.

- (3) La mesure comptable μ_c est définie par :

$\mu_c(B)$ est égal à $\text{cardinal}(B)$ si B est fini, et $+\infty$ si B est infini.

- (4) La probabilité définie sur un ensemble d'évènements est une mesure (cf. fin de 1.2.3).

Petite fugue infinitiste au royaume des nombres réels.

L'ensemble \mathbb{R} se compose du sous-ensemble \mathbb{Q} des rationnels et du sous-ensemble des irrationnels, lesquels à leur tour peuvent être soit algébriques, s'ils sont solutions d'une équation polynômiale à coefficients entiers, soit transcendants s'ils ne sont solutions d'aucune équation de ce type. Les cardinaux infinis associés à ces ensembles sont distincts. En effet, on dit que deux ensembles E et F sont de cardinal identique, s'il existe une bijection entre E et F : on dit dans ce cas qu'ils ont même puissance, c'est le cas de $]0, 1[$ et de $] - \infty, +\infty[$. Ainsi \mathbb{N} et \mathbb{Q} sont de même cardinal : ils sont tous deux dénombrables, et on sait expliciter au moins une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{Q} . Bien que beaucoup "plus grand", l'ensemble \mathbb{A} des nombres algébriques a la même puissance que \mathbb{N} .

Quelle est la mesure (de Lebesgue) de ces ensembles ?

Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Q} et \mathbb{A} sont dénombrables. Un singleton étant de mesure nulle, on a, par σ -additivité, $m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Q}) = m(\mathbb{A}) = 0$; intuitivement cela signifie, que ces ensembles bien qu'infinis, et en ce qui concerne \mathbb{Q} et \mathbb{A} , denses dans \mathbb{R} , n'ont aucune "épaisseur" sur la droite réelle par la mesure de Lebesgue m . On en déduit que $m(\{\text{transcendants}\})$ est égal à $+\infty$.

Ainsi l'ensemble des transcendants est infiniment plus grand au sens de la mesure de Lebesgue que l'ensemble des algébriques ! On pourrait raisonnablement penser qu'il est possible d'en exhiber une foultitude. Que nenni ! Les seuls résultats que l'on connaisse, se résument à peu de choses près à : π , e , $2\sqrt{2}$, $\log 2$, les nombres $\sum_{i=1}^n \beta_i \log \alpha_i$ où les α_i et β_i sont algébriques, e^π , sont transcendants ; mais quid de $e + \pi$ et $e \cdot \pi$, bien que l'on sache que l'un des deux est transcendant ?

Cantor (1845-1918) démontra que le cardinal de l'ensemble \mathbb{R} est égal au cardinal 2^{\aleph_0} de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ où \aleph_0 est le cardinal de tout ensemble dénombrable, et émit la conjecture que le plus petit cardinal strictement supérieur à \aleph_0 , noté \aleph_1 , vérifie l'égalité $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Comme cela peut advenir en mathématiques depuis qu'on en maîtrise mieux les fondements logiques, on n'apporta pas de solution au problème mais il fut établi en 1963 que son énoncé est indécidable, c'est-à-dire que ni lui ni sa négation ne sont démontrables.

Le lecteur insensible au vertige des espaces en abîmes, essaiera d'imaginer les infinités des ensembles des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , puis de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{R} \dots$

Les ensembles dénombrables ne sont pas les seuls ensembles de mesure nulle : nous construisons ci-dessous un **ensemble non dénombrable** dit **ensemble de Cantor**, de **mesure nulle**.

E 3 Construction de l'ensemble de Cantor.

Soit la suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]; \quad A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]; \quad A_3 = \dots$$

On appelle **ensemble de Cantor** l'ensemble $C = \bigcap_{i \geq 1} A_i$.

- (1) Montrer que : $\forall x \in C$, $x = \sum_{n \geq 1} \frac{r_n}{3^n}$ où $r_n = 0$ ou 2 . [Par exemple, A_1 est caractérisé par les points d'abscisse x tels que r_1 est soit égal à 0 , soit égal à 2].

(2) En déduire que C est non dénombrable et de mesure nulle.

Définition 9 : Un ensemble inclus dans un ensemble mesurable de mesure nulle est dit **négligeable**. Une propriété $P(x)$ est dite **vraie presque-partout** sur l'ensemble E , si elle est vraie partout, sauf éventuellement sur un sous-ensemble négligeable ; on notera $\mathbf{P}(x)$ **vraie (p.p)**.

Exemple 1 : Les fonctions f et g sont égales presque-partout si elles diffèrent sur un sous-ensemble négligeable ; on notera $f = g$ (p.p).

Intermède biographique : Emile BOREL (1871-1956)

Né à Saint-Affrique en Aveyron, dont il deviendra député en 1924, Emile Borel fit ses études de mathématiques à l'E.N.S. Ami de Paul Painlevé, il abandonna provisoirement son poste de professeur à la Sorbonne pour entrer en politique ; il sera député de son département d'origine, et ministre de la Marine. Après avoir été emprisonné par le régime de Vichy auquel il s'opposa farouchement, il est libéré et s'engage malgré son grand âge dans la résistance qui se développe dans sa région natale.

Borel jette les bases de la théorie de la mesure, sur lesquelles s'appuiera Lebesgue pour construire son intégrale. Il participe au développement de la théorie des probabilités ; précurseur de la théorie générale des jeux de stratégie, il annonce les travaux de Von Neumann.

Passionné par les développements applicatifs des mathématiques, et de façon générale par les sciences et les réflexions qu'elles suscitent, Borel fait oeuvre de haute vulgarisation scientifique. Peut-être la volonté de faire partager les savoirs, était-elle à cette époque dans l'air du temps, si l'on songe aussi aux oeuvres de Poincaré ou d'Einstein destinées à un public cultivé.

Intéressé par la philosophie et l'épistémologie, il défend avec les intuitionnistes la conception constructiviste des mathématiques, qui privilégie la construction des objets mathématiques grâce aux seuls processus mentaux.

1.1.3 Fonctions mesurables

La mesurabilité des fonctions réelles est une propriété faible, au sens où elle constitue une exigence minimale, toujours vérifiée en mathématiques appliquées.

Définition 10 : Soient (E_1, \mathcal{T}_1) et (E_2, \mathcal{T}_2) des ensembles mesurables. Une fonction $f : E_1 \rightarrow E_2$ est **mesurable** si :

$$\forall A \in \mathcal{T}_2, \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1.$$

On remarquera la forte analogie avec le concept de continuité d'une fonction f d'un espace topologique (E_1, \mathcal{O}_1) dans un espace topologique (E_2, \mathcal{O}_2) (cf. Théorème 7. Ch 2).

Définition 11 : La **fonction indicatrice** du sous-ensemble mesurable A de l'ensemble E , notée \mathbf{I}_A , est définie par :

$$\mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est la plus simple des fonctions mesurables.

Théorème 4 (Propriétés de la fonction indicatrice)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{A \cap B}(x) &= \mathbf{I}_A(x) \cdot \mathbf{I}_B(x); \\ \mathbf{I}_{A \cup B}(x) &= \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_{A \cap B}(x). \end{aligned}$$

Définition 12 : On appelle **fonction de Heaviside** l'indicatrice de \mathbb{R}^+ :

$$H(x) = \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \stackrel{\text{noté aussi}}{=} Y(x).$$

Définition 13 : La **fonction porte** de largeur $[a, b]$, notée $\Pi_{[a,b]}(x)$, est égale à $\mathbf{I}_{[a,b]}(x)$.

Théorème 5 (Propriétés des fonctions mesurables)

Soient f et g de (E, \mathcal{T}) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ où $\overline{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

- f, g mesurables $\Rightarrow (f + g), f \cdot g, \max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont mesurables.
- f mesurable $\Rightarrow |f|, \frac{1}{f}$ (avec $f \neq 0$) et $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont mesurables.
- $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables, alors $\sup_n(f_n), \inf_n(f_n)$ sont mesurables; si $(f_n)_n$ converge (p.p) alors $f = \lim_n(f_n)$ est mesurable.

Étendons les concepts et les propriétés précédentes aux espaces de dimension finie quelconque.

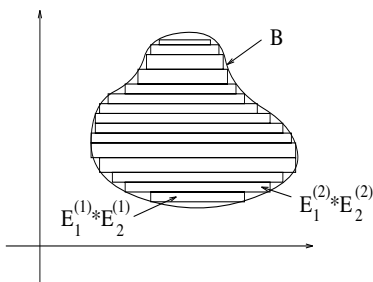
Définition 14 : Soient (E_1, \mathcal{T}_1) et (E_2, \mathcal{T}_2) deux ensembles mesurables : il existe une tribu unique, **engendrée** par les pavés de la forme $(A_1 \times A_2)$ où $A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2$.

Cette tribu est dite **tribu produit** de \mathcal{T}_1 par \mathcal{T}_2 , notée $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$

Remarque : Le **produit cartésien** $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, n'est à l'évidence ni stable par complémentation, ni par union dénombrable : ce n'est donc pas une tribu.

Si $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, la tribu produit, engendrée par les pavés ouverts est la tribu des boréliens sur \mathbb{R}^2 , notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. On construit de la même manière la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$ sur \mathbb{R}^k .

Géométriquement, nous concevons qu'un borélien quelconque B de \mathbb{R}^2 peut être atteint comme limite de l'une union de certains pavés de \mathbb{R}^2 (cf. ci-dessous). B apparaît comme limite de l'union $\bigcup_{i=1}^n (E_1^{(i)} \times E_2^{(i)})$, quand n tends vers l'infini.



Reste donc à construire une mesure sur l'ensemble mesurable $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$.

Théorème 6 Si $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ sont deux ensembles mesurés, alors il existe une mesure unique dite **mesure produit** de μ_1 par μ_2 définie sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$, notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, définie sur les pavés $A_1 \times A_2$, où $A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2$:

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

Exemple 2 : Considérons un borélien S dans \mathbb{R}^2 , égal à $\bigcup_i S_i$ avec $S_i = A_i \times B_i$

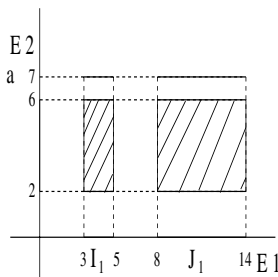
$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \left(\bigcup_{i \in I} S_i \right) \stackrel{\sigma\text{-additivité}}{=} \sum_i (\mu_1 \otimes \mu_2) (S_i) = \sum_i \mu_1(A_i) \cdot \mu_2(B_i).$$

Application : $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, respectivement munis des mesures m_1 et m_2 égales à la mesure de Lebesgue m ;

soient les mesurables : $A_1 = I_1 \cup J_1, \quad A_2 = \{a\} \cup I_2,$

$$m_1 \otimes m_2(A_1 \times A_2) = (m(I_1) + m(J_1)) \cdot (m(\{a\}) + m(I_2)) = 8 \cdot 4 = 32$$

• Bien entendu, on étend ces résultats à \mathbb{R}^k où k entier positif, muni de la tribu produit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_k$, où $\forall i = 1, 2, \dots, k$, la mesure μ_i est portée par le i ème espace \mathbb{R} .



Intermède biographique : Henri LEBESGUE (1875-1941)

Issu d'un milieu modeste, le père est ouvrier typographe à Beauvais, Lebesgue n'en connut pas moins la voie royale qui va de Normale Sup à la chaire d'analyse du Collège de France. Nourri des travaux de Péano et surtout de Borel, Lebesgue s'est rapidement passionné pour les questions et les problèmes nés dans le champ de l'analyse classique, dont il pressentait et exploitait les potentialités créatrices : tel fut le cas de ses recherches en vue de la création d'une nouvelle théorie de l'intégration plus puissante et générale que la théorie riemannienne, qui est aujourd'hui le socle de l'analyse fonctionnelle.

Savant atypique, il mit tout son génie et sa profonde humanité au service de l'enseignement des mathématiques, en formant des générations de professeurs de l'enseignement secondaire sur lesquels il eut une influence durable et exemplaire.

1.2 L'intégrale de Lebesgue et ses propriétés**1.2.1 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives**

Nous définirons successivement l'intégrale de Lebesgue des fonctions indicatrices, puis des fonctions étagées positives, enfin des fonctions positives considérées comme limites de suites de fonctions étagées, toutes ces fonctions étant définies sur un espace mesuré (E, \mathcal{T}, μ) , et prenant des valeurs réelles.

Définition 15 : L'intégrale de la fonction indicatrice \mathbf{I}_A , $A \in \mathcal{T}$, est définie par :

$$\int \mathbf{I}_A d\mu = \mu(A)$$

Définition 16 : Une fonction mesurable f de (E, \mathcal{T}, μ) dans $\overline{\mathbb{R}}$ est **étagée** si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs y_i . Elle s'exprime donc comme une combinaison linéaire finie d'indicatrices :

$$f = \sum_{i \in I} y_i \mathbf{I}_{A_i} \quad \text{avec} \quad A_i = \{x \in E \mid f(x) = y_i\}.$$

Une fonction étagée qui ne prend que des valeurs positives, est dite fonction étagée positive.

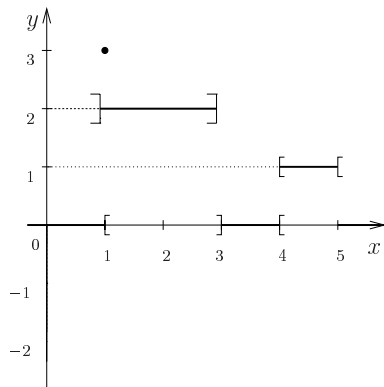
Définition 17 : L'intégrale de $f = \sum_{i \in I} y_i \mathbf{I}_{A_i}$, où les y_i sont positifs ou nuls, est définie par :

$$\int f d\mu = \sum_{i \in I} y_i \mu(A_i).$$

Dans le cas où l'un des A_i n'est pas de mesure finie, l'intégrale est égale à $+\infty$.

Exemple 3 : Soit $f(x) = 3 \cdot \mathbf{I}_{\{1\}}(x) + 2 \cdot \mathbf{I}_{]1,3]}(x) + \mathbf{I}_{[4,5[}(x)$:

$$\int f d\mu = 3 \cdot \mu(\{1\}) + 2 \cdot \mu(]1, 3]) + 1 \cdot \mu([4, 5[) = 0 + 4 + 1 = 5.$$

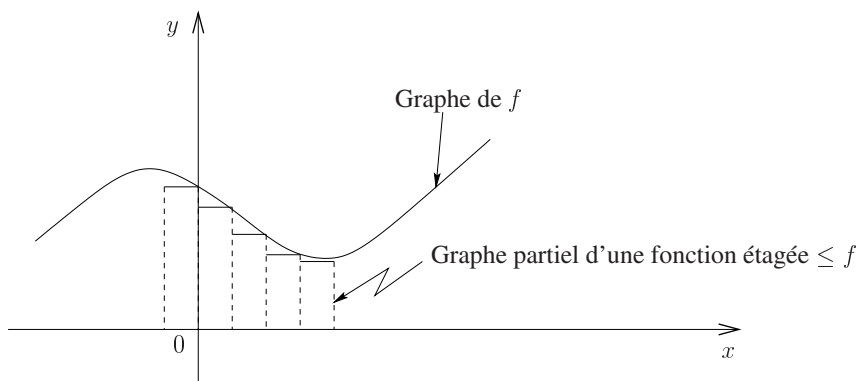


Théorème 7 (Approximation d'une fonction mesurable positive)

Toute fonction mesurable positive f de (E, \mathcal{T}, μ) dans \mathbb{R}^+ est égale à la limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives et mesurables.

Définition 18 : L'intégrale d'une fonction mesurable positive f est égale à :

$$\sup_{\phi} \left\{ \int \phi \, d\mu \mid \phi \text{ fonction étagée positive } \leq f \right\} \stackrel{\text{noté}}{=} \int f \, d\mu.$$



Définition 19 : Pour tout ensemble mesurable A de (E, \mathcal{T}, μ) et toute fonction mesurable f de (E, \mathcal{T}, μ) dans \mathbb{R}^+ , on pose $\int_A f \, d\mu = \int f \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu$.

Théorème 8 (Convergence monotone des fonctions mesurables positives - Beppo-Levi)

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors, pour tout ensemble mesurable A :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) d\mu, \text{ éventuellement égale à } +\infty.$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu$ est finie alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est μ -intégrable.

1.2.2 Intégrale de Lebesgue des fonctions quelconques et ses propriétés

Tout d'abord, exprimons toute fonction mesurable f comme différence de deux fonctions positives.

Définition 20 : On définit les fonctions mesurables :

$$f^+ = \sup(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = -\inf(f, 0),$$

d'où les expressions de f et de $|f|$:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

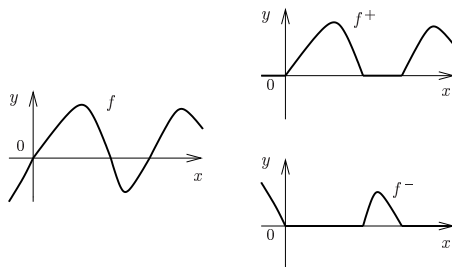


FIG. 1.1 – Graphes de f , f^+ et f^- .

On remarquera que $|f|$ étant positive, $\int |f| d\mu$ est toujours définie, ce qui n'est pas le cas de $\int f d\mu$, d'où la définition :

Définition 21 : (μ -intégrabilité d'une fonction)

Une fonction mesurable f de (E, \mathcal{T}, μ) dans \mathbb{R} , est μ -intégrable si $\int |f| d\mu$ est finie ; on a alors

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

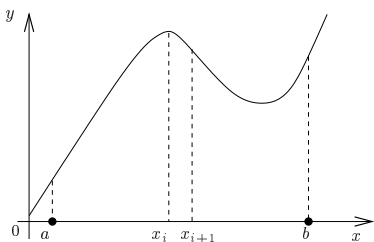
E 4 Soit la suite (B_n) d'ensembles mesurables disjoints, et B leur union. Montrer que si f est mesurable positive sur B , alors $\int_B f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{B_n} f d\mu$.

Théorème 9 Si f est μ -intégrable alors f est finie presque partout : $\{x \mid |f(x)| = +\infty\}$ est négligeable.

L'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann : deux approches différentes !

Considérons une fonction continue f de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

L'intégrale de Riemann est égale à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ et que $\sup(x_{i+1} - x_i)$ tend vers 0, de la somme $\sum_{i=0}^{n-1} f(u_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ où $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ est une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et $u_i \in]x_i, x_{i+1}[$.



Il est clair que si la fonction f est fortement discontinue, la limite de l'intégrale précédente n'existe pas : considérez par exemple $f(x) = \mathbf{1}_{]0,1[\cap \mathbb{Q}}(x)$.

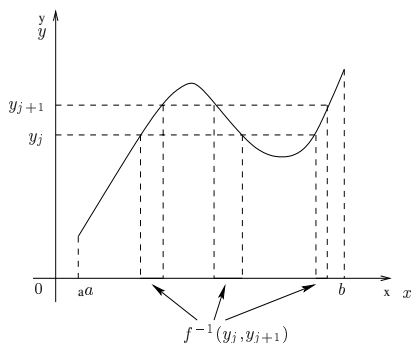
Comment Lebesgue procède-t-il pour construire son intégrale $\int_a^b f dm$?

Il subdivise l'image $f([a, b])$ en intervalles $(y_i, y_{i+1})_i$ vérifiant :

$$\inf_{[a,b]} \{f(x)\} = y_0 < y_1 < \dots < y_n = \sup_{[a,b]} \{f(x)\} \quad ,$$

et définit :

$$\int_a^b f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot m(f^{-1}([y_j, y_{j+1}[)) \right).$$



Considérons par exemple $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$, alors :

$$\int_0^1 f \, dm = 1 \cdot m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + 0 \cdot m(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1.0 + 0.1 = 0.$$

Par construction, l'intégrale de Lebesgue fait apparaître la nécessité des propriétés suivantes, qui justifient pleinement l'introduction préalable des concepts de mesure et de fonction mesurable :

- (1) f^{-1} (intervalle quelconque de \mathbb{R}) doit appartenir à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, pour pouvoir être mesuré (mesurabilité de f).
- (2) possibilité de sommer des longueurs d'intervalles disjoints (propriété de σ -additivité).

Théorème 10 (Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue)

(1) Si l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x) dx$ existe, alors l'intégrale de Lebesgue $\int f \cdot \mathbf{1}_{[a,b]} dm$ existe et égale la précédente ; c'est le cas des fonctions f continues sur un fermé borné.

(2) Seules les intégrales généralisées absolument convergentes au sens de Riemann, coïncident avec les intégrales de Lebesgue.

Contre-exemple : l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ n'est pas absolument convergente et n'est donc pas une intégrale de Lebesgue.

La notion importante de valeur principale d'une intégrale est une extension de l'intégrale impropre et permet de donner un sens à certaines intégrales divergentes.

Définition 22 : Si la fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf en a où elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, de manière que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$ n'existe pas, alors que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right)$ existe, on appelle **valeur principale** de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, cette dernière limite, désignée par $V.P \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)$.

Cette définition s'étend aux cas suivants :

$$V.P \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^{+A} f(x) dx$$

$$V.P \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Exemple 4 :

Soit ϕ de classe C^1 sur \mathbb{R} : il s'agit de donner un sens à $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\phi(x)}{x} dx$, où $0 \in]x_1, x_2[$.

Déterminons la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\left(\int_{x_1}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{x_2} \frac{\phi(x)}{x} dx \right)}_{(*)}$.

La fonction $\phi(x)$ peut s'écrire $\phi(0) + x\psi(x)$ où ψ est continue.

(*) s'écrit $\phi(0) \left(\int_{x_1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{x_2} \frac{1}{x} dx \right) + \int_{x_1}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{x_2} \psi(x) dx$, qui converge quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers $\phi(0)(\log(x_2) - \log(-x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} \psi(x) dx$, qui définit bien la V.P. $\left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\phi(x)}{x} dx \right)$.

De tous les usages de la relation d'équivalence "égalité presque partout", celle de deux fonctions μ -intégrables est sans doute la plus précieuse, car elle permet de définir les espaces fonctionnels normés complets L^p (Ch : 1.2.4).

Théorème 11 Deux fonctions μ -intégrables, égales presque-partout, ont même intégrale.

E 5 Démontrer les théorèmes 9 et 11

Théorème 12 L'ensemble des fonctions μ -intégrables définies sur (E, \mathcal{T}, μ) est un espace vectoriel pour les opérations somme de fonctions et produit d'une fonction par un scalaire.

On note $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ cet espace vectoriel, que l'on munit de la semi-norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$. On lui associe une topologie dite de la **convergence en moyenne** définie par :

la suite $(f_n)_n$ de \mathcal{L}^1 converge en moyenne vers $f \in \mathcal{L}^1$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

Remarque : Une fonction μ -intégrable, est dite intégrable s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la mesure μ .

D'un point de vue pratique, les cinq théorèmes suivants, qui établissent les propriétés de l'intégrale de Lebesgue, sont les plus importants de ce chapitre.

Nous commençons par énoncer le résultat fondamental de l'intégration de Lebesgue, qui permet de permuter intégrale et limite d'une suite de fonctions sous des conditions plus générales que la convergence uniforme de fonctions continues.

Théorème 13 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles mesurables, définies sur (E, \mathcal{T}, μ) , convergente p.p vers f .

S'il existe une fonction g **intégrable** t.q. $|f_n| \leq g$ (p.p), alors :

(1) f est intégrable.

(2) $\forall A \in \mathcal{T} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

Preuve

(1) $\forall n \quad |f_n(x)| \leq g(x)$ (p.p) $\Rightarrow |f(x)| \leq g(x)$ (p.p); donc f est intégrable.

(2) Posons : $h_n = f - f_n$; $|h_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2 \cdot g(x)$ (p.p)

Soit : $\ell_n(x) = 2g(x) - \sup_{k \geq n} |h_k(x)|$.

ℓ_n est positive et $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(x) = 2g(x)$ (p.p);

$(\ell_n)_n$ est une suite croissante.

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \int_A \ell_n(x) \, d\mu(x) &\leq 2 \int_A g(x) \, d\mu(x) \\ \int_A |\ell_n(x)| \, d\mu(x) &\leq 2 \int_A g(x) \, d\mu(x) \\ \int_A |h_n(x)| \, d\mu(x) &\leq 2 \int_A g(x) \, d\mu(x) - \int_A \ell_n(x) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

car :

$$\left(\sup_{k \geq n} |h_k(x)| \geq \sup_{k \geq n+1} |h_k(x)| \text{ et } \sup_{k \geq n} |h_k(x)| \geq |h_n(x)| \right) \Rightarrow \ell_{n+1} \geq \ell_n$$

Appliquons le théorème 8 de convergence monotone à $(\ell_n)_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \ell_n(x) \, d\mu(x) = 2 \int_A g(x) \, d\mu(x)$$

d'où la conclusion, sachant que $|\int_A f_n \, d\mu - \int_A f \, d\mu| \leq \int_A |f_n - f| \, d\mu$.

□

E 6 Étudier les convergences simple, uniforme et dominée des suites :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{3/2}x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } [1/n, 1] \end{cases} \quad ; \quad g_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Ne pas hésiter à tracer les graphes : rien ne vaut un bon dessin clair pour soutenir l'intuition !

Pour la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on montrera que : $|g_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

E 7 Soit $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ à valeurs positives vérifiant la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{[0,1]} f^n \, d\mu = C \quad (= \text{Constante}) \quad , \quad \text{où } \mu \text{ est la mesure de Lebesgue}$$

Posons $E = f^{-1}(\{1\})$ et $A = \bigcup_{[0,1]} E$

(1) Démontrer : $\{x | f(x) > 1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ x \mid f(x) \geq 1 + \frac{1}{n} \right\}$.

En déduire que $f \leq 1$ (p.p. sur $[0, 1]$).

(2) Démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f^n d\mu = 0$.

En déduire que $C = \mu(E)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \int_A f^n d\mu = 0$.

Contre-exemple à l'application du théorème de la convergence dominée :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, soit $J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} n^3 t^2 \exp(-n^2 t^2) dt$ que l'on calcule grâce à l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \neq \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 t^2 \exp(-n^2 t^2)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dt = 0.$$

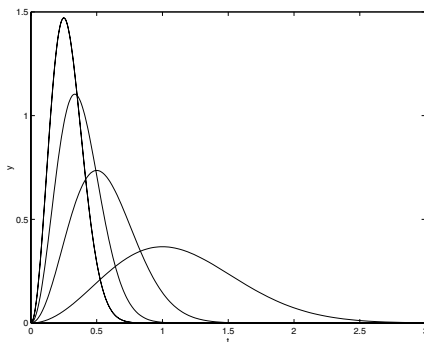


FIG. 1.2 – Graphe de $g_n(t) = n^3 t^2 e^{-n^2 t^2}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Il n'y a pas de commutation possible des opérateurs limite et intégrale : dans ce cas, le théorème de convergence dominée est mis en défaut car il n'existe pas de fonction majorante intégrable, comme on peut l'établir en déterminant l'équation de l'enveloppe généralisée qui majore les courbes $g_n(t) = n^3 t^2 e^{-n^2 t^2}$. (On ne demande pas au lecteur de vérifier que cette enveloppe est décrite par la fonction $e(t) = (3/2)^{3/2} e^{-3/2 \cdot \frac{1}{t}}$).

ATTENTION : La recherche de la fonction dominante n'est pas toujours facile !

Théorème 14 (Condition suffisante de permutation intégrale / série)

Soit une suite de fonctions réelles $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définies sur (E, \mathcal{T}, μ) telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} \int |f_i| d\mu$ finie, alors :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f_i \text{ est intégrable et } \int_E \left(\sum_{i=0}^{+\infty} f_i \right) d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int_E f_i d\mu \right).$$

Preuve

Posons : $F_N(x) = \sum_{n=0}^N |f_n(x)|$. $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone croissante de fonctions positives, qui converge vers $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$, qui est égale à $+\infty$ éventuellement. En appliquant le théorème de Beppo-Levi, il vient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_E F_N d\mu = \int_E F d\mu .$$

D'autre part, on a :

$$\int_E F_N d\mu = \sum_{n=0}^N \int_E |f_n| d\mu \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |f_n| d\mu ,$$

qui est finie par hypothèse. On en déduit donc que F est intégrable sur E . D'après le théorème 9, elle est finie presque-partout, ce qui signifie que la série de terme général $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente, donc convergente presque-partout. Posons :

$$\Phi_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x) .$$

Alors la suite Φ_N converge presque-partout vers $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et on a p.p. :

$$|\Phi_N(x)| \leq \sum_{n=0}^N |f_n(x)| \leq F(x)$$

qui est intégrable et indépendante de N . Par application du théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n d\mu = \int_E \lim_{N \rightarrow +\infty} \Phi_N d\mu = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_E \Phi_N d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu .$$

□

E 8

(1) Appliquer le théorème 14, lorsque $f_n(x) = xe^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

(2) Démontrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\sqrt{x}) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

(On rappelle que : $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$).

E 9 Soit à calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx$ [On a : $\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} e^{-nx}$]

Exprimer I sous forme de $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin x e^{-kx} dx$ et en déduire $I = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{1 + k^2}$

1.2.3 Propriétés de continuité et de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes suivants résultent du théorème fondamental de convergence dominée.

Théorème 15 (Condition suffisante de continuité d'une intégrale paramétrée)

Soit f définie de $[a, b] \times E$ dans \mathbb{R} , mesurable en x , telle que la fonction $t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t, x)$ est continue en t^* pour presque tout x . On suppose qu'il existe une fonction g intégrable positive, telle que, pour presque tout x et pour tout t : $|f(t, x)| \leq g(x)$. Alors la fonction :

$$I(t) = \int_E f(t, x) d\mu(x) \text{ est continue en } t^*.$$

Preuve

Pour toute suite $(t_n)_n$ convergente vers t^* : posons $f_n(x) = f(t_n, x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(t^*, x)$ (pour presque tout x). Or $|f_n(x)| \leq g(x)$ (p.p). Par application du théorème de convergence dominée :

$$\lim_n \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E \lim_n f_n(x) d\mu(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} I(t_n) = I(t^*).$$

□

Remarque : Pour l'intégrale de Riemann, ce résultat de continuité de l'intégrale $I(t)$ exige aussi la continuité de $f(t, x)$ en t .

Théorème 16 (Condition suffisante de dérivabilité d'une intégrale paramétrée)

Soit f définie de $[a, b] \times E$ dans \mathbb{R} telle que la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable dans un voisinage de t^* , pour presque tout x , et la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est intégrable pour tout t .

S'il existe g intégrable telle que : $\forall t \in V$, $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in E$,

alors $I(t)$ est dérivable en t^* et $\frac{d}{dt} \left(\int_E f(t, x) d\mu(x) \right)_{t=t^*} = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t^*, x) d\mu(x)$.

Preuve

On utilise la preuve du théorème précédent, appliquée cette fois à la suite $\left(\frac{f(t_n, x) - f(t^*, x)}{t_n - t^*} \right)_n$. □

E 10 Une fonction $f(t)$ est telle que $f(t)e^{-at} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ quel que soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que, pour tout $x > a$:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt .$$

E 11 Étude de la fonction eulérienne de deuxième espèce notée $\Gamma(x)$

Pour tout réel strictement positif x , on pose : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{x-1} dt$. Γ étend la fonction factorielle $\Gamma(n) = (n-1)!$ aux valeurs réelles positives.

- (1) Démontrer que, pour tout x strictement positif, $\Gamma(x)$ existe, est continue et est C^∞ .
- (2) Démontrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Calculer $\Gamma(1/2)$ et $\Gamma(3/2)$.
- (3) Tracer le graphe approximatif de Γ [On admettra que la fonction Γ est convexe et admet un minimum entre 1 et 2].

Le théorème de Fubini, ci-après, énonce les règles relatives au calcul d'une intégrale multiple, lorsque l'on permute les variables d'intégration. Un exemple classique d'intégrale double, ayant deux valeurs selon l'ordre d'intégration considéré, montrera l'intérêt de ce théorème.

Soit à calculer :
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

1ère façon :
$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right] dy = - \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = -\frac{\pi}{4}$$

2ème façon :
$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{\pi}{4}$$

Pourquoi ne peut-on pas permuter l'ordre d'intégration ?

Le théorème de Fubini répond à cette question et donne des conditions suffisantes de permutation des intégrales.

Théorème 17 (Fubini)

Soient $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, mesurable et $A \times B$ un ensemble borélien de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) Si f est positive sur $A \times B$ alors :

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy,$$

ces intégrales étant éventuellement égales à $+\infty$.

(b) Si $\int_{A \times B} |f| dx dy$ est finie, alors les fonctions $x \mapsto f(x, y)$, $y \mapsto f(x, y)$ sont intégrables p.p pour les valeurs respectives fixées de y et de x , les fonctions $x \mapsto \int_B f(x, y) dy$ et $y \mapsto \int_A f(x, y) dx$ sont respectivement dx -intégrable et dy -intégrable et les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Preuve (cf : Analyse réelle et complexe. Rudin)

□

Remarque : Dans le contre-exemple introductif au théorème de Fubini, la permutation des intégrales aboutit à des résultats distincts car l'hypothèse (b) du théorème de Fubini est mise en défaut : en effet $\left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right|$ n'est pas d'intégrale finie sur le pavé $[0, 1] \times [0, 1]$. (preuve facile si

l'on passe en coordonnées polaires).

On étend le théorème de Fubini aux cas suivants :

- (1) sous-ensembles d'intégration quelconques pourvu qu'ils soient mesurables : si E est un tel sous-ensemble,

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{E_y} f(x, y) dx \right) dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{E_x} f(x, y) dy \right) dx$$

où les intervalles (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont les projections respectives de E sur x' et y' , $E_x = \{y | (x, y) \in E\}$ et $E_y = \{x | (x, y) \in E\}$.

- (2) fonctions mesurables définies sur l'espace produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ muni de la tribu produit $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{T}_k$ et de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_k$ ($\forall i, E_i$ étant un espace mesuré par μ_i , pourvu de la tribu \mathcal{T}_i) ; c'est le cas des fonctions mesurables réelles définies sur $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k, m_k)$ où m_k est la mesure produit de Lebesgue définie sur \mathbb{R}^k ; c'est aussi le cas lorsque les mesures μ_i sont discrètes (le théorème de Fubini donne alors les conditions de permutation des séries multiples).

- (3) cas mixte où l'une des mesures est la mesure comptable, par exemple $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$: le théorème de Fubini exprime la possibilité de permuter \int et \sum sous la condition d'absolue convergence de $\sum_n f_n(x)$ (cf. Théorème 14).

- (4) cas de mesures égales à la mesure comptable : l'intégrale double équivaut alors à une série double, dont on peut permuter l'ordre de sommation si ses termes sont positifs, ou si la série est absolument convergente.

Application du Théorème 17. $I = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy) dy \right] dx$

On a :

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^1 |f(x, y)| dy \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^1 dy = 1,$$

le théorème de Fubini est donc applicable :

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2} dy = \int_0^1 \frac{du}{1+4u} = \frac{1}{4} \log(5)$$

L'égalité (*) se démontre en considérant l'intégrale complexe $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{i2xy} dx$. Or :

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

d'où l'on tire : $\int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{\sin^2 u}{u} du = \frac{1}{4} \log(5)$.

Définition 23 : Une bijection h entre deux ouverts D_1 et D_2 de \mathbb{R}^n est appelée **difféomorphisme** si h et h^{-1} sont continûment différentiables : un difféomorphisme s'identifie à la notion classique de changement de variables.

Théorème 18 (Changement de variables dans une intégrale)

Soit h un difféomorphisme de D_1 dans D_2 , sous-ensembles de \mathbb{R}^n et f une fonction mesurable de D_2 dans \mathbb{R} alors on a $D_1 \xrightarrow{h} D_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Si f est intégrable ou positive : $\int_{D_2} f(x) d\mu(x) = \int_{D_1} f(h(y)) |dét(J_h(y))| d\mu(y)$,
où $J_h(y)$ est la matrice jacobienne de h .

E 12 Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2 y)}$, en appliquant le théorème précédant. Pour cela, on construira le difféomorphisme adapté : $h : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$.

En pratique, le théorème du changement de variables a deux applications importantes :

- (1) **Calcul d'intégrales.**
- (2) **Calcul de lois en théorie des probabilités.**

E 13 Le lecteur qui serait encore ignorant de la pratique des changements de variables classiques ou plus vraisemblablement qui l'aurait oubliée, est vivement incité à appliquer le théorème précédent aux cas des coordonnées polaires ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) et sphériques ($x = r \cos \phi \cdot \cos \theta; y = r \cos \phi \cdot \sin \theta; z = r \sin \phi$), d'un usage fréquent dans les problèmes où apparaissent des symétries cylindriques ou sphériques.

E 14 Calculer $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx \cdot dy$ où $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1\}$.
 (a) Effectuer le changement de variables $u = x - y, v = x + y$, et déterminer le nouveau domaine d'intégration D' (De la minutie dans le traitement des inéquations qui définissent les domaines d'intégration !)
 (b) Calculer l'intégrale.

Illustration du caractère unificateur du concept de mesure

(A) **Une série est une intégrale associée à une mesure discrète.**

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de sa tribu naturelle $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, et de la mesure comptable $\mu_c = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$. Toute fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est μ_c -intégrable si la série de terme général $f(n)$ est absolument intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_c = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

On désigne par $l^1(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites (x_n) telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ soit fini.

(B) **Une probabilité est une mesure positive.**

- (1) **Cas d'une probabilité discrète .**

Soit E un ensemble fini d'éléments distincts $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, représentant les événements élémentaires, et \mathcal{T} la tribu des événements considérés. On définit sur (E, \mathcal{T}) la mesure de probabilité :

- $\forall A \in \mathcal{T}, P(A) \in [0, 1]$,
- $\forall B, C \in \mathcal{T}$, disjoints, $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

La mesure de probabilité P est complètement définie dès que sont connus :

$p_i = P(e_i)$, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. On écrit $P(\cdot) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \delta_{e_i}(\cdot)$, où δ_{e_i} est la mesure de Dirac portée par e_i .

(2) Cas d'une probabilité définie par une densité.

Supposons que l'on s'intéresse aux événements décrits par la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Définissons la mesure $P : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mapsto P(B) = \int_B f(x) dm(x)$, où f est une fonction intégrable, positive et d'intégrale 1 sur \mathbb{R} . Alors P est bien une mesure :

- $P(\emptyset) = \int_{\emptyset} f(x) dm(x) = 0$;
- si les ensembles $(A_i)_i$ sont des boréliens deux à deux disjoints, alors

$$P\left(\biguplus_i A_i\right) = \int_{\biguplus_i A_i} f(x) dm(x) = \sum_i \int_{A_i} f(x) dm(x) = \sum_i P(A_i).$$

La fonction f est la densité associée à une probabilité P (exemple : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité gaussienne).

Les définitions précédentes laissent entrevoir que la théorie des probabilités est fondée sur la théorie de la mesure et de l'intégration.

1.2.4 Espaces L^p

Nous avons déjà vu (Théorème 12) que l'ensemble des fonctions intégrables définies sur un ensemble mesuré (E, \mathcal{T}, μ) , était un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$. Il serait judicieux de disposer d'une norme sur cet espace ; mais $\int_E |f(x)| dx$ n'est pas une norme puisque $\int_E |f(x)| dx = 0$ n'implique pas $f = 0$ partout, mais presque partout : donc \mathcal{L}^1 n'est pas séparé. (Seul l'ensemble-quotient de \mathcal{L}^1 par la relation d'équivalence "égalité presque-partout" est séparé.)

Définition 24 : L'espace quotient des classes de fonctions μ -intégrables et égales presque-partout est un espace vectoriel noté $L^1(E, \mathcal{T}, \mu)$.

Théorème 19

$L^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace vectoriel normé complet (dit aussi espace de Banach) de norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\int_E |f(x)| d\mu(x) \stackrel{\text{noté}}{=} \|f\|_1 \quad \forall f \in L^1(E, \mathcal{T}, \mu).$$

De façon générale on définit les espace vectoriels $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{T}, \mu)$ de fonctions dont les puissances $p \geq 1$, sont μ -intégrables.

Théorème 20 (Complétude des espaces L^p)

L'ensemble des classes de fonctions f égales presque-partout vérifiant :

$\int_E |f(x)|^p d\mu(x)$ fini, pour un réel $p \geq 1$, est un **espace vectoriel normé complet**, désigné par $L^p(E, \mathcal{T}, \mu)$, muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Remarque : l'espace $L^2(E, \mathcal{T}, \mu)$ des fonctions de carrés intégrables, adapté à la description des signaux d'énergie finie, est le seul espace L^p dont la norme $\|f\|_2$ provient d'un produit scalaire : les propriétés puissantes qui le caractérisent et en font un espace de Hilbert, le distinguent des autres espaces.

Définition 25 : L'espace $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{T}, \mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables bornées presque-partout par un nombre positif α dit borne supérieure essentielle. La norme $\|f\|_\infty$ est égale à $\inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid |f(x)| \leq \alpha \text{ (p.p.)}\}$. L'espace $L^\infty(E, \mathcal{T}, \mu)$ est défini comme espace quotient des classes de fonctions \mathcal{L}^∞ , égales p.p.

E 15 $f(t) = \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$? $L^2(\mathbb{R})$?

Théorème 21 (Minkowski) Pour tout p réel supérieur ou égal à 1 et quelles que soient les fonctions f, g de $L^p(E, \mathcal{T}, \mu)$, on a :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Théorème 22 (Hölder) Soit (E, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré, soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), soient $f \in L^p(E, \mathcal{T}, \mu)$ et $g \in L^q(E, \mathcal{T}, \mu)$, alors $f \cdot g$ appartient à $L^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ et

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

En particulier : si $f \in L^1, g \in L^\infty$ alors $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$;

si $f, g \in L^2$ alors $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$, qui est l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**.

E 16

(1) Démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- (2) Démontrer que $L^1(I)$ et $L^2(I)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , n'ont pas de relation d'inclusion : il s'agit de trouver des fonctions qui appartiennent à $L^1 \setminus L^2$, à $L^2 \setminus L^1$ et à $L^1 \cap L^2$ (on choisira un intervalle I adapté à chacun des trois cas).
- (3) Démontrer que $L^2(a, b) \subset L^1(a, b)$ pour tout intervalle borné (a, b) .
- (4) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$. En déduire que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ ($p > 1$), la fonction : $x \rightarrow F(x) = \int_0^x f(u) du$ est continue.

Notation : on désignera par $\mathcal{L}^1_{loc}(E, \mathcal{T}, \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur tout ensemble μ -borné de E . Par exemple, toute fonction réelle continue sur \mathbb{R} est dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. On désigne par L^1_{loc} l'espace quotient formé des classes de fonctions de \mathcal{L}^1_{loc} , égales p.p.

E 17 Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent dans L^2 , le produit $(f_n \cdot g_n)_n$ converge-t-il dans L^1 ? Pourquoi la convergence du produit n'est-elle pas acquise dans L^2 ?

Théorème 23 Espaces denses dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

L'espace des fonctions continues à support borné dans \mathbb{R} , ainsi que l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k , pour $k \in \mathbb{N}^*$, à support borné dans \mathbb{R} , sont denses dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, pour tout réel p supérieur ou égal à 1.

Attention, ces résultats de densité sont faux dans l'espace $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Il suffit de considérer une fonction constante non nulle sur \mathbb{R} , qui ne peut être atteinte par une suite de fonctions continues à support borné.

Théorème 24 Riemann-Lebesgue

Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on a : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = 0$.

Pour soutenir l'intuition géométrique de ce résultat, considérez le graphe de la fonction $\frac{\sin 2\pi N x}{1+x^2}$, pour N suffisamment grand.

E 18 Démontrer le théorème précédent. [Indication : pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, considérer la fonction g de $\mathcal{C}^1([a, b])$ telle que : $\|f - g\|_1 < \varepsilon$]

Quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques.

De même que sont inaccessibles à l'amateur d'art architectural, les plans des échafaudages successifs ayant permis l'édification d'une cathédrale, de même est niée dans l'enseignement des sciences, la mouvante géologie qui régit l'histoire de leur production et de leurs permanentes réorganisations. En ce qui concerne les mathématiques, la pédagogie au niveau universitaire se réduit le plus souvent à un exposé structuré, alternant dans un déroulement sans failles, les définitions, les lemmes et les théorèmes. L'ensemble obtenu, à l'agencement parfait, est généralement perçu par les étudiants comme de véritables Tables de la loi, intangibles et

intemporelles, qui s'apparentent plus à un catalogue de vérités éternelles qu'à une théorie vivante, porteuse de problèmes et de déploiements nouveaux. Ainsi sont oblitérées les principales étapes et articulations de la théorie mathématique, et par conséquent sa dynamique créatrice, en l'absence desquelles il est difficile de motiver les étudiants.

Or, s'il est un savoir dont l'apprentissage et la compréhension, devraient revêtir une forme spécifique, c'est bien la mathématique. Par exemple, en ce qui concerne l'introduction des concepts centraux d'une théorie donnée, il faudrait faire comprendre les problématiques dans lesquelles ils ont été élaborés, puis définis. Pour mener à bien un tel enseignement, deux ingrédients sont nécessaires : un corps de professeurs ayant une formation minimale en histoire et en philosophie des sciences, et le temps nécessaire pour la mettre en œuvre, denrées rares en ces temps de pénurie pour l'enseignement scientifique.

On sait, au moins depuis les excès de la "réforme des mathématiques modernes" inaugurée dans les années soixante, qu'il est illusoire de croire qu'une théorie mathématique puisse être comprise par les étudiants, par un exposé réduit à la seule présentation axiomatique-déductive. Bien des élèves interrogés dès leur entrée en Ecoles d'ingénieurs, ayant donc derrière eux une dizaine d'années d'apprentissage des mathématiques, réduisent trop souvent l'activité mathématique à une activité logique, voire ludique. Quid des relations de forte réciprocité entretenues au cours de leur histoire commune, par les sciences mathématiques et physiques.

Le lecteur pourra prolonger cette brève réflexion, dans les ouvrages tout à fait abordables et stimulants :

- Faire des mathématiques : le plaisir du sens. R. Bkouche, B.Charlot, N.Rouche ; Armand Colin (1991).
- Routes et dédales : histoire des mathématiques. A.Dahan, J.Peiffer ; Seuil.
- L'analyse au fil de l'histoire. E.Hairer, G.Wanner ; Springer.
- Les mathématiques, plaisir et nécessité. A.Ducrocq, A.Warusfel ; Vuibert.

1.3 La convolution des fonctions

Le concept de convolution est central en analyse fonctionnelle et en théorie du signal, où il permet de modéliser les systèmes linéaires stationnaires (ou filtres).

Théorème 25 *Le produit de convolution de deux fonctions f, g de $L^1(\mathbb{R})$ est défini presque-partout par :*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \stackrel{\text{noté}}{=} (f * g)(x).$$

Preuve $f, g \in L^1 \implies$ la fonction $f \otimes g$ définie par $(u, v) \longrightarrow f(u).g(v)$ est $L^1(\mathbb{R}^2)$, donc $x \longrightarrow \int f(x-t).g(t) dt$ est défini presque-partout (Théorème de Fubini), et est $L^1(\mathbb{R})$. \square

Théorème 26 $(L^1(\mathbb{R}), *)$ est une algèbre commutative

$$(1) f, g \in L^1 \implies f * g \in L^1$$

$$(2) \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(3) f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$(4) f * g = g * f$$

$$(5) f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

Preuve

(1) et (2)

$$\begin{aligned} \int \left| \int f(x-t) g(t) dt \right| dx &\leq \iint |f(x-t)| |g(t)| dt dx \\ &= \int |g(t)| \left(\int |f(x-t)| dx \right) dt = \|f\|_1 \|g\|_1 . \end{aligned}$$

(3) Utiliser le théorème de Fubini.

$$(4) (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(u) f(x-u) du = (f * g)(x).$$

(5) Evident.

□

Théorème 27 (Dérivation d'un produit de convolution)

(1) Si $f, g \in L^1$ et g à dérivée bornée, alors : $(f * g)' = f * g' = g' * f$.

(2) Si $f, g \in L^1$ sont toutes deux à dérivées bornées alors :

$$(f * g)' = f' * g = f * g' .$$

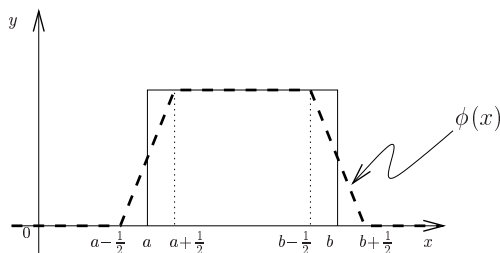
La convolution est une opération de régularisation : le produit de convolution de deux fonctions est une fonction plus régulière que chacune d'entre elles.

Considérons en effet une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ convolée avec la fonction-porte $\frac{1}{h} \mathbf{1}_{[-h/2, h/2]}(x)$:

$$\left(f * \frac{1}{h} \mathbf{1}_{[-h/2, h/2]} \right) (x) = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(t) dt$$

égale à la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[x - h/2, x + h/2]$, qui est nécessairement plus régulière que f et $\frac{1}{h} \mathbf{1}_{[-h/2, h/2]}(x)$.

Dans le cas simple où $f(x) = \mathbf{1}_{[a, b]}(x)$ et $h = 1$, démontrer que $(f * \mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]})(x) = \phi(x)$ admet le graphe (en pointillés) suivant :



On constate que ϕ est continue alors que f ne l'est pas. Il serait facile de prolonger ce résultat au cas où f est une fonction étagée de la forme $\sum_{i=1}^n f_i \cdot \mathbf{I}_{[a+(i-1)h, a+ih]}(x)$ ($f_i \in \mathbb{R}$), puis par passage à la limite, à des fonctions quelconques de classe $L^1(\mathbb{R})$.

Remarquons que $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \mathbf{I}_{[-h/2, h/2]} * f \right) (x)$ est égale à $f(x)$: même si $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \mathbf{I}_{[-h/2, h/2]}(x) \right)$, qui représente l'impulsion portée par 0, **n'existe pas en tant que fonction**, les mathématiciens ont su créer une convergence adaptée à ce problème dans le cadre de la théorie des distributions (Rendez-vous donc au Chapitre 4).

E 19 Relation entre les fonctions gamma et beta.

(1) Soient $f, g \geq 0$, définies sur $[0, +\infty[$ telles que $\|f\|_1 = \|g\|_1 = 1$. Calculer $\|f * g\|_1$.

(2) Pour a strictement positif, on définit : $f_a(t) = \frac{t^{a-1} e^{-t}}{\Gamma(a)} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

Sachant que les fonctions gamma et beta sont définies par :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-x) x^{a-1} dx \quad \text{et} \quad B(a, b) = \int_0^1 v^{a-1} (1-v)^{b-1} dv .$$

Exprimez $f_a * f_b$ en fonction de $\Gamma(a), \Gamma(b)$ et $B(a, b)$.

En déduire que : $B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Le théorème ci-dessous résume les cas classiques d'extension du produit de convolution à des espaces fonctionnels autres que L^1 :

Théorème 28 (Convolution dans les espaces L^p)

Si $f \in L^p$, $g \in L^q$ alors $f * g \in L^r$ où les réels positifs p, q, r vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

Applications :

(1) Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g$ est définie partout, continue et bornée. De plus, on a : $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(2) Si $f \in L^1$ et $g \in L^2$, alors $f * g$ est définie presque-partout, appartient à L^2 et vérifie : $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.

Preuve La démonstration de (2) est basée sur la décomposition :

$|f(t) \cdot g(x-t)| = \underbrace{(|f(x)| |g(x-t)|^2)^{\frac{1}{2}}}_{(A)} \cdot (f(t))^{\frac{1}{2}}$. On utilise ensuite les propriétés classiques

de L^1 et L^2 , ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Théorème 29

- (1) Si f et g sont des fonctions continues à support bornés, alors $f * g$ est continue à support borné.
- (2) Si f et g sont localement continues par morceaux et de supports limités à gauche, c'est-à-dire inclus dans $[\alpha, +\infty[$ pour un certain α , alors $f * g$ est continue, à support limité à gauche.

Remarque : Si f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^+)$, alors $f * g(x) = \int_0^x f(x-t) \cdot g(t) dt$.

Exemple 5 : Convolution des fonctions de Heaviside

Soit $H_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a donc : $H_a(x) = H(x-a)$.

Soit $b > a$, alors $H_a * H_b$ existe d'après le théorème 29 :

$$H_a * H_b(x) = \int_{\mathbb{R}} H(x-t-a) H(t-b) dt = \int_b^{x-a} dt = x - (a+b) \text{ si } x \geq a+b .$$

On en déduit donc que : $H_a * H_b(x) = (x - (a+b))H_{a+b}(x)$.

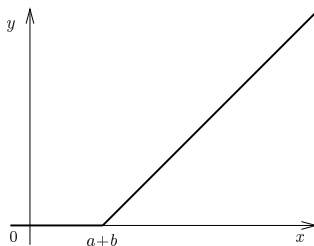


FIG. 1.3 – Graphe de $H_a * H_b$

Le produit de convolution a d'autres extensions utiles en analyse.

(1) Produit de convolution (ou produit de Cauchy) de séries absolument convergentes.

L'espace vectoriel des séries réelles absolument convergentes, noté $l^1(\mathbb{R})$, est l'équivalent de $L^1(\mathbb{R})$ pour la mesure comptable. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à $l^1(\mathbb{R})$, on définit la série $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ égale à leur produit de convolution par :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} .$$

(2) Produit de convolution de mesures.

Dans le cadre de la théorie des probabilités, le produit de convolution permet d'exprimer la loi d'une somme de variables aléatoires. Montrons-le dans le cas de deux variables à valeurs entières X et Y , de lois respectives définies par les mesures discrètes :

$$P_X = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \delta_i \text{ et } P_Y = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \delta_j . \text{ Pour tout entier } k, \text{ on a :}$$

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P_X(i) P_Y(k - i) .$$

Le second membre de l'égalité s'identifie au produit de convolution en l'entier k de P_X par P_Y : pour tout entier k , $P_{X+Y}(k) = P_X * P_Y(k)$.

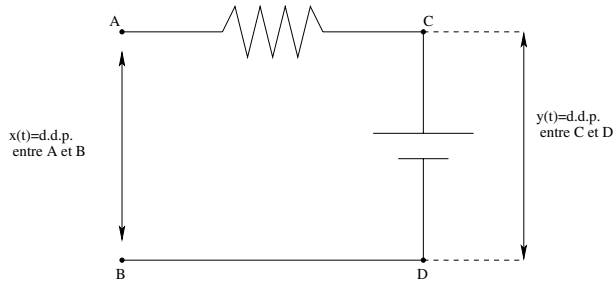
Vérifier ce résultat lorsque : $P_X = P_Y = \frac{1}{4} \delta_{-1} + \frac{1}{2} \delta_0 + \frac{1}{4} \delta_1$. On trouvera : $P_{X+Y} = \frac{1}{16} \delta_{-2} + \frac{1}{4} \delta_{-1} + \frac{3}{8} \delta_0 + \frac{1}{4} \delta_1 + \frac{1}{16} \delta_2$. Nous n'irons pas plus loin dans la construction du produit de convolution de mesures quelconques (cf. Samuelides-Touzillier - Analyse fonctionnelle).

Relation entre convolution et filtre linéaire.

De nombreux systèmes mis en œuvre en physique, en automatique et en théorie du signal, répondent à toute action $x(t)$ en entrée, par une réponse $S(x)(t) = y(t)$, et ce d'une façon linéaire, continue et stationnaire ($S(x)(t + \tau) = y(t + \tau)$ pour toute translation de τ). De tels systèmes sont appelés des **filtres linéaires** (ou **filtres**). On établira de façon rigoureuse en théorie des distributions, que pour tout filtre S , $S(x)(t) = (x * h)(t)$, où $h(t)$ est la réponse du système à l'impulsion au temps 0.

Quelques exemples :

(1) Le **filtre RC**.



Les différences de potentiel $x(t)$ et $y(t)$ sont régies par l'équation différentielle :

$$RC \dot{y}(t) + y(t) = x(t), \quad \forall t \geq 0 \text{ avec } y(0) = 0$$

$$\text{dont la solution est } y(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{RC}} \cdot x(s) ds = \left(\frac{1}{RC} e^{-\frac{\cdot}{RC}} * x \right)(t).$$

(2) **L'équation de la chaleur.**

Soit une barre de section fixe, homogène, de longueur infinie, où la température au point d'abscisse u , au temps $t = 0$ est égale à $\psi(u)$.

On démontre qu'à toute répartition de la température initiale $\psi(u)$, on associe la température :

$$T(u, t) = \frac{1}{a\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{u^2}{4ta^2}} * \psi(u) \quad (\text{Cf : Bureau d'étude 3})$$

La fonction $(u, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow T(u, t)$ supposée de classe C^2 , vérifie l'équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$ où a^2 est une constante qui dépend des caractéristiques physiques de la barre.

(3) Le problème de Dirichlet.

Il s'agit de déterminer la valeur d'une fonction $u(r, \theta)$ harmonique à l'intérieur du disque $D(0, R)$ (c'est-à-dire que $\Delta u = 0$ dans le disque), sachant qu'elle est connue sur le bord du disque, égale à $f(R \cdot e^{i\theta})$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.

$$\text{On démontre que : } u(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2} * f(\theta).$$

Il existe de multiples applications de la convolution : c'est le cas de l'optique de Fourier, base de l'optique physique et géométrique.

(4) Filtre en traitement du signal.

Un système physique ou un instrument de mesure dont la résolution est limitée, ne peut restituer en sortie, les variations rapides et irrégulières de l'entrée x . La convolution $x * h$ représente la moyenne pondérée des $e(t)$ par $h(t - u)$, au voisinage de chaque temps u . Ainsi, la réponse $y(t) = (x * h)(t)$ est plus régulière que l'entrée $x(t)$.

Définition 26 : Une suite de fonctions positives $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intégrables constitue une **unité approchée** (ou **suite régularisante**) si sont vérifiées les propriétés :

$$(1) \forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} U_n(x) dx = 1.$$

$$(2) \text{ Pour un voisinage } V \text{ quelconque de } \{0\}, \text{ si petit soit-il, } \int_{\mathbb{C}V} U_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exemple 6 : La suite des fonctions $(n \cdot \Pi_{[-1/2n, 1/2n]})_{n \in \mathbb{N}^*}$, ou des fonctions gaussiennes $(\frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 n^2}{2}})_n$ sont des suites régularisantes : pour n suffisamment grand ($n \geq 1000$) elles modélisent de façon satisfaisante les impulsions de support $\{0\}$.

Le théorème suivant propose une nouvelle forme d'approximation des fonctions, utile dans le cadre de l'analyse et de la synthèse harmonique des fonctions et des distributions.

Définition 27 : \mathcal{C}_0 désigne l'espace des fonctions continues s'annulant à l'infini : f continue appartient à \mathcal{C}_0 si et seulement si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un compact en dehors duquel $|f|$ est majorée par ε . L'espace \mathcal{C}_0 est naturellement muni de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$.

Théorème 30 (Approximation d'une fonction par une suite de fonctions régulières)

Pour toute fonction f dans l'un des espaces L^1 , L^2 ou \mathcal{C}_0 , et pour toute suite régularisante $(U_n)_n$, la suite des fonctions régularisées $(U_n * f)_n$ converge vers f pour la norme de l'espace choisi.

Remarques : (1) La limite des U_n , quand n tend vers $+\infty$, n'existe dans aucun de ces trois espaces ; comme on l'a déjà remarqué plus haut, seuls les espaces de distributions offrent une limite à la suite $(U_n)_n$ qui n'est autre que la distribution de Dirac δ_0 , représentant l'impulsion infinie portée par $\{0\}$.

(2) Pour toute fonction f de L^1 ou L^2 , si irrégulière soit-elle, si les fonctions U_n ont un ordre élevé de dérivabilité N , alors $(U_n * f)^{(p)} \stackrel{\text{Théorème 25}}{=} U_n^{(p)} * f$ existe pour tout $p \leq N$. Dans le cas où les fonctions U_n sont des gaussiennes, la dérivabilité est d'ordre infini.

1.4 La transformation de Laplace des fonctions

La transformation de Laplace est une transformation intégrale d'un usage fréquent, notamment en automatique : elle permet de transformer un problème d'analyse linéaire (équation différentielle ou aux dérivées partielles, équation intégrale) en un problème de résolution d'une équation algébrique.

Définition 28 : Une **transformation intégrale** est un opérateur linéaire T qui associe à toute fonction f d'un espace fonctionnel E sa transformée $T(f)$ dans un espace fonctionnel F :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad T(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} k(x, y) \cdot f(x) \, dx \quad (*)$$

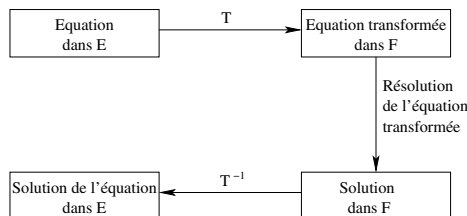
$k(x, y)$ est une fonction caractérisant T , dite **noyau de la transformation** .

Le concept de transformation intégrale étend aux espaces fonctionnels la notion d'application linéaire définie sur les espaces vectoriels de dimension finie : l'analogie entre (*) et l'application linéaire $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow A \cdot x \in \mathbb{R}^n$, où $(A \cdot x)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ est évidente, maintenant que l'on sait que \sum et \int désignent une opération de même nature pour des mesures respectivement discrète et continue. (Cf : (A) après E15)

On exigera qu'une transformation intégrale T possède les propriétés suivantes :

- continuité ;
- existence d'une transformation inverse de T .

Schéma de résolution d'une équation par transformation intégrale :



Transformations intégrales d'un usage courant :

- transformation de Laplace, où $k(x, y) = e^{-yx}$ ($y \in \mathbb{C}$) ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{C}$),

- transformation de Fourier, où $k(x, y) = e^{-2i\pi xy}$ ($x, y \in \mathbb{R}$),
- transformation de Hilbert, où $k(x, y) = \frac{1}{2\pi i(x - y)}$ ($y \in \mathbb{C}$) ($x, y \in \mathbb{R}$).

Nous nous intéresserons à la transformée de Laplace monolatérale concernant les fonctions nulles sur \mathbb{R}^- , dites fonctions causales et pratiquées dans le cadre du filtrage des réponses transitoires.

Définition 29 : Soit une fonction f de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, sa **transformée de Laplace** $\mathcal{L}(f)$, si elle existe, est définie par :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt \text{ où } p = x + iy \text{ est complexe.}$$

f est dite **original** et $\mathcal{L}(f)$, **image de** f : on notera $\mathcal{L}f \square f$.

Comme on l'a mentionné, $\mathcal{L}(f)$ n'existe pas toujours ; par exemple si $f(t) = e^{t^2}$, $\mathcal{L}(f)(p)$ n'est pas définie.

Précisons donc les conditions d'existence de $\mathcal{L}(f)$.

Théorème 31 Si $f(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et si $\Re(p') \geq \Re(p)$ alors $f(t) \cdot e^{-p't}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Preuve évidente car $|f(t) \cdot e^{-p't}| \geq |f(t) \cdot e^{-p't}|$. □

Définition 30 : Si $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^+)$, le nombre égal à

$$\inf\{x \in \mathbb{R} \mid f(t) \cdot e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}^+)\} = \underset{\text{noté}}{x_0}$$

est l'**abscisse de sommabilité** de la fonction f , qui définit donc le demi-plan de convergence $\{x + iy \mid x > x_0\}$ dans l'espace \mathbb{C} , qu'on appelle domaine d'intégrabilité de f .

Pour tout $p = x + iy$ tel que $x > x_0$, $\mathcal{L}(f)(p)$ est définie.

Exemple 7 :

Si f est à support borné, $x_0 = -\infty$.

Si $f(t) = e^{t^2}$, $x_0 = +\infty$. Pourquoi ?

Théorème 32 (Propriétés de la transformée de Laplace)

(1) **Linéarité :** $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2$ d'abscisses de sommabilité x_1, x_2 ,

$$\mathcal{L}(a \cdot f_1 + b \cdot f_2)(p) = a\mathcal{L}(f_1)(p) + b\mathcal{L}(f_2)(p) \quad \forall p \text{ tel que } \Re(p) > \max\{x_1, x_2\}.$$

(2) $\mathcal{L}(f)(p)$ est **holomorphe** pour tout p tel que $\Re(p)$ est supérieur à l'abscisse de sommabilité de f , et donc **infiniment dérivable** : on a $\frac{d^n \mathcal{L}(f)(p)}{p^n} = \int_0^{+\infty} (-t)^n \cdot f(t) e^{-pt} dt$.

(3) **Propriété du changement d'échelle :**

$$\text{pour tout réel } a > 0 : \mathcal{L}(f(a \cdot t))(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right).$$

(4) *Pour tout complexe α :* $\mathcal{L}(e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p - \alpha)$

$$\forall p \text{ tel que } \Re(p) > \Re(\alpha) + x_0.$$

(5) **Propriété de la valeur initiale :**

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = l, \text{ alors } \lim_{\Re(p) \rightarrow +\infty} p \cdot \mathcal{L}(f)(p) = l,$$

(6) **Propriété de la valeur finale :**

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l, \text{ alors } \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mathcal{L}(f)(p) = l.$$

(7) **Transformées d'un produit de convolution :** Soient f_1 et f_2 appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, d'abscisses de sommabilité x_1 et x_2 , alors :

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2)(p) = \mathcal{L}(f_1)(p) \cdot \mathcal{L}(f_2)(p) \quad \forall p \text{ tel que } \Re(p) > \max\{x_1, x_2\}.$$

(8) **Transformée de la dérivée $f^{(n)}$:** Soit $f \in L^1_{loc}$, continue pour tout $t > 0$, telle que $\forall x > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ $f^{(i)}(x)$ existe et est continue ou continue par morceaux et vérifie : il existe des réels A, K tel que pour tout t suffisamment grand $|f(t)| \leq A \cdot e^{Kt}$, alors :

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1} \cdot f(0_+) - p^{n-2} \cdot f'(0_+) \dots - f^{(n-1)}(0_+).$$

(9) **Transformée de la primitive $F(t) = \int_0^t f(u) du$, supposée être $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$:**

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}.$$

Preuve

(1) évidente

(2) Cette démonstration nécessite la connaissance des conditions de Cauchy qui caractérisent l'holomorphie d'une fonction (cf. Chapitre 5).

$$(3) \mathcal{L}(f(a \cdot t))(p) = \int_0^{+\infty} f(a \cdot t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{+\infty} f(s) \cdot e^{-p \cdot \frac{s}{a}} \frac{ds}{a}$$

$$(4) \mathcal{L}(e^{\alpha t} \cdot f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-t(p-\alpha)} dt = \mathcal{L}(f)(p - \alpha)$$

(8) par récurrence

$$(9) \text{ Soit } \phi(p) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(s) ds\right)(p); \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} \int_0^t f(s) ds\right)(p) = p \cdot \phi(p) \text{ par (8).}$$

$$\text{Or, } \frac{d}{dt} \int_0^t f(s) ds = f(t) \text{ donc : } p \cdot \phi(p) = \mathcal{L}(f)(p) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\int_0^t f(s) ds\right)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}. \quad \square$$

E 20 Démontrer les propriétés (7) et (8).

E 21 Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$(1) f(t) = \cos wt, g(t) = t \cdot \sin wt.$$

[Indication : calculer d'abord $\mathcal{L}(f'')$ et $\mathcal{L}(g'')$ en fonction de $\mathcal{L}(f)$ et de $\mathcal{L}(g)$]

$$(2) h(t) = e^{-\alpha t} \cos wt \quad (\alpha > 0).$$

E 22 Résolution de l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = r(t)$,

$$\text{avec } y(0) = y'(0) = 0 \text{ et } r(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(1) Déterminer $\mathcal{L}(y)(p)$.

$$(2) \text{ En déduire que : } y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & (0 \leq t \leq 1) \\ (e-1)e^{-t} - \frac{e^2-1}{2}e^{-2t} & (t \geq 1) \end{cases}$$

Le théorème suivant suppose connu le paragraphe 5.4 consacré à l'intégrale des fonctions complexes.

Théorème 33 (*Inversion de la transformée de Laplace*)

Si $\phi(x + iy)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{x > x_0\}$, telle que $\phi(x + iy)$ soit sommable pour tout $x > x_0$, alors ϕ est la transformée de Laplace d'une fonction f définie par l'intégrale suivante, dite intégrale de Mellin-Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D_x} \phi(p) e^{pt} dp, \quad ,$$

où D_x est la droite du plan complexe d'abscisse $x > x_0$.

1.5 Thème d'étude : applications de la transformation de Laplace

1. Transformée de Laplace d'une fonction périodique

Soit f une fonction T -périodique, définie et bornée sur \mathbb{R}^+ , et soit $f_0(t)$ son "motif périodique" défini par $f(t) \cdot \mathbf{1}_{[0, T[}(t)$.

Montrer que, pour tout p tel que $\operatorname{Re}(p) > 0$: $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{\mathcal{L}(f_0)(p)}{1 - e^{-pT}}$.

Application : $f_0(t) = n \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}[}(t) + 0 \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, T[}(t)$. Limite quand $n \rightarrow +\infty$?

2. Calcul d'une intégrale paramétrée

Déterminer $\mathcal{L}(f)$ pour $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt$ et en déduire $f(x)$.

3. Résolution d'une équation différentielle

$$f'' - 2f' + f = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \quad \forall x > 0, \text{ avec les conditions initiales : } f(0) = f'(0) = 0 .$$

(a) Démontrer que $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{(p-1)^2 \sqrt{p}}$.

(b) En déduire $f(x)$ par la formule de convolution, et en utilisant la table.

4. Résolution d'une équation intégrale

On appelle équation intégrale de **Volterra** de deuxième espèce une équation de la forme :

$$f(x) + \int_a^x k(x,t) \cdot f(t) dt = g(x) ,$$

où $g(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions connues et f inconnue.

Nous nous intéressons ici au cas où $a = 0$ et où $k(x,t) = k(x-t)$ est une fonction à support dans \mathbb{R}_+ . Nous nous plaçons sous les hypothèses (faciles à identifier) d'existence des transformées de Laplace. Si on note G , K et F les transformées de Laplace respectives de g , k et f , la transformation de Laplace appliquée à l'équation de Volterra s'écrit :

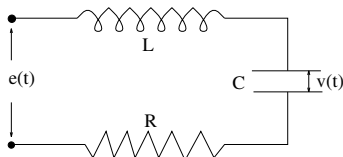
$$F(z) + K(z) F(z) = G(z) .$$

On en déduit : $F(z) = \frac{G(z)}{1 + K(z)}$.

Résoudre : $x^2 + \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt = f(x)$.

5. Application à l'étude des circuits électriques

Soit le circuit RCL :



Au temps $t = 0$, le courant est nul dans l'inductance L et la tension est nulle aux bornes de la capacité C . On applique la tension $e(t)$ aux bornes du circuit, dès que $t > 0$.

La **fonction de transfert** d'un tel circuit est égale au quotient de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(s)(p)$ de la tension de sortie $s(t)$ par la transformée de Laplace de la tension d'entrée $\mathcal{L}(e)(p)$.

Déterminer la fonction de transfert du circuit précédent.

Intermède biographique : Pierre-Simon LAPLACE (1749-1827)

Fils d'un fermier normand, il commença sa formation au collège bénédictin local et poursuivit ses études à Caen puis à Paris, où il fut vite remarqué par d'Alembert qui le nomma professeur à l'Ecole Militaire. Peu engagé dans la Révolution, il fit partie de la Commission des Poids et Mesures et participa à la création des Ecoles Polytechnique et Normale.

Considéré comme l'un des fondateurs de la physique mathématique, l'essentiel de son œuvre concerne des applications de l'analyse à la mécanique céleste et aux probabilités.

"L'exposition du système du monde" est l'une de ses œuvres majeures, où il résolut le problème de la stabilité de l'univers, en faisant l'hypothèse de l'existence d'une nébuleuse primitive, origine de l'univers. Dans son exposé il ne fait nulle part appel à une cause première ou finale d'essence divine : ainsi, à l'empereur qui lui faisait remarquer que Dieu n'apparaissait jamais dans son œuvre, Laplace rétorqua qu'il n'avait pas eu besoin de cette hypothèse pour la mener à son terme.

Laplace rassemble et synthétise dans sa "Théorie analytique des probabilités" parue en 1812, de nombreux travaux épars, dus aux savants des deux siècles précédents parmi lesquels se trouvent Pascal, Bernoulli, de Moivre et Bayle : il en augmente considérablement la théorisation en produisant de nouveaux concepts et résultats tels que les notions d'indépendance ou de probabilité composée ; il propose enfin une approche satisfaisante des lois limites anticipant la méthodologie statistique, ainsi que la méthode des moindres carrés si précieuse à l'approximation des données de la physique expérimentale. C'est afin de résoudre des équations différentielles de degré élevé, qu'il introduisit la transformation qui porte son nom.

Comme Fourier, Laplace n'était pas un pur mathématicien ; il aborda les domaines de l'optique corpusculaire et de la propagation du son. Amateur éclairé de philosophie naturelle, il est l'auteur d'une définition célèbre du déterminisme inspirée par la domination intellectuelle des thèses mécanistes : "Nous devons considérer l'état de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui à un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si elle était assez vaste pour soumettre ces idées à l'analyse, embrasserait d'un même mouvement les plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome, rien ne serait incertain pour elle et l'avenir comme le passé seraient présents à ses yeux".

1.6 Corrigés des exercices

E1 La tribu doit contenir toutes les parties stables par réunion et complémentaire, soit :
 $A, B, \complement A, \complement B, A \cup B, B \cup \complement A, A \cup \complement B, (\complement A) \cup (\complement B), A \cap B, A \cap \complement B, B \cap \complement A, \complement(A \cup B), \emptyset, E, (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A$ et le complémentaire du précédent.

E2 (1) Exprimons chaque B_i comme union disjointe d'ensembles :

$$B_i = B_1 \cup (B_2 \setminus B_1) \cup (B_3 \setminus B_2) \cdots \cup (B_i \setminus B_{i-1})$$

où : $B_i \setminus B_{i-1} = \complement_{B_i}^{B_{i-1}}$ qui sera noté C_i .

$$\mu(B_i) \underset{((B_i)_i \text{-croissante})}{=} \mu(\cup_{j=1}^i B_j) = \mu(\bigsqcup_{j=1}^i C_j) = \sum_{j=1}^i \mu(C_j).$$

donc :

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(B_i) &= \lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^i \mu(C_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(C_j) \\ &\underset{\sigma\text{-additivité}}{=} \mu(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty} C_j) = \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} B_j). \end{aligned}$$

(2) Posons : $B_i = A_0 \setminus A_i$. $(B_i)_i$ est une suite croissante, donc :

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right)$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_0 \setminus A_n) = \mu(A_0) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n),$$

et :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \mu\left(\bigcup_i \complement_{A_0}^{A_i}\right) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right),$$

d'où le résultat par application de (*).

E3 (1) Remarquons que C est compact car les A_n sont fermés et C , qui est leur intersection, est fermé et borné.

L'application $f : x \in C \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_n}{3^n}$ ($r_n = 0$ ou 2) (*) est bijective ; il suffit d'écrire un élément $x \in C$ et de l'expliciter sous la forme (*).

(2) C a la puissance du continu. Montrons enfin que $m(\complement_{[0,1]} C) = 1$.

$\complement_{[0,1]} C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} A_{n,j} \right)$ où $(A_{n,j})_j$ est l'union disjointe de sous-ensembles constituant A_n .

On a donc :

$$m(\complement_{[0,1]} C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 \Rightarrow m(C) = 0.$$

E4 La suite $f \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n B_k}$ est croissante, donc $\int f \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n B_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{B_k} f d\mu$. Grâce au théorème de Beppo-Levi, la limite du membre de gauche, lorsque n croît vers l'infini, est égale à : $\int f \mathbf{1}_B d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{B_k} f d\mu$.

E5 (a) Par l'absurde. Supposons que $I = \{x \mid f(x) = +\infty\}$ n'est pas négligeable. Comme :

$$\int_E |f| d\mu = \int_{\mathbb{C}_E I} |f| d\mu + \int_I |f| d\mu,$$

si la dernière intégrale est infinie, alors $\int_E |f| d\mu$ est infini, ce qui contredit l'intégrabilité de f .

(b) Posons $F = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$. On a :

$$\int_E f d\mu = \underbrace{\int_F g d\mu}_{=0} + \int_{\mathbb{C}_E F} g d\mu = \int_E g d\mu$$

E6 (1) Par double inclusion.

$$\mu\{x \mid f(x) > 1\} = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{x \mid f(x) \geq 1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = 0,$$

car, pour tout entier n : $\mu\{x \mid f(x) \geq 1 + \frac{1}{n}\} = 0$, ce qui se démontre par l'absurde.

(2) $f^n \rightarrow 0$ (p.p. sur A) et $|f^n| \leq 1$ qui est une fonction de L^1 . Par application du théorème de convergence dominée, il vient :

$$\int_{[0,1]} f^n d\mu = \int_E f^n d\mu + \int_{\mathbb{C}_E} f^n d\mu = \mu(E) + \int_A f^n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(E).$$

On en déduit : $\mu(E) = C$ et $\int_A f^n d\mu = 0$ pour tout entier n .

E7 (a)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$. Donc f_n converge ponctuellement vers f .
- $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Donc f_n ne peut pas converger uniformément vers f .
- Pour tout entier n , $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable sur $[0, 1]$. Donc en appliquant le théorème de Lebesgue, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

(b)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$. Donc g_n converge ponctuellement vers 0.
- On a : $g'_n(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{n}$. En ce point, $g_n(\frac{1}{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2}$. Donc $\max_x g_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2}$ et g_n ne peut converger uniformément vers 0.
- Pour tout entier n , $\left| \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable sur $[0, 1]$. Donc en appliquant le théorème de Lebesgue, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(x) dx = 0$.

E9 Pour tout entier non nul k , $\int_0^{+\infty} |\sin x e^{-kx}| dx \leq \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc appliquer le théorème de permutation de l'intégrale et de la somme et il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} \sin x \cdot e^{-nx} dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} \sin x e^{-nx} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2} .$$

E10 Vérifions les hypothèses du théorème de dérivabilité sous le signe intégrale :

- (1) $|f(t) e^{-xt}| \leq |f(t)| e^{-at} \quad \forall x > a$.
- (2) $\frac{d}{dx} (f(t) e^{-xt}) = -t f(t) e^{-xt}$ est définie pour tout x et presque tout t .
- (3) $t f(t) e^{-xt}$ est-elle intégrable ?

$$\forall x > a, \exists \varepsilon > 0, a < x - \varepsilon < x \quad t \cdot f(t) e^{-xt} = t f(t) e^{-(x-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t}$$

où : $t e^{-\varepsilon t}$ majoré par $e^{-\varepsilon} = M$ sur $[0, +\infty[$ ce qui implique :

$$|t f(t) e^{-xt}| \leq M e^{-(x-\varepsilon)t} |f(t)|$$

qui est intégrable. On peut donc appliquer le théorème de dérivation.

E11 Soit $f(t, x) = e^{-t} t x^{-1}$

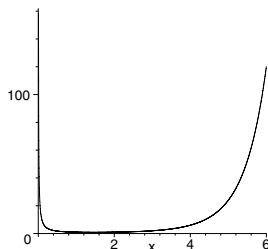
(1) $x \mapsto t x^{-1}$ est croissante si $t \geq 1$, décroissante si $0 < t \leq 1$. D'autre part, pour tout $x > 0$, il existe a et A tels que : $0 < a \leq x \leq A$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < t \leq 1, & \quad |f(t, x)| \leq t a^{-1} \\ \text{si } t \geq 1, & \quad |f(t, x)| \leq e^{-t} t A^{-1} \end{aligned}$$

La fonction majorante est définie par $g(t) = \begin{cases} t a^{-1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ e^{-t} t A^{-1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$, qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Donc $\Gamma(x)$ est définie et continue par application du théorème de continuité sous le signe intégral.

Montrons que $\Gamma(x)$ est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\left| \frac{\partial^k f(t, x)}{\partial x^k} \right| = |(\log t)^k f(t, x)| \leq h(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(t) |\log(t)|^k .$$

FIG. 1.4 – Graphe de la fonction Γ

Il s'agit de montrer que $h(t)$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ :

- sur $[0, 1]$, $\int_0^1 h(t) dt \leq \int_0^1 t^{a-1} |\log t|^k$, qui est finie car $a > 0$ et $k > 0$;

- sur $[1, +\infty[$, $e^{-t} t^{A-1}$ est intégrable car majorée par $\frac{1}{t^2}$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^k e^{-t} t^{x-1} dt .$$

(2) En intégrant par parties, il vient : $\Gamma(x+1) = x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \Gamma(x)$. On en déduit :

$$\Gamma(n+1) = n! ; \quad \Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} ; \quad \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

E12 Posons $u(x, y) = x \sqrt{y}$ et $v(x, y) = \sqrt{y}$. La transformation inverse s'écrit : $x = u/v$ et $y = v^2$. La matrice jacobienne de la transformation vaut :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 2v \end{pmatrix} ,$$

de déterminant égal à 2. Comme par ailleurs la fonction sous l'intégrale est positive, l'application du théorème de changement de variables donne :

$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{2 du dv}{(1+u^2)(1+v^2)} = \frac{\pi^2}{2} .$$

E13 Le résultat s'obtient en appliquant le théorème du changement de variables :

$$I = \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{h(D)} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi .$$

E14 (a) On trouve : $|J(h)| = \frac{1}{2}$ et le nouveau domaine D' est défini par les inéquations :

$$0 \leq v \leq 1, \quad 0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{v-u}{2} \leq 1 ,$$

équivalentes à : $0 \leq x + y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Le domaine D' peut encore être défini de façon équivalente par :

$$0 \leq v \leq 1 , v - 2 \leq u \leq v , -v \leq u \leq 2 - v ,$$

soit finalement : $0 \leq v \leq 1$, $-v \leq u \leq v$.

$$(b) \iint_D \cos \left(\frac{x-y}{x+y} \right) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-v}^v \cos \frac{u}{v} du \right) dv = \sin(1) .$$

E15 (a) $f(t) = \sin \frac{1}{t^2}$ est une fonction paire ; posons $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et restreignons-nous à $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\int_0^{+\infty} \left| \sin \frac{1}{t^2} \right| dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \right| dx + \underbrace{\int_0^1 \left| \sin \frac{1}{t^2} \right| dt}_{\text{finie}} .$$

Comme $\left| \frac{\sin x}{x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$, intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit que f appartient à $L^1(\mathbb{R}^{+*})$.

(b) Un changement de variable et un découpage de l'intervalle d'intégration identiques permettent de conclure que f appartient à $L^2(\mathbb{R}^{+*})$.

E16

(2)

- $\frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \in L^1(]0,1[)$ et $\notin L^2(]0,1[)$
- $e^{-x} \cdot \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x) \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^+)$
- $\frac{1}{x} \mathbf{1}_{]1,+\infty[} \in L^2(]0,+\infty[)$ et $\notin L^1(]0,+\infty[)$

$$(3) \left(\int_a^b |f| d\mu \right)^2 = \left(\int_a^b \mathbf{1} \cdot |f| d\mu \right)^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_a^b \mathbf{1}^2 d\mu \int_a^b |f|^2 d\mu < +\infty .$$

Donc, si $f \in L^2([a, b])$, alors $f \in L^1([a, b])$.

E17 Comme : $f_n g_n - f g = f_n (g_n - g) + g (f_n - f)$, on a :

$$\|f_n g_n - f g\|_1 \leq \|f_n (g_n - g)\|_1 + \|g (f_n - f)\|_1 \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f_n\|_2 \|(g_n - g)\|_2 + \|g\|_2 \|(f_n - f)\|_2$$

qui converge vers 0 si f_n converge vers f et g_n converge vers g dans L^2 .

Attention : si f et g appartiennent à L^2 , on ne peut affirmer que le produit $f g$ appartient à L^2 .

E19

(a) On sait que si f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, $f * g$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\|f * g\|_1 = \int_0^{+\infty} |f * g(t)| dt = \int_0^{+\infty} \int_0^t f(u) g(t-u) du dt ,$$

car f et g sont positives. Effectuons le changement de variables : $x = u$, $y = t - u$, de matrice jacobienne : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$\|f * g\|_1 = \int \int f(x) g(y) |\det J| dx dy = \int_0^{+\infty} f(x) dx \int_0^{+\infty} g(y) dy = 1 .$$

$$(b) f_a * f_b(t) = \int_0^t e^{-u} \frac{u^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-t+u} \frac{(t-u)^{b-1}}{\Gamma(b)} du = \frac{e^{-t}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^t u^{a-1} (t-u)^{b-1} du .$$

Posons $u = tx$. Il vient alors :

$$\int_0^t u^{a-1} (t-u)^{b-1} du = t^{a+b-1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = t^{a+b-1} B(a, b) .$$

d'où :

$$f_a * f_b(t) = e^{-t} t^{a+b-1} \frac{B(a, b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} .$$

Intégrons les deux membres de cette égalité. On remarque, d'une part, qu'en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f_a * f_b(t) dt = \int_0^{+\infty} f_a(t) dt \int_0^{+\infty} f_b(t) dt = 1 ,$$

et que, d'autre part, par définition de la fonction Γ : $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a+b-1} dt = \Gamma(a+b)$. On en conclut que : $\Gamma(a+b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{B(a, b)}$.

E21

(1) $f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 f(t)$, d'où l'on déduit : $\mathcal{L}(f)(p^2 + \omega^2) = p$.
De même : $g''(t) = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 g(t) = 2\omega f(t) - \omega^2 g(t)$. Ceci conduit à :

$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} .$$

(2) $\mathcal{L}(e^{-\alpha t} \cos \omega t) = \mathcal{L}(\cos \omega t)(p + \alpha)$ d'après la proposition 4 (Théorème 29). D'où :

$$\mathcal{L}(h)(p) = \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} .$$

E22

(1) On obtient : $p^2 \mathcal{L}(y) + 3p \mathcal{L}(y) + 2 \mathcal{L}(y) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$. D'où : $\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p(p+1)(p+2)}$.

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p+1)(p+2)}\right)(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$, après décomposition en éléments simples.

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-p}}{p(p+1)(p+2)}\right)(t) = f(t-1) \cdot H(t-1)$, d'où la solution.

Applications de la transformée de Laplace

(1)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f)(p) &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{iT}^{(i+1)T} f(t) e^{-pt} dt \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^T f(u + iT) e^{-pu} e^{-piT} du \quad (\text{où } u = t - iT) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-pTi} \mathcal{L}(f_0)(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \mathcal{L}(f_0)(p) .
 \end{aligned}$$

(2) Application : $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{n}{p} \frac{1 - e^{-\frac{p}{n}}}{1 - e^{-pT}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-pT}}$.

(3) On a : $\mathcal{L}(f'' - 2f' + f)(p) = (p^2 - 2p + 1) \mathcal{L}(f)(p)$. De plus : $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right)(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$. On en déduit :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{\sqrt{p}(p-1)^2} .$$

Par ailleurs, on a : $\mathcal{L}(t e^t)(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$. En utilisant la formule de convolution, il vient :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right)(p) \mathcal{L}(t e^t)(p) \Rightarrow f(x) = \left(t e^t * \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right)(x) .$$

(4) L'équation de Volterra s'écrit : $f(x) = x^2 + \sin x * f(x)$, pour x positif. Il vient donc :

$$F(p) = \frac{2}{p^2} + \frac{F(p)}{1+p^2}, \text{ d'où :}$$

$$F(p) = \frac{2}{p^5} + \frac{2}{p^3} \text{ pour } \operatorname{Re}(p) > 0 .$$

L'original s'écrit donc : $f(t) = \frac{12 t^2 + t^4}{12}$.

(5) $E(p) = \left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) I(p)$. Par ailleurs, $S(p) = \frac{I(p)}{Cp}$, ce qui conduit à l'expression de la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} .$$

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

L'analyse fonctionnelle naquit de l'intérêt des mathématiciens de la fin du 19^{ième} siècle pour l'étude systématique des opérateurs fonctionnels. C'est dans le cadre du calcul des variations qu'apparurent les premiers opérateurs fonctionnels de la forme :

$$\Phi : f \in C^1([a, b]) \mapsto \Phi(f) = \int_I L(t, f(t), \dot{f}(t)) dt .$$

Le problème étant de déterminer la fonction f^* qui minimise la fonctionnelle $\Phi(f)$, laquelle modélise l'action dans le cadre de la mécanique lagrangienne.

Les espaces fonctionnels vectoriels normés ont été créés pour exprimer des types de convergence plus riches que la convergence simple, qui par exemple n'implique nullement la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues. Leur étude relativement récente est due à Banach (1892-1945) et à son équipe, autour des années vingt du siècle dernier à partir d'une part, des travaux de Hilbert (1862-1943) et de ses disciples, qui cherchaient à étendre aux espaces fonctionnels les structures géométriques des espaces euclidiens, et d'autre part des travaux de Riesz en 1910 sur les espaces vectoriels de fonctions de carrés intégrables. Les analystes de la première moitié du vingtième siècle ont donc entrepris une véritable géométrisation de l'analyse.

Dans ce chapitre, après un rappel nécessairement rapide des bases de topologie métrique, nous exposerons les résultats généraux de la théorie des espaces vectoriels normés, avant de nous intéresser aux espaces de Hilbert et à leurs puissantes propriétés. Dans le dernier paragraphe, seront mis en place les rudiments de l'approximation des fonctions, dont l'exposé exhaustif appartient au cours d'analyse numérique.

2.1 Espaces métriques

La théorie des espaces topologiques, ou topologie, est née de la nécessité de définir rigoureusement les notions de proximité d'éléments d'un ensemble donné, de densité d'un sous-ensemble de points dans un ensemble, de convergence et de limite des suites qui y sont définies. Cette nécessité avait été pressentie par le philosophe et mathématicien Leibniz (1646 – 1716), dont l'un des nombreux projets, inhérents à sa recherche d'une langue conceptuelle universelle, était de doter les mathématiciens d'une analyse ou géométrie qualitative, nommée par lui "*analysis situs*". D'abord limitée à l'étude de l'ensemble des réels dans les travaux de Cantor et Dedekind à la fin du dix-neuvième siècle qui construisirent l'ensemble \mathbb{R} par complétion de

l'ensemble \mathbb{Q} des rationnels, la topologie s'étendit progressivement aux espaces fonctionnels. Fréchet (1878 – 1973) définit au début du siècle dernier la notion de topologie métrique, puis Hausdorff (1868 – 1942) développa les premières notions de topologie générale.

2.1.1 Notions basiques

Définie sur un ensemble, une distance permet de quantifier la proximité des éléments entre eux.

Définition 1 :

Une *distance* ou *métrique* sur un ensemble E est une application :

$$d : (x, y) \in E \times E \mapsto d(x, y) \quad .$$

L'application d vérifie les axiomes :

- (a) **Symétrie** : $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
- (b) **Séparation** : $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (c) **Inégalité triangulaire** : $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un ensemble E muni d'une distance d devient un espace métrique, désigné par (E, d) .

Exemple 1 : Distances classiques

- (1) $E = \mathbb{R}$; $\forall x, y$ de $E, d_1(x, y) = |x - y|$.
- (2) $E = \mathbb{R}^n$; $\forall x = (x_i)_{i=1, \dots, n}$ et $\forall y = (y_i)_{i=1, \dots, n}$, on définit les distances :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{distance euclidienne})$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

- (3) $E = C([a, b])$ ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$; $\forall f, g \in E,$
 $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ est une distance sur E .

Définition 2 :

Deux distances d et d' définies sur un ensemble E sont *équivalentes* s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que : $\forall x, y \in E, \alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$.

E 1

- (a) Démontrer que la fonction d_∞ , définie ci-dessus, est une distance.
- (b) Vérifier que les distances d_1, d_2 et d_∞ sont équivalentes ?
- (c) Soit un espace métrique (E, d) et δ la fonction qui associe à $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ le réel $\delta(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y)$; δ est-elle une distance sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$?

Dans un espace métrique (E, d) , on définit pour tout point, des ensembles de points voisins nommés boules, par analogie de forme avec les sphères définies par la métrique naturelle $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ définie sur \mathbb{R}^3 .

Définition 3 : A tout élément x de l'espace métrique (E, d) , on associe une famille de **boules ouvertes** $B_d(x, r)$ de centre x et de rayon r définies par :

$$B_d(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$$

A toute boule ouverte $B_d(x, r)$, on associe **la boule fermée** :

$$\{y \mid d(x, y) \leq r\} \stackrel{\text{notée}}{=} B_f(x, r)$$

Bien sûr, une boule, au sens métrique du terme, n'en est pas nécessairement une du point de vue de sa forme géométrique ! Considérez par exemple les boules $B_1(0, r)$ et $B_\infty(0, r)$ respectivement associées aux distances d_1 et d_∞ dans l'espace euclidien E_2 :



Définition 4 : Une suite d'éléments de (E, d) est une application de \mathbb{N} (ou \mathbb{N}^*) dans E : $n \in \mathbb{N} \mapsto x_n \in E$. On note $(x_n)_n$ cette suite.

Définition 5 : A toute application $\phi : k \in \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N}$, strictement croissante, on associe la sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$, appelée sous-suite extraite de $(x_n)_n$.

Définition 6 : Une suite $(x_n)_n$ de (E, d) est convergente dans (E, d) s'il existe $l \in E$ tel que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, (n \geq N) \Rightarrow d(x_n, l) < \varepsilon$ (qui s'écrit aussi : $x_n \in B(l, \varepsilon)$).

Théorème 1 (Propriétés des suites convergentes)

- (1) Toute suite convergente n'a qu'une limite.
- (2) Toute suite extraite d'une suite convergente vers l , converge vers la même limite l .
- (3) L'ensemble des éléments d'une suite convergente est borné.

Théorème 2 Si deux distances sont équivalentes, toute suite convergente pour l'une sera convergente pour l'autre.

Définition 7 : Une partie F de (E, d) est dite **fermée** si la limite de toute suite convergente de F , appartient à F ; on appelle fermé toute partie fermée.

Théorème 3 (Propriétés des fermés)

L'intersection quelconque et la réunion finie de fermés sont fermés.
 E et \emptyset sont des fermés.

Définition 8 : Une partie O de (E, d) est dite **ouverte**, si elle est le complémentaire d'une partie fermée dans E .

Théorème 4 (Propriétés des ouverts)

La réunion quelconque et l'intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Les ensembles E et \emptyset sont des ouverts.

On notera \mathcal{O}_E l'ensemble des ouverts de E ; le couple (E, \mathcal{O}_E) définit un **espace topologique**.

Définition 9 : Une partie V de (E, d) est un **voisinage** d'un élément x de E , s'il existe un ouvert O de E tel que : $x \in O \subset V$.

Théorème 5 (Caractérisation des ouverts)

Une partie O est ouverte si et seulement si $\forall x \in O, \exists r > 0, B(x, r) \subset O$.

Autrement dit, O est un voisinage de chacun de ses points.

Définition 10 : Un élément x de l'espace métrique (E, d) est dit **adhérent** à une partie F de E , si $d(x, F) = 0$, où $d(x, F)$ est la distance de x à F définie par : $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$.

L'ensemble des points adhérents d'une partie F est le plus petit fermé contenant F : on l'appelle **adhérence** ou **fermeture** de F , notée \overline{F} .

Remarque : L'adhérence d'un ensemble peut être beaucoup plus grande que cet ensemble. En théorie de la mesure, on a établi, qu'étant donné l'ensemble \mathbb{R} muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et de la mesure de Lebesgue m , l'ensemble \mathbb{Q} est de mesure nulle, alors que son adhérence égale à \mathbb{R} , est de mesure infinie.

E 2 Soit $A, B \subset E$ alors : $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

E 3 Démontrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Définition 11 : Une partie A de (E, d) est **dense** dans E si $\overline{A} = E$.

Exemple 2 :

(1) L'ensemble des polynômes à coefficients réels est dense dans l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, muni de la distance de la convergence uniforme définie par :

$$\|f - g\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \text{ (cf. Théorème de Stone-Weierstrass, à la fin du chapitre).}$$

(2) Si une partie A , dense dans (E, d) , est dénombrable, on dit que l'espace (E, d) est **séparable**. En analyse fonctionnelle, on fait souvent appel aux espaces fonctionnels E séparables, dans lesquels il est possible d'approcher toute fonction de E par une combinaison linéaire finie d'éléments de A ; c'est le cas de l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable, et de $\mathcal{C}([a, b])$.

Définition 12 : La *frontière* d'une partie A est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} (= \overline{A} \cap \overset{\circ}{A}^c)$, noté $Fr(A)$ et formé des points dont tout voisinage rencontre à la fois A et son complémentaire : c'est un fermé, comme intersection de fermés.

Exemple 3 :

- (1) si $A =]0, 1[$ alors $Fr(A) = \{0, 1\}$
- (2) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

Définition 13 : a est un point d'*accumulation* de la partie A de E si tout voisinage de a rencontre $A \setminus \{a\}$. Ceci s'exprime dans l'espace métrique (E, d) par : pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A$ contient au moins un autre élément que a .

Nécessairement, tout point d'accumulation a de A , appartient à l'adhérence \overline{A} .

Définition 14 : Un point $b \in A \subset E$ est un *point isolé* de A , s'il n'est pas un point d'accumulation, ce qui s'exprime dans l'espace métrique (E, d) par :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(b, \varepsilon) \cap A = \{b\}$$

Exemple 4 : L'ensemble $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$ contient deux points d'accumulation -1 et 1 ; $\overline{A} = A \cup \{-1; +1\}$.

Théorème 6 Etant donnée une partie A de l'espace topologique (E, \mathcal{O}) , l'adhérence de A est égale à la partition formée de l'ensemble des points d'accumulation de A et de l'ensemble des points isolés de A .

Définition 15 : L'élément $x \in E$ est dit *valeur d'adhérence* d'une suite $(x_n)_n$ de (E, d) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \implies d(x_n, x) < \varepsilon .$$

Théorème 7 (Caractérisation d'une fonction continue)

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est continue de E dans E' .
- (2) Pour tout ouvert O de E' , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E .
- (3) Pour tout fermé F de E' , $f^{-1}(F)$ est un fermé de E .

Définition 16 : Une fonction bijective continue ainsi que sa réciproque est dite *homéomorphisme* .

Définition 17 : Toute application bijective de (E, d) dans (E', d') qui conserve les distances, c'est-à-dire telle que $\forall x, y \in E, d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ est dite *isométrie*.

2.1.2 Espaces complets

La notion de complétude est une notion métrique fondamentale, qui permet de prouver la convergence d'une suite, sans en connaître la limite. On ne peut pas la définir dans un espace topologique (E, \mathcal{O}) quelconque, car la propriété de Cauchy d'une suite ne peut s'exprimer à l'aide des seuls ouverts.

Définition 18 : Un espace métrique est **complet** si toute suite de Cauchy y converge.

Exemple 5 :

- (1) \mathbb{Q} n'est pas complet : en effet, la suite $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ de \mathbb{Q} est une suite de Cauchy qui converge vers $e = 2.718\dots \notin \mathbb{Q}$.
- (2) \mathbb{R} est complet.

Théorème 8 (1) Toute partie complète de (E, d) est fermée.
 (2) Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète.

E 4 Démontrer le théorème 8.

Définition 19 : Une application f de (E, d) dans (E', d') est **continue** en $x \in E$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, (d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Théorème 9 La fonction f de (E, d) dans (E', d') est continue en x si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de E , convergente vers x , $(f(x_n))_n$ est une suite de E' , convergente vers $f(x)$.

On fait appel à ce théorème, par exemple, pour démontrer le théorème de continuité de l'intégrale de Lebesgue (Théorème 15 - Chapitre 1).

Définition 20 : Une application $f : (E_1, d_1) \longrightarrow (E_2, d_2)$ est **uniformément continue** si :

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0) (\forall x, y \in E_1, d_1(x, y) < \eta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Définition 21 :

- Une application $f : (E_1, d_1) \longrightarrow (E_2, d_2)$ est **lipschitzienne** s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in E_1, d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d_1(x, y).$$

- Si de plus $\alpha < 1$, alors f est dite **contractante**.

Remarque : Si f est une fonction dérivable de \mathbb{R} dans lui-même, la propriété de contraction de f équivaut à $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < 1$.

Théorème 10 Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Preuve

Sachant que $d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d_1(x, y)$ pour un $\alpha > 0$ donné, il s'ensuit que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, $d_1(x, y) < \frac{\varepsilon}{\alpha} \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. □

Dans le cas où $(E_1, d_1) = (E_2, d_2)$ sont un même espace complet (E, d) , les fonctions contractantes ont la propriété suivante :

Théorème 11 (du «point fixe» dit de Banach-Picard)

Toute fonction contractante (ou contraction) d'un espace métrique complet (E, d) dans lui-même est continue et admet un seul point fixe x^* , défini par $f(x^*) = x^*$.

Attention ! Le théorème est faux si l'on substitue à l'hypothèse de contraction, l'hypothèse plus faible : $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, pour tout x et y .

Le théorème du point fixe est utile à la démonstration du théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles, et fonde les méthodes classiques dites de "descente", permettant entre autres de résoudre les équations algébriques non linéaires de la forme : $x = f(x)$.

E 5 Démontrer le théorème 11.

[Indication : démontrer que la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = f(x_{n-1})$, est une suite de Cauchy.]

2.1.3 Espaces compacts

Il s'agit ici d'étendre à des espaces métriques quelconques, la notion d'ensembles compacts définis dans \mathbb{R}^k qui s'identifient aux sous-ensembles fermés et bornés de \mathbb{R}^k .

Théorème 12 (Caractérisations et définitions de la compacité)

Soit (E, d) un espace métrique, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) (E, d) est compact.
- (2) Tout sous-ensemble infini de (E, d) admet au moins un point d'accumulation (Bolzano-Weierstrass).
- (3) De tout recouvrement infini de (E, d) par des ouverts, on peut extraire au moins un recouvrement fini (Borel-Lebesgue).
- (4) De toute suite de (E, d) , on peut extraire une sous-suite convergente.

Si (E, \mathcal{O}) est un espace topologique non métrique, seule la caractérisation de Borel-Lebesgue permet de définir la compacité de E .

Théorème 13 Si (E, d) compact, alors (E, d) complet.

Théorème 14 Soit (E, d) un espace métrique.

(1) Si E est compact et F est une partie fermée dans E , alors F compacte.

(2) Si F est une partie compacte de E , alors F fermée et bornée.

E 6 Démontrer le théorème 14.

Les trois théorèmes suivants établissent les “bonnes et très utiles” propriétés des fonctions continues, lorsqu’elles sont définies sur des compacts.

Théorème 15 Compacité de l’image d’un compact par une fonction continue.

Soit f continue du métrique compact (E_1, d_1) dans (E_2, d_2) alors $f(E_1)$ est un compact de (E_2, d_2) .

Preuve Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(E_1)$ alors $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E_1 dont on extrait un recouvrement fini $(f^{-1}(O_i))_{i \in I'}$, donc $(O_i)_{i \in I'}$ est un recouvrement fini de $f(E_1)$, donc $f(E_1)$ est compact. \square

Théorème 16 Si f est continue de (E_1, d_1) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, f possède un minimum et un maximum sur tout compact K , qui sont atteints.

Preuve $f(K)$ est nécessairement un fermé borné de \mathbb{R} , et donc f atteint ses bornes. \square

Théorème 17 (Heine)

Toute application continue de l’espace compact (E_1, d_1) dans (E_2, d_2) est uniformément continue.

E 7 Prouver ce théorème à l’aide d’une démonstration par l’absurde.

Toutes les notions et les propriétés exprimables avec les ouverts et les fermés, se conservent par homéomorphisme. Il en est ainsi des propriétés de compacité, de connexité, de séparabilité, des notions de frontière, de continuité, de convergence mais non de la complétude, qui nécessite la notion de distance. Les concepts et propriétés stables par le groupe des homéomorphismes sont dits topologiques.

2.1.4 Espaces connexes

Intuitivement, un ensemble est connexe s’il est d’un “seul tenant”.

Définition 22 : Un espace topologique est *connexe* si l’une des propositions suivantes est vérifiée :

(1) il n’existe pas de partition de E en deux ouverts non vides disjoints.

(2) il n'existe pas de partition de E en deux fermés non vides disjoints.

Exemple 6 : Les seuls sous-ensembles connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

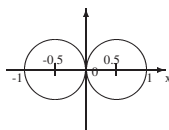
Théorème 18 *L'image d'un espace connexe par une fonction continue est connexe.*

E 8 Prouver le théorème 18 à l'aide d'une démonstration par l'absurde.

Définition 23 : Un espace topologique (E, \mathcal{O}) est **connexe par arcs** si pour tout $x, y \in E$, il existe une application continue g de $[0, 1]$ dans E telle que $g(0) = x$ et $g(1) = y$.

Il est clair que la connexité par arcs implique la connexité.

Remarque : ni la frontière, ni l'intérieur d'un connexe ne sont en général connexe :



L'union E des deux disques fermés est connexe ; mais son intérieur qui ne contient plus le point de tangence 0, ne l'est pas !

La mathématique, une science à part ?

On a déjà mentionné les propriétés de cohérence et d'autonomie qui caractérisent les théories mathématiques. Rappelons qu'un théorème ne trouve sa justification et sa signification que grâce à sa démonstration opérant au sein de la théorie auquel il se rattache. Non seulement, on ne peut isoler un théorème de son contexte théorique, mais il y manifeste sa profonde nécessité ; en effet, le mathématicien qui pose une conjecture et en produit une démonstration, met au jour et donne à voir ce qui est déjà contenu, sous une forme potentielle, dans la théorie. Jean Cavailles (1903-1944), éminent épistémologue des mathématiques et résistant exemplaire, disait des mathématiciens (créateurs), qu'ils étaient des "révélateurs de nécessités".

C'est sur ce point, que se démarque le plus fortement la production mathématique, des autres productions théoriques (physique, biologique) et surtout artistiques ; ces dernières en effet, ne répondent à aucune nécessité logique, et leurs formes abouties auraient pu donc ne pas être ou être différentes. Contrairement aux autres sciences, les mathématiques ne constituent pas un savoir sur une classe d'objets de la réalité matérielle ; dans leur processus de production, on note une indifférence certaine des mathématiques au réel, et là réside leur puissance modélisatrice sur les autres sciences.

Ce qui est exemplaire en mathématiques, c'est moins leur bonne constitution logique garante de leur universalité, de leur rigueur et de leur cohérence, que leur étonnante et mystérieuse capacité à alimenter sans cesse son acte créatif, de nouvelles explorations.

Pour une première approche de l'épistémologie des mathématiques, on pourra aborder les ouvrages suivants :

- Penser les mathématiques. (Collectif d'auteurs) ; Points-Sciences Seuil.
- Nombre, mesure, continu. J.Dhombres ; Nathan.
- Les mathématiques et la réalité. F.Gonseth ; Blanchard.
- Pour l'honneur de l'esprit humain. J.Dieudonné ; Hachette.
- L'intelligence et le calcul. J.P Delahaye ; Belin. Pour la science.
- Prédire n'est pas expliquer. R.Thom ; Flammarion.

2.2 Espaces vectoriels normés

Définition 24 :

Une **norme** sur un K -espace vectoriel E ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est une application :

$$f \in E \rightarrow \|f\| \in \mathbb{R}^+ \text{ vérifiant les axiomes :}$$

Séparation : $\|f\| = 0 \iff f = 0_E$

Homogénéité : $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad (\forall \lambda \in K) \quad (\forall f \in E)$

Inégalité triangulaire : $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (\forall f, g \in E)$

Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé, et sera noté : "e.v.n".

La norme généralise aux e.v. de dimension quelconque la notion de longueur d'un vecteur dans un espace euclidien, et celle de valeur absolue d'un nombre réel ou complexe.

Définition 25 : Etant donné l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$, on définit une distance d sur E par :

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = \|x - y\| .$$

Exemple 7 : De nombreux espaces fonctionnels sont des espace normés. Par exemple :

- L'ensemble $L^1(\mathbb{R})$ des classes de fonctions réelles f égales presque partout et telles que : $\int_{\mathbb{R}} |f| dx < +\infty$, muni de la norme : $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$.
- L'ensemble $L^2(\mathbb{R})$ des classes de fonctions réelles f égales presque partout et telles que : $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx < +\infty$, muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx}$, qui, on le verra en 2.3, est définie à partir d'un produit scalaire sur les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$.
- L'ensemble $C([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$, sur lequel on peut définir de nombreuses normes, la plus classique étant la norme dite de la **convergence uniforme**, définie par :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| .$$

- L'ensemble $C_c^k(\mathbb{R})$ des fonctions k -dérivables, à support borné (le support de f est le plus petit fermé en dehors duquel f est la fonction nulle), muni de la norme $\|f\|_{\infty}$.

Définition 26 : Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ définies sur E sont équivalentes s'il existe des constantes α et β strictement positives telles que :

$$\forall f \in E, \alpha \|f\| \leq \|f\|' \leq \beta \|f\| .$$

Cette définition est identique à celle de l'équivalence des distances.

Théorème 19 Si les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ définies sur E sont équivalentes, toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre.

Preuve Evidente. □

Remarque : Dans les espaces vectoriels de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes : en conséquence les notions de convergence, d'ouvert, de fermé, de continuité, sont identiques. En revanche, les normes définies sur les espaces fonctionnels, qui sont de dimension infinie, ne sont pas nécessairement équivalentes, ce qui oblige, étant donné un problème, à choisir la norme la plus adaptée à sa modélisation et à sa résolution.

Exemple 8 :

- (1) Dans $C([a, b])$, les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes. Il est assez facile de trouver des suites de fonctions qui convergent pour une norme et ne convergent pas pour les autres.
- (2) Sur tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , la convergence uniforme implique la convergence quadratique car : $\|f_n - f\|_2 \leq \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot \sqrt{b - a}$. La réciproque est fautive.

La propriété de complétude d'un espace fonctionnel est essentielle pour les méthodes et théories de l'approximation, puisqu'elle permet de démontrer la convergence d'une suite de fonctions sans devoir en calculer la limite.

Définition 27 : Un espace vectoriel normé complet est dit **espace de Banach**.

Exemple 9 : L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ (où $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) muni de la norme $\|A\| = (\text{tr}(A^* \cdot A))^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Banach.

ATTENTION ! La complétude d'un e.v de dimension infinie, dépend de la norme considérée ; ainsi $C([a, b])$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_1$, alors qu'il l'est pour sa norme naturelle $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 20 $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve Soit (f_n) une suite de Cauchy de $C([a, b])$:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_1$$

Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, dans \mathbb{R} , complet : elle converge donc vers une limite notée $f(x)$. On va montrer que la fonction f ainsi construite est

bien la limite de la suite f_n dans $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Montrons que f est bien continue. Soit $x_0 \in [a, b]$, et $\varepsilon > 0$, on a, pour $y \in [a, b]$, et pour n entier :

$$(**) |f(x_0) - f(y)| \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Ayant montré que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , on peut trouver N_0 tel que : $\|f_{N_0} - f\| \leq \varepsilon/3$. En utilisant alors la continuité de f_{N_0} en x_0 , il existe un voisinage V dans $[a, b]$ de x_0 tel que $\forall y \in V \quad |f_{N_0}(x_0) - f_{N_0}(y)| \leq \varepsilon/3$.

En reprenant l'inégalité (*), et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$\forall n \geq N_1, \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Soit : $\forall n \geq N_1 \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

En reprenant l'inégalité (**), on obtient $\forall y \in V \quad |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$; f est bien continue en tout point de $[a, b]$. La suite (f_n) converge bien dans $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ vers f . \square

E 9 $C([0, 1])$ est-il complet pour la norme $\|\cdot\|_1$?

Considérer la suite $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2 \\ n(x - 1/2) & 1/2 \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 1 & x \geq 1/2 + 1/n \end{cases}$

E 10 L'application $\Phi : f \in C([a, b]) \longrightarrow \Phi(f) = F$ où F est la primitive de f définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est-elle continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$?

Théorème 21 (Riesz-Fischer) $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve On la fait dans le seul cas où $p = 1$. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de L^1 , dont on extrait une sous-suite $g_p = f_{n_p}$ telle que $\|g_{p+1} - g_p\|_1 \leq \frac{1}{2^p}$. Posons $h_p = \sum_{k=0}^p |g_{k+1} - g_k|$; il vient $\|h_p\|_1 \leq 2$.

(h_p) est une suite croissante de fonctions positives, intégrables, et l'intégrale de sa limite est majorée par 2. On en déduit que $g_p = g_0 + \sum_{k=0}^{p-1} (g_{k+1} - g_k)$ converge (p.p.) vers une limite g ;

donc $\sum_{k=p}^{+\infty} (g_{k+1} - g_k) \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$ et est majorée par $|h|$. Le théorème de convergence dominée entraîne $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|g - g_p\|_1 = 0$ donc g est valeur d'adhérence de la suite de Cauchy (f_n) , donc g est limite de (f_n) . \square

Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés

Il est clair qu'une application linéaire ne peut être bornée au sens classique, puisque pour tout réel a , $\|f(ax)\|_F = |a| \cdot \|f(x)\|_F$ qui tend vers $+\infty$ avec a ; il est donc nécessaire de définir un nouveau concept de "borné".

Définition 28 : Une application f de E dans F est bornée s'il existe une constante positive k telle que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \cdot \|x\|_E$.

Théorème 22 (Propriétés des applications linéaires continues)

Si f est une application linéaire de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) f continue en 0_E .
- (2) f continue dans E .
- (3) f lipschitzienne et donc uniformément continue dans E .
- (4) f est bornée dans la boule unité : il existe une constante positive k telle que

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq k \cdot \|x\|_E.$$

- (5) f est bornée.

Rappelons que si E est de dimension finie, alors toute fonction linéaire définie sur E est nécessairement continue.

E 11 Prouver le théorème précédent.

Soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Définissons une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$:

Théorème 23 A tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on associe une norme $\|f\|$ définie de façon équivalente par :

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \inf\{\lambda \text{ réel positif} \mid \forall x \neq 0_E \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \lambda\} \end{aligned}$$

En conséquence : pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \|f\| \cdot \|x\|_E$

Rappelons le très classique théorème de prolongement par densité des applications linéaires continues :

Théorème 24 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach ; si A est un sous-espace vectoriel partout dense de E et f linéaire continue de A dans F alors il existe une unique application linéaire continue $\phi : E \rightarrow F$ qui prolonge f et telle que $\|\phi\| = \|f\|$.

Définition 29 : $\mathcal{L}(E, K)$ où K est \mathbb{R} ou \mathbb{C} est le dual topologique de E , encore noté E' : E' muni de la norme $\|f\|$ est un espace de Banach.

Intermède biographique : Stephen BANACH (1892-1945)

Banach naquit en Cracovie (Pologne), fit ses études et devint professeur à Lwow, l'un des foyers mathématiques importants des pays de l'Est dans l'entre-deux-guerres.

Ce grand mathématicien fut aussi un grand professeur, qui par son contact direct et chaleureux, savait faire partager à ses élèves l'exercice d'une "pensée toujours en action".

Il fut l'un des mathématiciens qui a le plus contribué à la naissance et au développement de l'analyse fonctionnelle. On lui doit l'introduction de concepts majeurs : espaces vectoriels normés (1920), espaces complets, dualité des espaces L^p , prolongement d'une forme linéaire continue (en collaboration avec Hahn).

L'œuvre qui le fit connaître, la "Théorie des opérations linéaires", parue en 1928, fut l'un des premiers grands livres d'analyse fonctionnelle.

2.3 Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert étendent aux espaces de dimension infinie, la théorie et les puissantes propriétés des espaces euclidiens, supposées (bien !) connues du lecteur.

Définition 30 : Un **produit scalaire** sur le \mathbb{R} -**espace vectoriel** E est défini par une forme $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie positive, bilinéaire et symétrique. On note : $\phi(x, y) = (x|y)$.

- **bilinéarité** : $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$, $(x|y_1 + y_2) = (x|y_1) + (x|y_2)$,
 $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ et $(x|\mu y) = \mu(x|y)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)
- **symétrie** : $(x|y) = (y|x)$
- **définie-positivité** : $(x|x) \geq 0$ et $((x|x) = 0 \Leftrightarrow 0_E)$.

Si E est un \mathbb{C} -**espace vectoriel** les propriétés de linéarité et de symétrie sont remplacées par la sesquilinearité et l'hermiticité :

- **sesquilinearité** : si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ et $(x|\mu y) = \overline{\mu}(x|y)$
- **hermiticité** : $\overline{(x|y)} = (y|x)$.
- **définie-positivité** : comme précédemment.

Définition 31 : Un **espace préhilbertien** E est un espace vectoriel dont la norme est issue d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. On notera $(E, (\cdot|\cdot))$ l'espace préhilbertien. Sa norme $\|\cdot\|$ est définie par :

$$\text{Pour tout } x \text{ appartenant à } E, \quad \|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}.$$

Un **espace de Hilbert** est un espace **pré-hilbertien complet**.

Quelques espaces de Hilbert classiques

(a) **L'espace euclidien** E_n , connu du lecteur, est l'espace \mathbb{R}^n muni du produit scalaire :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \text{ où } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n).$$

(b) **L'espace des séries réelles (resp. complexes) de carré sommable**, noté $\ell^2(\mathbb{R})$ (resp. $\ell^2(\mathbb{C})$), et muni du produit scalaire :

$$(u|v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \cdot v_n \quad (\text{resp. } \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \cdot \overline{v_n} \text{ où l'antilinearité porte sur la 2}^{\text{ème}} \text{ variable}) \quad \text{où}$$

$$u = (u_n)_n \text{ et } v = (v_n)_n.$$

(c) **L'espace des fonctions de carré intégrable** noté $L^2(\mathbb{R})$ (resp. $L^2(\mathbb{C})$) muni du produit scalaire $(f|g) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot g(t) dt$ (resp. $\int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$) et de la norme à la ligne $\|f\|_2 = (\int_{\mathbb{R}} |f|^2(t) dt)^{\frac{1}{2}}$.

Les espaces $\ell^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ sont fondamentaux en théorie du signal ; ils définissent respectivement l'espace des signaux d'énergie finie, échantillonnés et analogiques .

2.3.1 Propriétés d'orthogonalité dans les espaces de Hilbert

La forte spécificité des espaces de Hilbert provient de la propriété d'orthogonalité qu'on peut y définir et de leur complétude, propriétés riches de conséquences en théorie du signal et en analyse numérique.

Rappelons l'identité de polarisation :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot \text{Ré}(x|y) \quad (2.1)$$

qui permet d'exprimer le produit scalaire à partir de la norme, dans le cas d'un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition 32 : Deux éléments x et y de E sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul :

$$(x|y) = 0, \text{ noté aussi } x \perp y \text{ (se lit : "x orthogonal à y")}$$

Théorème 25 (Théorème de Pythagore généralisé)

Soient $x, y \in E$, espace préhilbertien :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème 26 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

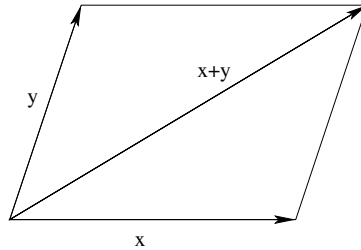
Soit E un espace préhilbertien alors :

$$\forall x, y \in E, \quad |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

L'égalité n'est vraie que si x et y sont colinéaires.

Théorème 27 (*Identité du parallélogramme*)

$$\forall x, y \in E, \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$



E 12 Démontrer les théorèmes 25, 26 et 27.

Théorème 28 (**Projection unique sur un sous-ensemble convexe complet**)

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-ensemble convexe, non vide et complet de E (si E est hilbertien, F fermé suffit). Alors, pour tout x de E , il existe x^* appartenant à F , **unique projection de x sur F** , qui vérifie :

$$\|x - x^*\| = \operatorname{Inf}_{y \in F} \|x - y\| .$$

x^* est aussi noté $P_F(x)$.

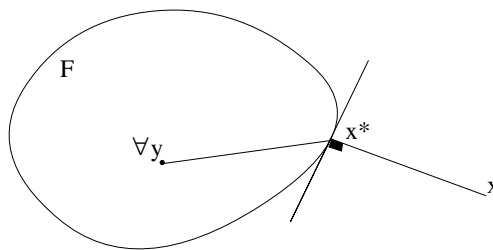


FIG. 2.1 – Projection unique de x sur F

Preuve

(a) **Existence de x^*** : par définition de la borne inférieure il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. On va montrer que cette suite est de Cauchy. En utilisant le théorème de la médiane, il vient :

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2 (\|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2) - 4 \left\| x - \frac{1}{2} (x_m + x_n) \right\|^2 .$$

Or F est convexe, donc $\frac{1}{2}(x_m + x_n)$ appartient à F et on a :

$$\left\| x - \frac{1}{2}(x_m + x_n) \right\| \geq \inf_{y \in F} \|x - y\| = \mu$$

D'autre part, par définition de x_n , on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \mu + \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier N tel que, pour tous n et m supérieurs à N , on ait :

$$\|x_m^* - x_n^*\|^2 \leq 2((\mu + \varepsilon)^2 + (\mu + \varepsilon)^2) - 4\mu^2 = 4\varepsilon^2 + 8\varepsilon\mu .$$

Ainsi $(x_n)_n$ est de Cauchy, dans F , qui est complet. $(x_n)_n$ converge vers $x^* \in F$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = \|x - x^*\|$, qui est aussi égale à $\inf_{y \in F} \|x - y\|$, qui est par conséquent atteint, i.e $\|x - x^*\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$.

(b) **Unicité de x^*** : supposons l'existence de x^* et y^* dans F tels que

$\|x - x^*\| = \|x - y^*\| = \inf_z \|x - z\|$. On applique le théorème de la médiane à $(x - x^*)$ et $(x - y^*)$ pour conclure. □

Théorème 29 (Projection unique sur un sous-espace vectoriel complet)

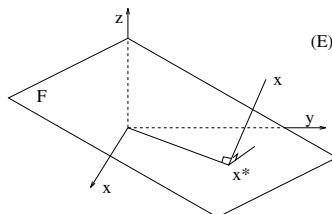
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel **complet** de E (si E est hilbertien, F fermé suffit). Alors, pour tout x de E , il existe $x^* = P_F(x)$ **unique**, vérifiant les propriétés équivalentes :

- (1) Orthogonalité du vecteur $(x - x^*)$ au sous-espace F : $(x - x^* | y) = 0, \forall y \in F$.
- (2) Minimalité de la distance de x^* à F : $\|x - x^*\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Ce théorème est à la base de la théorie de l'approximation hilbertienne des fonctions qui sera présentée dans les paragraphes suivants.

E 13 Montrer que l'orthogonalité de $(x - x^*)$ avec F , implique que x^* est la meilleure approximation de x dans F .

Dans le cas de l'espace euclidien E_3 , l'illustration graphique est suffisamment explicite.



E 14 Résolution approchée des systèmes linéaires sur-déterminés : application à la régression linéaire

De tels systèmes, où il y a plus d'équations que de variables, apparaissent fréquemment en optimisation (économétrie) et en statistiques (régression linéaire). Soient une matrice réelle de dimension (n,m) avec $n > m$, et un vecteur b de \mathbb{R}^n : le système linéaire $Ax = b$ n'a en général aucune solution, sauf si A est singulière. Bien qu'il n'existe pas de solution exacte de ce système, on sait déterminer une solution approchée x^* , au sens des moindres carrés, définie par :

$$x^* \text{ minimise } \|Ax - b\|_2 \quad .$$

- (a) Résoudre le problème de projection équivalent au problème de minimisation. [considérer l'hyperplan F_m engendré par les m vecteurs colonnes de la matrice A]
 (b) Démontrer que la solution x^* vérifie :

$${}^t A A x^* = {}^t A b \quad .$$

Si de plus, le rang de A est égal à m , x^* est unique et est égale à $({}^t A A)^{-1} \cdot {}^t A b$.

- (c) Appliquer la méthode au système :
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

- (d) Soient n points $(x_i, y_i)_i$ approximativement alignés selon une droite. On cherche la droite $y = \alpha x + \beta$ passant au sein de l'ensemble des points (x_i, y_i) . Il s'agit de minimiser : $\sum_{i=1}^n (y_i - (\alpha x_i + \beta))^2$. Identifier la matrice A , le vecteur b et déterminer les coefficients α et β qui définissent la droite cherchée.

Cette **méthode** dite **des moindres carrés** s'applique au cas où le modèle recherché est une fonction quelconque $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ où les θ_j sont des paramètres inconnus, qu'il s'agit d'estimer. Les équations auxquelles on aboutit n'ont alors aucune raison d'être linéaires, et nécessitent pour leur résolution, l'usage de méthodes numériques.

Théorème 30 (Propriétés des projections orthogonales)

Soit F un s.e.v. complet de l'espace de Hilbert E , alors la projection P_F est :

Linéaire : $\forall x, y \in E, P_F(x + y) = P_F(x) + P_F(y)$; $P_F(ax) = aP_F(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Lipschitzienne : $\forall x \in E \quad \|P_F(x)\| \leq \|x\|$

et vérifie $\forall x, y \in E \quad (P_F(x)|y) = (x|P_F(y)) = (P_F(x)|P_F(y))$

E 15 Démontrer le théorème ci-dessus.

Définition 33 : Si F est un sous-espace vectoriel de E , le sous-espace vectoriel **orthogonal** à F est noté F^\perp et est défini par :

$$F^\perp = \{y \mid \forall x \in F (x|y) = 0\} \quad .$$

E 16 Démontrer les propositions suivantes :

- (1) Si F est une partie quelconque de E , alors F^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de E .
- (2) Si S est une partie quelconque de E , alors $(S^\perp)^\perp$ s'identifie à la fermeture du sous-espace vectoriel engendré par S .

Théorème 31 (Décomposition unique de tout élément x de E en somme de sa projection $P_F(x)$ et de son orthogonal $x - P_F(x)$)

Si F est un sous-espace vectoriel complet de E , alors E est la somme directe de F et F^\perp , notée $F \oplus F^\perp$. De plus : $(F^\perp)^\perp = F$.

Preuve

(1) Preuve de : $E = F \oplus F^\perp$.

Soit $x \in F \cap F^\perp$ alors $(x|x) = 0 \Rightarrow x = O_E$

Soit $z \in E$, $z = P_F(z) + (z - P_F(z))$, où $(z - P_F(z)) \in F^\perp$

(2) Preuve de : $(F^\perp)^\perp = F$.

(2.1) $F \subset (F^\perp)^\perp$: $x \in F \Rightarrow \forall z \in F^\perp, (x|z) = 0$ d'où $x \in (F^\perp)^\perp$.

(2.2) $(F^\perp)^\perp \subset F$: si $x \in (F^\perp)^\perp$ alors $(x|x - P_F(x)) = 0$ (*) car $x - P_F(x) \in F^\perp$
et $(P_F(x)|x - P_F(x)) = 0$ (**) car $P_F(x) \in F$.

Par différence des deux égalités (*) et (**), on a :

$(x - P_F(x)|x - P_F(x)) = 0 \Rightarrow x = P_F(x) \Rightarrow x \in F$.

□

Théorème 32 (Représentation de Riesz d'une forme linéaire continue)

Etant donnée une forme linéaire continue Φ définie sur l'espace hilbertien E , à valeurs dans le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , il existe un unique $y \in E$ qui dépend de Φ , tel que :

$$\forall x \in E, \quad \Phi(x) = (x|y) \quad .$$

Exemple : Si $(E_n, (\cdot|\cdot))$ est l'espace euclidien de dimension n , on sait que toute forme linéaire f définie sur E_n s'exprime par :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n \longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = (a|x) \text{ où } a = (a_1, \dots, a_n) \in E_n.$$

Théorème 33 (Définition et propriétés de l'adjoint d'un opérateur)

Étant donné un endomorphisme continu A d'un espace de Hilbert E , il existe un unique endomorphisme continu A^* tel que :

$$\forall x, y \in E \quad (Ax|y) = (x|A^*y) \quad A^* \text{ désigne l'adjoint de } A.$$

$$(A^*)^* = A \text{ et donc } \|A^*\| = \|A\|.$$

Si A et B sont deux endomorphismes continus de E :

$$(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$$

Preuve Soit $y \in E$, alors l'application $\Phi_y \circ A : x \rightarrow (Ax|y)$ appartient à E' . Grâce au Théorème 32, il existe un unique élément noté A^*y tel que : $\forall x \in E \quad (Ax|y) = (x|A^*y)$. On définit ainsi une application A^* . Sa linéarité est une conséquence immédiate de l'unicité de A^*y . Montrons que A^* est continue. On a :

$$\|A^*y\| = \|\Phi_y \circ A\| \leq \underbrace{\|\Phi_y\|}_{=\|y\|} \|A\| = \|A\| \|y\| .$$

Donc A^* est continue, et de plus : $\|A^*\| \leq \|A\|$. En réécrivant cette dernière inégalité pour A^* , on obtient : $\|A\| \leq \|A^*\|$, puisque que $A^{**} = A$, ce qui résulte de l'unicité de l'adjoint. Soit finalement : $\|A^*\| = \|A\|$. \square

Définition 34 : Un opérateur A est auto-adjoint si $A = A^*$.

Exemple 10 :

Considérons l'opérateur linéaire K qui associe à tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ la fonction $K(f)$ définie par $K(f)(x) = \int k(x, y)f(y)dy$, où $k \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

On vérifie :

$$\|K(f)\|^2 \leq \|f\|^2 \left(\int \int |k(x, y)|^2 dx dy \right) = \|f\|_2^2 \cdot \|k\|_2^2$$

d'où la continuité de l'application linéaire K .

On démontre que l'opérateur K est auto-adjoint si et seulement si $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$.

E 17 Montrer que $(K(f)|g) = (f|K_1(g))$, où K_1 est associé à la fonction $k_1(x, y) = k(y, x)$. Déterminer $\|K\|$.

La convergence faible

La convergence la plus adaptée à un ensemble fonctionnel donné n'est pas toujours définie à partir d'une norme. La convergence faible en est une illustration.

Définition 35 : Une **norme sur un espace vectoriel** E est une application p de E dans \mathbb{R}_+ vérifiant les axiomes :

- (1) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \quad \forall (\lambda, x) \in K \times E, (K \text{ est le corps } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}).$
- (2) $\forall x, y \in E \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

On sait associer une topologie à une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ définies sur E : on parle alors d'espace vectoriel semi-normé. Nous la définissons par le type de convergence qu'elle induit sur E :

Définition 36 : Une suite $(x_n)_n$ de l'espace vectoriel semi-normé E muni de la famille des semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ converge vers x si :

$$\forall i \in I, \quad p_i(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La notion classique de convergence simple en est un exemple : en effet, sur l'ensemble des fonctions f définies sur un ensemble E quelconque, à valeurs dans \mathbb{R} , on définit la famille de semi-normes $(p_x)_{x \in E}$:

$$\forall x \in E, \quad \forall f, \quad p_x(f) = |f(x)| \quad .$$

Définition 37 : La suite $(f_n)_n$ de l'espace vectoriel semi-normé E dans \mathbb{R} converge simplement vers f si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_x(f_n - f) = 0 \quad .$$

Définition 38 : Soit E un espace vectoriel normé, la suite $(x_n)_n$ de E **converge faiblement ou ponctuellement** vers x de E si et seulement si :

$$\forall f \in E', \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x) \quad .$$

Dans un espace de Hilbert, grâce au théorème de Riesz, la convergence faible s'exprime à l'aide du produit scalaire :

Définition 39 : Soit un espace de Hilbert E , la suite $(x_n)_n$ de E converge faiblement vers x de E si et seulement si :

$$\forall y \in E, \quad (x_n | y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x | y) \quad .$$

2.3.2 Familles et bases orthonormales

Les espaces fonctionnels sont tellement riches d'éléments disparates, (imaginez déjà la foisonnante variété de l'ensemble des fonctions quelconques de \mathbb{R} dans \mathbb{R}), qu'il est illusoire de vouloir les décrire complètement par les seules combinaisons linéaires finies d'éléments de certains de leurs sous-espaces, comme cela est possible dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie. Le concept de **famille totale** joue ici un rôle analogue à celui du concept de base dans le cas de dimension finie.

Nous supposons dans ce qui suit que E est un espace **préhilbertien**.

Définition 40 : Un système $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E est **orthogonal** si :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \text{ avec } i \neq j \quad (e_i | e_j) = 0 ;$$

il est dit **orthonormal** si de plus $(e_i | e_i) = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Théorème 34 Si F est un sous e.v. de E , engendré par le système **orthonormal fini** $(e_i)_i$, alors :

$$\forall x \in E \quad P_F(x) = \sum_i (x | e_i) e_i .$$

E 18 Preuve du théorème 34.

- (1) Démontrer qu'un système orthogonal est libre.
- (2) Conclure.

Définition 41 : $\forall x \in E$, $(x | e_i)$, qui est la projection orthogonale de x sur le sous-espace engendré par e_i , définit la **ième coordonnée** de x , désignée par x_i , ou coefficient de Fourier de x par rapport à e_i .

Théorème 35 Etant donné un espace de Hilbert E muni d'un système orthonormal fini $(e_i)_{i=1,2,\dots,N}$, alors pour tout x de E :

$$\left\| x - \sum_{i=1}^N (x | e_i) \cdot e_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot e_i \right\|$$

quel que soit le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ de nombres réels.

Ainsi, $\sum_{i=1}^N (x | e_i) \cdot e_i$ est la meilleure approximation de x dans le sous-espace vectoriel engendré par la base orthonormale finie $(e_i)_i$. C'est donc la projection de x sur le sous-e.v. engendré par cette base.

Théorème 36 (Inégalité de Bessel) Soit un système orthonormal $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E , alors pour tout $x \in E$:

$$\sum_i |x_i|^2 \text{ est sommable et inférieur à } \|x\|^2.$$

Définition 42 : Un e.v. normé E est **séparable** s'il existe une famille dénombrable de vecteurs $(e_i)_i$, **dense** dans E .

Définition 43 : Un système (ou famille) $(e_i)_i$ est **total(e)** dans E si et seulement si le sous-espace vectoriel engendré par $(e_i)_i$ est dense dans E .

Définition 44 : On appelle **base orthonormale** d'un espace préhilbertien E toute famille orthonormale totale.

Exemple 11 : Soit $E = L^2([-1, 1])$; l'ensemble de polynômes de Legendre $(L_j)_j$ (cf. Thème d'étude de la fin du chapitre) est une famille totale de E .

$$\forall f \in L^2([-1, 1]) , \forall \varepsilon > 0 , \exists J_\varepsilon \subset \mathbb{N} : \left\| f - \sum_{j \in J_\varepsilon} \alpha_j L_j \right\|_2 < \varepsilon .$$

Définition 45 : Une base orthonormale d'un espace de Hilbert est dite **base hilbertienne**.

Théorème 37 (Caractérisation des bases orthonormales)

Soit E un espace préhilbertien, séparable muni d'un système orthonormal $(e_i)_i$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- P1 $\forall x, y \in E, \quad (x|y) = \sum_i x_i \overline{y_i}$ avec $x_i = P_{e_i}(x)$
- P2 $\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_i |x_i|^2$ (*identité de Parseval*)
- P3 $\forall x \in E, \quad x = \sum_i x_i \cdot e_i$
- P4 $(e_i)_i$ est une base orthonormale

Preuve ($P1 \Rightarrow P2$) est évident. Pour démontrer ($P2 \Rightarrow P1$), on utilise l'identité de polarisation (2.1).

($P2 \Rightarrow P3$) se démontre en majorant $\|x - \sum_i x_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_i |x_i|^2$ par $\varepsilon > 0$, à partir de $n \geq N$.

($P3 \Rightarrow P4$) est évident. On démontre ($P4 \Rightarrow P3$) en considérant le sous-espace E_n engendré par $(e_i)_{i=1, \dots, n}$, sur lequel on projette l'élément x appartenant à E : $\mathcal{P}_{E_n}(x)$ s'écrit $\sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle \cdot e_i$. Il suffit alors d'utiliser la majoration précédente. □

E 19 Soit la suite $r_n(x) = \text{signe}(\sin(2^n \pi x))$, $n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$, et $\text{signe} = \begin{cases} +1 & \text{si } y \geq 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

(1) (r_n) est-elle un système orthonormal de $L^2([0, 1])$?

[Indication : s'inspirer des graphes des 3 premières fonctions]

(2) Est-elle une base hilbertienne de $L^2[0, 1]$?

[Indication : montrer que $\forall n, \int_0^1 \cos(2\pi x) r_n(x) dx = 0$]

Définition 46 : Soit E un espace préhilbertien et $(e_n)_n$ une suite orthonormale de E , alors tout x de E admet un développement en série unique $\sum_n (x|e_n) \cdot e_n$, dit série de Fourier de x . Les nombres $(x|e_n)$ sont les **coefficients de Fourier** de x .

L'une des applications incontournables des concepts et théorèmes exprimés ci-dessus est constitué par la théorie des séries de Fourier, exposée dans le chapitre suivant, où on démontre que toute fonction de l'espace de Hilbert $L^2([0, T])$ des fonctions T -périodiques de carré intégrable sur une période, s'exprime comme limite au sens de $L^2([0, T])$ d'une combinaison linéaire d'éléments d'une base hilbertienne de $L^2([0, T])$.

Intermède biographique : David HILBERT (1862-1943)

Hilbert fit ses études à Königsberg sa ville natale, où il enseigna avant d'occuper la chaire de mathématiques de l'Université de Göttingen, de 1895 à 1929. Son œuvre couvre une grande partie des mathématiques contemporaines : équations intégrales, théorie des nombres, géométrie algébrique, équations différentielles, calcul des variations, physique mathématique, théorie de la démonstration.

Lors du Congrès International de Mathématiques qui se tint en 1900 à Paris, il proposa une liste désormais célèbre de vingt-trois problèmes non résolus dont certains sont encore ouverts, et qui furent autant de directions de recherche ayant fécondé les mathématiques pures ou appliquées, si tant est que cette distinction ait aujourd'hui un sens.

A la fin du dix-neuvième siècle, deux problèmes issus de la physique préoccupaient les analystes : le problème de Dirichlet (trouver une fonction harmonique dans un domaine, connaissant ses valeurs sur sa frontière) et le problème des oscillations d'un corps élastique. Hilbert résolut ces problèmes dans le cadre du calcul des variations.

Ses travaux sur les équations intégrales, mettent en œuvre les concepts de base orthonormée, de complétude et d'opérateurs fonctionnels. En 1899 Hilbert publia "Grundlagen der Geometrie" (Fondements de la géométrie), où il développa une axiomatisation non contradictoire de la géométrie, c'est à dire une formalisation de la géométrie dans laquelle aucune contradiction ne peut être rencontrée. Cette construction logique originale tire sa puissance de l'universalité des règles de déduction mises en œuvre et de l'indépendance des contenus sémantiques des objets régis par ces règles. Fort de cet acquis, Hilbert proposa un programme général d'axiomatisation non contradictoire de l'ensemble des théories mathématiques, afin d'en éliminer les paradoxes mis en évidence au début du siècle dernier, et qui furent à l'origine d'une crise des fondements logiques.

Un système consistant d'axiomes garantit non seulement la cohérence d'une théorie mathématique, mais devrait aussi nous permettre d'accéder à des conceptions de plus en plus profondes des objets et des théories mathématiques.

Tel était l'ambitieux projet formaliste de Hilbert, auquel Gödel devait opposer un arrêt définitif dans les années trente, grâce à deux méta-théorèmes qui en limitèrent la portée, et dont l'impact est aujourd'hui encore considérable sur l'épistémologie mathématique et au delà sur les théories de la connaissance.

Hilbert et Poincaré furent les mathématiciens qui ont exercé la plus forte influence sur les mathématiques de la première moitié du vingtième siècle.

2.4 Approximation des fonctions

Problème : étant donnée une fonction f , appartenant à un certain espace vectoriel normé E de fonctions, décrivant par exemple un signal, connue soit sous sa forme analytique, soit sur un ensemble fini de points $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ après échantillonnage, il s'agit de déterminer la meilleure approximation f^* de f , appartenant à un sous-espace F de dimension finie de E .

Autrement dit, on recherchera un élément $f^* \in F$ tel que :

$$\|f^* - f\|_E = \min_{g \in F} \|g - f\|_E.$$

Pratiquement, le sous-espace F est un s.e.v de dimension finie constitué soit de polynômes, soit de polynômes trigonométriques ou de fonctions polynomiales par morceaux (splines), etc... Les approximations obtenues dépendent donc du sous espace F choisi dans E et de la norme définie sur E .

2.4.1 Approximation dans les espaces préhilbertiens et hilbertiens

Problème d'approximation dans les espaces préhilbertiens

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un préhilbertien et F_n un sous s.e.v complet de E de dimension n . Etant donnée $f \in E$, il s'agit de déterminer $\phi^* \in F_n$ qui minimise $\|f - \phi\|$, $\phi \in F_n$. L'existence et l'unicité de la solution de ce problème ont été établies dans le Théorème 29. Nous en rappelons l'énoncé :

Théorème 38 $\phi^* \in F_n$ est l'unique meilleure approximation de F en norme si et seulement si :

$$\forall \phi \in F_n, \quad (f - \phi^* | \phi) = 0.$$

Montrons maintenant que le problème de meilleure approximation, se ramène à la résolution d'un système linéaire :

Construction de ϕ^*

Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ une base de F_n ; $\forall \phi, \quad \phi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ et ϕ^* s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^n a_i^* \varphi_i$

Donc : $(f - \phi^* | \phi) = 0 \Rightarrow (\forall j) \sum_{i=1}^n (\varphi_i | \varphi_j) a_i^* = (f | \varphi_j)$, appelé **système des équations normales**, qui s'écrit :

$$\Phi \cdot A^* = B \quad \text{où} \quad \Phi = \begin{pmatrix} (\varphi_1 | \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1 | \varphi_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n | \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n | \varphi_n) \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} (f | \varphi_1) \\ \vdots \\ (f | \varphi_n) \end{pmatrix}$$

Φ est inversible car ϕ^* est unique, donc A^* est unique et vaut $\Phi^{-1} \cdot B$

Définition 47 : Lorsque la base $\{\varphi_i\}_i$ est orthonormale, les coefficients $a_i^* = (f|\varphi_i)$ égaux aux projections de f sur les éléments de la base sont dits **coefficients de Fourier** de f relativement à $\{\varphi_i\}_i$.

Théorème 39 Si $\{\varphi_i\}_i$ est une base, l'erreur d'approximation de f par $\phi^* = \sum_{i=1}^n a_i^* \varphi_i$ est égale

à :

$$\|f - \phi^*\| = \left(\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i^* \cdot (f|\varphi_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

E 20 Démontrer le résultat précédent. Calculer $\|f - \phi^*\|$ dans le cas d'une base orthonormale.

Si la base $\{\varphi_i\}_i$ est orthonormale, la matrice Φ est diagonale, ce qui facilite la résolution du système linéaire. D'où l'intérêt de la méthode d'orthogonalisation de Schmidt, qui permet de construire des classes de polynômes orthonormaux.

2.4.2 Méthode des moindres carrés

(A) Approximation discrète des fonctions connues sur un ensemble fini de points.

Etant donnée une fonction f de $C(a, b) \cap L^2(a, b)$, où a et b peuvent être infinis, connue aux points $(x_i)_{i=1, \dots, N}$, on va construire une fonction ϕ^* appartenant au sous-espace F_n , engendré par la base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Il s'agit de trouver ϕ^* qui minimise la norme quadratique :

$$\|\phi - f\|_D = \sum_{i=1}^N p(x_i) |\phi(x_i) - f(x_i)|^2, \quad ,$$

où les $p(x_i)$ sont des poids positifs attribués aux points x_i ; les valeurs des poids $p(x_i)$ seront d'autant plus grandes que l'exige une bonne approximation de f par ϕ aux points x_i .

Grâce au Théorème 29, le problème de minimisation est équivalent à l'orthogonalité de $(f - \phi^*)$ avec tout ϕ de F_n , à savoir :

$$\sum_{i=1}^N p(x_i) (\phi^*(x_i) - f(x_i)) \cdot \phi(x_i) = 0 \quad \forall \phi \in F_n$$

$$\iff \forall j = 1, 2, \dots, n \quad \sum_{k=1}^n a_k^* \sum_{i=1}^N p(x_i) \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i) = \sum_{i=1}^N p(x_i) f(x_i) \varphi_j(x_i)$$

où $\phi^* = \sum_{k=1}^n a_k^* \varphi_k$, les a_k^* étant inconnus : il s'agit donc d'un système d'équations linéaires.

(B) Approximation continue des fonctions définies sur un intervalle.

La méthode est analogue à la précédente. On a : $\|\phi - f\| = \left(\int_a^b p(x) \cdot |\phi(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

Et la caractérisation de ϕ^* est donnée par : $\forall \phi \in F_n, \int_a^b p(x) \cdot (f(x) - \phi^*(x))\phi(x) dx = 0$.

Les coefficients a_k^* sont calculés grâce à la résolution d'un système linéaire analogue au précédent, où l'on remplace les sommes par des intégrales.

Deux applications classiques de la méthode des moindres carrés :

(a) Approximation trigonométrique des fonctions ϕ définies sur $[-\pi, \pi]$

Les fonctions de base sont : $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x,$

$\varphi_{2n+1}(x) = \sin(n+1)x, \varphi_{2n+2}(x) = \cos(n+1)x.$

ϕ^* s'exprime sous la forme d'une série de Fourier tronquée :

$$a_0^* + \sum_{k=1}^n (a_k^* \cdot \cos kx + b_k^* \cdot \sin kx) \quad .$$

(b) Approximation sur une base de polynômes orthogonaux $(P_k)_k$

Soient un intervalle borné I de \mathbb{R} et une fonction p strictement positive et continue définie sur I , telle que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n f(x) dx \text{ est finie.}$$

On construit à partir de la suite des monômes $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, linéairement indépendants, une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire défini sur $L^2(I, p(x) dx)$. Il est alors facile d'en déduire une suite de polynômes orthonormaux, qui constitue une base orthonormale de $L^2(I, p(x) dx)$ (cf. l'étude des polynômes de Legendre, en fin de chapitre).

Il existe plusieurs bases de polynômes orthogonaux adaptées aux intervalles de définition (a, b) des fonctions considérées :

- Tchebycheff : $a = -1, b = 1, p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- Legendre : $a = -1, b = 1, p(x) = 1$

- Hermite : $a = -\infty, b = +\infty, p(x) = e^{-x^2}$

Construction et étude des polynômes de Tchebycheff :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos(n\theta) = (\cos(\theta))^n - C_n^2(\cos(\theta))^{n-2}(1 - \cos^2 \theta) + C_n^4(\cos(\theta))^{n-4}(1 - \cos^2 \theta)^2 - \dots$$

(il suffit de développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$)

Ainsi $\cos(n\theta)$ est un polynôme de degré n en $\cos \theta$: soit alors $x = \cos \theta$.

Définition 48 : Le polynôme de Tchebycheff de degré n est défini par :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Théorème 40 (Propriétés des polynômes de Tchebycheff)

- (1) T_n a la parité de n .
- (2) $-1 \leq T_n(x) \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$.
- (3) Le coefficient de x^n est 2^{n-1} .
- (4) Relation de récurrence : $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$, sachant que $T_0 = 1$ et $T_1 = x$.
- (5) L'équation $T_n(x) = 0$ a n racines : $x_k = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$, $k = 0, \dots, n-1$.
- (6) Les polynômes $(T_n)_n$ sont orthogonaux pour le produit scalaire :

$$(T_n | T_m) = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

E 21 Prouver le théorème 40 et déterminer les trois premiers polynômes.

2.4.3 Méthode d'approximation uniforme

Cette méthode concerne l'approximation des fonctions de $E = C([a, b])$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, par des fonctions d'un sous-espace F_n de E , de dimension n .

Pour toute fonction $f \in E$ on cherche $\phi^* \in F_n$ telle que :

$$\|f - \phi^*\| = \min_{\phi \in F_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)|$$

Le théorème de **Stone-Weierstrass** garantit l'existence d'une approximation uniformément convergente de toute fonction $f \in C([a, b])$ par une suite de polynômes.

Théorème 41 (Stone-Weierstrass) L'ensemble des polynômes définis sur $[a, b]$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b])$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$; toute fonction continue sur un intervalle fermé de \mathbb{R} est limite uniforme d'une suite de polynômes.

E 22 Démonstration du théorème de Weierstrass à l'aide des polynômes de Bernstein.

Pour toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on sait construire une suite de polynômes P_n telle que : $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(a) On pose : $p_{n,k}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Vérifier que $\sum_{k=0}^n p_{n,k}(t) = 1$, $\sum_{k=0}^n k p_{n,k}(t) = nt$ et $\sum_{k=0}^n (nt-k)^2 p_{n,k}(t) = nt(1-t)$

On rappelle la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$. Ici : $a = t$, $b = 1-t$.

(b) Soit une fonction $f \in C([0, 1])$, à laquelle on associe la suite de polynômes P_n de Bernstein :

$P_n(t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(t)$. Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \left| \underbrace{\sum_{k \in K_1} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) p_{n,k}(t)}_{A_n(t)} \right| \leq \varepsilon,$$

où $K_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid |t - \frac{k}{n}| < \delta\}$.

(c) Soit $B_n(t) = \sum_{k \in K_2} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) p_{n,k}(t)$ où $K_2 = \{k \mid |t - \frac{k}{n}| \geq \delta\}$.

Démontrer que $|B_n(t)| \leq \frac{M}{2n\delta^2}$ où $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0$ et conclure.

(d) Soit $f = \frac{1}{1+x}$ $x \in [0, 1]$; déterminer le polynôme $P_2(x)$.

Tracer les graphes correspondants et calculer $\|f - P_2\|_\infty$.

Intermède biographique : Karl WEIERSTRASS (1815-1897)

Weierstrass commença des études de droit à Ostenfelde (Allemagne) sa ville natale, avant de découvrir les mathématiques à l'âge de vingt-trois ans. Il devint enseignant dans un gymnasium (lycée allemand) à Munster, puis professeur à l'Institut Professionnel de Berlin, avant d'être nommé professeur en 1863 à l'Université, poste qu'il conservera jusqu'à sa mort.

Epris de clarté et de rigueur, il fut l'homme d'un seul projet : donner des fondements rigoureux aux théories mathématiques de son temps et tout particulièrement à l'analyse. Ce projet connu aujourd'hui sous le nom d'"arithmétisation de l'analyse" fut partagé par la majorité de la communauté mathématicienne du dix-neuvième siècle, et si les travaux de Weierstrass furent les plus achevés, ils venaient après ceux de Cauchy, Bolzano et Abel qui en avaient préparé le terrain.

Fondateur de l'analyse moderne, il définit les concepts de limite, de continuité, de convergence uniforme, anticipa la notion de compacité si importante dans les problèmes de limites fonctionnelles ; il proposa la méthode de construction de l'ensemble \mathbb{R} par complétion de l'ensemble \mathbb{Q} , méthode qui inspira les recherches de Cantor et Dedekind.

Ses multiples travaux concernent aussi la théorie des fonctions holomorphes, la théorie des fonctions elliptiques et le calcul des variations.

2.5 Thème d'étude : les polynômes de Legendre

1. Construction des polynômes de Legendre par la méthode de Gram-Schmidt

Cette méthode est fondée sur le théorème d'orthogonalisation de Schmidt :

Théorème 42 *E est un espace préhilbertien, et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite libre ; soient A le sous e.v. de E engendré par $(a_n)_n$ et A_N le sous e.v. engendré par $(a_n)_{n=0, \dots, N}$.*

Il existe une suite orthogonale $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n, b_n \in A_N$; en conséquence, le sous e.v. engendré par $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égal à A .

On montre que : $b_0 = a_0, b_n = a_n - P_{n-1}(a_n)$, où P_n est le projecteur orthogonal de E sur E_n .

1.1 En pratique, on suppose b_0, b_1, \dots, b_n connus et orthogonaux deux à deux et on cherche

b_{n+1} sous la forme $a_{n+1} + \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i$. Déterminer les coefficients λ_i .

1.2 Application : soient $E = L^2([-1, 1], dx)$ et $(a_i = x^i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Construire les quatre premiers polynômes b_0, b_1, b_2, b_3 .

Les polynômes $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont appelés polynômes de **Legendre** et désignés par $L_i(x)$.

2. Construction analytique des polynômes de Legendre

La suite $\{L_n(x)\}_n$ des polynômes de Legendre, est aussi définie par la formule de **Rodriguez** :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

2.1 Démontrer que $(L_n | L_m)_2 = h_{n,m} \delta_{n,m}$, où les $h_{n,m}$ sont des constantes à déterminer. [Procéder par intégrations par parties successives, m fois]

On rappelle la formule de **Wallis** :

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = 2(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta)^{2n+1} d\theta = 2(-1)^n \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

2.2 Développer $(x^2 - 1)^n$ et en déduire une expression de $L_n(x)$.

2.3 Etablir la relation de récurrence :

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

[Exprimer le polynôme $xL_n(x)$ sous forme d'une combinaison linéaire de $L_0(x), \dots, L_{n+1}(x)$, puis utiliser la propriété $(x.f|g) = (f|x.g)$]

3. Approximation au sens des moindres carrés d'une fonction grâce aux polynômes de Legendre

Soit $f \in L^2([a, b])$, où a et b sont finis ou infinis. L'approximation au sens des moindres carrés de f par un polynôme P_n de degré n , consiste à déterminer P_n qui minimise :

$$\|f - P_n\|_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x) - P_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

P_n étant cherché sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments d'un ensemble donné de polynômes orthogonaux : $P_n = \sum_{k=0}^n c_k \cdot L_k$ où $c_k = \frac{(L_k|f)}{\|L_k\|^2}$.

Déterminer l'approximation de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 1 \geq x \geq 0 \end{cases} \quad \text{sur } (L_0, \dots, L_3) \quad \text{puis } (L_0, \dots, L_5).$$

Tracer les graphes dans un même repère.

2.6 Corrigés des exercices

E1

(a) – Les deux premiers axiomes sont trivialement vérifiés.

– Dernier axiome :

$$\begin{aligned} \forall i \quad & |x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \text{ donc} \\ & |x_i - y_i| \leq \max_i (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leq \max_i |x_i - z_i| + \max_i |z_i - y_i| \\ \text{d'où} \quad & \max |x_i - y_i| \leq \max_i |x_i - z_i| + \max_i |z_i - y_i| \end{aligned}$$

(b) $1 d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x, y)$; $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$

(c) δ n'est pas une distance puisque $\delta(A, B)$ peut-être égal à 0 si $A \cap B \neq \emptyset$.

E2

$$x \in \text{adh}(A) \stackrel{\text{déf}}{\iff} d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0 \implies \inf_{y \in B} d(x, y) = 0 \implies x \in \text{adh}(B).$$

E3

$$\text{(a) } A, B \subset A \cup B \implies \overline{A} \text{ et } \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \implies \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

$$A \cup B \subset \overline{A \cup B} \implies \overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$$

$$\text{(b) } A \cap B \subset A \subset \overline{A} \text{ et } A \cap B \subset B \subset \overline{B}$$

$$\text{donc } A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B} \implies \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

E4

(a) Si x un point de E est adhérent à F (voir Déf 10) il existe une suite $(x_n)_n$ de F qui converge vers x : $(x_n)_n$ est donc une suite de Cauchy dans E , donc dans F . Mais F est complet donc $(x_n)_n$ converge dans F vers x' et converge aussi vers x' dans E . Conclusion : $x = x'$, $x \in F$ et F est fermé.

(b) Considérons la suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant au fermé F , elle est aussi une suite de Cauchy de l'espace complet $E \supset F$, et converge donc vers $x^* \in E$; mais x^* est adhérent dans F , partie fermée, donc $(x_n)_n$ converge vers x^* et par conséquent F est complet.

E5

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n \cdot d(x_1, x_0).$$

Donc $\forall n, p \geq 1 \quad d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{(1-k)} d(x_1, x_0)$, où $0 < k < 1$: $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans un espace complet, elle converge vers une limite x^* .

$$f \text{ continue} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x^*.$$

Supposons $\exists x^{**}$ une deuxième limite ; $d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq kd(x^*, x^{**})$, avec $0 < k < 1$, donc $d(x^*, x^{**}) = 0$.

E8

Supposons que $f(E)$ soit égal à la partition formée de deux ouverts O_1 et O_2 , alors les images réciproques $f^{-1}(O_1)$ et $f^{-1}(O_2)$ formeraient une partition ($f^{-1}(O_1)$, $f^{-1}(O_2)$) de E ne pouvant être vide) en deux ouverts, car f est continue : d'où la contradiction avec l'hypothèse.

E10

$(f_n)_n$ est bien une suite de Cauchy : pour $n > m$, $\|f_n - f_m\|_1 = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2m}$, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2m}$ et de considérer m et $n > \frac{1}{2\varepsilon}$.

La limite de (f_n) est manifestement la fonction discontinue en $\frac{1}{2} : C([0, 1])$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.

E13

(T26) $\|x + y\|^2 = (x + y | x + y) = (x | x) + (y | y) + (x | y) + (y | x) = \|x\|^2 + \|y\|^2$, puisque $(x | y) = (y | x) = 0$.

(T27) Posons $\theta = \frac{(x | y)}{|(x | y)|}$. Alors, $(\theta x + \lambda y | \theta x + \lambda y) > 0$, pour tout réel λ . Donc :

$$|\theta|^2 \|x\|^2 + \lambda(\theta(x | y) + \theta^*(y | x)) + \lambda^2 \|y\|^2 > 0 \quad ,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz en calculant le discriminant de ce polynôme qui n'a pas de racines réelles.

(T28)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x | y) + (y | x) \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - (x | y) - (y | x) \end{aligned}$$

d'où le résultat par sommation.

E14

Soit $x^* \in F$ tel que $(x - x^* | y) = 0$, $\forall y \in F$. Alors :

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= (x - y | x - y) \\ &= ((x - x^*) - (y - x^*) | (x - x^*) - (y - x^*)) \\ &= \|x - x^*\|^2 + \|y - x^*\|^2 \implies \|x - x^*\|^2 \leq \|x - y\|^2 \\ \iff \|x - x^*\| &\leq \|x - y\| \quad (\forall y \in F) \end{aligned}$$

E15

(a) On cherche $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$, ce qui revient à minimiser :

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)^2$$

Soit l'hyperplan F_m engendré par les m vecteurs colonne de A . Minimiser $\phi(x)$ revient à chercher la projection de b sur l'hyperplan F_m .

Posons : $y = Ax$. Le théorème de projection sur un e.v. complet implique que $(b - y)$ est orthogonal à F_m , donc à chaque vecteur colonne. On a donc, pour tout $j = 1, 2, \dots, m$:

$\sum_{i=1}^n (b - y)_i a_{ij} = 0$, soit le système :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^n b_i a_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Mais $y_i = \sum_{k=1}^m x_k a_{ik}$ ce qui nous donne :

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m x_k a_{ik} \right) a_{ij} = \sum_k \sum_i (a_{ik} a_{ij}) x_k = \sum_i b_i a_{ij}.$$

(b) Le système précédent s'écrit encore : ${}^t A A x = {}^t A b$. Si ${}^t A A$ est inversible, on a : $x^* = ({}^t A A)^{-1} {}^t A b$.

Notons qu'on aurait obtenu le même résultat en utilisant la condition nécessaire (et ici suffisante) de minimisation de $\phi(x)$, à savoir $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

(c) Le système n'a évidemment pas de solution. (Il suffit de calculer la solution du sous-système des 2 premières équations et montrer qu'elle ne vérifie pas la troisième équation).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ({}^t A A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{50} & \frac{-7}{50} \\ \frac{-7}{50} & \frac{11}{50} \end{pmatrix}$$

d'où la solution $\left(\frac{27}{25}, \frac{-26}{25}\right)$.

E16

On pose $P_F(x) = x^*$.

(b) Théorème de Pythagore : $\|x\|^2 = \|x - x^*\|^2 + \|x^*\|^2 \Rightarrow \|x^*\|^2 \leq \|x\|^2$

(c) $(x^* | y) = (x^* | y^*) + \underbrace{(x^* | y - y^*)}_{=0} = (x^* | y^*)$

et $(x | y^*) = (x^* | y^*) + \underbrace{(x - x^* | y^*)}_{=0} = (x^* | y^*)$

E17

Soit $x \in F$; sur l'espace de Hilbert E , $\phi_x : y \mapsto (x|y)$ est une forme linéaire continue dont le noyau $\{x\}^\perp$ est un s.e.v fermé. Comme $F^\perp = \bigcap_{x \in F} \{x\}^\perp$, F^\perp est un sous-espace fermé comme intersection de s.e.v. fermés.

E19

1. Supposons que, pour une partie finie I d'indices, il existe $(a_i)_{i \in I}$ telle que $\sum_{i \in I} a_i e_i = 0$.

Alors, pour tout $j \in J$, on a :

$$(e_j | \sum_{i \in I} a_i e_i) = \sum_{i \in I} a_i (e_j | e_i) = a_j = 0 .$$

Donc toute famille orthogonale est libre.

2. Soit $(e_i)_{i=1,2,\dots,n}$ une base orthonormale de F . Alors, pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, on a :

$$\left(e_j | x - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = (e_j | x) - \sum_{i=1}^n a_i (e_j | e_i) = (e_j | x) - a_j = 0 .$$

Donc $\sum_{i=1}^n a_i e_i$ est la projection de x sur F .

E20

(a) On remarque que dans tout intervalle contenu dans $[0, 1]$, où $r_n(x)$ garde un signe constant, toute autre fonction r_m d'indice supérieur strict à n prend sur ces intervalles, un nombre égal de

valeurs -1 et +1 : d'où $(r_m | r_n) = 0$. D'autre part, pour tout entier $n : \|r_n\|_2^2 = 1$.

(b) Il suffit de démontrer qu'il existe une fonction non nulle $f(x)$ telle que $(f | r_n) = 0$. Par exemple $f(x) = \cos 2\pi x$ convient.

E21

$$\|f - \phi^*\|^2 = (f - \phi^* | f - \phi^*) = (f | f) - (f | \phi^*) = \|f\|^2 - \sum_k a_k^* (f | \varphi_k) .$$

Si la base est orthonormale : $\|f - \phi^*\| = \left(\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i^{*2} \right)^{1/2}$.

E22

- T_n a la parité de n , en raison du développement de $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$.
- $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \Rightarrow |T_n(x)| \leq 1$
- Le coefficient de $x^n = (\cos \theta)^n$ est égal à $1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$
- $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta$.
- $T_n(x) = 0$ pour $x_k = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}$ $k = 0, \dots, n-1$.
- On sait : $\cos(n\theta) \cdot \cos(m\theta) = \frac{1}{2} \{ \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta \}$ d'où :

$$\int_0^\pi T_n(\cos \theta) T_m(\cos \theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Posons $x = \cos \theta$ dans (2.2), il vient :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x) \cdot T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

E23

(a) $1 = (t + (1-t))^n = \sum C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$; $n(x+y)^{n-1} = \sum k p_{n,k}(t) = nt$.

(b) f est uniformément continue sur $[0, 1]$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que : $|t_1 - t_2| < \delta$ entraîne $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$. Appliqué à notre problème, cela donne :

$$\left| \sum_{k \in K_1} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) p_{n,k}(t) \right| \leq \varepsilon \sum_{k \in K_1} p_{n,k}(t) = \varepsilon$$

$$(c) |B_n(t)| \leq 2M \sum_{k \in K_2} p_{n,k}(t)$$

Mais $|nt - k| \geq n\delta \implies n^2\delta^2 \sum_{k \in K_2} p_{n,k}(t) \leq \sum_{k=0}^n (nt - k)^2 p_{n,k}(t) \leq nt(1-t)$ d'après (a).

D'où l'on conclut : $\sum_{k \in K_2} p_{n,k} \leq \frac{t(1-t)}{n\delta^2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} |B_n(t)| &\leq \frac{2Mt(1-t)}{n\delta^2} \quad \forall t \in [0, 1] \\ &\leq \frac{M}{2n\delta^2} \quad \text{car } t(1-t) \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(t) \right| = |A_n(t) + B_n(t)| \leq |A_n(t)| + |B_n(t)|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \quad |f(t) - P_n(t)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \leq 2\varepsilon$$

si n est assez grand, ce qui conduit à la convergence uniforme de $(P_n(t))_n$ vers f .

$$(d) \text{ Par définition, } P_2(t) = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{2}\right)} C_2^k t^k (1-t)^{2-k} = \frac{1}{6}t^2 - \frac{2t}{3} + 1$$

Polynômes orthogonaux

1.1 $b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i$. Donc pour tout $i \leq n$, on a :

$$(b_i | a_{n+1}) + \lambda_i (b_i | b_i) = 0,$$

d'où $\lambda_i = -\frac{(b_i | a_{n+1})}{(b_i | b_i)}$. La suite $c_n = \left(\frac{b_n}{\|b_n\|}\right)_n$ est orthonormale.

1.2 $b_0 = 1$, $(b_0 | b_0) = 2$, d'où $c_0 = \frac{b_0}{\|b_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$b_1 = a_1 - \frac{(a_1 | b_0)}{(b_0 | b_0)} b_0$; $b_1 = x$, d'où $\|b_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et $c_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$.

On parvient à $c_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3x^2 - 1}{2}\right)$ et $c_3 = \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{5x^3 - 3x}{2}\right)$.

2.1 En intégrant par parties m fois, on obtient :

$$\begin{aligned} (L_m | L_n) &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2^m m!} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \frac{d^m (x^2 - 1)^m}{dx^m} dx \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^m \frac{d^{n+m} (x^2 - 1)^n}{dx^{n+m}} dx \quad (*) \end{aligned}$$

Si $m > n$: l'intégrale du second membre de (*) est nulle car $\frac{d^{m+n}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n = 0$.

Si $m = n$, $\frac{d^{2n}(x^2 - 1)^{2n}}{dx^{2n}} = (2n)!$ et

$$\int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx = 2(-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = 2(-1)^n \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

grâce à la formule de Wallis, d'où : $(L_m | L_n) = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}$, où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker.

$$2.2 \quad (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (-1)^k x^{2n-2k}$$

$$\text{Or } L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2n-2k)! (-1)^k}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

où $\lfloor n/2 \rfloor =$ partie entière de $n/2$.

$$\text{Ainsi si } n = 2 : P_2(x) = \sum_{k=0}^1 \frac{(4-2k)! (-1)^k}{4k! (2-k)! (2-2k)!} x^{2-2k} = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

2.3 $xL_n(x)$ est un polynôme de degré $(n+1)$ donc :

$$xL_n(x) = c_{n+1}L_{n+1}(x) + c_nL_n(x) + \dots$$

où $c_k = \frac{2k+1}{2} (L_k | xL_n) = \frac{2k+1}{2} (xL_k | L_n)$. Or L_n est orthogonal à tous les polynômes de degré strictement inférieur à n , donc seuls c_{n-1} et c_{n+1} sont différents de 0. On a :

$$xL_n = c_{n+1}L_{n+1} + c_{n-1}L_{n-1}$$

L'égalité des termes en x^{n+1} donne : $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = c_{n+1} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} ((n+1)!)^2}$ d'où $c_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$.

On a : $\frac{c_{n+1}}{2n+3} = \frac{1}{2} (L_{n+1} | xL_n) = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}$. Remplaçons n par $n-1$:

$$\frac{c_{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} (L_n | xL_{n-1}) = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \quad \text{d'où } c_{n-1} = \frac{n}{2n+1}.$$

3 Comme f est impaire, on a : $(L_0 | f) = (L_2 | f) = (L_4 | f) = 0$. Par ailleurs :

$$(L_1 | f) = 2 \int_0^1 L_1(x) dx = 1 \quad ; \quad (L_3 | f) = -\frac{1}{4}$$

D'où l'approximation à l'ordre 3 : $P_3(x) = \frac{-35x^3 + 45x}{16}$.

Chapitre 3

Séries et transformation de Fourier des fonctions

Ce chapitre traite de l'analyse, au sens étymologique du mot (décomposition d'un objet en ses éléments constitutifs), et de la synthèse d'une fonction en une combinaison linéaire discrète ou "continue" de fonctions trigonométriques simples, sinus ou cosinus. La théorie de l'analyse et de la synthèse harmonique, est née des travaux du mathématicien Joseph Fourier (1768-1830) sur la résolution de l'équation de la chaleur. Elle fut et est encore aujourd'hui au cœur de l'analyse, grâce à ses prolongements théoriques et pratiques comme, par exemple, la théorie des ondelettes.

3.1 Séries trigonométriques

Définition 1 : Une **série trigonométrique** $S(x)$ s'écrit formellement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) \right).$$

Les nombres réels a_n et b_n sont les coefficients de la série et T est un réel positif, qui représente la **période** de la série $S(x)$, si cette dernière est définie.

La série admet une formulation complexe équivalente : $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$

$$\text{où } c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad c_0 = \frac{1}{2}a_0.$$

Une série trigonométrique quelconque ne converge pas nécessairement vers une fonction, même ponctuellement.

E 1 Ecrire une série trigonométrique sous la forme : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r_n \cos\left(\frac{n2\pi x}{T} - \varphi_n\right)$, qui montre qu'une telle série est une somme de signaux harmoniques simples, de périodes $(\frac{T}{n})_n$, d'amplitudes $(r_n)_n$ et de déphasages $(\varphi_n)_n$.

Dans le cas, fréquent en pratique, où la convergence de la série trigonométrique est uniforme, il est possible d'exprimer les coefficients a_n et b_n en fonction de la série :

Théorème 1 Si les séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ sont absolument convergentes ou, ce qui est équivalent, si la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n$ est absolument convergente, alors la série trigonométrique associée est normalement convergente, donc uniformément convergente sur tout intervalle de \mathbb{R} , vers sa somme $S(x)$, fonction T -périodique et continue.

Les coefficients a_n et b_n , nommés coefficients de Fourier, s'expriment sous la forme :

$$(\forall n \geq 0) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \quad \text{et} \quad (\forall n \geq 1) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx$$

Preuve

$\sum_{k \geq 1} \left\| a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) \right\| = \sum_{k \geq 1} |a_k|$ converge. Donc la série converge uniformément, et la limite uniforme d'une série de fonctions continues est continue, d'après un résultat classique. La périodicité est évidente.

On a déjà établi dans le chapitre précédent que pour tout entier m et n :

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx = \frac{T}{2} \delta_{m,n} \quad \text{et} \quad \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx = 0 \quad .$$

La convergence uniforme nous permet de permuter sommation et intégrale :

$$\frac{2}{T} \int_0^T S(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = a_n \frac{2}{T} \int_0^T (\cos \frac{2\pi n x}{T})^2 dx = a_n \quad .$$

La démonstration est analogue pour exprimer b_n . □

Exemple 1 : Soit la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n x}$.

$$\forall x \neq -N, \dots, 0, \dots, N, \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{2i\pi n x} = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^N \cos 2\pi n x = \frac{\sin(2N + 1)\pi x}{\sin \pi x},$$

qui est une fonction continue de période 1, dite **noyau de Dirichlet**. La limite ponctuelle de $D_N(x)$ aux points $x \in \mathbb{Z}$ n'existe pas, puisque $\sum_{n=1}^N \cos 2\pi n x$ tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$.

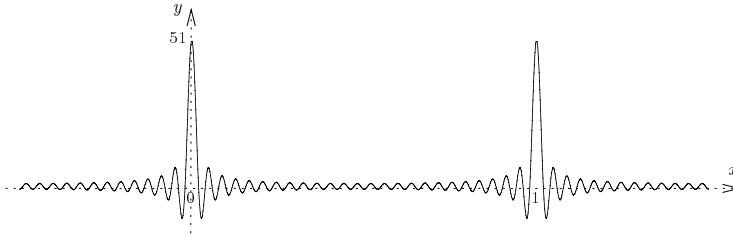


FIG. 3.1 – Graphe de $S_{25}(x)$.

Nous retrouverons le noyau de Dirichlet dans la démonstration du Théorème 3, dont la limite, décrite dans le cadre de la théorie des distributions, n'est pas une fonction et ressemble à un train périodique d'impulsions positives.

Exemple 2 : Etude de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$.

La série $\sum_{n \geq 1} |b_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ converge, donc la série converge vers une fonction 2π -périodique et

continue, que nous calculons facilement, en utilisant les complexes. En posant $z = \frac{e^{ix}}{2}$, on a :

$\frac{\sin(nx)}{2^n} = \text{Im}(z^n)$. D'où il vient :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{2^n} = \text{Im}\left(\frac{1}{1-z} - 1\right) = \text{Im}\left(\frac{e^{ix}(2 - e^{-ix})}{(2 - \cos(x))^2 + \sin^2(x)}\right) = \frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x} .$$

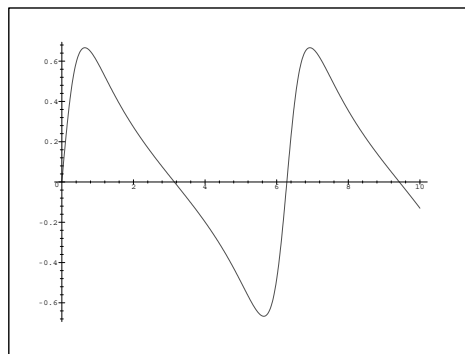


FIG. 3.2 – Graphe de $\frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}$.

Avec le Théorème 1, on pourrait démontrer que, en posant $T = 2\pi$:

$$\frac{1}{2^n} = \frac{2}{T} \int_0^T S(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x} \sin(nx) dx .$$

Grâce au Théorème 1, on associe à toute série trigonométrique normalement convergente une fonction périodique continue f qui s'identifie à sa limite S . Dans le paragraphe suivant, le problème est inverse, puisqu'on recherchera les conditions permettant d'associer à une fonction périodique f , une série trigonométrique dite série de Fourier de f .

3.2 Séries de Fourier des fonctions périodiques localement intégrables

La résolution des équations aux dérivées partielles provenant de la physique fit l'objet d'une féconde activité mathématique au dix-huitième siècle. Il en est ainsi de l'équation des cordes vibrantes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, pour laquelle il s'agit de déterminer l'élongation $u(x, t)$ au temps t d'un point d'abscisse x situé sur une corde tendue de longueur l , et fixée en ses extrémités. D'Alembert (1717-1783), donna à ce problème une solution formelle, en posant :

$$u(x, t) = f(ct + x) - f(x - ct)$$

où f est une fonction $2l$ -périodique et c la vitesse de déplacement de l'onde. Daniel Bernouilli (1700-1782) choisit f de la forme :

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}(ct + x)\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{l}(ct - x)\right) = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)$$

pour tout entier n positif et en déduisit une solution générale égale à la somme des $u_n(x, t)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Ce faisant il inaugura les premières méthodes fondatrices de l'analyse harmonique, dans laquelle on cherche à représenter une fonction par une série trigonométrique. Joseph Fourier (1768-1830) élaborait en 1805 une théorie de la propagation de la chaleur et proposa en 1811 une solution au problème ainsi formulé :

Etant donné le domaine du plan $D = \left\{ (x, y) \mid x \leq 0 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$, dans le cas de l'équilibre thermique $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$ soumis aux conditions aux limites : $u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = u\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \forall x < 0$, et $u(0, y) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0 \quad \forall y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. ($T(x, y, t)$ étant la température au point (x, y) au temps t). Fourier résolut cette équation par la méthode dite de "séparation des variables", et parvint à une solution de la forme $T_m(x, y) = e^{-mx} \cos(my)$ où m est un entier impair positif quelconque. Il proposa une solution générale comme combinaison linéaire des $T_m(x, y)$:

$$T_m(x, y) = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \text{ impair}}} a_m e^{-mx} \cos(my)$$

La dérivation récurrente de $T(x, y)$ le conduisit à établir un système linéaire de dimension infinie, ayant les coefficients a_m comme inconnues. Dans ses travaux, la question de la convergence des séries n'est nulle part abordée et sera traitée rigoureusement dans les travaux ultérieurs de Dirichlet en 1829.

On ne perdra pas de vue dans la suite de l'exposé, qu'un signal physique réel a toujours une énergie finie, une amplitude et un spectre bornés.

Notation : $L_p^1(0, T)$ désigne l'ensemble des fonctions f définies sur \mathbb{R} , de période T et telles que $\int_0^T |f(x)| dx$ est finie.

Définition 2 : Etant donnée une fonction $f \in L_p^1(0, T)$, on définit les coefficients de Fourier de $f : \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx \text{ et } \forall n \geq 1, b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{-\frac{2i\pi}{T}nx} f(x) dx$$

Sous des conditions d'existence qui seront précisées plus loin, la série trigonométrique associée à f s'appelle série de Fourier de la fonction f , notée S_f .

Théorème 2 (Propriétés des coefficients de Fourier)

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$

(2) Si f est paire, alors, pour tout entier n , $b_n = 0$ et $S_f(x)$, si elle existe est égale à :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

(3) Si f est impaire, alors, pour tout entier n , $a_n = 0$ et $S_f(x)$, si elle existe est égale à :

$$\sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) .$$

Preuve

(1) Par le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx = 0. \text{ Idem pour } b_n \text{ et } c_n.$$

(2) f paire $\Rightarrow f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$ impaire $\Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = 0$

(3) f impaire $\Rightarrow f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$ impaire $\Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = 0$

□

Exemple 3 : Série associée à $f(x) = |\cos x|$, paire, π -périodique.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx) |\cos x| dx = -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1} \text{ et } b_n = 0;$$

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos(2nx).$$

Définition 3 : Une fonction f non définie au point c , possède une **discontinuité de première espèce** en c si $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ **existent et sont finies**. Elles sont respectivement notées $f(c^+)$ et $f(c^-)$.

Définition 4 : Une fonction T -périodique f est **C^0 par morceaux** si elle est continue sauf en un nombre fini de points, points en lesquels elle a une discontinuité de première espèce.

Définition 5 : Une fonction est **C^1 par morceaux** si elle est C^1 sauf en un nombre fini de points x où les limites à gauche et à droite de f et de sa dérivée sont finies et ne sont pas nécessairement égales.

Résumons en un seul théorème les conditions suffisantes d'existence et les propriétés de la série de Fourier d'une fonction périodique localement intégrable, C^1 par morceaux :

Théorème 3 (Convergence locale d'une série de Fourier - Dirichlet-Jordan)

- (1) **Toute fonction T -périodique et C^1 par morceaux admet en tout point x un développement en série de Fourier convergent simplement vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$, et vers $f(x)$ si f est continue en x .**
- (2) **De plus, sur tout segment où f est continue, la série de Fourier est uniformément convergente vers f ; si f est continue partout alors la convergence uniforme est acquise sur tout \mathbb{R} .**

La série $S_f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1} \cdot \cos(2nx)$ est uniformément convergente. On en déduit une des nombreuses expressions de π : soit $x = 0$, alors $S_f(x) = 1$, d'où :

$$2 - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1} = \pi$$

E 2 Où il est établi qu'une fonction peut être développée en plusieurs séries de Fourier.

- (1) Soit $f(x) = x \mathbf{1}_{[0,2]}(x)$. Développer $f(x)$ en séries de sinus ? de cosinus ?
 En déduire qu'on peut développer une fonction périodique selon plusieurs séries. Calculer un développement de $x^2 \mathbf{1}_{[0,2]}(x)$.
- (2) Calculer la série de Fourier de la fonction $\cos(\alpha x) \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$

E 3 Preuve du théorème de Dirichlet-Jordan.

Pour faciliter les calculs on prendra $T = 1$. On a alors $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi n x}$, c_n étant les coefficients de Fourier.

- (1) Etablir que $S_N = f * D_N$ où D_N est le **noyau de Dirichlet** défini par :

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{2i\pi n x} .$$

- (2) Montrer que : $\sin(\pi t) D_N(t) = \sin(2N + 1)\pi t$. (cf. Figure 3.1 pour le graphe de $D_{25}(t)$)
- (3) Compte-tenu de la parité de D_N , écrire $S_N(x)$ sous la forme :

$$S_N(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x-t) + f(x+t)) D_N(t) dt .$$

En déduire que : $S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 F(t) \sin(2N + 1)\pi t dt$, où :

$$F(t) = \frac{f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)}{\sin \pi t} .$$

- (4) F est continue par morceaux. Pour montrer que F est intégrable, il suffit de prouver que $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$ est finie.
 Montrer que cette limite est égale à : $2(f'(x^-) + f'(x^+))$.

Terminer la preuve du théorème en montrant que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Remarque : Le théorème de Dirichlet-Jordan restreint le développement en série de Fourier aux seules fonctions qui sont de classe C^1 sauf sur un ensemble fini de points. Or Weierstrass construisit la fonction $w(x) = \sum_{n \geq 0} a^n \cdot \cos(b^n x)$ où a est un entier impair supérieur à 1 et b un réel vérifiant $0 < b < 1$ et $a \cdot b > 1 + \frac{3\pi}{2}$, fonction qui est continue, partout non dérivable et cependant développable en série de Fourier. Voilà qui laissait présager une extension possible des conditions de Dirichlet. Mais il n'en fut rien, puisque J.P. Kahane et Y. Katznelson démontrèrent en 1966, qu'étant donné un ensemble de mesure nulle de $[0, 2\pi]$, il existe une fonction 2π -périodique et continue dont la série de Fourier diverge en tout point de cet ensemble.

Le théorème suivant précise les conditions de dérivation et d'intégration terme à terme d'une série de Fourier.

Théorème 4 *Sous les hypothèses de la partie (1) du théorème 3 de Dirichlet-Jordan, à savoir f fonction T -périodique et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f peut être intégrée*

terme à terme.

Sous les hypothèses de la partie (2) du même théorème, la série de Fourier de f peut être intégrée et dérivée terme à terme. Dans ce cas, S'_f converge simplement vers $f'(x)$ si f' est continue en x ou vers $\frac{1}{2}(f'(x^+) + f'(x^-))$ si f' est discontinue en ce point.

Théorème 5 (Comportement asymptotique des coefficients)

Si $f \in C^k([0, T])$ alors $|c_n| \leq \frac{K}{n^k}$ où K est une constante positive.

Interprétation : plus la fonction a un ordre élevé de dérivabilité, plus ses coefficients de Fourier convergent rapidement vers 0 avec n .

Preuve $c_n(f^{(k)}) = (\frac{2i\pi n}{T})^k c_n(f)$. En intégrant par parties, il vient :

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n^k} \left| \left(\frac{T}{2i\pi} \right)^k c_n(f^{(k)}) \right| \leq \frac{1}{n^k} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^k \frac{1}{T} \int_0^T |f^{(k)}(x)| dx \leq \frac{K}{n^k} ,$$

car $f^{(k)}$ est continue sur $[0, T]$. □

Théorème 6 La série de Fourier d'une fonction T -périodique et de classe C^2 est **normalement convergente** ; sa série dérivée terme à terme a une somme égale à f'

Preuve D'après le Théorème 5, $|c_n| \leq \frac{K}{n^2}$ donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|c_n \cdot \exp(2i\pi n t)\| \leq \sum_n |c_n|$ qui est fini d'où la convergence normale. □

Exemple 4 :

- (a) La fonction 2π -périodique égale à $f(x) = |\cos x|$ est continue et C^1 par morceaux : sa série de Fourier converge uniformément vers f .
- (b) La fonction 2π -périodique $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ n'est pas partout continue : d'après le théorème de Dirichlet-Jordan la convergence est simple en tout point, notamment aux points de discontinuité $\{n\pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$, où elle converge vers $\frac{g(n\pi^+) + g(n\pi^-)}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$.

Sa série de Fourier est $S_g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2n + 1)x}{2n + 1}$

- (c) L'hypothèse « C^1 par morceaux» est essentielle pour garantir la convergence de la série : Féjer a construit la fonction définie par la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sin((2n^3 + 1)\frac{x}{2})$, qui est continue et non C^1 par morceaux, dont la série de Fourier diverge en 0.

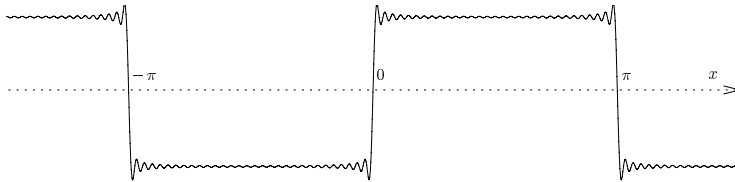


FIG. 3.3 – Graphe de $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{30} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

Remarque : l'exemple (b) précédent fait apparaître un défaut de convergence uniforme aux voisinages des points d'abscisses $(n\pi)_n$, se manifestant sous la forme d'oscillations non amorties, connues sous le nom de phénomène de Gibbs, dont l'étude est proposée dans l'exercice suivant.

E 4 Le phénomène de Gibbs

Considérons la fonction $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$ de l'exemple (4). Sa série de Fourier est $S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

(1) Calculer $S'_n(x)$ et en déduire que $S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nu)}{\sin u} du$.

(2) Calculer son premier maximum positif et conclure. Constaté que les oscillations de $S_n(x)$ de la figure 3.3, sont d'autant plus grandes que leurs abscisses sont proches des points $n\pi$.

Si f n'est pas au moins C^1 par morceaux, on ne peut conclure quant à la convergence de sa série de Fourier : un nouveau procédé de sommation de série dit de Césaro, permet alors d'obtenir la convergence. Ce procédé est utilisé par les numériciens pour accélérer la convergence d'algorithmes de sommation d'une série.

Définition 6 : A la série de Fourier d'une fonction f , on associe sa **moyenne de Césaro** $\sigma_N(f)$:

$$\forall N \in \mathbb{N}^* , \sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(f) \quad \text{où } S_i(f) \text{ désigne les séries de Fourier partielles de } f.$$

Rappel. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes, il y a équivalence entre la convergence de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$, et la convergence de la suite des moyennes arithmétiques $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S_i$.

Définition 7 : La suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $K_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} D_i$, où D_i est le noyau de Dirichlet, est appelée **noyau de Féjer**.

Théorème 7 (Féjer)

Soit une fonction f , T -périodique et continue, alors sa moyenne de Cesaro $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f . De plus, $\sigma_N(f) = \frac{1}{T}(f * K_N)$ où K_N est le noyau de Féjer.

Preuve Pour simplifier les écritures, on prend $T = 1$. Rappelons que l'on a vu que :

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n + 1)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin((2n + 1)\pi x) \sin(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} = \frac{\cos(2\pi n x) - \cos(2(n + 1)\pi x)}{2 \sin^2(\pi x)} .$$

On en déduit que :

$$K_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N \sin^2(\pi x)} \left(\frac{1 - \cos(2N\pi x)}{2} \right) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2 .$$

Démontrons que $(K_N)_N$ est une suite régularisante.

D'abord, on a : $\int K_N(x) dx = 1$ car $\int D_N(x) dx = 1$.

Ensuite, soit $] - a, +a[$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors si $x \notin] - a, +a[$, on a :

$$K_N(x) \leq \frac{1}{N(\sin(\pi a))^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \text{ d'où } \int_{] - a, +a[} K_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \text{ Grâce au théorème}$$

d'approximation par une suite régularisante (ou unité approchée) (Théorème 30 - Chapitre 1), il s'ensuit que f est continue et que $(K_N * f)_N$ converge uniformément vers f . □

Remarque : Les théorèmes de Dirichlet-Jordan et de Féjer montrent que l'on peut approcher une fonction f périodique suffisamment régulière, comme limite d'une suite $(f * U_n)_n$, où $(U_n)_n$ est respectivement le noyau de Dirichlet $\left(\frac{\sin(2n + 1)\pi t}{\sin \pi t} \right)_n$ et le noyau de Féjer

$$\left(\frac{1}{n} \left(\frac{\sin n\pi x}{\sin \pi x} \right)^2 \right)_n .$$

E 5 Convolution de fonctions 2π -périodiques intégrables.

Le produit de convolution de deux fonctions localement intégrables f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et 2π -périodiques est défini par :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - u)g(u)du$$

- (1) Démontrer d'abord que $f * g$ est 2π -périodique, puis localement intégrable.
- (2) Déterminer le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier du développement en série de $f * g$ en fonction des coefficients du développement en série de f et g .

3.3 Séries de Fourier des fonctions périodiques de classe $L^2_p(0, T)$.

Les fonctions T -périodiques de carrés intégrables sur une période constituent un espace vectoriel $L^2_p(0, T)$ et modélisent les signaux périodiques d'énergie finie sur une période. Le résultat fondamental de ce chapitre est le théorème de **Weierstrass**, qui donne au développement en séries de Fourier tout son sens dans le cadre de l'espace de Hilbert $L^2_p(0, T)$.

Théorème 8 (Weierstrass)

Pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$, l'ensemble des fonctions $\left\{ \exp \left(2i\pi \frac{kt}{T} \right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2_p(0, T)$.

Preuve (Cf : Tome 1. Analyse fonctionnelle. Samuelides - Touzillier) □

Théorème 9

Si $f \in L^2_p(0, T)$, à valeurs réelles, la série $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nt) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nt)) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2i\pi nt}{T}}$ converge en moyenne quadratique (i.e au sens de L^2) vers f ; $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ étant les coefficients de Fourier de la série.

Identité de Parseval :
$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

(1) Des théorèmes 8 et 9, on déduit que $L^2(0, T)$ et l'espace $l^2(\mathbb{R})$ des suites de carrés sommables, sont en correspondance par l'isomorphisme $\Phi : f \in L^2(0, T) \rightarrow \Phi(f) = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

(2) A ce jour, le meilleur résultat de convergence obtenu pour les séries de Fourier est dû à Carleson qui démontra en 1966 que la série de Fourier S_N d'une fonction f de $L^2_p(0, T)$ converge vers f presque partout : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = f$, sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle.

Caractéristiques des signaux $f \in L^2_p(0, T)$.

- $\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(t)|^2 dt$ est l'**énergie du signal sur une période**.

- $\frac{1}{T} \|f\|_2^2$ est la **puissance moyenne du signal**.

- $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ est la **moyenne de f** .

- $a_1 \cos(\frac{2\pi t}{T}) + b_1 \sin(\frac{2\pi t}{T})$ est l'**harmonique fondamental de f** .

- $a_n \cos(\frac{2\pi nt}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nt}{T})$ est le **n ième harmonique de f** .

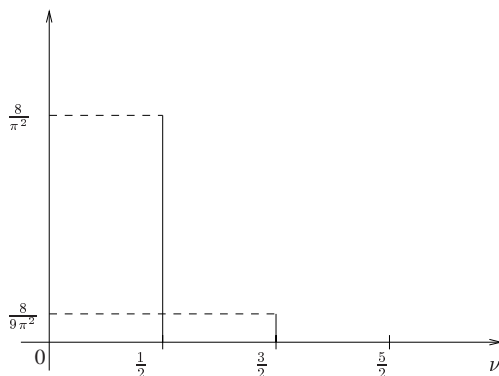
Au **n ième harmonique** $a_n \cos(\frac{2\pi tn}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi tn}{T})$ est associée sa puissance moyenne :

$$P_n = \frac{1}{2} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Définition 8 : A toute fonction de $L^2_p(0, T)$ on associe son **spectre de fréquences discrètes** ou **spectre de raies** défini par la mesure discrète $\sum_{n \in \mathbb{N}} P_n \delta(\frac{n}{T})$, où P_n est la puissance portée par le **n ième harmonique**.

Exemple 5 : Considérons le signal périodique crénelé $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$ de développement en série de Fourier $\frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. Son spectre de fréquences est égal à :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \delta_{\frac{2n+1}{2}}.$$



Intermède biographique : Joseph FOURIER (1768-1830)

Fils d'un tailleur d'Auxerre, orphelin à dix ans, élève talentueux, Fourier effectua d'excellentes études qui le conduisirent du collège au noviciat, puis à l'École Normale Supérieure alors toute récente, où il se fit rapidement connaître de Monge, Laplace et Lagrange auquel il succédera dans la chaire d'analyse et de mécanique. En 1798 il accompagna en Égypte le corps expéditionnaire français dirigé par Bonaparte qui comportait de nombreux scientifiques en archéologie, en médecine ou en histoire naturelle ; passionné par l'art monumental de ce pays, il y séjourna et en devint administrateur civil jusqu'en 1802.

Ce mathématicien dans l'âme mais aussi fin politique et bon diplomate, fut nommé par le premier consul préfet de l'Isère en 1802. Bousculé dans sa carrière par la chute de l'Empire, il démissionna de son poste en 1814 ; de retour de l'île d'Elbe, Napoléon le fit comte. Il entra à l'Académie Française en 1816, et consacra les dernières années de sa vie à ses travaux en mathématiques et en physique. Son œuvre majeure "La théorie analytique de la chaleur" parue en 1822, inaugure l'emprise des mathématiques appliquées sur la physique.

Fourier s'attaqua à l'explicitation de la chaleur pour laquelle il émit deux hypothèses : la chaleur ne se communique qu'entre particules contiguës, et sa vitesse de propagation est proportionnelle à la différence des températures. Il produisit un modèle de conduction de la chaleur sous la forme d'une équation aux dérivées partielles ; c'est en la résolvant qu'il créa la notion de développement en séries trigonométriques de fonctions, dites depuis séries de Fourier et dont l'étude fut poursuivie au dix-neuvième siècle par Dirichlet et Riemann.

3.4 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Sous des hypothèses assez générales, la transformation de Fourier permet d'exprimer une fonction comme superposition "continue" d'exponentielles complexes $\{e^{i2\pi x \cdot \nu}\}_{\nu \in \mathbb{R}}$, généra-

lisant ainsi l'expression en série de Fourier d'une fonction périodique. La transformation de Fourier sera définie pour les fonctions de classe $L^1(\mathbb{R})$, puis de classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et enfin par prolongement de cet espace à $L^2(\mathbb{R})$, qui représente l'espace des signaux d'énergie finie. Pour ses propriétés remarquables, la transformation de Fourier est un outil incontournable en théorie du signal et dans bien d'autres domaines : probabilités, équations aux dérivées partielles. Présentée ici dans le cadre des fonctions, elle développe toute sa puissance opératoire au sein de la théorie des distributions.

Définition 9 : A toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on associe sa **transformée de Fourier** $\mathcal{F}(f)$ notée aussi \hat{f} définie par :

$$\forall \nu \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu x} f(x) dx$$

Remarque : Physiquement, ν est une fréquence ; certains auteurs, spécialistes de la théorie du signal, définissent une transformée de Fourier équivalente à celle-ci en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi\nu$:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x) dx \quad .$$

E 6

Montrer que si f est paire : $\hat{f}(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx$.

Montrer que si f est impaire : $\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) dx$.

Exemple 6 :

(a) $f(x)$ la **fonction porte** égale à $\begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-c, +c] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; $\hat{f}(\nu) = \frac{\sin(\pi 2c\nu)}{\pi\nu}$.

(b) $g_N(t)$ la fonction **sinus tronquée** définie par $\sin(2\pi\nu_0 t) \cdot \mathbf{1}_{[-N, +N]}(t)$

$$\hat{g}_N(\nu) = i \left(\frac{\sin 2\pi N(\nu_0 + \nu)}{2\pi(\nu_0 + \nu)} - \frac{\sin 2\pi N(\nu_0 - \nu)}{2\pi(\nu_0 - \nu)} \right) \quad .$$

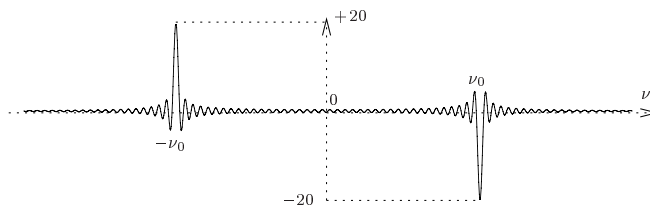


FIG. 3.4 – Graphe de \hat{g}_{20} .

On constate que le graphe de la partie imaginaire de \hat{g}_{20} possède deux pics aux voisinages de ν_0 et $-\nu_0$. Si N tend vers $+\infty$, \hat{g}_N se réduit à deux pics d'ordonnées respectives $-N$ et N , et d'abscisses égales à la fréquence ν_0 et $-\nu_0$. Voilà qui laisse augurer d'une conséquence attendue de la transformation de Fourier : pouvoir passer de la représentation temporelle d'un signal à sa représentation fréquentielle.

Théorème 10 (Propriétés de la transformation de Fourier définie sur L^1)

(1) $\forall f \in L^1, \hat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 quand $\nu \rightarrow \pm\infty$: on écrit $\hat{f} \in C_0$.

(2) **Formules de Plancherel** : si $f, g \in L^1$ alors $f.\hat{g}$ et $\hat{f}.g \in L^1$ et

$$\int f(t).\hat{g}(t)dt = \int \hat{f}(t).g(t)dt .$$

(3) $\mathcal{F}(f(-t))(\nu) = \mathcal{F}(f)(-\nu)$.

(4) **Propriété du retard ou de décalage** : $\mathcal{F}(f(t-a))(\nu) = e^{-2i\pi\nu a}\hat{f}(\nu)$.

(5) **Propriété de la modulation** : $\hat{f}(\nu - \nu_0) = \mathcal{F}(exp(2i\pi\nu_0 t) \cdot f(t))(\nu)$.

(6) **Propriété du changement d'échelle** :

Si $|a| > 1$, le changement d'échelle, qui à $f(t)$ associe $f(at)$, est dit **concentration**.

Si $|a| < 1$, le changement d'échelle est dit **dilatation**.

$$\mathcal{F}(f(at))(\nu) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}^* .$$

(7) Si f est réelle et paire, \hat{f} est réelle égale à $2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx$;

si f est réelle et impaire, \hat{f} est imaginaire pure, égale à $-2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x dx$.

Preuve

(1) La fonction $\nu \rightarrow e^{-2i\pi\nu x} f(x)$ est continue ; et de module majorée par $|f|$; donc par application du théorème de Lebesgue de continuité d'une l'intégrale paramétrée, $\hat{f}(\nu)$ est continue. De plus, $|\hat{f}(\nu)| \leq \|f\|_1$ donc \hat{f} est bornée.

La convergence vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$ est une conséquence du théorème de Riemann-Lebesgue.

(2) \hat{g} bornée donc $f.\hat{g} \in L^1$, même chose pour $\hat{f}.g$.

$$\begin{aligned} \int f(t).\hat{g}(t)dt &= \int f(t) \left(\int e^{-2i\pi ts} g(s)ds \right) dt \\ &= \int g(x) \left(\int e^{-2i\pi ux} f(u)du \right) dx \\ &\quad \text{(Théorème de Fubini appliqué à } e^{-2i\pi ux} . f(u)g(x) \text{ qui appartient à } L^1(\mathbb{R}^2) \text{)} \\ &= \int \hat{f}(x).g(x)dx \end{aligned}$$

$$(3) \int e^{-2i\pi\nu x} f(-x) dx = - \int_{+\infty}^{-\infty} e^{2i\pi\nu x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(-\nu)x} f(x) dx = \hat{f}(-\nu)$$

□

E 7 Démontrer les propriétés (4), (5) et (6) du théorème 10.

Définition 10 : La transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}(g)$ de g de classe L^1 est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\nu x} g(\nu) d\nu$$

Théorème 11 (Transformation inverse de Fourier)

Si f , $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}^{-1}(f)$ sont dans L^1 alors : $f \underset{(p.p)}{=} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) \underset{(p.p)}{=} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))$. Autrement dit :

$$f(x) \underset{(p.p)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\nu x} \hat{f}(\nu) d\nu .$$

Si de plus f est continue, les égalités précédentes sont vraies partout. La démonstration n'est pas évidente, et le théorème de Fubini ne suffit pas !

En théorie du signal, les transformations de Fourier directe et inverse sont des opérateurs qui permettent respectivement de passer de l'espace des phases à l'espace des fréquences, et inversement : ainsi un signal a une représentation temporelle $f(t)$ et une représentation fréquentielle ou spectrale $\hat{f}(\nu)$.

E 8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, intégrable, et \hat{f} sa transformée de Fourier.

$$\forall T > 0 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \text{ on définit : } f_T(t) = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) e^{2i\pi tx} \hat{f}(x) dx.$$

$$(1) \text{ Démontrer que } f_T(t) = \frac{1}{\pi^2 T} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi Ts)}{s^2} (f(t+s) + f(t-s)) ds.$$

$$(2) \text{ Calculer la valeur de } I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

(3) Supposons f bornée. Montrer qu'en tout point $t \in \mathbb{R}$ où $f(t^+)$ et $f(t^-)$ existent,

$$\text{on a : } \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

Théorème 12 (Propriétés de dérivation de la transformée de Fourier)

(1) Si $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, et si $\forall k \in \{0..n\}$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\widehat{f^{(k)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^k \hat{f}(\nu)$$

d'où l'on tire : $(2\pi\nu)^k \cdot |\hat{f}(\nu)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| dx$

Interprétation : plus l'ordre de dérivabilité de f est grand, à dérivées intégrables, plus \hat{f} décroît rapidement à l'infini.

(2) Si $\forall k \in \{0..n\}$, $t^k f \in L^1(\mathbb{R})$, alors \hat{f} est de classe C^n et

$$\hat{f}^{(k)}(\nu) = (-2i\pi)^k \widehat{t^k f}(\nu)$$

Preuve (1) si $k = 1$: $\hat{f}'(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu x} f'(x) dx = [e^{-2i\pi\nu x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\nu \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu x} f(x) dx$

($\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, car f' et f sont intégrables : démontrez-le !)

d'où :

$$\hat{f}'(\nu) = 2i\pi\nu \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu x} f(x) dx = 2i\pi\nu \hat{f}(\nu)$$

La suite de la démonstration se fait par récurrence.

(2) Conséquence du théorème de dérivation sous une intégrale :

$$\left| \frac{d}{d\nu} (e^{-2i\pi\nu t} f(t)) \right| \leq |2\pi t \cdot f(t)| \quad \text{qui est intégrable}$$

□

E 9 Calcul de la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$

Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Déterminer $(\hat{f}(v))'$ et en déduire une équation différentielle en \hat{f} que l'on résoudra. [Rappel. $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$]

Rappel : La fonction sinus cardinal, notée sc est définie par : $\text{sc}(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Théorème 13 Si f , appartenant à $L^1(\mathbb{R})$, est à support borné, alors \hat{f} est C^∞ .

Théorème 14

(1) Si f et g sont intégrables, alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

(2) Si $f, g, f \cdot g, \hat{f}$ et \hat{g} sont intégrables, alors : $\widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}$.

Preuve

(1) $f * g \in L^1$ donc $\widehat{f * g}(\nu) = \int e^{-2i\pi\nu t} \left(\int f(t-s)g(s)ds \right) dt$.

Or la fonction $(t, s) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow e^{-2i\pi\nu t} f(t-s)g(s)$ est intégrable, puisque

$$\int_{\mathbb{R}^2} |e^{-2i\pi\nu t} f(t-s)g(s)| dt ds = \int_{\mathbb{R}^2} |f(t-s)g(s)| ds dt = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < +\infty,$$

car f et g sont intégrables. D'où le résultat grâce au théorème de Fubini.

(2) $\hat{f} * \hat{g}$ est intégrable; $\overline{\mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g})} = \overline{\mathcal{F}(\hat{f})} \cdot \overline{\mathcal{F}(\hat{g})}$ d'après (1) et $\overline{\mathcal{F}(\hat{f})} = f$ et $\overline{\mathcal{F}(\hat{g})} = g$ (Théorème 11) d'où :

$$\mathcal{F}(f.g) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g})}) = \hat{f} * \hat{g}.$$

□

E 10 Résolution d'une équation intégrale.

Soit l'équation : (*) $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}, \quad (0 < a < b), f \in L^1(\mathbb{R})$.

- (1) Exprimer (*) sous forme d'une équation de convolution et déterminer $\hat{f}(\nu)$.
- (2) En déduire $f(t)$.

Transformation de Fourier d'une fonction à plusieurs variables

Définition 11 : f de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R} de classe $L^1(\mathbb{R}^k)$, alors ;

$$\hat{f}(\nu_1, \dots, \nu_k) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-2i\pi(\nu_1 x_1 + \dots + \nu_k x_k)} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

La transformation de Fourier par rapport à la variable x_j est :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x_j \nu_j} f(x_1, \dots, x_k) dx_j \underset{\text{noté}}{=} \hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \nu_j, x_{j+1}, \dots, x_k)$$

On retrouve les propriétés de la transformation de Fourier des fonctions d'une variable :

– changement d'échelle : $\forall a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(a_1.x_1, a_2.x_2, \dots, a_k.x_k)(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k) = \frac{1}{|a_1.a_2 \dots a_k|} \hat{f}\left(\frac{\nu_1}{a_1}, \dots, \frac{\nu_k}{a_k}\right)$$

– translation : $\hat{f}(x_1 - b_1, \dots, x_k - b_k)(\nu_1, \dots, \nu_k) = \hat{f}(\nu_1, \dots, \nu_k) \cdot e^{-2i\pi \sum_j b_j \nu_j}$

E 11 Il est utile pour les applications à la physique de voir comment sont transformées les fonctions à symétrie radiale. Soit une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , radiale ; $f(x, y) = \phi(r)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Montrer que sa transformée de Fourier $\hat{\phi}(\nu)$, dite **transformée de Hankel**, est radiale et la déterminer.

E 12 Modélisation de la diffraction.

Un faisceau de lumière monochromatique éclaire un écran E_1 opaque en dehors d'un trou de surface S , contenant l'origine O_1 d'un repère orthonormé $O_1x_1y_1$. On souhaite décrire la figure obtenue sur un écran E_2 parallèle à E_1 , situé à la distance d de celui-ci, dans le voisinage de la projection orthogonale O_1^* de O_1 sur E_2 . Les dimensions du trou sont supposées être beaucoup plus petites que d (x_1 et $y_1 \ll d$) : on se situe dans le cadre de l'approximation dite de Fraunhofer.

On appelle transparence en amplitude au point (x_1, y_1) de S , le rapport de l'amplitude complexe émergente sur l'amplitude complexe incidente, désignée par $f(x_1, y_1)$; ainsi $f(x_1, y_1)$ est un complexe de module compris entre 0 et 1. Plus la surface S est opaque, plus f est proche de 0.

Rappelons que l'amplitude émergente due au point $M_1(x_1, y_1)$ est égale à :

$$f(x_1, y_1) \cdot e^{-ik \frac{x_1^2 + y_1^2}{2d}}.$$

Le principe de Huygens-Fresnel nous dit que l'amplitude complexe en un point $M_2(x_2, y_2)$ de l'écran E_2 , due aux ondes issues de l'élément de surface $dx_1 dy_1$ autour de M_1 , est égale à :

$$f(x_1, y_1) \cdot e^{-ik \frac{x_1^2 + y_1^2}{2d}} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} dx_1 dy_1 \text{ où } r = (d^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit que l'amplitude complexe en M_2 , due au faisceau traversant S , est égale à :

$$A(x_2, y_2) \equiv A(M_2) = \iint_S f(x_1, y_1) \cdot e^{-ik \frac{x_1^2 + y_1^2}{2d}} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} dx_1 dy_1 \quad (k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

(1) Démontrer que sous l'hypothèse ($x_1, y_1 \ll d$), on a :

$$A(M_2) = e^{ik \frac{x_2^2 + y_2^2}{2d}} \hat{f}\left(\frac{x_2}{\lambda d}, \frac{y_2}{\lambda d}\right) \frac{e^{ikd}}{d}.$$

L'intensité $I(M_2)$ au point M_2 est alors définie (à un coefficient d^2 près) par :

$$I(M_2) = A(M_2) \cdot A^*(M_2) = \left| \hat{f}\left(\frac{x_2}{\lambda d}, \frac{y_2}{\lambda d}\right) \right|^2.$$

(2) Calculer et interpréter $I(M_2)$ dans les cas suivants :

(2.1) $f(x_1, y_1) = \Pi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x_1) \cdot \Pi_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}(y_1)$, où Π désigne la fonction créneau.

Que devient la figure de diffraction si on effectue un changement d'échelle de rapport α du rectangle $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$.

Que devient-elle quand a est petit et b très grand. Visualiser les graphes de $I(M_2)$ dans les cas précédents.

(2.2) Mêmes questions dans le cas de deux fentes parallèles verticales, centrées en $-c$ et c et de largeurs égales à ε .

(2.3) Cas d'un trou circulaire de rayon R .

3.5 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Laurent Schwartz (1915 - 2002) a introduit pour les besoins de la théorie des distributions un sous-espace de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, stable par transformation de Fourier, dérivation et multiplication par un polynôme. Cet espace noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, auquel on pourra étendre, grâce à un théorème classique de prolongement, l'opérateur linéaire qu'est la transformée de Fourier. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a un rôle théorique central dans la construction de la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 12 : Une fonction réelle est à **décroissance rapide** si pour tout entier n positif :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x^n f(x)| = 0$$

Exemple 7 : La fonction e^{-x^2} , est à décroissance rapide.

Aucun polynôme, aucune fonction trigonométrique ne sont à décroissance rapide.

Définition 13 : L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est défini comme l'espace vectoriel des fonctions C^∞ qui sont à décroissance rapide, ainsi que toutes leurs dérivées.

Théorème 15 (Propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme d'ordre quelconque, par dérivation, par transformation de Fourier et il est **dense** dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 16 (Caractère isométrique de la transformation de Fourier de \mathcal{S} dans \mathcal{S})

$$\forall f, g \in \mathcal{S}, \quad \int \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu = \int f(x) g(x) dx$$

d'où l'identité de Parseval :

$$\int |f|^2 dx = \int |\hat{f}|^2 d\nu$$

La transformation de Fourier \mathcal{F} de \mathcal{S} dans \mathcal{S} est un **opérateur linéaire, continu pour la norme $\|\cdot\|_2$, bijectif dont l'inverse \mathcal{F}^{-1} est égal à $\overline{\mathcal{F}}$** :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu \equiv \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})(\nu).$$

3.6 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

Le théorème de prolongement ci-dessous permet d'étendre la transformation de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à son complété $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 17 Toute application linéaire continue Φ d'un sous-espace vectoriel E_1 de l'e.v.n. E , dense dans E , dans l'e.v.n. complet F se prolonge de façon unique en l'application linéaire continue $\tilde{\Phi}$ de E dans F . De plus, elle a même norme que Φ : $\|\tilde{\Phi}\| = \|\Phi\|$.

Nous allons appliquer ce résultat à la construction de la transformée de Fourier sur $E = L^2(\mathbb{R})$ à partir de la transformée de Fourier définie sur $E_1 = \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 14 : Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors \widehat{f} est définie comme limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite $(\widehat{f}_n)_n$ avec $\widehat{f}_n(\nu) = \int_{-n}^n e^{-2i\pi\nu t} \cdot f(t) \cdot dt$ quand $n \rightarrow +\infty$; de façon analogue, $\overline{\mathcal{F}}(f)$ est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de $\int_{-n}^n e^{2i\pi\nu t} \cdot f(t) \cdot dt$.

- . Si $f \in L^1 \cap L^2$ alors \widehat{f} dans L^1 et \widehat{f} dans L^2 coïncident.
- . Si $f \in L^2$ et $\notin L^1$, \widehat{f} n'est définie que dans L^2 et l'est presque partout.

Nous résumons ci-dessous les propriétés de la transformation de Fourier définie sur L^2 .

Théorème 18 (Propriétés de la transformation de Fourier définie sur L^2)

(1) $\forall f \in L^2, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(f) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) = f$ (p.p)

(2) *Identité de Plancherel-Parseval :*

$$\forall f, g \in L^2 \int f(x)\overline{g(x)}dx = \int \mathcal{F}(f)(\nu)\overline{\mathcal{F}(g)(\nu)}d\nu;$$

(3) $\forall f \in L^2 \quad \|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2$ (Conséquence de (2))

\mathcal{F} est donc une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

(4) $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad f * g = \overline{\mathcal{F}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})}$ et $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$

Preuve Elle consiste à établir ces résultats dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puis à utiliser la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. □

L'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ égales à leurs transformées de Fourier est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$, qui contient entre autres fonctions, la très classique fonction gaussienne $e^{-\pi x^2}$.

Définition 15 : Un signal $f : t \in I \rightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle borné ou non de \mathbb{R} , est d'énergie finie s'il est de classe $L^2(I)$; son énergie est égale à $\|f\|_2^2$.

Caractéristiques de moyenne et de dispersion moyenne d'un signal d'énergie finie

Soit f un signal de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $t \cdot f(t)$ et $\nu \cdot \widehat{f}(\nu)$ soient aussi dans $L^2(\mathbb{C})$.

On définit l'énergie du signal par : $E = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{f}(t) dt$, et sa **densité d'énergie** :

$$\psi(t) = \frac{f(t) \overline{f}(t)}{\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{f}(t) dt} .$$

La moyenne temporelle d'énergie est donc égale à : $\int_{\mathbb{R}} t \psi(t) dt = \underset{\text{noté}}{[t]}$. La variance temporelle d'énergie est définie par : $\Delta t^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - [t])^2 \psi(t) dt$, qui est encore égale à :

$$\Delta t^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 \psi(t) dt - [t]^2 .$$

De façon analogue, on définit la moyenne fréquentielle : $[\nu] = \int_{\mathbb{R}} \nu \hat{\psi}(\nu) d\nu$, et la variance fréquentielle : $\Delta \nu^2 = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} \nu^2 \hat{f}(\nu) \overline{\hat{f}}(\nu) d\nu - [\nu]^2$. Δt est appelé durée utile du signal et $\Delta \nu$ bande utile du signal.

Le théorème suivant, connu en mécanique quantique sous le nom de principe d'incertitude de Heisenberg, donne une borne inférieure au produit $\Delta t \Delta \nu$.

Théorème 19 (Principe d'incertitude)

Soit f un signal de moyennes temporelle et fréquentielle nulles, tel que f , $t f(t)$ et $\nu \hat{f}(\nu)$ soient dans L^2 . Alors on a : $\Delta t \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}$.
L'égalité n'est vérifiée que si f est un signal gaussien.

Interprétation physique de l'inégalité $\Delta t \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}$.

Si Δt est petit : l'énergie est concentrée autour d'un point, alors $\Delta \nu$ est grand : il y a une forte dispersion fréquentielle. Inversement, si $\Delta \nu$ est petit (forte concentration sur un petit nombre de fréquences), Δt est grand (forte dispersion temporelle de l'énergie).

E 13 Démontrer le théorème 19.

[Indication : Poser $\phi_1(t) = t f(t)$, $\phi_2(t) = \frac{df}{dt}$ et appliquer Cauchy-Schwarz à ϕ_1 et ϕ_2 .]

Ainsi la foudre que l'on peut assimiler à une forte impulsion électrique, perturbe toutes les fréquences (téléphone, radar, radio, etc ...), car précisément elle les contient toutes.

Théorème 20 (Bernstein) Soit f une fonction appartenant à $C^n \cap L^2$, bornée ($|f| \leq M$). On suppose que le support de \hat{f} est borné, inclus dans $[-B, +B]$. Alors :

$$\left| \frac{d^n f}{dt^n} \right| \leq (2\pi B)^n M .$$

Interprétation dans le cadre de la théorie du signal.

Plus le support du spectre d'un signal $f(t)$ est petit, moins ses variations sont rapides, puisque ses dérivées sont bornées. Localement un tel signal est quasi-constant sur tout intervalle de temps dont l'amplitude est voisine de $\frac{1}{2\pi B}$.

En effet, si $\left| \frac{df}{dt} \right| \leq (2\pi B) M$, alors $|f(t_2) - f(t_1)| \leq 2\pi B M \cdot (t_2 - t_1)$, ou encore :

$$\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{M} \right| \leq 2\pi B \cdot (t_2 - t_1) .$$

En conclusion : $\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{M} \right| \ll 1$ si $(t_2 - t_1) \ll \frac{1}{2\pi B}$.

Définition 16 : (Fonction d'autocorrélation d'un signal)

A tout signal f d'énergie finie, on associe sa **fonction d'autocorrélation** :

$$C_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t+s)\overline{f}(s)ds$$

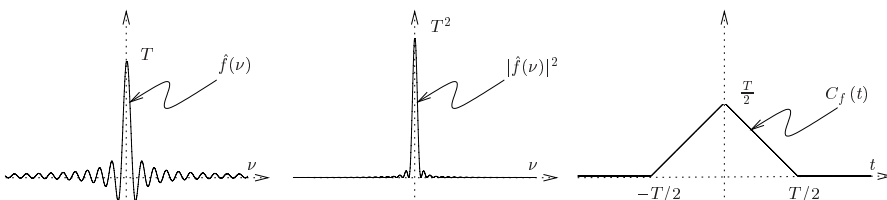
Interprétation : La fonction d'autocorrélation est une représentation de l'évolution de la similitude entre un signal et sa translatée ; elle est définie comme le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$, de f et de sa translatée.

On sait que l'énergie du signal f s'exprime aussi en fonction de \hat{f} , et est égale à $\int |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$; ainsi l'énergie portée par le sous-ensemble de fréquences $[\nu_1, \nu_2]$ est $\int_{\nu_1}^{\nu_2} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$, où $|\hat{f}(\nu)|^2$ tient lieu d'une **densité d'énergie**.

Définition 17 : La **densité spectrale** du signal $t \rightarrow f(t)$ est la fonction $\nu \rightarrow |\hat{f}(\nu)|^2$

Exemple 8 : $f(t) = \mathbf{I}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t)$ $\hat{f}(\nu) = T.sc(\pi T\nu)$, d'où la densité spectrale $|\hat{f}(\nu)|^2 = T^2 \left(\frac{\sin(\pi T\nu)}{\pi T\nu} \right)^2$.

$$C_f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(s) \mathbf{I}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(s+t)ds = \left(\frac{T}{2} - |t|\right) \mathbf{I}_{[-T, T]}(t)$$



Théorème 21 La densité spectrale d'un signal f d'énergie finie, dont l'autocorrélation C_f est intégrable, est égale à la transformée de Fourier de l'autocorrélation :

$$|\hat{f}(\nu)|^2 = \widehat{C_f}(\nu)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \widehat{C_f}(\nu) &= \int e^{-2i\pi\nu t} \left(\int f(t+s) \overline{f(s)} ds \right) dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int \int (e^{-2i\pi\nu(t+s)} f(t+s)) \cdot (e^{2i\pi\nu s} \overline{f(s)}) ds dt = \left| \int e^{-2i\pi\nu x} f(x) dx \right|^2 \\ &= |\hat{f}(\nu)|^2 \end{aligned}$$

□

Les fonctions intégrables à spectre borné, ayant donc une certaine régularité (toutes les dérivées sont bornées), ont la propriété remarquable d'être entièrement déterminées, dès qu'elles sont connues sur un ensemble discret de points judicieusement choisis, défini par le théorème de Shannon.

Théorème 22 (Echantillonnage de Shannon)

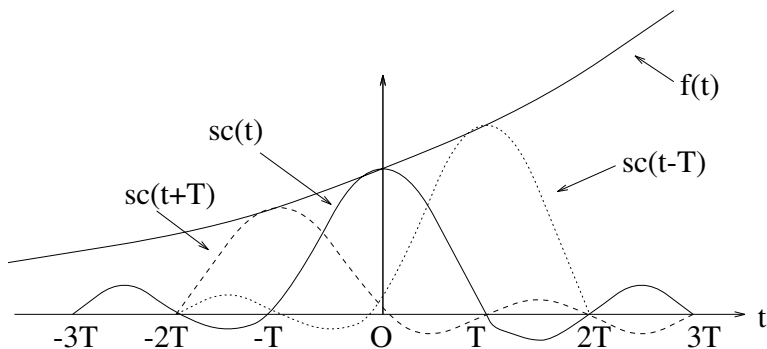
Soit f une fonction de carré intégrable telle que le support de (\hat{f}) soit inclus dans $[-\nu_0, \nu_0]$, et connue aux points d'échantillonnage $\{\frac{n}{2\nu_0}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, alors :

$$f(t) \underset{\text{(dans } L^2)}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=-N}^N f\left(\frac{k}{2\nu_0}\right) \frac{\sin \pi(2\nu_0 t - k)}{\pi(2\nu_0 t - k)} \right) \quad \text{(Formule de Shannon)}$$

$$\text{qui s'écrit aussi : } \frac{1}{2\nu_0 \pi} \sin(2\nu_0 \pi t) \sum_{\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right) \frac{(-1)^n \cdot 2\nu_0}{2\nu_0 t - n}.$$

Si, de plus, f vérifie la propriété $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(\frac{k}{2\nu_0})| < +\infty$ alors la convergence de la série est uniforme.

$2\nu_0$ est la **fréquence de Nyquist**, et représente la fréquence minimum d'échantillonnage.



Remarques :

- (1) Les fonctions translatées des sinus cardinaux $\left(\frac{\sin \pi(2\nu_0 t - k)}{\pi(2\nu_0 t - k)}\right)_k$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$ et constituent une base orthogonale du sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont les transformées de Fourier sont à support borné.
- (2) La limite pratique de ce résultat provient du fait que si \hat{f} est à support borné, alors f est à support non borné : il est irréaliste de supposer un échantillonnage infini. Il y a donc une perte d'informations due à tout échantillonnage, nécessairement fini.
- (3) Si l'échantillonnage a une fréquence ν'_0 telle que $\frac{1}{2\nu'_0} > \frac{1}{2\nu_0}$, apparaît le phénomène de repliement du spectre qui sera étudié en théorie du signal.

3.7 Introduction à la transformée de Fourier discrète.

Ce concept répond au problème du calcul effectif des coefficients c_n d'une série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$ d'une fonction f . Soit une fonction (ou un signal) f , T -périodique, C^1 par

morceaux, échantillonné aux points $\left(\frac{kT}{N}\right)_{k=0,1,\dots,N-1}$; il s'agit de produire une approximation satisfaisante des coefficients $(c_n)_n$ de la série de Fourier :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} dt \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1).$$

L'approximation discrète d_n la plus simple qui soit de c_n est :

$$(*) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot (\omega_N)^{-nk} = d_n, \text{ où } \omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}} \text{ et } f_k = f\left(\frac{kT}{N}\right)$$

L'équation matricielle équivalente à (*) s'écrit : $W \cdot F = D$ où $F = {}^t(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, $D = {}^t(d_0, d_1, \dots, d_{N-1})$ et

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N^{-1} & \dots & \omega_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{-(N-1)} & \dots & \omega_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

dite matrice de Fourier (W est symétrique et $\frac{1}{\sqrt{N}}W$ est orthogonale : en effet $\frac{1}{\sqrt{N}}W \frac{1}{\sqrt{N}}{}^tW$ est égale à la matrice identité). Démontrer ce résultat.

Vérifions que : $\forall k = 0, \dots, N-1, f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} d_n e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} d_n e^{\frac{2i\pi kn}{N}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-\frac{2i\pi rn}{N}} \right) e^{\frac{2i\pi kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi n \frac{r-k}{N}}}_{\Sigma} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \cdot N \delta_{(r,k)} = f_k. \end{aligned}$$

car $\Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq k \\ N & \text{si } r = k \end{cases}$.

E 14

Démontrer que la matrice de Fourier W est inversible et que son inverse est égale à :

$$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \dots & \omega_N^{(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \omega_N^{(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \overline{W}.$$

La transformation de Fourier discrète associée au vecteur échantillonné $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ le vecteur $(d_0, d_1, \dots, d_{N-1})$ qui constitue une approximation des coefficients de Fourier $(c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$. Il est facile d'établir que l'approximation de c_i par d_i est d'autant meilleure que les (c_n) décroissent rapidement vers 0 quand n croît vers $+\infty$.

Remarque : L'exploitation des propriétés de structure de la matrice W par Cooley et Tukey, a permis de réduire considérablement le nombre d'opérations, additions et multiplications, nécessaires au calcul de la transformée de Fourier discrète et de son inverse : elle aboutit à la transformation de Fourier rapide, algorithmes d'un emploi constant en traitement du signal et dans l'analyse spectrale.

3.8 Un mot sur les ondelettes.

3.8.1 Limitations de l'analyse de Fourier

Bien adaptée aux signaux périodiques ou stationnaires de supports infinis, dont les propriétés statistiques sont invariants par translation, l'analyse de Fourier ne convient pas aux signaux transitoires dont la fréquence dépend localement du temps. En général, il est impossible de déduire les propriétés locales ou temporelles des signaux à partir des seules propriétés spectrales : en effet, on ne peut savoir à quelle partie du signal est associée telle ou telle valeur du spectre. Apparaît donc la nécessité d'une méthode d'analyse des signaux, qui à l'instar

d'une portée musicale permettrait de disposer simultanément de la fréquence et de la durée de chaque note. La première tentative de mise en œuvre d'une telle méthode dite **analyse en temps-fréquence** est due à Gabor (1940).

3.8.2 La transformation de Gabor

Il s'agit d'une transformation de Fourier opérant par analyse des fragments stationnaires d'un signal f :

- On tronque le signal f en un signal $g = f \cdot h$ où h est une fonction positive paire dite "fenêtre" : $\hat{g}(\nu) = \hat{f}(\nu) * \hat{h}(\nu)$; h est par exemple la fonction e^{-x^2} ou la fonction-porte.
- On translate ensuite la fonction h à l'aide d'un paramètre b pour en faire une "fenêtre" glissante $(h(t - b))_{b \in \mathbb{R}}$.

Définition 18 : La transformée de Gabor de f est définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot h(t - b) \cdot e^{-2i\pi\nu t} dt \stackrel{\text{noté}}{=} W_f(\nu, b)$$

$W_f(\nu, b)$ donne une information sur la répartition des fréquences de la fonction f , dans le voisinage du temps b .

Comme pour la transformée de Fourier, on dispose d'un théorème d'inversion de la transformée de Gabor.

Théorème 23 Si la fonction de troncature $h \in L^1 \cap L^2$, et si \hat{h} paire et $\|h\|_2 = 1$ alors :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} W_f(\nu, b) \cdot h(t - b) \cdot e^{2i\pi\nu t} db d\nu$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |W_f(\nu, b)|^2 db d\nu = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \quad (\text{Identité analogue à l'identité de Parseval})$$

Il s'agit maintenant de faire varier la largeur et la hauteur de la fenêtre glissante, en fonction de la partie du signal analysée.

3.8.3 Transformation en ondelettes

Le concept d'ondelette est dû à J. Morlet, ingénieur à ELF, qui l'introduisit en 1984, à des fins d'analyse sismique dans le cadre de la recherche pétrolière. Les ondes mises en œuvre dans les phénomènes sismiques contiennent des informations d'échelles diverses, tout comme les phénomènes de turbulence ; il s'agissait pour Morlet d'analyser des signaux très différents à la fois par leurs amplitudes et leurs fréquences.

Construction d'une famille d'ondelettes :

- (a) On se donne d'abord une ondelette-mère Ψ , de type oscillante et d'intégrale nulle :
Morlet utilisa dans ses travaux : $\Psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5.t)$

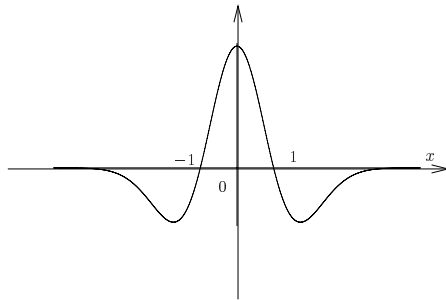


FIG. 3.5 – Graphe de la fonction $\Psi(x)$ "Chapeau mexicain".

(b) Puis on construit la famille : $\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ où b parcourt \mathbb{R} et a parcourt \mathbb{R}^{+*}

Chaque ondelette $\Psi_{a,b}$ permet de faire un "zoom" autour du point b , d'autant plus précis que a est petit, en effet la concentration de $\Psi_{a,b}$ est d'autant plus grande en b , que a converge vers 0.

On retrouve un théorème d'inversion permettant de reconstituer la fonction f à partir des ondelettes $\Psi_{a,b}$ et les coefficients d'ondelettes $c_f(a,b)$ qui jouent le rôle de coefficients de Fourier associés aux $\Psi_{a,b}$:

Théorème 24

Soit Ψ une ondelette mère $\in L^1 \cap L^2$ telle que $\|\Psi\|_2 = 1$, $\int \Psi(x) dx = 0$ et $\int \frac{|\hat{\Psi}(\nu)|^2}{|\nu|} d\nu = K$ fini

$$\text{alors : } f(t) = \frac{1}{K} \int \int c_f(a,b) \Psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

où $c_f(a,b)$ est le coefficient d'ondelette :

$$c_f(a,b) = \int f(t) \Psi_{a,b}(t) dt = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle .$$

Identité de Parseval des ondelettes : $\int |f(t)|^2 dt = \frac{1}{K} \int \int |c_f(a,b)|^2 \frac{da db}{a^2} .$

En pratique, on utilise les dérivées de gaussiennes d'ordre 2 :

$$\Psi(x) = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{3}}(1-x^2).e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

La famille $(\Psi_{a,b})_{a,b}$ étant manifestement redondante lorsque (a,b) parcourt $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a construit des bases orthonormées d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, plus adaptées au traitement numérique.

A propos d'un couple privilégiée : mathématique et physique.

Les mathématiques se cantonnèrent longtemps à la géométrie et à l'arithmétique, leur domaine natif hérité de la Grèce antique. La science des idées mathématiques, objets de recherche et de contemplation dans l'oeuvre de Platon, allait devenir au siècle de Descartes, la science opératoire et transformatrice qui devait, pour reprendre ses propres termes, participer à l'entreprise de maîtrise et de possession du monde. Rappelons que Galilée (1564-1642), fondateur de la physique moderne (expérimentale et mathématisée), concevait les mathématiques comme "étant le seul langage capable d'exprimer les lois de la nature". Depuis ces temps fondateurs, science mathématique et science physique se sont souvent enrichies dans un rapport réciproque d'inter-constitutivité, au sens où l'une ne peut se passer de l'autre au cours de son propre développement. L'oeuvre de Fourier concernant la définition des séries et de la transformation du même nom, dans le but de résoudre l'équation de la chaleur, illustre bien ce rapport de féconde réciprocity, qui traverse aussi d'autres moments forts de l'histoire de ces sciences. Les couples, calcul infinitésimal / mécanique, géométrie de Riemann / théorie de la relativité générale, en sont autant d'illustrations parmi d'autres.

Or, une théorie mathématique, par sa structure logique même, contient en son sein tout ce qui lui est nécessaire à la production des énoncés vrais (ou théorèmes), sans devoir faire appel à une procédure de validation externe. Le mathématicien a une activité théorique, apparemment autonome, et seule créatrice de son propre sol. Alain Connes, l'un des grands mathématiciens contemporains, prétend même que "la réalité mathématique a une cohérence, inexplicée et indépendante de notre système de raisonnement".

Au contraire, au cours de sa construction, une théorie physique s'enrichit du va-et-vient permanent, entre l'émission d'hypothèses explicatives d'un phénomène donné, et leur validation expérimentale. Dès lors, se posent les questions centrales et toujours ouvertes :

Qu'est-ce qui fonde et rend possible cette adéquation, souvent anticipative de la mathématique à la physique ?

Qu'est-ce qui confère aux mathématiques, leur "déraisonnable efficacité sur le monde" pour reprendre la suggestive expression de H Weyl ?

Sur les questions et problèmes évoqués ici, le lecteur pourra consulter les livres suivants :
 -Science et méthode. H. Poincaré ; Seuil.
 -La nature de la physique. Feynman ; Seuil.
 Sans oublier les textes des grands fondateurs (Galilée, Newton, Euler, Fourier, Laplace, Gauss, ?) dont le lecteur tire toujours profit.

3.9 Thème d'étude : résolution de l'équation de la chaleur

Objectif : Etude de l'évolution de la température à l'intérieur d'une tige isolée rectiligne, homogène, de section très petite par rapport à la longueur, placée dans un milieu ayant des caractéristiques isotropes.

On note $u(x, t)$ la température de la tige en l'abscisse x au temps t . L'équation aux dérivées partielles associée à ce modèle unidimensionnel est l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a^2 est une constante égale à $\frac{\lambda}{\rho c}$ où λ est la conductivité de la tige, ρ sa masse volumique et c sa chaleur spécifique.

Nous résoudrons ce problème dans le cas où la température est soumise à la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$, où φ est une fonction bornée et intégrable sur \mathbb{R} .

1. Cas d'une tige infinie

Hypothèses : u est une fonction de classe C^2 par rapport à x , et de classe C^1 par rapport à t .

1.1 Appliquer la transformée de Fourier par rapport à x , aux deux membres de l'équation de la chaleur, et en déduire une équation différentielle vérifiée par $\hat{u}(\nu, t)$. La résoudre.

1.2 Exprimer $u(x, t)$ sous forme d'un produit de convolution (Résultat dû au mathématicien Siméon Poisson (1781 - 1840)).

1.3 Au temps $t = 0$, une impulsion thermique est reçue par la tige au voisinage de l'origine :

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \Pi_\varepsilon(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer et interpréter $u(x, t)$.

Rendre compte de l'évolution de la répartition des températures en dessinant les graphes de la fonction $x \rightarrow u(x, t)$ pour $t = 1, 2, 4, 8$ (on choisit $a = 1$).

2. Cas d'une tige finie de longueur l paramétrée par le segment $[0, l]$.

Hypothèse : la température aux extrémités est maintenue à zéro : $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

2.1 Recherche d'une solution par la méthode de séparation des variables.

Posons : $u(x, t) = X(x)T(t)$. En déduire deux équations différentielles indépendantes.

Résoudre l'équation en $X(x)$. Quelle est la solution acceptable ?

Résoudre l'équation en $T(t)$. Démontrer que, dans ce cas, l'énergie $E(t)$ est égale à $\int_0^l \frac{1}{2} u^2(x, t) dx$, et est décroissante par rapport au temps.

2.2 Reprenons la condition initiale : $\varphi(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon) & \text{si } |x - l/2| < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exprimer $u(x, t)$ sous forme de série de Fourier. Vérifier qu'il s'agit bien de la solution.

3.10 Corrigés des exercices

E1

On a : $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\cos \varphi_n = \frac{a_n}{r_n}$ et $\sin \varphi_n = \frac{b_n}{r_n}$, d'où :

$$r_n \left(\cos \varphi_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + \sin \varphi_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right) = r_n \cos \left(\frac{2\pi n x}{T} - \varphi_n \right)$$

E2

(1) f est considérée comme troncature d'une fonction impaire :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \stackrel{(L=2)}{=} -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi = -\frac{4}{n\pi} (-1)^n = \frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

d'où :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi n x}{2}$$

f est considérée comme troncature d'une fonction paire :

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1), \quad a_0 = 2$$

d'où :

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \dots \right)$$

On pourrait vérifier que pour $x \in [0, 2[$, les valeurs des deux séries coïncident.

On remarque que $2 \int_0^x f(u) du = x^2$. Par intégration des séries ci-dessus, on en déduit la série de Fourier associée à la fonction $x^2 \mathbf{1}_{[0,2]}(x)$:

$$x^2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \dots \right)$$

(2) g est paire donc $b_n = 0$ pour tout entier n . De plus :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\alpha - n)x + \cos(\alpha + n)x) dx = \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi) \cos(n\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

d'où : $\cos(\alpha x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \cos x + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} \cos 2x - \dots \right)$

E3**Théorème de Dirichlet - Jordan**

$$(1) S_N(f)(x) = \int_0^1 f(x-t) \left[\sum_{n=-N}^N e^{2i\pi nt} \right] dt = \int_0^1 f(x-t) D_N(t) dt, \\ \text{donc : } S_N(f) = D_N * f.$$

(2)

$$\begin{aligned} D_N(t) &= e^{-2i\pi Nt} \frac{e^{2i\pi(2N+1)t} - 1}{e^{2i\pi t} - 1} \quad (\text{progression géométrique}) \\ &= \frac{e^{i\pi(2N+1)t} - e^{-i\pi(2N+1)t}}{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}} \\ &= \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} \end{aligned}$$

(2) Soit $]t_i, t_{i+1}[$ un intervalle où f est de classe \mathcal{C}^1 . Alors, par intégration par parties :

$$\int_{]t_i, t_{i+1}[} f(s) \sin n\pi s ds = \frac{\cos n\pi t_i}{n\pi} f(t_i) - \frac{\cos n\pi t_{i+1}}{n\pi} f(t_{i+1}) + \int_{]t_i, t_{i+1}[} f'(s) \frac{\cos n\pi s}{n\pi} ds$$

Comme f et f' sont continues sur $]t_i, t_{i+1}[$ et prolongeables par continuité en t_i et t_{i+1} , f et f' sont bornées sur l'intervalle $[0, 1]$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{]t_i, t_{i+1}[} f(s) \sin n\pi s ds \right| = 0$$

et donc en sommant : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(s) \sin n\pi s ds = 0$.(3) On veut démontrer que $\forall \varepsilon, \exists \eta$ tel que :

$$\eta_1 \leq \eta \implies \int_0^{\eta_1} [f(x-t) - f(x^-)] D_N(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On a :

$$\int_0^{\eta_1} \left\{ \frac{[f(x-t) - f(x^-)]}{t} \right\} t D_N(t) dt = \int_0^{\eta_1} \left\{ \frac{[f(x-t) - f(x^-)]}{t} \right\} \sin[(2N+1)\pi t] \left[\frac{t}{\sin \pi t} \right] dt$$

On remarque que :

- $\frac{1}{\sin \pi t} \leq \frac{1}{2}$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ car en raison de la connexité de la fonction sinus, on a $\sin \pi t \geq 2t$, $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$;
- $|\sin(2N+1)\pi t| \leq 1$;
- $\left| \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} \right| \leq \|f'\|_\infty$ (existe par définition de f').

En multipliant, on obtient ce qu'on veut démontrer à condition de prendre $\eta \leq \frac{\varepsilon}{\|f'\|_\infty}$. De même, on obtient :

$$\forall \varepsilon, \exists \eta \text{ tel que } \eta_1 \leq \eta \implies \int_0^{\eta_1} [f(x+t) - f(x^+)] D_N(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où en ajoutant les deux intégrales :

$$\int_0^{\eta_1} [f(x+t) - f(x^+)] D_N(t) dt + \int_{-\eta_1}^0 [f(x+t) - f(x^-)] D_N(t) dt \leq \varepsilon$$

et en utilisant la parité de la fonction D_N :

$$\int_{-\eta_1}^{\eta_1} [f(x+t) - l] D_N(t) dt \leq \varepsilon$$

(4) Soit Γ le complémentaire de l'intervalle $[-\eta, \eta]$ dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Alors comme $\int_0^1 D_N(t) dt = 1$, on a :

$$|(S_N f)(x) - l| \leq \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x-t) - l] \left(\frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} \right) dt \right|$$

$$\begin{aligned} |S_N(f)(x) - l| &= \left| \int_{-\eta}^{\eta} [f(x-t) - l] \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt + \int_{\Gamma} [f(x-t) - l] \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt \right| \\ &\leq \left| \int_{-\eta}^{\eta} [f(x-t) - l] \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt \right| + \left| \int_{\Gamma} [f(x-t) - l] \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt \right| \\ &\leq \varepsilon + \left| \int_{\Gamma} [f(x-t) - l] \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt \right| \end{aligned}$$

En posant $g(t) = \frac{f(x+t) - l}{\sin \pi t}$, le lemme de Riemann-Lebesgue permet d'affirmer que :

$$I_N = \int_{\Gamma} g(t) \sin(2N+1)\pi t dt$$

tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ ($\sin \pi t$ ne s'annulant pas sur Γ).

Donc : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_0, |I_N| \leq \varepsilon$;

d'où : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_0, |S_N f(x) - l| \leq 2\varepsilon$.

Ce qui montre que $S_N f(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} l$.

E4

(1) En posant : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4 \sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}$, il vient :

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x} .$$

On a donc : $S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nu}{\sin u} du$.

(2) $\forall n$, $S_n(x)$ atteint son premier maximum en $x^* = \frac{\pi}{2n}$ et l'on a :

$$S_n(x^*) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nu}{\sin u} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2n \sin\left(\frac{t}{2n}\right)} dt .$$

Il suffit d'appliquer le Théorème de convergence dominée à la suite $\left(\frac{\sin t}{2n \sin\left(\frac{t}{2n}\right)} \right)_n$ pour calculer la limite de $S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Elle est égale à $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \simeq 1,18$. Au voisinage de 0, S_n converge donc vers 1,18 quand $n \rightarrow +\infty$, dépassant la valeur de $g(0) = 1$: il s'agit là du phénomène de Gibbs.

E5

(1) $(f * g)(x + 2\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + 2\pi - u) \cdot g(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - u)g(u) du$. $f * g$ est 2π -périodique. Il suffit de montrer que $\int_0^{2\pi} |f * g(x)| dx < +\infty$. Or :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |(f * g)(x)| dx &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x - u)| \cdot |g(u)| du dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x - u)| dx \right) \cdot |g(u)| du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-u}^{2\pi-u} |f(v)| dv \right) \cdot |g(u)| du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(v)| dv \cdot \int_0^{2\pi} |g(u)| du \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} (f * g)(x) dx \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left(\int_0^{2\pi} f(x-u)g(u)du \right) dx \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} g(u) \left(\int_0^{2\pi} f(x-u)e^{-inx} dx \right) du; \text{ posons } v = x - u \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} g(u)e^{-inu} \left(\int_0^{2\pi} f(v)e^{-inv} dv \right) du \\
 &= c_n(f) c_n(g)
 \end{aligned}$$

E6

Si f est paire, alors : $\widehat{f}(\nu) = \int_0^{+\infty} f(t) (e^{2i\pi\nu t} + e^{-2i\pi\nu t}) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt$. Le raisonnement est analogue si f est impaire.

E8

(1) $f_T(t) = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) e^{2i\pi tx} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xs} f(s) ds\right) dx$ grâce au Théorème de Fubini, applicable car $\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) |f(s)| ds dx = T \int_{\mathbb{R}} |f(s)| ds$ fini.

On parvient à $f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\sin \pi Ts)^2}{\pi^2 T s^2} f(t-s) ds$.

(2) $\int_0^{+\infty} \sin^2(u) \cdot d\left(\frac{-1}{u}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

(3) D'après (1) : $f_T(t) - \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} g_T(u, t) du$,

où $g_T(u, t) = \frac{\sin^2 u}{u^2} \left(f\left(t + \frac{u}{\pi T}\right) + f\left(t - \frac{u}{\pi T}\right) - f(t^+) - f(t^-)\right)$.

Ainsi : $\lim_{T \rightarrow +\infty} g_T(u) = 0$ et $\forall T > 0, \forall u \geq 0, |g_T(u)| \leq 4M \frac{\sin^2 u}{u^2}$ où $M = \sup_x |f(x)|$. On conclut en appliquant le théorème de convergence dominée.

E9

$$f'(x) = -2\pi x \cdot f(x) \Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}(f')}_{\text{existe car } t.f(t) \in L^1} = -2\pi \mathcal{F}(t \cdot f) \Leftrightarrow 2i\pi\nu \widehat{f}(\nu) = \frac{-2\pi}{2i\pi} (\widehat{f}(\nu))' .$$

On obtient l'équation différentielle : $\frac{d\widehat{f}}{d\nu}(\nu) + 2\pi\nu \widehat{f}(\nu) = 0$, dont la solution générale s'écrit : $\widehat{f}(\nu) = K e^{-\pi\nu^2}$.

Sachant que : $K = \widehat{f}(0) = \int e^{-\pi t^2} dt = 1$, on en déduit donc que : $\mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$. La fonction $e^{-\pi t^2}$ est donc une fonction propre de l'opérateur \mathcal{F} , associée à la valeur propre 1.

E10

Posons $g_a(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$ et $g_b(t) = \frac{1}{t^2+b^2}$.

(1) Comme, $f * g_a = g_b$, on a : $\widehat{f} \cdot \widehat{g}_a = \widehat{g}_b$.

Calculons \widehat{g}_a . On sait que (cf. Table des transformées de Fourier) : $\widehat{\frac{1}{1+t^2}}(\nu) = e^{-2\pi|\nu|}$, d'où : $\widehat{\frac{1}{a^2(1+t^2)}}(\nu) = \frac{\pi}{a^2} e^{-2\pi|\nu|}$ et $\widehat{\frac{1}{a^2(1+(\frac{t}{a})^2)}}(\nu) = a \cdot \frac{\pi}{a^2} e^{-2\pi|a\nu|} = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi|a\nu|}$.

(2) On a donc : $\widehat{f} = \frac{\widehat{g}_b}{\widehat{g}_a} = \frac{\pi}{b} \cdot \frac{e^{-2\pi|b\nu|}}{e^{-2\pi|a\nu|}} \cdot \frac{a}{\pi} = \frac{a}{b} e^{-2\pi|(b-a)\cdot\nu|}$. On procède par transformées inverses successives :

$$\frac{a}{b} e^{-2\pi|(b-a)\cdot\nu|} \rightarrow \frac{1}{\pi \left(1 + \left(\frac{t}{b-a}\right)^2\right)} \times \frac{1}{b-a} \times \frac{a}{b} \text{ d'où } f(t) = \frac{a}{b} (b-a) \frac{1}{\pi ((b-a)^2 + t^2)} .$$

E11

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\nu_1, \nu_2) &= \iint f(x, y) e^{-2i\pi(\nu_1 x + \nu_2 y)} dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi(r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2i\pi r(\nu_1 \cos \theta + \nu_2 \sin \theta)} d\theta \right) dr \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi(r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2i\pi \rho r \cos(\theta-\beta)} d\theta \right) dr \text{ avec } \begin{matrix} \nu_1 = \rho \cos \beta \\ \nu_2 = \rho \sin \beta \end{matrix} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\widehat{f}(\nu_1, \nu_2)$ est radiale, égale à $2\pi \int_0^{+\infty} r J_0(2\pi \rho r) \Phi(r) dr$ où $J_0(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0, égale à $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ix \cos \theta) d\theta$, et $\Phi(r)$ l'expression radiale de $f(x, y)$.

E12

(1) On a : $r = (d^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{1/2} \simeq d + \frac{x_1 - x_2}{2d} + \frac{y_1 - y_2}{2d}$. On en déduit que :

$$e^{-ik \frac{x_1^2 + y_1^2}{2d}} e^{ikr} \simeq e^{ikd} e^{ik \frac{x_2^2 + y_2^2}{2d}} e^{-ik \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{d}} .$$

et le résultat.

(2.1)

$$\widehat{f} \left(\frac{x_2}{\lambda d}, \frac{y_2}{\lambda d} \right) = a \frac{\sin(\pi x_2 a / \lambda d)}{\pi x_2 a / \lambda d} b \frac{\sin(\pi y_2 b / \lambda d)}{\pi y_2 b / \lambda d} = a b \operatorname{sc} \left(\frac{\pi x_2 a}{\lambda d} \right) \operatorname{sc} \left(\frac{\pi y_2 b}{\lambda d} \right) .$$

On en déduit :

$$I(x_2, y_2) = a^2 b^2 \operatorname{sc}^2 \left(\frac{\pi x_2 a}{\lambda d} \right) \operatorname{sc}^2 \left(\frac{\pi y_2 b}{\lambda d} \right) .$$

Dans le cas d'un changement d'échelle, on sait que $f(\alpha x_1, \alpha y_1)$ a pour transformée $\frac{1}{\alpha^2} \hat{f} \left(\frac{x_2}{\alpha}, \frac{y_2}{\alpha} \right)$. On en déduit l'expression de l'intensité :

$$I_\alpha(x_2, y_2) = \frac{a^2 b^2}{\alpha^4} \operatorname{sc}^2 \left(\frac{\pi x_2 a}{\lambda d \alpha} \right) \operatorname{sc}^2 \left(\frac{\pi y_2 b}{\lambda d \alpha} \right) .$$

Si α est supérieur à 1, cas où la surface S diminue, la figure de diffraction se dilate, ce qui est une conclusion physique attendue.

$$(2.2) \quad I(x_2, y_2) = 4 \varepsilon^2 b^2 \operatorname{sc}^2 \left(\frac{\pi x_2 \varepsilon}{\lambda d} \right) \cos^2 \left(\frac{2 \pi x_2 c}{\lambda d} \right) \operatorname{sc}^2 \left(\frac{\pi y_2 b}{\lambda d} \right) .$$

(2.3) $A(x_2, y_2) = \frac{\lambda d}{\pi R \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda d} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \right)$ où J_1 est la fonction de Bessel d'ordre 1. Si on pose : $r^2 = x_2^2 + y_2^2$, $A(r) = \frac{\lambda d}{\pi R r} J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda d} r \right)$ et $I(r) = A^2(r)$. On obtient une surface, dite tache d'Airy.

E13

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\left| \int \Phi_1 \Phi_2 dt \right|^2 \leq \|\Phi_1\|_2^2 \|\Phi_2\|_2^2$.

Par ailleurs, on a : $\int \Phi_1 \Phi_2 dt = \int t f(t) \frac{df}{dt} dt = \left[\frac{1}{2} t |f(t)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int |f(t)|^2 dt$.

Comme $t^2 |f(t)|^2$ est intégrable, on en déduit que $t |f(t)|^2$ converge vers 0 si $t \rightarrow +\infty$. D'où il vient : $\int \Phi_1 \Phi_2 dt = -\frac{1}{2} \|f\|_2^2$. D'autre part : $\|\Phi_2\|_2^2 = 4\pi^2 \int \nu^2 |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$.

(*) est équivalent à : $\frac{E^2}{4} \leq \int t^2 |f(t)|^2 dt \cdot 4\pi^2 \int \nu^2 |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu \Leftrightarrow \Delta t \cdot \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité si $\Phi_1 = a\Phi_2$, c'est-à-dire $t f = a f'$, soit $f(t) = c \exp \left(\frac{t^2}{2a} \right)$, avec $a < 0$ car $f \in L^2$.

Equation de la chaleur

(1.1) Posons $u_t(x) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_t(\xi) \quad (\text{Théorème de Lebesgue}) \\ -\xi^2 u(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-ix\xi} dx \end{aligned}$$

D'où l'équation différentielle : $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + 4\pi^2 \xi^2 a^2 \hat{u} = 0$ avec : $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi)$. La solution s'écrit : $\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 a^2 t}$.

(1.2) Rappelons que l'on a : $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right)(\xi) = e^{-4\pi^2 \xi^2 a^2 t}$. On a donc :

$$\hat{u}(x, t) = \mathcal{F}\left(\varphi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right).$$

D'où :

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} ds = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\varphi_x * e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right).$$

(1.3) $u(x, t) = \frac{1}{2\varepsilon 2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} ds \approx \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$, est la solution fondamentale de l'E.D.P, c'est-à-dire la réponse du système "tige infinie" à l'impulsion thermique au temps $t = 0$, au point d'abscisse 0. Cette solution fondamentale est une densité gaussienne de moyenne 0 et de variance $2a^2t$, représentant la densité de la chaleur en fonction du temps.

(2.1) $T'(t).X(x) = a^2 T(t).X''(x)$, d'où : $\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, soit encore :

$$T'(t) = -\lambda a^2 T(t) \quad \text{et} \quad X''(x) = -\lambda X(x).$$

Commençons par résoudre : $X''(x) = -\lambda X(x)$ avec $X(0) = 0 = X(\ell)$.

- Si $\lambda \leq 0$, on parvient à la solution $X = 0$

- Si $\lambda > 0$: $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$

d'où $\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} \ell + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0 \end{cases}$ qui admet des solutions non triviales si :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda} \ell & \sin \sqrt{\lambda} \ell \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda} \ell) = 0$$

$$\text{Soit : } \lambda = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

On a des solutions particulières $x_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ avec $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ $n \in \mathbb{N}^*$

Les solutions de $T'(t) = -a^2 \lambda T(t)$ sont : $a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}$

(2.2) La solution générale s'écrit : $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$.

Or $\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \Rightarrow a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(x) \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n = 1 + 4p \text{ où } p \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si } n = 3 + 4p \text{ où } p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Étudions la convergence de la série $u(x, t)$.

Comme $\varphi \in C^2$ et $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, la série $u(x, 0)$ converge absolument et uniformément par rapport à x vers $\varphi(x)$.

Comme $0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{t}\right)^2 t} \leq 1$ pour tout t positif ou nul, la série $u(x, t)$ converge absolument et uniformément par rapport à t . Donc $u(x, t)$ est continue dans son domaine de définition.

Chapitre 4

Distributions

La théorie des distributions est due au mathématicien français Laurent Schwartz dans les années 1945-1950. Le concept de distribution, nouveau par rapport à celui de fonction mais le prolongeant, permet de modéliser les états statiques ou dynamiques ayant de très fortes discontinuités, comme par exemple les signaux impulsionnels. Cette théorie, qui répondait à une exigence concrète des sciences physiques, permet d'unifier l'étude des phénomènes ponctuels et continus ainsi que les équations qui des modélisent. L'exposé qui suit n'est qu'une modeste introduction à la théorie des distributions, orientée vers ses applications à la théorie et au traitement du signal.

4.1 Une approche physicienne

Autour des années 1920 s'est posé le problème de la modélisation mathématique des impulsions d'origine mécanique ou électrique. Paul Dirac (1902-1984) qui fut l'un des grands physiciens du siècle dernier, eut l'audace, au grand dam des mathématiciens de son temps, d'utiliser en 1926 dans le cadre de ses travaux de physique quantique, une pseudo-fonction déjà introduite par Heaviside dans son calcul symbolique et qui est encore utilisée de nos jours par les ingénieurs et les physiciens, sous le nom de fonction de Dirac.

Elle est définie par :

$$\delta_{x_0}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et supposée vérifier : pour toute fonction ϕ continue en $\{x_0\}$, $\int_{\mathbb{R}} \delta_{x_0}(x)\phi(x) dx = \phi(x_0)$ (*).

L'objet mathématique δ_{x_0} n'est pas une application, mais il peut être considéré comme la limite d'une suite de fonctions en un sens (non encore connu du lecteur), qui annonce la notion de distribution.

Considérons en effet, une unité approchée $(f_n)_{n \geq 0}$; par exemple la suite de fonctions gaussiennes $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}$. Pour toute fonction ϕ bornée et continue en 0, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \cdot \phi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(0).$$

Dans cette première approche, $(f_n)_n$ converge vers δ_0 au sens de la convergence précédente.

Il s'agissait donc pour les mathématiciens, de créer un espace fonctionnel susceptible de modéliser rigoureusement les distributions quelconques de matière, d'électricité, etc, utilisées par les physiciens, y compris les plus discontinues qui soient, à l'aide de "pseudo-fonctions" infiniment dérivables en tout point !

Ces pseudo-fonctions ne sont pas des applications au sens habituel : ce sont des opérateurs définis sur des espaces fonctionnels. Une analogie avec les espaces euclidiens classiques devrait en faciliter l'approche intuitive : de même qu'un vecteur v d'un espace euclidien E est entièrement déterminé si sont connues ses projections $(v|u_i)_i$ sur un ensemble suffisamment riche de vecteurs (cf. Espaces de Hilbert), une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} peut être déterminée par les intégrales $\int f(x) \cdot \phi(x) dx$ lorsque ϕ parcourt un sous-espace fonctionnel adéquat.

Il en est ainsi lorsque f est une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et lorsque ϕ parcourt l'ensemble des fonctions continues à support compact noté $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

Considérons l'opérateur T_f associé à f , défini sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ muni de sa norme naturelle $\|\cdot\|_\infty$:
 $T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)dx$.

Reste à prendre en compte l'exigence de dérivabilité. Déterminons $T_{f'}(\phi)$:

$$T_{f'}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx = \underbrace{[f(x) \cdot \phi(x)]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx = -T_f(\phi').$$

En conséquence, l'existence de $T_{f^{(n)}}$, exigée pour tout $n \in \mathbb{N}$, entraîne l'infinie dérivabilité des fonctions ϕ , d'où leur caractérisation par la définition suivante :

Définition 1 : On désigne par $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions ϕ (dites fonctions-tests), infiniment dérivables et à support compact.

Théorème 1 L'opérateur T_f , lorsque f appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, définit une classe de distributions dites régulières, définies par :

$$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(x) dx \quad .$$

4.2 L'espace des distributions \mathcal{D}'

On doit définir sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ une topologie telle que si $(\phi_n)_n$ converge uniformément vers ϕ , alors toutes les suites dérivées $(\phi_n^{(p)})_n$ convergent uniformément vers $\phi^{(p)}$. Aucune norme ne permet de construire une telle convergence. Seule une famille de semi-normes, dont la construction outrepassse le propos de cet ouvrage, induit cette topologie.

Définition 2 : (Convergence des suites dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) Une suite $(\phi_n)_n$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ si les supports de toutes les fonctions ϕ_n et de leurs dérivées sont contenus dans un même compact K , et si

$$\forall p \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |\phi_n^{(p)}(x) - \phi^{(p)}(x)| = 0.$$

Il s'agit donc de la convergence uniforme de la suite $(\phi_n)_n$ et de ses dérivées sur un compact incluant tous les supports de ϕ_n et de leurs dérivées.

Définition 3 : Pour toute fonction-test ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, le **support de ϕ** est le plus petit fermé en dehors duquel ϕ est nulle :

$$\text{support}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, \phi(x) \neq 0\}}$$

Définition 4 : Si Ω est un ouvert de \mathbb{R} , $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans Ω .

Définition 5 :

Une distribution T est une forme linéaire, continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), T(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha T(\phi_1) + \beta T(\phi_2)$

Continuité : Si ϕ_n converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $T(\phi_n)$ converge vers $T(\phi)$ dans \mathbb{R} , quand n tend vers $+\infty$.

Notation : La valeur de T en ϕ sera notée $\langle T, \phi \rangle$ s'il n'y a aucune confusion avec la notation du produit scalaire.

Définition 6 : L'ensemble des distributions définies sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, est donc le dual topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T, \phi \rangle \in \mathbb{R}.$$

E 1 Démontrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas vide, en considérant $\phi(x) = \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) \mathbf{1}_{]-1,+1[}(x)$.

Tracer son graphe, et en déduire par translation et dilatation de la variable x , l'existence d'une famille infinie de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Remarque : $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 2 (Distribution de Dirac) La fonctionnelle $T : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \phi(x_0) \in \mathbb{R}$, où x_0 est un réel donné, définit une distribution dite distribution de Dirac, notée δ_{x_0} :

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0).$$

E 2 (a) Vérifier que δ_{x_0} et T_f définissent bien des distributions.

(b) Les expressions suivantes sont-elles des distributions ?

$$T_1(\phi) = \int_a^b \phi(t) dt; \quad T_2(\phi) = \int_a^b |\phi(t)| dt; \quad T_3(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{(n)}(0);$$

$$T_4(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{(n)}(n); \quad T_5(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) d\mu(x), \text{ où } \mu \text{ mesure positive.}$$

Définition 7 : $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est muni de la convergence simple définie par :

Une suite $(T_n)_n$ converge vers T , si et seulement si, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), T_n(\phi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(\phi)$.

On a un résultat équivalent pour une famille de distributions (T_{u_n}) où $(u_n)_n$ est une suite de \mathbb{R} , convergente vers u :

(T_{u_n}) converge vers T_u si et seulement si, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), T_{u_n}(\phi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_u(\phi)$.

Théorème 3 (1) Si la suite des fonctions $(f_n)_n$ appartenant à L^1_{loc} converge uniformément vers f sur tout intervalle borné, alors $T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T_f$.

(2) Si $(f_n)_n$ converge vers f dans L^1 , alors T_{f_n} converge vers T_f dans \mathcal{D}' .

E 3 Calculer la limite dans \mathcal{D}' de $g_n(x) = \cos(nx)$.

Définition 8 : Le support d'une distribution T est le fermé égal au complémentaire du plus grand ouvert \mathcal{O} dans lequel T est nulle ; autrement dit, \mathcal{O} est tel que, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), T(\phi) = 0$.

Exemple 1 :

- (1) Le support de δ_{x_0} est $\{x_0\}$.
- (2) Support $(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{a_i}) = \{a_1, \dots, a_n\}$.
- (3) Support $(T_f) = \text{Support de } f \text{ si } f \text{ est } L^1_{loc}$.

La convergence annoncée en début de chapitre peut être maintenant démontrée :

E 4 Prouver qu'une unité approchée converge au sens des distributions vers δ_0 .

Ceci justifie la représentation de δ_0 adoptée par les physiciens, sous la forme d'une impulsion de support $\{0\}$ et d'ordonnée $+\infty$.

Théorème 4 (de localisation)

Deux fonctions f et g , localement intégrables sont égales (p.p) si et seulement si, $T_f(\phi) = T_g(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Les distributions non régulières sont dites **singulières** : les distributions de Dirac et leurs combinaisons linéaires sont singulières, mais ce ne sont pas les seules.

Il est possible de trouver une suite de distributions régulières convergente vers δ_0 (Cf Exercice 4) ; inversement, certaines fonctions à support compact apparaissent comme des limites de combinaisons linéaires de distributions de Dirac, confortant l'intuition que nous avons tous, qu'une distribution physique continue de masse ou de charge électrique, est bien l'idéalisation mathématique d'une distribution discrète très dense.

Etayons cette intuition : soit f une fonction réelle continue par morceaux définie sur $[0, 1]$: considérons la distribution $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \delta_{\frac{i}{n}}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle T_n, \phi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \phi\left(\frac{i}{n}\right)$$

qui converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers l'intégrale de Riemann $\int_0^1 f(x) \cdot \phi(x) dx = \langle T_f, \phi \rangle$.

En conclusion $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T_f$ quand $n \rightarrow +\infty$, et T_n est bien l'approximation discrète de f .

On notera les relations d'inclusion : $\mathcal{D} \subset L^p \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$, ainsi que le résultat de densité : $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}'$.

Intermède biographique : Laurent Schwartz (1915-2002)

Naissance à Paris, où il fit ses études, qui le conduisirent à l'Ecole Normale Supérieure. Il se spécialisa rapidement en analyse fonctionnelle ; dès 1945 il élabora la théorie des distributions, annoncée dans les travaux précurseurs de Bochner et de Sobolev.

Cadre naturel de la théorie des équations aux dérivées partielles, la théorie des distributions lui permit d'aborder avec succès la modélisation et la résolution de nombreux problèmes de physique théorique.

Lauréat de la Médaille Fields en 1950, Laurent Schwartz ne fut pas seulement un des grands mathématiciens du siècle, ce fut aussi un humaniste critique qui a consacré beaucoup d'énergie et de talent à lutter pour la défense des droits de l'homme partout où ils étaient bafoués.

4.3 Dérivation des distributions

Le théorème ci-dessous définit la dérivé d'ordre quelconque d'une distribution.

Théorème 5 *Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la distribution dérivée T' de T existe toujours et est définie par*

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle.$$

Conséquence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle T^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \cdot \langle T, \phi^{(n)} \rangle.$$

Preuve

(1) $\phi' \in \mathcal{D} \Rightarrow \langle T, \phi' \rangle$ existe.

(2)

$$\begin{aligned}
 \langle T', \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \rangle &= -\langle T, \lambda_1 \phi_1' + \lambda_2 \phi_2' \rangle \\
 &= -\langle T, \lambda_1 \phi_1' \rangle - \langle T, \lambda_2 \phi_2' \rangle \\
 &= \langle T', \lambda_1 \phi_1 \rangle + \langle T', \lambda_2 \phi_2 \rangle \\
 &= \lambda_1 \langle T', \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T', \phi_2 \rangle
 \end{aligned}$$

(3) Si $(\phi_n)_n$ converge vers la fonction nulle dans \mathcal{D} , alors $(\phi_n')_n$ converge aussi vers la fonction nulle ; donc $\langle T', \phi_n \rangle = -\langle T, \phi_n' \rangle$ converge vers 0, dans \mathbb{R} . \square

Remarque : On aurait pu construire progressivement la dérivée d'une distribution régulière T_f , en considérant d'abord une fonction f de $C^1(\mathbb{R})$, puis de $L^1(\mathbb{R})$ et enfin de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Théorème 6 La dérivée de la distribution de Heaviside, définie par $H_{x_0}(x) = \mathbf{1}_{[x_0, +\infty[}(x)$ est égale à la distribution de Dirac δ_{x_0} .

E 5 Prouver rapidement ce théorème.

Théorème 7 La limite de la suite des dérivées $(T_n)_n$ d'une suite de distributions $(T_n)_n$ convergente vers T , est égale à T' :

$$\left(T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} T \right) \Rightarrow \left(T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} T' \right).$$

Définition 9 : La **translatée** $\tau_a(T)$ d'une distribution T est définie par :

$$\langle \tau_a(T), \phi \rangle = \langle T, \tau_{-a}(\phi) \rangle = \langle T, \phi(x+a) \rangle$$

E 6 Déterminer les limites quand $n \rightarrow +\infty$ des suites définies par :

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{n}{2}(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{-1}{n}}) \\
 V_n &= 4n^2(\delta_{\frac{1}{2n}} - 2\delta_0 + \delta_{\frac{-1}{2n}})
 \end{aligned}$$

E 7 Calculer $\delta_0^{(k)}$.

Construction d'une distribution singulière qui n'est pas une combinaison linéaire de distributions de Dirac ou de ses dérivées

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable dans un voisinage de 0, mais on sait lui associer une distribution. En effet, la primitive au sens des fonctions $\ln|x|$ de $f(x) = \frac{1}{x}$ est de classe L^1_{loc} . Elle définit donc une distribution dont la dérivée existe nécessairement, laquelle s'exprime sous forme d'une distribution, dont la construction est proposée dans l'exercice suivant.

E 8 Etude de la distribution valeur principale de $\left(\frac{1}{x}\right)$ (notée $v.p\left(\frac{1}{x}\right)$).

La distribution $v.p\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie par :

$$\langle v.p\left(\frac{1}{x}\right), \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right)$$

- (1) Vérifier que $v.p\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution.
- (2) Montrer qu'elle est égale à la dérivée dans \mathcal{D}' de $\ln|x|$.
- (3) Démontrer que : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = v.p\left(\frac{1}{x}\right)$.

Remarque : $v.p\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas une distribution régulière, et n'est pas non plus égale à une combinaison de distributions de Dirac ou de ses dérivées.

Remarque : la valeur $\langle T, \phi \rangle$ d'une distribution T en ϕ , s'exprime sous forme d'une intégrale ou une limite d'intégrales :

- si T régulière, alors $\langle T, \phi \rangle \equiv \int f \phi d\mu$;
- si $T = \delta$, alors $\langle T, \phi \rangle \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \phi d\mu$, où $(f_n)_n$ est une unité approchée.
- si $T = v.p\left(\frac{1}{x}\right)$, alors $\langle T, \phi \rangle \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int \frac{\phi(x)}{x} \cdot \mathbf{1}_{]-\infty, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, +\infty[} d\mu(x) \right)$.

Dérivation d'une distribution régulière définie par une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux :

Théorème 8 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 par morceaux, admettant les points de discontinuité $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$, alors :

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^N \sigma_{x_i}(f) \cdot \delta_{x_i}$$

où $\sigma_{x_i}(f) = f(x_i^+) - f(x_i^-)$ est le saut de f en x_i et $T_{f'}$ la distribution associée à f' .

Preuve

$$\begin{aligned} T_f'(\phi) &= -T_f(\phi') = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \phi'(x) dx \\ &= - \left(\int_{-\infty}^{x_1} f(x) \cdot \phi'(x) dx + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot \phi'(x) dx + \int_{x_N}^{+\infty} f(x) \cdot \phi'(x) dx \right) \\ &= - \left([f(x) \cdot \phi(x)]_{-\infty}^{x_1} - \int_{-\infty}^{x_1} f'(x) \cdot \phi(x) dx + \sum_{i=1}^{N-1} \left([f(x) \cdot \phi(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \cdot \phi(x) dx \right) \right. \\ &\quad \left. + [f(x) \cdot \phi(x)]_{x_N}^{+\infty} - \int_{x_N}^{+\infty} f'(x) \cdot \phi(x) dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot \phi(x) dx + \sum_{i=1}^N (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \cdot \phi(x_i) \end{aligned}$$

$$= T_{f'}(\phi) + \sum_{i=1}^N \sigma_{x_i}(f) \cdot \delta_{x_i}(\phi)$$

□

Exemple 2 : Soit $f(x) = 3 \cdot \mathbf{I}_{[0,1]}(x) + 2 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]}(x)$, $f'(x) = 0$ donc $T_{f'} = 0$ et $T_f' = 3 \cdot \delta_0 - 1 \cdot \delta_1 - 2 \cdot \delta_2$.

Théorème 9 Toute distribution T de \mathcal{D}' admet une infinité de primitives notées U , qui diffèrent entre elles d'une constante additive et vérifient :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle U', \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$$

E 9 Calculer la primitive de $\frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{6}\delta_2$ égale à la distribution nulle sur \mathbb{R}^- [Penser aux lois discrètes de probabilité et à leurs fonctions de répartition].

Les définitions et théorèmes précédents et à venir s'appliquent aussi à l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions définies sur les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R} , et plus généralement de \mathbb{R}^n .

Définition 10 : A toute fonction f appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on associe la distribution T_f :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

Notation : Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha|$ désigne $\sum_{i=1}^n \alpha_i$. Pour tout ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$, on définit l'opérateur $D^\alpha(\phi) = \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Définition 11 : Pour toute distribution T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , la dérivée $\alpha^{\text{ième}}$ de T est définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle D^\alpha(T), \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha(\phi) \rangle$$

Remarque : les dérivées partielles d'un élément ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont indépendantes de l'ordre de dérivation, résultat que l'on transpose immédiatement grâce à la définition précédente, à l'ordre de dérivation des distributions.

Exemple 3 : Soit $H(x_1, x_2)$ la fonction de Heaviside à deux dimensions :

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On lui associe la distribution régulière notée H . Sachant que :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T, \phi(x_1, \dots, x_n) \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle ,$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} H(x_1, x_2), \phi(x_1, x_2) \right\rangle &= - \left\langle H(x_1, x_2), \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\rangle \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= - \int_0^{+\infty} (\phi(+\infty, x_2) - \phi(0, x_2)) dx_2 \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(0, x_2) dx_2 = \langle H(x_2), \langle \delta_0(x_1), \phi(x_1, x_2) \rangle \rangle \end{aligned}$$

qui définira (cf. Théorème 12 et Exemple 7(1)) le produit tensoriel $\delta_0(x_1) \otimes H(x_2)$ des distributions δ_0 et H .

Application à l'analyse vectorielle : Une fonction f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ dérivable dans le complémentaire d'une surface Σ de classe C^1 à dérivées dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, définit une distribution T_f , dont on se propose de calculer les dérivées.

On suppose que Σ délimite deux domaines Ω^+ et Ω^- et on désigne par \vec{n} (resp. : $-\vec{n}$) le vecteur unitaire normal à Σ sortant par rapport à Ω^+ (resp. : Ω^-).

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_f, \phi \right\rangle &= - \left\langle T_f, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega^+} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \int_{\Omega^-} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= \left\{ - \int_{\Omega^+} - \int_{\Omega^-} \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (f\phi) \right\} + \left\{ \int_{\Omega^+} + \int_{\Omega^-} \right\} \phi \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= - \left\{ \int_{\Omega^+} + \int_{\Omega^-} \right\} \operatorname{div} \begin{pmatrix} 0 \\ f\phi \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle T_{\frac{\partial}{\partial x_i} f}, \phi \right\rangle \\ &= \int_{\Sigma} -f\phi|_{\Omega^+} n^i + f\phi|_{\Omega^-} n^i + \left\langle T_{\frac{\partial}{\partial x_i} f}, \phi \right\rangle \\ &= \int_{\Sigma} \phi [f] n^i + \left\langle T_{\frac{\partial}{\partial x_i} f}, \phi \right\rangle = \langle [f] n^i \delta_{\Sigma}, \phi \rangle + \left\langle T_{\frac{\partial}{\partial x_i} f}, \phi \right\rangle \end{aligned}$$

où $[f](x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega^-}} f(y) - \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega^+}} f(y)$ est le saut de f à travers Σ dans le sens de $\vec{n} = (n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)})$

et δ_{Σ} est la distribution de Dirac de support Σ , définie par $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\langle \delta_{\Sigma}, \phi \rangle = \int_{\Sigma} \phi d\sigma$.

Par application directe de ce résultat, sous les mêmes hypothèses, on obtient les deux théorèmes :

Théorème 10 La distribution associée au gradient d'une fonction f définie sur le complémentaire d'une surface Σ incluse dans \mathbb{R}^3 est définie par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T_f \underset{\text{(sens des distributions)}}{=} T_{\overrightarrow{\text{grad}} f} \underset{\text{(sens des fonctions)}}{=} + \vec{n} \cdot \sigma_f \cdot \delta_\Sigma$$

où \vec{n} est le vecteur normal sortant, et σ_f le saut de discontinuité de f , lorsqu'on traverse Σ .

Supposons maintenant un champ de vecteurs $\vec{f}(x, y, z)$ défini par ses trois composantes $(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, on obtient :

Théorème 11 La distribution associée à la divergence de \vec{f} est définie :

$$\text{div } T_{\vec{f}} = T_{\text{div } \vec{f}} + \vec{n} \cdot \sigma_{\vec{f}} \cdot \delta_\Sigma$$

avec $\sigma_{\vec{f}} = (\sigma_{f_1}, \sigma_{f_2}, \sigma_{f_3})$.

4.4 Produit d'une distribution par une fonction C^∞

De même que le produit de deux fonctions L^1_{loc} n'est pas nécessairement une fonction L^1_{loc} , le produit de deux distributions quelconques n'est pas nécessairement une distribution. On sait toutefois multiplier une distribution par une fonction C^∞ .

Si $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\alpha \cdot \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$; si ϕ_n converge vers la fonction nulle 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $(\alpha \cdot \phi_n)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Donc si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $T(\alpha \cdot \phi_n)$ converge vers 0 si n tend vers $+\infty$.

Définition 12 : Si $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors le produit αT est la distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha \phi \rangle$$

Exemple 4 : $\langle \alpha \cdot \delta_0, \phi \rangle = \delta_0(\alpha \cdot \phi) = \alpha(0) \cdot \phi(0) = (\alpha(0) \cdot \delta_0)(\phi) \Rightarrow \alpha \delta_0 = \alpha(0) \cdot \delta_0$.

E 10 Expliciter $t^m \delta_0^{(n)}$, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

[Indication : Utiliser la formule de Leibniz : $(x^m \phi)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_i^n (x^m)^{(i)} (\phi)^{(n-i)}$]

En déduire la forme de certaines solutions U de l'équation $x^m U = 0$.

E 11

- (1) Déterminer les solutions T de l'équation $x T = 0$ [Indication : Décomposer $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en $\phi(x) = \phi(0) \theta(x) + \psi(x)$, où θ et ψ sont des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tels que $\theta(0) = 1$ et $\psi(0) = 0$].
- (2) Montrer que $T = v.p \left(\frac{1}{x}\right) + a \delta_0$ où $a \in \mathbb{R}$, est une solution de l'équation $x T = 1$.

4.5 Convolution des distributions

Définition 13 : Le **produit direct ou tensoriel** de deux fonctions réelles f et g définies sur \mathbb{R} est la fonction $f \otimes g$ définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (f \otimes g)(x, y) = f(x) g(y) .$$

Théorème 12 (Convolution des distribution régulières)

Soient f et g des fonctions de L^1_{loc} , telles que le produit de convolution $f * g$ est aussi dans L^1_{loc} . Alors $f * g$ définit une distribution régulière :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle f * g, \phi \rangle = \langle f_x \otimes g_y, \phi(x+y) \rangle .$$

La question qui se pose est maintenant la suivante : à quelle condition peut-on étendre ce produit de convolution à des distributions quelconques ? Autrement dit, S et T étant deux distributions, quand peut-on définir $S * T$ par : $\langle S * T, \phi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \phi(x+y) \rangle$?

Pour plus de clarté, on indexera chaque distribution par la variable muette de la fonction-test à laquelle elle s'applique.

Commençons par une remarque essentielle. Pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, le support $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x+y) \neq 0\}$ de la fonction $(x, y) \mapsto \phi(x+y)$ n'est pas borné. En effet, si le support de ϕ est contenu dans l'intervalle $[a, b]$, le support de $\phi(x+y)$ est une bande oblique dans le plan \mathbb{R}^2 , parallèle à la droite d'équation $x+y=0$, dont l'intersection avec l'axe des x est $[a, b]$. Donc, la fonction $\phi(x+y)$ est de classe \mathcal{C}^∞ mais n'appartient pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Le produit de convolution $S * T$ n'existe que si l'intersection de son support avec celui de $\phi(x+y)$ est borné. Ce résultat est acquis dans les cas suivants :

- S et T ont toutes deux des supports bornés du même côté.
- L'une des deux distributions, au moins, est à support compact.

Théorème 13 L'ensemble des **distributions à supports compacts** constitue un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, qui s'identifie au dual topologique de l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ . L'espace $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est muni de la même topologie que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exemple 5 : Les combinaisons linéaires de distributions de Dirac ou de leurs dérivées, et les distributions régulières définies par des fonctions à support compact sont des distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

Définition 14 :

Une distribution est à **support borné inférieurement**, si son support est inclus dans un intervalle de la forme $[a, +\infty[$. L'ensemble des distributions bornées inférieurement est un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ noté $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

De façon symétrique, on définit le sous-espace $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$ des distributions à **supports bornés supérieurement** : ainsi, T appartient à $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$ s'il existe b tel que $\text{support}(T) \subset]-\infty, b]$.

Exemple 6 : Toute distribution de Heaviside H_a , où $a \in \mathbb{R}$, est dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Le théorème suivant précise les conditions d'existence d'un produit de convolution.

Théorème 14 *Si les distributions S et T sont telles que l'une au moins des deux expressions : $\langle S_x, \langle T_y, \phi(x+y) \rangle \rangle$ ou $\langle T_y, \langle S_x, \phi(x+y) \rangle \rangle$ existe, alors elles définissent l'unique produit de convolution $S * T$:*

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \phi(x+y) \rangle .$$

Exemple 7 : Application aux calculs de $\delta_a * \delta_b$, $H * H$ et $f * \delta$, où $f \in L^1_{loc}$.

$$(1) \langle \delta_a * \delta_b, \phi \rangle = \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \phi(x+y) \rangle \rangle = \langle \delta_a(x), \phi(x+b) \rangle = \phi(a+b).$$

On en déduit donc que : $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

(2) La distribution H est régulière. On sait calculer sa convolution avec elle-même, qui est une distribution régulière : $H * H = xH$ (cf. Chapitre 1 Exemple 5).

(3) $\langle f * \delta, \phi \rangle = \langle f_x, \langle \delta_y, \phi(x+y) \rangle \rangle = \langle f_x, \phi(x) \rangle$, ce qui montre que $f * \delta = f$. On établira plus loin que δ est l'élément neutre pour le produit de convolution.

Le théorème suivant donne les conditions suffisantes d'existence d'un produit de convolution itéré de distributions.

Théorème 15

*Si les distributions T_1, T_2, \dots, T_n vérifient l'une des trois propriétés (1), (2), (3), alors le produit de convolution $T_1 * T_2 * \dots * T_n$ existe, et est associatif et commutatif. Il est défini par :*

$$\langle T_1 * T_2 * \dots * T_n, \phi \rangle = \langle T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_n, \phi(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \rangle .$$

(1) Toutes les distributions, sauf au plus une, sont à supports bornés.

(2) Toutes les distributions sont dans \mathcal{D}'_+ , ou bien sont dans \mathcal{D}'_- .

(3) Tous les produits de convolution deux à deux existent.

Les applications de l'exemple 7 illustrent l'existence du produit de convolution dans le cas où l'une des deux premières propriétés du théorème précédent est vérifiée.

E 12 Démontrer que $(1 * \delta') * H$ et $1 * (\delta' * H)$ ne sont pas égales. Expliquer pourquoi il en est ainsi, à l'aide du théorème précédent.

Théorème 16 *Les espaces de distributions $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$ sont des algèbres de convolutions, associatives, commutatives et d'élément neutre δ_0 .*

Preuve Les preuves de l'associativité, de la commutativité et de l'existence de l'élément neutre δ_0 sont faciles. \square

Régularisation de toute distribution

Il s'agit d'associer à une distribution quelconque T , si irrégulière soit-elle, une suite de fonctions $(f_n)_n$, de classe C^∞ , admettant T comme limite au sens des distributions. Un théorème établit que le produit de convolution d'une distribution quelconque T (respectivement à support compact) par une fonction de \mathcal{D} (respectivement C^∞) définit une fonction C^∞ :

$$(g * T)(x) = \langle T_y, g(x - y) \rangle.$$

Théorème 17 Si $T \in \mathcal{D}'$ et $(g_n)_n$ est une unité approchée de fonctions appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $(g_n * T)_n$ est une suite de fonctions qui converge vers T .

Application immédiate : $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Théorème 18 Sous les conditions suffisantes d'existence du Théorème 15, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) $\tau_a(T) = \delta_a * T, \forall a \in \mathbb{R}$
- (2) $\tau_a(S * T) = \tau_a(S) * T = S * \tau_a(T)$
- (3) $\delta^{(i)} * \delta^{(j)} = \delta^{(i+j)}$ (i et j entiers positifs)
- (4) $\delta^{(i)} * T = T^{(i)}$ ($\forall i \in \mathbb{N}$)
- (5) $(S * T)^{(i)} = S^{(i)} * T = S * T^{(i)}$

Remarque : Ainsi, pour dériver (respectivement traduire) un produit de convolution de plusieurs distributions, il suffit de dériver (respectivement traduire) l'une d'elles.

E 13 Démontrer les propriétés ci-dessus.

Les algèbres de convolution \mathcal{E}' , \mathcal{D}'_+ , \mathcal{D}'_- sont des sous-espaces de distributions particulièrement adaptés à la résolution des équations différentielles (ou aux dérivées partielles) linéaires, qui s'écrivent sous la forme générale :

$$A * X = B$$

Le problème est donc de savoir à quelles conditions sur les distributions A et B d'une algèbre de convolution donnée, la solution X existe et est unique.

Définition 15 : Dans une algèbre de convolution donnée, l'inverse de convolution X de la distribution A , si elle existe, vérifie l'équation :

$$A * X = \delta_0.$$

L'inverse de convolution noté A^{*-1} , est dite : fonction ou distribution de Green.

Théorème 19 *L'inverse de convolution d'une distribution A dans une algèbre de convolution donnée est unique.*

Preuve

Supposons deux inverses A_1 et A_2 , de A :

$$A_2 = A_2 * \delta = A_2 * (A * A_1) = (A_2 * A) * A_1 = \delta * A_1 = A_1.$$

□

Théorème 20 *Dans une algèbre de convolution donnée, l'équation $A * X = B$ admet une solution si A admet une inverse de convolution, et dans ce cas la solution est unique.*

Application à la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Le problème : Rechercher une solution X dans \mathcal{D}'_+ , de l'équation différentielle :

$$\sum_{j=0}^N a_{N-j} \cdot \frac{d^j X}{dx^j} = B;$$

les a_{N-j} sont des réels, et $B \in \mathcal{D}'_+$.

Sachant que $\delta^{(j)} * X = X^{(j)}$ ($j \in \mathbb{N}$), l'équation précédente se transforme en l'équation $(\sum_j a_{N-j} \cdot \delta^{(j)}) * X = B$ qui est une équation de convolution de la forme $A * X = B$.

Plaçons-nous par exemple dans l'algèbre de convolution \mathcal{D}'_+ ; nous recherchons donc des solutions X à support inclus dans $[0, +\infty[$. On considérera sans nuire à la généralité du propos que $a_0 = 1$.

Méthode :

(a) Factorisation de l'opérateur de différentiation :

$$\sum_{j=0}^N a_{N-j} \cdot \delta^{(j)} = (\delta' - \alpha_1 \delta) * (\delta' - \alpha_2 \delta) * \dots * (\delta' - \alpha_N \delta)$$

où les $(\alpha_i)_i$ sont les racines, éventuellement multiples, réelles ou complexes, de l'équation polynomiale $\sum_{j=0}^N a_{N-j} \cdot x^j = 0$ associée à l'équation de convolution.

(b) Vérifions que $H(x) \exp(\alpha_j x)$ est l'inverse de convolution de $(\delta' - \alpha_j \delta)$, pour tout j :

$$\begin{aligned} H(x) \exp(\alpha_j x) * (\delta' - \alpha_j \delta) &= \delta \cdot \exp(\alpha_j x) + H(x) \cdot \alpha_j \cdot \exp(\alpha_j x) - \alpha_j \cdot H(x) \cdot \exp(\alpha_j x) \\ &= \delta \cdot \exp(\alpha_j x) = \delta \end{aligned}$$

car : $\langle \delta f, \Phi \rangle = \langle \delta, f \Phi \rangle$, si f est de classe C^∞ .

(c) Lemme : Si T_1, T_2, \dots, T_N sont telles que leur produit de convolution $T_1 * T_2 * \dots * T_N$ existe, alors $(T_1 * T_2 * \dots * T_N)^{-1} = T_1^{-1} * T_2^{-1} * \dots * T_N^{-1}$.

(d) L'inverse de $A = \sum_{j=0}^N a_{N-j} \cdot \delta^{(j)}$ est :

$$A^{*-1} = H(x) \cdot \exp(\alpha_1 x) * H(x) \cdot \exp(\alpha_2 x) * \dots * H(x) \cdot \exp(\alpha_N x) \quad .$$

(e) La solution de l'équation différentielle est donc la distribution de \mathcal{D}'_+ :

$$A^{*-1} * B = H(x) \cdot \exp(\alpha_1 x) * H(x) \cdot \exp(\alpha_2 x) * \dots * H(x) \cdot \exp(\alpha_N x) * B \quad ,$$

dont l'explicitation est possible.

Cette méthode s'étend aux équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants ainsi qu'aux équations intégrales linéaires. Les transformées de Fourier et de Laplace sont alors des outils puissants permettant de déterminer les distributions de Green.

Remarques importantes :

(1) **Une équation de convolution peut avoir des solutions distinctes selon l'algèbre de convolution considérée.**

C'est le cas (classique) de l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * X = B.$$

Dans \mathcal{D}'_+ , la solution unique est égale à $B * \frac{1}{\omega} H(t) \cdot \sin(\omega t)$, tandis que dans \mathcal{D}'_- , la solution unique est égale à : $B * \frac{-1}{\omega} H(-t) \cdot \sin(\omega t)$.

(2) **Une distribution n'a pas nécessairement un inverse de convolution dans une algèbre de convolution donnée. En conséquence, une équation de convolution peut ne pas avoir de solution.**

C'est le cas de la distribution $\delta'' + \omega^2 \delta$ qui n'a pas d'inverse dans \mathcal{E}' . De même, aucune distribution définie par une fonction ϕ de \mathcal{D} n'admet d'inverse.

4.6 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Comme pour les opérateurs de dérivation ou de multiplication, nous allons définir la transformée de Fourier d'une distribution par sa transposition sur les fonctions tests ϕ .

Considérons d'abord le cas d'une distribution régulière T_f définie par une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$. Alors, on sait que $\mathcal{F}(f)$ est continue donc localement intégrable. Par conséquent, $\mathcal{F}(f)$ définit une distribution régulière $T_{\mathcal{F}(f)}$ et l'on a :

$$\begin{aligned} \langle T_{\mathcal{F}(f)}, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\nu) \phi(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} f(x) dx \right) \phi(\nu) d\nu \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \phi(\nu) d\nu \right) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\phi)(x) f(x) dx = \langle T_f, \mathcal{F}(\phi) \rangle \end{aligned}$$

Il apparaît donc naturel de poser dans ce cas : $T_{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(T_f)$.

Il s'agit donc de trouver un espace des fonctions tests, stable par transformation de Fourier, ce qui n'est pas le cas de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ , telles qu'elles-mêmes et toutes leurs dérivées soient à décroissance rapide, est tout indiqué. Rappelons, en effet, que \mathcal{F} est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, et que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. (cf. Chapitre 3)

Les distributions définies sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définissent l'espace vectoriel $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 16 : L'espace des distributions $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dit espace des distributions tempérées est le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et donc constitué des formes linéaires continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{C} .

Rappel de propriétés élémentaires des espaces topologiques :

(1) Un espace topologique E_1 est inclus dans l'espace topologique E_2 (on note $E_1 \subset E_2$) si tout $\phi \in E_1$, alors $\phi \in E_2$ et si toute suite $(\phi_n)_n$ convergente pour la topologie de E_1 , converge pour la topologie de E_2 .

(2) Si $E_1 \subset E_2$ et E_1 dense dans E_2 , alors l'ensemble E_2' des fonctionnelles linéaires continues sur E_2 est inclus dans l'ensemble E_1' des fonctionnelles linéaires continues sur E_1 .

Théorème 21 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Preuve Immédiate par application des théorèmes précédents. □

Quels espaces de distributions, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ contient-il ?

- (1) $L^p(\mathbb{R})$, $\forall p \in [1, +\infty[$.
- (2) L'espace des polynômes à coefficients réels et plus généralement des fonctions f à croissance lente, définies par : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{f(x)}{(1+x^2)^k}$ est mesurable bornée (c'est cette classe de fonctions qui a inspiré à L. Schwartz la désignation "tempérée").
- (3) L'espace \mathcal{E}' des distributions à support compact.
- (4) L'espace des signaux numériques $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot \delta_n$ où la suite $(a_n)_n$ vérifie l'une des majorations : $\sum_n |a_n| < +\infty$, $\sum_n |a_n|^2 < +\infty$.
- (5) L'espace des distributions périodiques.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est donc un espace très riche de distributions, qui suffit largement à décrire tous les signaux rencontrés en physique ou en sciences de l'ingénieur.

Définition 17 : Toute distribution tempérée T , admet une transformée de Fourier $\mathcal{F}(T)$ définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$$

Le théorème suivant établit les propriétés de la transformée de Fourier et de son inverse.

Théorème 22 *La transformation de Fourier \mathcal{F} des distributions tempérées est une application linéaire, bijective et bicontinue de \mathcal{S}' dans lui-même, qui admet une unique transformation inverse, notée \mathcal{F}^{-1} , égale à $\overline{\mathcal{F}}$:*

$$\forall T \in \mathcal{S}' , \forall \phi \in \mathcal{S} , \langle \mathcal{F}^{-1}(T), \phi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}(\phi) \rangle .$$

D'autre part, pour tout $T \in \mathcal{S}' : \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)) = T .$

Théorème 23 (Propriétés de la transformée de Fourier des distributions)

Soit $T \in \mathcal{S}' :$

- (1) $\widehat{T_{(a,x)}}(\nu) = \frac{1}{|a|} \widehat{T}\left(\frac{\nu}{a}\right) , \forall a \in \mathbb{R}^* , \text{ où } \langle T_{(a,x)}, \phi \rangle \equiv \langle T_x , \frac{1}{|a|} \phi\left(\frac{\nu}{a}\right) \rangle .$
- (2) $\widehat{\tau_a.T}(\nu) = e^{-2i\pi\nu a} . \widehat{T}(\nu) .$
- (3) $\widehat{(\widehat{T})^{(k)}} = (-2i\pi x)^k T$
- (4) $\widehat{T^{(k)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^k . \widehat{T}(\nu) \forall k \in \mathbb{N}^* .$

Preuve

- (1) $\langle \widehat{T_{(a,x)}}, \phi \rangle = \langle T_{(a,x)}, \widehat{\phi} \rangle = \left\langle T_x , \frac{1}{|a|} \widehat{\phi}\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{|a|} \widehat{T}\left(\frac{\nu}{a}\right) , \phi(\nu) \right\rangle .$
- (2) $\langle \widehat{\tau_a.T}, \phi \rangle = \langle \tau_a.T, \widehat{\phi} \rangle = \langle T, \widehat{\phi}(\nu + a) \rangle = \langle T, e^{-2i\pi\nu a} . \widehat{\phi}(\nu) \rangle = \langle \widehat{T}, e^{-2i\pi\nu a} . \phi(\nu) \rangle = \langle e^{-2i\pi\nu a} . \widehat{T}, \phi \rangle$
- (3) $x^k T$ est dans \mathcal{S}' , donc : $\forall \phi \in \mathcal{S} ,$

$$\langle \widehat{x^k T}, \phi \rangle = \langle T, x^k \widehat{\phi} \rangle = \left\langle T, \frac{1}{(2i\pi)^k} \widehat{\phi^{(k)}} \right\rangle = \frac{(-1)^k}{(2i\pi)^k} \langle \widehat{T^{(k)}}, \phi \rangle$$

d'où le résultat.

□

Quelques transformées de Fourier à connaître.

- (1) $\mathcal{F}(\delta_a)(\nu) = e^{-2i\pi\nu a} .$
- (2) $\mathcal{F}(e^{2i\pi ax}) = \delta_a .$
- (3) $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}) = \delta_0 .$
- (4) $\mathcal{F}(\delta_0) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}} .$
- (5) $\mathcal{F}(\delta_0^{(n)})(\nu) = (2i\pi\nu)^n .$
- (6) $\mathcal{F}(\cos 2\pi\nu_0 x) = \frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0}) .$
- (7) $\mathcal{F}(\sin 2\pi\nu_0 x) = \frac{1}{2i}(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0}) .$

Remarque : Les égalités (6) et (7) étaient annoncées par l'expression de la transformée de Fourier de la fonction sinus tronquée $\sin(2\pi\nu_0 x) \mathbf{1}_{[-N, +N]}(x)$ (cf. Exemple 6, Chapitre 3).

E 14 Démontrer ces égalités. Rappelez-vous que qu'une impulsion contient toutes les fréquences, d'où $\mathcal{F}(\delta_0) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$. Que dire de $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}) = \delta_0$?

E 15 Calcul de la transformée de Fourier de la distribution de Heaviside.

- (1) On sait que $H' = \delta_0$; en déduire (cf. exercice 11), que $\widehat{H}(\nu) = v.p \left(\frac{1}{2i\pi\nu} \right) + a \delta_0(\nu)$ où a est réel.
- (2) Calculer $\widehat{H} + \widehat{H(-x)}$ (ν) En déduire que $a = \frac{1}{2}$, et que $\widehat{H}(\nu) = v.p \left(\frac{1}{2i\pi\nu} \right) + \frac{1}{2}\delta_0(\nu)$. Attention ! La fonction de Heaviside n'admet de transformée de Fourier qu'au sens de distribution de Heaviside.

Transformation de Fourier du produit de convolution

Nous savons que l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ n'est pas une algèbre de convolution ; en revanche les produits de convolution d'une distribution tempérée soit avec une distribution à support borné, soit avec une fonction de \mathcal{S} , existent et ont de bonnes propriétés à l'égard de la transformation de Fourier.

Théorème 24 Soit $f \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{S}'$, alors :

- (1) $f * T$ et $(f * T)^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sont des fonctions \mathcal{C}^∞ à croissance lente.
- (2) $\widehat{f * T} = \widehat{f} \cdot \widehat{T}$.
- (3) $\widehat{f \cdot T} = \widehat{f} * \widehat{T}$.

Preuve

- (1) Preuve longue et délicate, qui sera admise.
- (2) $f * T \in \mathcal{S}' ; \forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \widehat{f * T}, \phi \rangle = \langle f * T, \widehat{\phi} \rangle = \langle T_t, \langle f_x, \widehat{\phi}(x+t) \rangle \rangle$.

Mais $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ et $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$ donc $\widehat{f} \cdot \widehat{T}$ existe et on a :

$$\langle \widehat{f} \cdot \widehat{T}, \phi \rangle = \langle \widehat{T}, \widehat{f} \cdot \phi \rangle = \langle T, \widehat{f \cdot \phi} \rangle = \langle T, \widehat{f} * \widehat{\phi} \rangle = \langle T_t, \langle f_x, \widehat{\phi}(x+t) \rangle \rangle = \langle \widehat{f * T}, \phi \rangle$$

- (3) $\widehat{f} \in \mathcal{S}, \widehat{T} \in \mathcal{S}' \implies \widehat{f} * \widehat{T} \in \mathcal{S}'$
 donc $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} * \widehat{T}) = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}) \cdot \overline{\mathcal{F}}(\widehat{T}) = f \cdot T$ puis en appliquant \mathcal{F} , isomorphisme sur \mathcal{S}' ,
 $\widehat{f} * \widehat{T} = \widehat{f \cdot T}$

□

Théorème 25 Soient les distributions $R \in \mathcal{E}'$ et $T \in \mathcal{S}'$ alors :

- (1) $R * T \in \mathcal{S}'$
- (2) $\widehat{R * T} = \widehat{R} \cdot \widehat{T}$

Preuve On admettra que si R appartient à \mathcal{E}' , alors \widehat{R} est \mathcal{C}^∞ à croissance lente. Ainsi $\widehat{R} \cdot \widehat{T}$ a un sens et $\langle \widehat{R} \cdot \widehat{T}, \phi \rangle = \langle \widehat{T}, \widehat{R} \cdot \phi \rangle$. Si $\phi \in \mathcal{S}, \widehat{R} \cdot \phi \in \mathcal{S}$ et donc : (*) $\langle \widehat{T}, \widehat{R} \cdot \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \widehat{R \cdot \phi} \rangle$.

Par application du théorème précédent : $\widehat{\phi \cdot \widehat{R}} = \widehat{\phi} * \widehat{\widehat{R}}$. Revenons à (*) :

$$\left\langle T, \widehat{\phi} * \widehat{\widehat{R}} \right\rangle = \left\langle T_t, \left\langle \widehat{\widehat{R}}_x, \widehat{\phi}(t-x) \right\rangle \right\rangle = \left\langle T_t, \left\langle R_x, \widehat{\phi}(t+x) \right\rangle \right\rangle = \left\langle T * R, \widehat{\phi} \right\rangle = \left\langle \widehat{T} * \widehat{R}, \phi \right\rangle ,$$

en admettant que $\widehat{\widehat{R}}_x = R_{-x}$. □

E 16 Déterminer $\mathcal{F}(T_{\cos^2(at)})$ en exprimant $(\cos(at))^2$ en fonction de $\cos(2at)$.

E 17 Etude de la déformation d'une poutre

L'équation différentielle qui régit la déformation transversale d'une poutre homogène de longueur infinie, reposant sur un milieu horizontal élastique de coefficient k , est :

$$M \cdot y^{(4)} + ky = T ,$$

où M est une constante, T la distribution décrivant la charge transversale connue. Supposons une masse m placée à l'origine : $T = m\delta_0$.

Déterminer la solution $y(x)$ à l'aide de la transformation de Fourier. On pourra la rechercher aussi avec la méthode convolutive exposée à la fin du paragraphe précédent. Il serait tout aussi facile de déterminer la déformation associée à la distribution de masses $T = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{x_i}$.

E 18 **Démonstration du théorème de la limite centrale**

Soit la suite des distributions $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tel que $T_k = T_{k-1} * T_1$ et $T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$.

(a) Démontrer que $T_k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot \delta_{2j-k}$.

(b) Déterminer \widehat{T}_k sous la forme d'une fonction réelle.

(c) On pose : $f_k(\nu) = \widehat{T}_k(\frac{\nu}{2\pi\sqrt{k}})$. démontrer que la suite $(f_k)_k$ converge dans \mathcal{D}' vers une fonction f . En déduire la limite de $\left(T_k(\frac{ax}{2\pi\sqrt{k}}) \right)_k$ [On vient ainsi de démontrer le théorème central limite, de la théorie des probabilités, dans un cas particulier]

4.7 Séries de Fourier des distributions périodiques

Rappelons :

Définition 18 : La translátée $\tau_a(T)$ d'une distribution T est définie par :

$$\langle \tau_a(T), \phi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\phi \rangle = \langle T, \phi(x+a) \rangle .$$

Définition 19 : Une distribution T est périodique de période a , si :

$$\tau_a(T) = T.$$

Définition 20 : La somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ définit une distribution tempérée notée $\mathbb{1}\mathbb{1}$, dite **peigne de Dirac** et définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \mathbb{1}\mathbb{1}, \phi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n)$$

qui est bien une série convergente.

Le peigne de Dirac de pas a est défini par : $\mathbb{1}\mathbb{1}_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n.a}$

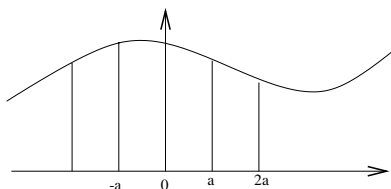
Remarque : Dans ce paragraphe toutes les séries sont indicées par l'ensemble \mathbb{Z} .

Théorème 26 Si f est une fonction C^∞ , alors $f \cdot \mathbb{1}\mathbb{1}_a$ définit la distribution : $\sum_n f(n.a) \cdot \delta_{n.a}$.

Preuve

$$\langle f \cdot \mathbb{1}\mathbb{1}_a, \phi \rangle \stackrel{\text{(déf)}}{=} \langle \mathbb{1}\mathbb{1}_a, f \cdot \phi \rangle = \sum_n f(n.a) \phi(n.a) = \left\langle \sum_n f(n.a) \delta_{n.a}, \phi \right\rangle$$

□



Théorème 27 Les fonctions périodiques localement intégrables définissent des distributions tempérées périodiques. Si f_0 est le motif périodique de f et a la période, alors : $f = f_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a$.

Preuve Montrons que la fonction $f \in L^1_{loc}$, de période $a > 0$, est identique au produit de convolution du “motif périodique”, noté f_0 , par le peigne de Dirac de période $a > 0$, notée $\mathbb{1}\mathbb{1}_a$. Soit $f_0(x) = f(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,a]}(x)$

$$(f_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a)(x) = \sum_n (f_0 * \delta_{na})(x) = \sum_n f_0(x - na) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Mais $f_0 \in \mathcal{E}'$ et $\mathbb{1}\mathbb{1}_a \in \mathcal{S}'$, donc $f_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a \in \mathcal{S}'$ par le théorème 25.

□

Interprétation : A partir du motif périodique f_0 de longueur a , on définit la distribution périodique associée f , par convolution de f_0 avec le peigne de Dirac $\mathbb{1}\mathbb{1}_a$.

Théorème 28 La transformée de Fourier du peigne de Dirac III est égale à lui-même :

$$\widehat{\text{III}} = \text{III}$$

Le peigne de Dirac est une fonction propre de l'opérateur \mathcal{F} , associé à la valeur propre 1.

E 19 Preuve du théorème 28

(1) Calculer $S(\nu) = \widehat{\text{III}}(\nu)$ en fonction de $e^{-2i\pi\nu k}$.

(2) Montrer que $e^{2i\pi\nu} S(\nu) = S(\nu)$ et $S(\nu + 1) = S(\nu)$ et en déduire que

$$(e^{2i\pi\nu} - 1) \cdot S(\nu) = 0.$$

(3) On admet le résultat suivant : soit g une fonction non nulle analytique telle que $g T = 0$. Alors $\text{Support}(T)$ est inclus dans l'ensemble des zéros de g . Par conséquent, $T(\nu)$ est nécessairement une combinaison de mesures de Dirac : $T(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_n(\nu)$

En déduire que $S(\nu) = a \text{III}(\nu)$. Puis conclure que $a = 1$ et $\widehat{\text{III}} = \text{III}$ [Indication : calculer $\langle S(\nu), e^{-\pi \nu^2} \rangle$]

(4) Calculer $\widehat{\text{III}}_a$.

Théorème 29 Soit f une fonction de période a et L^1_{loc} , donc appartenant à S' , alors :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n x/a} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) e^{-2i\pi n t/a} dt$$

$$\hat{f} = \sum_n c_n \delta_{\frac{n}{a}}$$

Interprétation : Au sens des distributions, toute fonction périodique L^1_{loc} est la somme de sa série de Fourier.

Preuve

$$f = f_0 * \text{III}_a \Rightarrow \hat{f} = \hat{f}_0 \cdot \widehat{\text{III}}_a = \frac{1}{a} \cdot \hat{f}_0 \cdot \text{III}_{\frac{1}{a}} \tag{4.1}$$

Or, pour toute fonction réelle $h \in C^\infty$, $h \cdot \delta_a = h(a) \cdot \delta_a$; appliqué à (4.1) on obtient :

$$\hat{f} = \frac{1}{a} \hat{f}_0 \cdot \sum_n \delta_{\frac{n}{a}} = \frac{1}{a} \sum_n \hat{f}_0\left(\frac{n}{a}\right) \cdot \delta_{\frac{n}{a}}$$

Sachant que $\hat{f}_0\left(\frac{n}{a}\right) = \int_0^a f(t) \cdot e^{-2i\pi n t/a} dt = a \cdot c_n$, on parvient finalement à :

$$\hat{f} = \sum_n c_n \cdot \delta_{\frac{n}{a}}$$

Si l'on prend la transformée inverse de \widehat{f} on aboutit à :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = \sum_n c_n \mathcal{F}^{-1}(\delta_{\frac{n}{a}}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n x/a}.$$

□

Théorème 30 (Existence et unicité de la série de Fourier de toute distribution périodique)

Toute distribution périodique T de période a est tempérée et s'identifie à $T_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a$ où T_0 est la distribution de support $[0, a]$ qui représente le motif périodique de T .

T admet un et un seul développement en série de Fourier :

$$T_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2i\pi n t}{a}} \text{ où } c_n = \frac{1}{a} \widehat{T}_0\left(\frac{n}{a}\right)$$

T_0 étant à support compact, \widehat{T}_0 est une fonction C^∞ à croissance lente d'où l'on déduit :

$$\widehat{T} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta_{\frac{n}{a}}.$$

Preuve

(1) $T_0 \in \mathcal{E}'$ et $\mathbb{1}\mathbb{1}_a \in \mathcal{S}'$ donc (Théorème 25) $T_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a \in \mathcal{S}'$.

(2) Montrons que T est périodique : $\tau_a(T) = T$.

$$\begin{aligned} \forall \phi, \quad \langle \tau_a(T_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a), \Phi \rangle &= \langle T_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a, \tau_{-a}(\Phi) \rangle \\ &= \langle T_0, \langle \mathbb{1}\mathbb{1}_a(x), \tau_{-a}(\Phi)(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T_0(y), \sum_n \Phi((n+1)a+y) \rangle \\ &= \langle T_0(y), \sum_k \Phi(ka+y) \rangle = \langle T_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

(3)

$$\widehat{T} = \widehat{T}_0 \cdot \widehat{\mathbb{1}\mathbb{1}_a} = \frac{1}{a} \widehat{T}_0 \cdot \mathbb{1}\mathbb{1}_{1/a} = \sum_n \frac{1}{a} \widehat{T}_0\left(\frac{n}{a}\right) \cdot \delta_{\frac{n}{a}}$$

□

Exemple 8 : Si $c_1 = c_{-1} = 1/2$, $a = 1$ alors $T = 1/2(e^{2i\pi t} + e^{-2i\pi t}) = \cos 2\pi t$ et $\widehat{T} = 1/2(\delta_{-1} + \delta_1)$.

E 20 Soit $g(t) = |\sin(\pi t)|$. Calculer $\frac{d^2 g(t)}{dt^2}$, en déduire $\widehat{g}(\nu)$ et la série de Fourier associée à g .

Théorème 31 (Formule sommatoire de Poisson)

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\sum_n f(x - na) = \left(f * \sum_n \delta_{na} \right) (x)$ et $\frac{1}{a} \sum_n \widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi \frac{nx}{a}}$ sont des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ qui sont égales. L'égalité est vraie au sens des fonctions si $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Application au calcul numérique des séries

Pour $x = 0$, on a : $\sum_n f(na) = \frac{1}{a} \sum_n \widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right)$

Si $a = 1$, il vient : $\sum_n f(n) = \sum_n \widehat{f}(n)$

La série de Fourier $\sum_n \widehat{f}(n)$ a une convergence accélérée par rapport à la convergence de la série $\sum_n f(n)$. Montrons-le sur un exemple classique :

Soit $f(x) = e^{-x^2}$, $\widehat{f}(\nu) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \nu^2}$. Donc : $\sum_n e^{-n^2} = \sqrt{\pi} \sum_n e^{-\pi^2 n^2}$.

4.8 Transformation de Laplace des distributions.

Il s'agit d'une extension de la transformée de Laplace définie sur les applications localement intégrables à support inclus dans \mathbb{R}^+ . Les bonnes propriétés de la transformée de Laplace des distributions sont à la base du calcul symbolique, puissant outil pour la résolution des équations différentielles et intégrales.

Définition 21 : Soit T une distribution de \mathcal{D}'_+ , telle que $e^{-xt} \cdot T_t$ soit une distribution tempérée pour tout x supérieur à $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors, T admet alors une transformée de Laplace définie par :

$$\mathcal{L}(T)(z) = \langle T_x, e^{-zx} \rangle$$

qui définit une fonction holomorphe sur l'ensemble des complexes z , tels que $\Re(z) > x_0$.

Application immédiate au calcul de $\mathcal{L}(\delta_a)(y)$, où $a > 0$:

$$\langle \delta_a(x), e^{-zx} \rangle = e^{-za} = \mathcal{L}(\delta_a)(z).$$

E 21 Si T_f est une distribution régulière, associée à une fonction f de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, démontrer que $\mathcal{L}(T_f)(z)$ coïncide avec $\mathcal{L}(f)(z)$.

Théorème 32 Sous les hypothèses de la définition précédente :

$$(\mathcal{L}(T))^{(n)}(z) = \mathcal{L}((-t)^n T)(z).$$

Preuve On sait que $\mathcal{L}(T)(z)$ est holomorphe pour tout z tel que $\Re(z) > x_0$. Il est alors facile d'établir, en considérant la limite quand h tend vers 0 de $\frac{\mathcal{L}(T)(z+h) - \mathcal{L}(T)(z)}{h}$, que :

$$(\mathcal{L}(T))'(z) = \mathcal{L}(-tT)(z).$$

Par récurrence, si $(\mathcal{L}(T))^{(n-1)}(z) = \mathcal{L}((-t)^{n-1}T)(z)$, alors :

$$(\mathcal{L}(T))^{(n)}(z) = (\mathcal{L}((-t)^{n-1}T))'(z) = \mathcal{L}(-t \cdot (-t)^{n-1}T)(z) = \mathcal{L}((-t)^n T)(z).$$

□

Théorème 33 Si $\mathcal{L}(T)(z)$ est la transformée de Laplace de T alors $z^n \mathcal{L}(T)(z)$ est la transformée de Laplace de $T^{(n)}$: $\mathcal{L}(T^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(T)(z)$.

Application : $\mathcal{L}(\delta_a^{(n)})(z) = z^n e^{-za}$.

Théorème 34 Soient $\mathcal{L}(T_1)(z)$ et $\mathcal{L}(T_2)(z)$ les transformées de Laplace respectives de T_1 et T_2 , d'abscisses de sommabilités respectives x_1 et x_2 , alors :

$$\forall z \text{ tel que } \Re(z) > \max(x_1, x_2) \quad \mathcal{L}(T_1 * T_2)(z) = \mathcal{L}(T_1)(z) \cdot \mathcal{L}(T_2)(z).$$

Reprenons le problème de la résolution de l'équation différentielle

$$(*) \quad \sum_{j=0}^N a_{N-j} \frac{d^j X}{dx^j} = B,$$

où B est une distribution causale qui admet une transformée de Laplace. On cherche la distribution causale X solution de $(*)$, qui s'écrit : $\sum_{j=0}^N a_{N-j} \delta^{(j)} * X = B$ ou encore, si l'on prend $a_0 = 1$,

$$(\delta' - \alpha_1 \delta) * (\delta' - \alpha_2 \delta) * \dots * (\delta' - \alpha_N \delta) * X = B.$$

Appliquons la transformée de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}(X)(z) = \frac{\mathcal{L}(B)(z)}{\prod_{j=1}^N (z - \alpha_j)}.$$

Le calcul symbolique est une méthode fondée sur l'utilisation de la transformée de Laplace, qui permet, une fois exprimée $\frac{1}{\prod_{j=1}^N (z - \alpha_j)}$ sous la forme d'une somme de fractions rationnelles simples, d'expliciter la solution X par inversion de la transformée de Laplace.

4.9 Les filtres

Dans le Chapitre 1 (Mesure et Intégration), on avançait l'hypothèse que les systèmes linéaires, stationnaires et continus, dénommés filtres, étaient des systèmes convolutifs. A toute entrée décrite par la fonction réelle $t \rightarrow x(t)$, un filtre répond par la fonction $y(t) = (x * h)(t)$, où h est la réponse impulsionnelle du filtre. Par exemple, nous avons démontré que le filtre RC répond à tout signal $x(t)$ par la fonction $y(t) = (\frac{1}{R.C} e^{-\frac{t}{R.C}} * x)(t)$, où $h(t)$ est ici égale à $\frac{1}{R.C} e^{-\frac{t}{R.C}}$.

Définition 22 : Un opérateur Φ d'un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un **filtre** s'il vérifie les propriétés :

- **Linéarité** : $\forall I$, partie finie de \mathbb{N} , $\forall (a_i)_{i \in I}$ réels, $\forall (T_i)_{i \in I}$ de E :

$$\Phi\left(\sum_{i \in I} a_i T_i\right) = \sum_{i \in I} a_i \Phi(T_i)$$

- **Stationnarité** (ou invariance par translation) : pour toute translation τ et pour toute distribution T de E :

$$\Phi(\tau(T)) = \tau(\Phi(T))$$

- **Continuité** : si la suite $(T_n)_n$ converge dans E vers T alors $(\Phi(T_n))_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $\Phi(T)$.

A cause de la continuité, de tels filtres sont souvent qualifiés d'analogiques, pour les distinguer des filtres discrets ou digitaux.

Définition 23 : $\Phi(\delta_0)$ est la **réponse impulsionnelle du filtre** Φ ; $\Phi(H_0)$ en est dite **réponse indicelle**.

Théorème 35 (Caractérisation convolutive des filtres dans le cas des distributions à support compact)

*A toute distribution T à support compact, un filtre quelconque Φ répond par $\Phi(T) = T * \Phi(\delta_0)$. Un filtre Φ est donc défini par le produit de convolution : $\Phi(\cdot) = \Phi(\delta_0) * (\cdot)$.*

Preuve (Considérons le cas où T est la limite d'une suite de signaux discrets $T_n = \sum_{j \in J_n} \alpha_j \cdot \delta_{x_j}$

où les α_j sont des réels et J_n est fini).

- $\Phi(T_n) = \sum_{j \in J_n} \alpha_j \Phi(\delta_{x_j})$ (par linéarité)
- $= \sum_{j \in J_n} \alpha_j \Phi(\tau_{x_j}(\delta_0)) = \sum_{j \in J_n} \alpha_j \tau_{x_j} \Phi(\delta_0)$ (par stationnarité)
- $= \sum_{j \in J_n} \alpha_j \delta_{x_j} * \Phi(\delta_0)$ (puisque pour toute distribution S : $\tau_{x_i}(S) = \delta_{x_i} * S$)
- donc $\Phi(T_n) = T_n * \Phi(\delta_0)$
- $\Phi(T_n)$ converge vers $\Phi(T) = T * \Phi(\delta_0)$ (par continuité).

□

Le théorème précédent n'est qu'une version (abordable du point de vue de sa démonstration) du théorème de caractérisation convolutive des filtres qui, étant donné son importance, est dit aussi Théorème de la physique linéaire. Dans le cas où l'on considère des distributions régulières définies par des fonctions de L^1 ou L^2 , on renvoie à l'ouvrage : Problèmes d'analyse fonctionnelle et harmonique de Samuelides et Touzillier.

Les filtres mis en œuvre en théorie du signal, sont généralement causaux, au sens où, pour toute distribution T de E , si le support de T est inclus dans $[t_0, +\infty[$, alors le support de $\phi(T)$ est inclus dans $[t_0, +\infty[$.

E 22 Les filtres discrets

Soit Φ l'opérateur qui associe à $\delta_{i/a}$ l'image $\Phi(\delta_{i/a}) = \sum_{j=0}^m s_j \delta_{(i+j)/a}$ où les $(s_j)_j$ sont des réels fixés, caractérisant Φ .

(1) Démontrer que Φ est linéaire et stationnaire.

[Indication : L'espace des distributions à supports discrets est muni de la convolution $\delta_{ia} * \delta_{ja} = \delta_{(i+j)a}$.]

(2) Vérifier que pour tout T de la forme $T = \sum_{j=0}^q \alpha_j \delta_{j/a}$, où a est un réel strictement positif, on a : $\Phi(T) = \Phi(\delta_0) * T$.

Nous allons démontrer que les filtres ne déforment pas, à un coefficient multiplicatif près, les exponentielles complexes.

Théorème 36 (Caractéristique spectrale des filtres)

Si la réponse impulsionnelle $\Phi(\delta_0)$ du filtre Φ admet une transformée de Fourier, alors pour tout $\nu \in \mathbb{R}^*$, $e^{2i\pi\nu t}$ est fonction propre de Φ :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}^* \quad \Phi(e^{2i\pi\nu t}) = \lambda(\nu) \cdot e^{2i\pi\nu t}$$

$\lambda(\nu)$ égal à $\mathcal{F}(\Phi(\delta_0))(\nu)$ est dite **fonction de transfert du filtre**.

Preuve Cas où la réponse impulsionnelle $\Phi(\delta_0)$ est une fonction f .

$$\Phi(e^{2i\pi\nu t}) = (e^{2i\pi\nu t} * f)(t) = \int e^{2i\pi\nu(t-s)} f(s) ds = e^{2i\pi\nu t} \hat{f}(\nu) = e^{2i\pi\nu t} \mathcal{F}(\Phi(\delta_0)) .$$

L'exponentielle complexe $t \mapsto e^{2i\pi\nu t} = \cos(2i\pi\nu t) + i \sin(2i\pi\nu t)$ est donc fonction propre de tout filtre Φ , quelle que soit la fréquence ν . Le signal réponse $\Phi(e^{2i\pi\nu t})$ est de même fréquence que $e^{2i\pi\nu t}$, mais son amplitude est égale à $|\mathcal{F}(\Phi(\delta_0))|$ dit **gain en amplitude**, et il est **déphasé** de $\arg(\mathcal{F}(\Phi(\delta_0)))$ par rapport au signal $e^{2i\pi\nu t}$. \square

Ce dernier théorème est important, puisqu'il établit que l'analyse et la synthèse harmoniques des signaux s'opèrent sur une base discontinue (cas des signaux périodiques) ou continue (cas des signaux quelconques), formée des fonctions propres $(e^{2i\pi\nu t})_{\nu \in \mathbb{Z}}$ communes à tous les filtres (il serait pertinent de rapprocher l'ensemble de ces résultats de ceux obtenus dans le cadre de la théorie spectrale des endomorphismes de dimension finie).

Si T est une distribution de période a , elle s'écrit sous la forme unique de sa série de Fourier : $T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2i\pi n t}{a}}$. Pour tout filtre Φ , $\Phi(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \hat{\Phi}\left(\frac{n}{a}\right) e^{\frac{2i\pi n t}{a}}$.

Conclusion : les fréquences de la réponse $\Phi(T)$ sont les mêmes que les fréquences du signal T . Seuls leurs poids relatifs varient, d'un coefficient $\hat{\Phi}\left(\frac{n}{a}\right)$.

4.10 Corrigés des exercices

E1

On remarque $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \Phi(x) = 0$. La démonstration se fait ensuite par récurrence :

$$(a) \Phi'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \Phi(x), \text{ égal à } 0 \text{ pour } x = \pm 1.$$

(b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\Phi^{(k+1)}(x) = \Phi(x) R(x)$, où $R(x)$ est une fraction rationnelle. On conclut que $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \Phi(x) R(x) = 0$.

E2

(a) Soit la suite $(\phi_n)_n$ convergente vers ϕ dans \mathcal{D} :

$\forall p$ entier ≥ 0 , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n^{(p)} - \phi^{(p)}\|_\infty = 0$, où le support $(\phi_n^{(p)}) \subset K$, $\forall n$.

$$\text{Soit } f \in L^1_{loc} : \quad \left| \int f \phi dx - \int f \phi_n dx \right| \leq \|\phi - \phi_n\|_\infty \int_K |f| dx$$

par passage à la limite des deux membres on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n f dx = \int \phi f dx$

$$\text{et : } \delta(\phi_n) = \phi_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(0) = \delta(\phi)$$

(b) T_1 (oui !); T_2 (non ! pas de linéarité); T_3 (non !, divergence possible de la série); T_4 (oui ! car au-delà d'un N , $\varphi(N) = 0$); T_5 (oui !).

E3

$\forall \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\text{Supp}(\Phi) \subset [-a, +a]$: $\int_{-a}^a \cos(nx) \cdot \Phi(x) dx$ converge vers 0 grâce au théorème de Riemann-Lebesgue : si f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) e^{inx} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Conclusion :

$$Tg_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(\mathcal{D}')} 0 \quad .$$

E4

Pour toute fonction ϕ , il existe $a > 0$ tel que $\text{Supp}(\phi)$ est contenu dans $[-a, +a]$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\left| \int_{-a}^{+a} \underbrace{f_n(x)(\phi(x) - \phi(0))}_{g_n(x)} dx \right| \leq \int_{-a}^{-\varepsilon} |g_n(x)| dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_n(x)| dx + \int_{\varepsilon}^a |g_n(x)| dx \quad .$$

$\int_{-a}^{-\varepsilon} |g_n(x)| dx \leq \sup_{x \in [-a, -\varepsilon]} |\phi(x) - \phi(0)| \int_{-a}^{-\varepsilon} |f_n(x)| dx$. Cette dernière intégrale tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, car $(f_n)_n$ est une unité approchée. Donc $\int_{-a}^{-\varepsilon} |g_n(x)| dx$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ceci pour tout ε .

Même argument par pour $\int_{\varepsilon}^a |g_n(x)| dx$.

Enfin, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_n(x)| dx \leq \sup_{y \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |\phi'(y)| \times \varepsilon \times \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f_n(x)| dx$, qui converge vers εM si n tend vers $+\infty$, d'où le résultat en choisissant ε aussi petit que l'on veut.

E6

(a)

$$\left\langle \frac{n}{2} \left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{-1}{n}} \right), \phi \right\rangle = \frac{n}{2} \left(\phi\left(\frac{1}{n}\right) - \phi\left(\frac{-1}{n}\right) \right) = \frac{n}{2} \frac{2}{n} \phi'\left(\frac{c}{n}\right) = \phi'\left(\frac{c}{n}\right)$$

où c est une constante dépendante de n et qui appartient à $] -1, +1[$.

Si $n \rightarrow +\infty$, $\phi'\left(\frac{c}{n}\right) \rightarrow \phi'(0)$ d'où $U_n \rightarrow -\delta'_0$ dans \mathcal{D}' .

(b)

$$\left\langle 4n^2 \left(\delta_{\frac{1}{2n}} - 2\delta_0 + \delta_{\frac{-1}{2n}} \right), \phi \right\rangle = 4n^2 \left(\phi\left(\frac{1}{2n}\right) + \phi\left(\frac{-1}{2n}\right) - 2\phi(0) \right)$$

Faisons un développement limité à l'ordre 2 de $\phi\left(\frac{1}{2n}\right) - \phi(0)$ avec reste de Lagrange. On obtient : $\frac{1}{2n}\phi'(0) + \frac{1}{8n^2}\phi''\left(\frac{c_1}{2n}\right)$. Idem pour : $\phi\left(\frac{-1}{2n}\right) - \phi(0) = \frac{-1}{2n}\phi'(0) + \frac{1}{8n^2}\phi''\left(\frac{c_2}{2n}\right)$. Sommons les expressions obtenues et faisons tendre n vers $+\infty$. On obtient : $\phi''(0)$, et donc $V_n \rightarrow \delta''_0$.

E8

$$(1) \langle v.p \left(\frac{1}{x} \right), \Phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Phi(x) - \Phi(-x)}{x} dx$$

(2)

$$\begin{aligned} \langle (\ln|x|)', \Phi \rangle &= - \int \ln|x| \cdot \Phi'(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x| \cdot \Phi'(x) dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x| \cdot \Phi'(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\underbrace{(\Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon))}_{2\varepsilon \cdot \Phi'(c_\varepsilon) \text{ qui converge vers } 0} \cdot \ln(\varepsilon) + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Phi(x)}{x} dx \right) \\ &= \langle v.p \left(\frac{1}{x} \right), \Phi \rangle. \end{aligned}$$

E9

$$c \mathbf{1}_{\mathbb{R}} + \frac{1}{3}H(x) + \frac{1}{2}H(x-1) + \frac{1}{6}H(x-2), \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

E11

$$\langle v.p(\frac{1}{x}) + a \cdot \delta_0, x \cdot \Phi(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x \cdot \Phi(x)}{x} dx + 0 = \langle \mathbf{1}_{\mathbb{R}}, \Phi \rangle$$

Supposons qu'il existe deux solutions, notées T_1 et T_2 . Alors $x(T_1 - T_2) = 0$, ce qui entraîne $T_1 - T_2 = c \delta_0$, d'après le résultat précédent. On en conclut que les distributions de la forme $T = v.p(\frac{1}{x}) + a \delta_0$ constituent un ensemble de solutions de $xT = 1$, lorsque a parcourt \mathbb{R} .

E13

$$\langle \delta_a * T, \Phi \rangle = \langle T_x \otimes \delta_a(x), \Phi(x+y) \rangle = \langle T, \Phi(a+y) \rangle = \langle T, \tau_{-a}(\Phi) \rangle = \langle \tau_a(T), \Phi \rangle$$

E14

(2-3) $e^{2i\pi ax} \in L^\infty(\mathbb{R})$ donc définit une distribution tempérée ;

$$\langle \widehat{e^{2i\pi ax}}, \Phi \rangle = \overline{\mathcal{F}(\widehat{\Phi}(a))} = \overline{\Phi(a)} = \langle \delta_a, \Phi \rangle \text{ d'où : } \widehat{\mathbf{1}} = \delta_0, \text{ en choisissant } a = 0.$$

(4) $\langle \widehat{\delta_0}, \Phi \rangle = \langle \delta, \widehat{\Phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) dx = \langle \mathbf{1}, \Phi \rangle.$

(5) $\widehat{\delta_0^{(n)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^n \text{ car } \widehat{T^{(k)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^k \cdot \widehat{T}(\nu) \text{ (Théorème 20).}$

E15

(1) $H' = \delta_0 \Rightarrow \widehat{H'(\nu)} = 2i\pi\nu \widehat{H}(\nu) = \widehat{\delta_0}(\nu) = 1.$

Soit à résoudre : $2i\pi\nu \cdot \widehat{H}(\nu) = 1$. D'après l'exercice 11, $\widehat{H}(\nu) = v.p(\frac{1}{2i\pi\nu}) + a\delta_0.$

(2) $H(x) + H(-x) = 1 \Rightarrow \widehat{H}(\nu) + \widehat{H}(-\nu) = \widehat{\mathbf{1}}(\nu) = \delta_0(\nu).$

Or : $\widehat{H}(\nu) + \widehat{H}(-\nu) = 2a\delta_0$, donc $a = \frac{1}{2}$ et $\widehat{H}(\nu) = v.p(\frac{1}{2i\pi\nu}) + \frac{1}{2}\delta_0$

E16

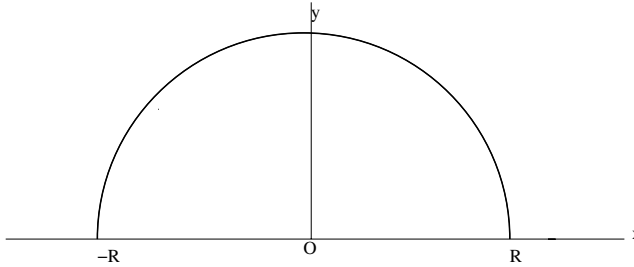
$$\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \Rightarrow \widehat{\cos^2(\omega t)}(\nu) = \frac{1}{4}(2\delta_0 + \delta_{-\frac{\nu}{2}} + \delta_{\frac{\nu}{2}})$$

E17

$$\widehat{y^{(4)}}(\nu) = (2\pi\nu)^4 \widehat{y}(\nu) \text{ et } \widehat{\delta}_0 = 1$$

L'équation différentielle transformée $\Rightarrow \widehat{y}(\nu) = \frac{m}{M(2\pi\nu)^4+k}$ est une fonction de L^1 , d'où l'application possible de la transformation de Fourier inverse : $y(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{me^{2i\pi\nu x}}{M(2\pi\nu)^4+k} d\nu$.
Par hypothèse physique, $y(x)$ est paire.

On utilise la méthode de calcul des résidus (Chapitre 6) sur le circuit ci-dessous.



Il y a deux pôles à l'intérieur du contour dès que R est suffisamment grand : $z_1^* = \left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2^* = \left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{3i\pi}{4}}$

$$y(x) = i \frac{m}{4M} \left(\frac{e^{ixz_1^*}}{z_1^{*3}} + \frac{e^{ixz_2^*}}{z_2^{*3}} \right) \quad \forall x \geq 0$$

Posons $a = \left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{4}}$:

$$y(x) = \frac{m}{4Ma^3} e^{-a|x|} (\cos a|x| + \sin a|x|).$$

$y(x)$ est la réponse impulsionnelle du système différentiel.

E18

(a) Récurrence : $T_{k+1} = T_k * T_1 = \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k \mathcal{C}_k^j \delta_{2j-k}\right) * \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$
 $= \frac{1}{2^{k+1}} \left(\sum_{j=0}^k \mathcal{C}_k^j \delta_{2j-k+1} + \sum_{j=0}^k \mathcal{C}_k^j \delta_{2j-k-1}\right) = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{C}_{k+1}^j \delta_{2j-(k+1)}$
 (en utilisant l'identité : $\mathcal{C}_k^j + \mathcal{C}_k^{j-1} = \mathcal{C}_{k+1}^j$)

(b) $\mathcal{F}(T_k) = \mathcal{F}(T_1^{*k}) = (\mathcal{F}(T_1))^k = \frac{1}{2^k} (e^{-2i\pi\nu} + e^{2i\pi\nu})^k = \frac{1}{2^k} (2 \cos 2\pi\nu)^k = (\cos 2\pi\nu)^k$

(c) $f_k(\nu) = \left(\cos\left(\frac{2\pi\nu}{2\pi\sqrt{k}}\right)\right)^k \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\sqrt{k}}\right)^2\right)^k$ pour k grand $\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{\nu^2}{2}}$

Donc : $\widehat{T}_k \left(\frac{\nu}{2\pi\sqrt{k}}\right) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{\nu^2}{2}}$ d'où : $T_k \left(\frac{x}{2\pi\sqrt{k}}\right) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 x}$.

E19

(1) $S(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi\nu n}$ distribution tempérée converge dans \mathcal{S}' .

(2) $e^{2i\pi\nu} S(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi\nu(n-1)} = S(\nu)$.

$S(\nu + 1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi\nu n} e^{-2i\pi\nu} = S(\nu)$, donc S est 1-périodique.

(3) Comme $S(\nu)$ est 1-périodique, on a : $a_n = a$, constante pour tout entier n . Par ailleurs, on a :

$$\langle S(\nu), e^{-\pi\nu^2} \rangle = \langle \widehat{\text{III}}(\nu), e^{-\pi\nu^2} \rangle = \langle \text{III}(\nu), \widehat{e^{-\pi\nu^2}} \rangle = \langle \text{III}(\nu), e^{-\pi\nu^2} \rangle.$$

Comme $S(\nu) = a \text{ III}(\nu)$, on en déduit : $\langle S(\nu), e^{-\pi\nu^2} \rangle = a \langle \text{III}(\nu), e^{-\pi\nu^2} \rangle$, et donc $a = 1$.

(4) $\widehat{\text{III}}_a(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n a \nu} = \frac{1}{a} \text{III}_{\frac{1}{a}}(\nu)$.

E20

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = -\pi^2 g + 2\pi \text{III}. \text{ D'où : } \widehat{g}(\nu) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta_n}{1 - 4n^2}, \text{ et } g(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2\pi n t)}{4n^2 - 1}.$$

E22

(1) Stationnarité. Soit la translation $\tau(\delta_{ia}) = \delta_{(i+1)a}$, pour tout entier i . Alors :

$$\tau(\Phi(\delta_{ia})) = \sum_{j=0}^m s_j \tau(\delta_{(i+j)a}) = \sum_{j=0}^m s_j \tau(\delta_{(i+1+j)a}) = \Phi(\tau(\delta_{ia})).$$

(2) $\Phi(\delta_0) = \sum_{j=0}^m s_j \delta_{ja}$. Il suffit de choisir $T = \delta_{ia}$

$\Phi(\delta_0) * \delta_{ia} = \sum_{j=0}^m s_j \delta_{(i+j)a} = \Phi(\delta_{ia})$. Si T est une combinaison linéaire de δ_{ia} , le résultat est acquis par la linéarité de Φ .

Chapitre 5

Fonctions holomorphes, transformations conformes

La notion de nombre complexe émergea des travaux de l'école mathématique italienne du XVIème siècle, concernant le problème de la résolution exacte des équations algébriques de degré supérieur à deux. C'est au sein de cette problématique, qu'apparut la nécessité opératoire d'utiliser un nombre doté de l'"horifique" propriété d'avoir un carré égal à -1 , et qu'on appela "imaginaire" tellement était irréaliste son statut de concept mathématique.

Les idées fondatrices de l'analyse complexe dues principalement à Euler (1707-1783), apparurent dans la deuxième moitié du XVIIIème siècle. Lors de l'étude du mouvement plan d'un fluide incompressible stationnaire, d'Alembert mit en évidence, sous une forme équivalente, la condition d'holomorphie, aujourd'hui connue sous le nom de conditions de Cauchy (1789-1857). Gauss (1777-1855) et Argand entreprirent ensuite la construction d'une géométrie et d'une algèbre des nombres complexes.

Jusqu'au début du XIXème siècle, il était admis qu'une fonction réelle était égale en tout point, à sa série de Taylor ; les travaux de Gauss et de Cauchy mirent un terme à cette hypothèse en faisant un usage rigoureux de la notion de convergence. Dès lors, la jeune théorie des fonctions analytiques définies comme étant égales à leurs développements en séries de Taylor, fut étendue au domaine complexe par Cauchy qui en développa le corps de doctrine. Riemann puis Weierstrass parachèverent la théorie du prolongement analytique et de la transformation conforme largement utilisée pour la réalisation de cartes géographiques.

Relativement indépendante des théories et méthodes de l'analyse fonctionnelle, la théorie des fonctions holomorphes conjugue l'élégance de sa structure avec une grande efficacité opératoire. Ses applications sont nombreuses en physique et en sciences de l'ingénieur : vous en mesurerez bientôt l'importance en mécanique des fluides, via la transformation conforme, et en théorie du signal grâce à la transformation en Z .

5.1 Fonctions d'une variable complexe

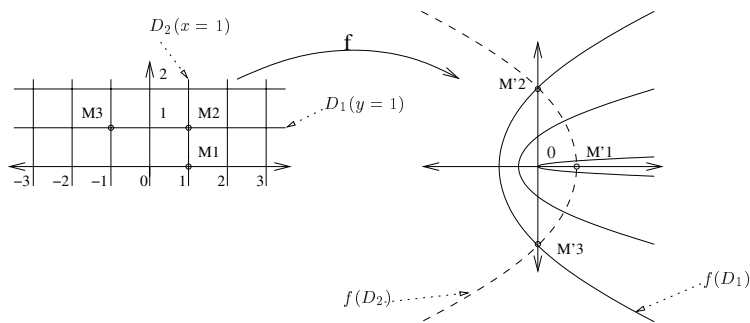
Définition 1 : Une fonction f du sous-ensemble $D \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans \mathbb{C} est définie par :

$$\forall z = x + iy \in D, f(x + iy) = P(x, y) + i.Q(x, y).$$

$P(x, y)$ est la **partie réelle** de $f(z)$ et $Q(x, y)$ est la **partie imaginaire** de $f(z)$.

Exemple 1 :

- (1) Soit la fonction f qui associe à tout point z du demi-plan supérieur le point image $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$.
 Comment se transforme par f le demi-plan structuré par un maillage carré de côté 1 ?



On imagine la diversité des transformées possibles du plan complexe obtenues par les applications complexes.

- (2) Soit la fonction $g : z \in \mathbb{C} \rightarrow g(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$.
 Quelle est l'image du réseau carré précédent par g ?

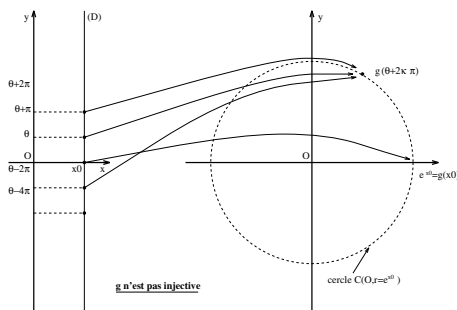
Définition 2 : Une fonction complexe f est **uniforme** ou **univoque** si à chaque $z \in \mathcal{D}$ ne correspond qu'une image $f(z)$.

Exemple 2 :

- (1) $f(z) = z^2$ est uniforme.
 (2) Etude de $g(z) = e^z$.

On a : $g(z) = \underbrace{e^x \cos y}_{P(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{Q(x,y)}$ d'où : $P^2(x,y) + Q^2(x,y) = e^{2x}$.

Toute droite d'équation $x = x_0$ se transforme en un cercle de rayon $\sqrt{e^{2x_0}} = e^{x_0}$. Aux points $(x_0, \theta + 2k\pi)_{k \in \mathbb{Z}}$, la fonction complexe g associe une unique image : $(e^{x_0} \cos \theta, e^{x_0} \sin \theta)$



Posons $w = \ln(z)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $w = U(x, y) + iV(x, y)$ et $e^w = z$.

Donc : $e^{U(x,y)+iV(x,y)} = z = re^{i\theta}$ et par identification des deux membres :

$e^{U(x,y)} = r$ et $e^{iV(x,y)} = e^{i\theta}$. Par conséquent : $U(x, y) = \ln(r)$ et $V(x, y) = \theta + 2k\pi$. Ainsi :

$$\boxed{\ln(z) = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}}$$

Définition 3 : Une fonction complexe qui associe à $z \in \mathcal{D}$, plusieurs images est dite **multi-forme**.

Nous ne nous intéresserons dans ce cours, qu'aux seules fonctions uniformes.

Intermède biographique : Leonhard EULER (1701-1783)

Issu d'une famille protestante de Bâle, il se forme aux mathématiques auprès de J. Bernouilli, tout en étudiant la philosophie et la théologie afin de répondre au désir paternel. Sa carrière débute à l'université de Saint-Petersbourg comme professeur de mathématiques et responsable du département de géographie ! D'une fécondité inégalée dans l'histoire des mathématiques, auteur de 900 articles ou livres (et de 13 enfants), il est doté d'une prodigieuse mémoire, véritable encyclopédie mathématique à laquelle il se réfère sans cesse ; pendant les douze dernières années de sa vie, il est frappé de cécité et poursuit l'élaboration de son œuvre en la dictant à ses collaborateurs.

De 1748 à 1770 il fait paraître trois traités d'analyse où le concept de fonction héritée de J. Bernouilli, définie comme "une expression analytique composée d'une variable, de nombres et de qualités constantes" joue un rôle central. Le lecteur peu averti de l'évolution des mathématiques appréciera l'écart entre cette approche descriptive de la notion de fonction et la conception opératoire attachée à la définition actuelle. L'immensité de sa production mathématique décourage toute entreprise de recension ; aussi nous contenterons nous d'en donner quelques traits saillants, en rappelant combien était peu rigoureuse l'analyse de ce temps, et celle d'Euler en particulier :

- nombreux travaux sur les séries de fonctions ;
- étude des équations différentielles linéaires ;
- travaux variés en théorie des nombres, notamment démonstration du petit théorème de Fermat ;
- participation à la controverse née du problème que pose la représentation des fonctions quelconques par des séries trigonométriques, ce problème représentatif des limites des mathématiques du dix-huitième siècle, intéressa d'Alembert, Daniel Bernouilli et Fourier, et contribua fortement au développement de l'analyse au siècle suivant ;
- production en analyse complexe d'un certain nombre d'égalités classiques telles que l'expression des sinus et cosinus, et la très fameuse identité $e^{i\pi} = -1$;
- établissement des équations générales de l'hydrodynamique ;
- travaux en astronomie sur les perturbations planétaires et la précession des équinoxes.

5.2 Fonctions holomorphes

Leurs caractérisations et propriétés originales en font un outil incontournable pour la physique, la théorie du signal et la mécanique des fluides.

Définition 4 :

Une fonction complexe $f(z) \equiv P(x, y) + iQ(x, y)$ d'un ouvert O dans \mathbb{C} , est **\mathbb{R} -différentiable** si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables en x et y .

La fonction f d'un ouvert O de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est dite **\mathbb{C} -différentiable** en z_0 si :

$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)$ existe et est unique, notée $f'(z_0)$, **quelle que soit la façon dont z tend vers z_0 .**

Une fonction \mathbb{C} -différentiable est \mathbb{R} -différentiable ; la réciproque est fautive.

Une fonction est **holomorphe** en z_0 , si elle est \mathbb{C} -différentiable dans un voisinage de z_0 :

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0) \quad \forall z \text{ voisin de } z_0.$$

Exemple 3 : La fonction $\varphi : z \in \mathbb{C} \rightarrow \varphi(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ est \mathbb{R} -différentiable, mais non holomorphe.

$$\text{On a : } \frac{\varphi(z_0 + \Delta z_0) - \varphi(z_0)}{\Delta z_0} = \frac{\Delta x_0}{\Delta x_0 + i\Delta y_0}$$

(a) si $z \rightarrow z_0$, parallèlement à l'axe $x'x$ alors : $\Delta z_0 = \Delta x_0$

$$\text{et } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z_0 + \Delta z_0) - \varphi(z_0)}{\Delta z_0} = \frac{\Delta x_0}{\Delta x_0} = 1$$

(b) si $z \rightarrow z_0$, parallèlement à l'axe $y'y$ alors : $\Delta z_0 = i\Delta y_0$

$$\text{et } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z_0 + \Delta z_0) - \varphi(z_0)}{\Delta z_0} = 0$$

$\varphi(z) = \operatorname{Re}(z)$ n'est holomorphe en aucun z de \mathbb{SC} .

Attention ! Les fonctions réelles différentiables, ont des extensions holomorphes qui n'ont pas nécessairement les mêmes propriétés ; en voici deux exemples :

$$-\forall x \in \mathbb{R} \mid \sin x \leq 1, \text{ tandis que } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^y}{2i}(e^{ix-2y} - e^{-ix}) \text{ est non bornée.}$$

- La fonction réelle e^x qui est non périodique, admet l'extension complexe e^{x+iy} qui est périodique en y dans \mathbb{C} .

Nous allons rechercher des conditions d'holomorphicité d'une fonction ; mais préalablement démontrons les relations classiques qui lient les opérateurs de dérivation réels et complexes.

Soit la fonction $f(z)$ \mathbb{R} -différentiable :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Théorème 1 (Caractérisation des fonctions holomorphes) Soit $f : O \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, supposée \mathbb{R} -différentiable :

$$(f \text{ holomorphe en } z_0) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Preuve f étant \mathbb{R} -différentiable, $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$; compte-tenu des relations précédentes on a : $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ (*).

D'autre part l'holomorphie de f en z_0 s'exprime grâce à la définition 4, par :

$$\Delta f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot \Delta z + o(\Delta z),$$

d'où il vient grâce à (*) : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Cette dernière égalité s'écrit aussi : $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) = 0$, qui est équivalente aux conditions de Cauchy exprimées plus loin. \square

D'après cette caractérisation, une fonction complexe qui nécessite la variable \bar{z} dans son explicitation, ne peut être holomorphe. C'est le cas des fonctions $\mathcal{R}\acute{e}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

E 1 Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes et dans quels domaines ?

$$f(z) = \bar{z}, \quad h(z) = e^{1/z}.$$

Parmi les nombreuses caractérisations des fonctions holomorphes, les «conditions de Cauchy» sont les plus fondamentales.

Théorème 2 (Conditions de Cauchy) Une fonction $f = P + iQ$ est holomorphe dans un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{C} si et seulement si P et Q sont différentiables dans \mathcal{O} et vérifient les relations dites conditions de Cauchy :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Preuve

(\implies) Par le théorème 1 : f holomorphe en $z_0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$. Il suffit d'exprimer $f(x, y)$ sous la forme $P(x, y) + iQ(x, y)$ pour retrouver les conditions de Cauchy.

(\Leftarrow) Soit $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, l'accroissement de z ; P et Q étant différentiables, on a :

$$\Delta P = \Delta x \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \Delta y \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) + a\Delta x + b\Delta y$$

$$\Delta Q = \Delta x \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \Delta y \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right) + c\Delta x + d\Delta y$$

($a, b, c,$ et d étant des infiniment petits qui tendent vers 0, si $\Delta z \rightarrow 0$)

Soit $\Delta f = \Delta P + i\Delta Q$

$$\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \Delta y \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \Delta x(a + ic) + \Delta y(b + id)$$

$$\Delta f = (\Delta x + i\Delta y) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \Delta x(a + ic) + \Delta y(b + id)$$

(conditions
de Cauchy)

$$\text{d'où : } \frac{\Delta f}{\Delta z} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} (a + ic) + \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} (b + id)$$

Les deux derniers termes de l'égalité précédente convergent vers 0 quand Δz tend vers 0, puisque le module de leur somme est majoré par :

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} \right| (|a| + |c|) + \left| \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right| (|b| + |d|) \leq |a| + |b| + |c| + |d|$$

qui tend vers 0 quand $\Delta z \rightarrow 0$.

$$\text{Ainsi : } \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}$$

□

E 2 Soient les deux fonctions de la variable complexe $f(z) = \cos(z)$ et $g(z) = \sin(z)$.

- (1) En admettant que les formules trigonométriques classiques restent vraies dans \mathbb{C} , exprimer $f(z) = \cos(z)$ et $g(z) = \sin(z)$ en fonction de x et y où $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.
- (2) Déterminez la dérivée de $f(z)$.
- (3) Pour quels points du plan complexe a-t-on $f(z) = 0$?

E 3

- (1) Vérifier que les équations de Cauchy s'écrivent en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}.$$

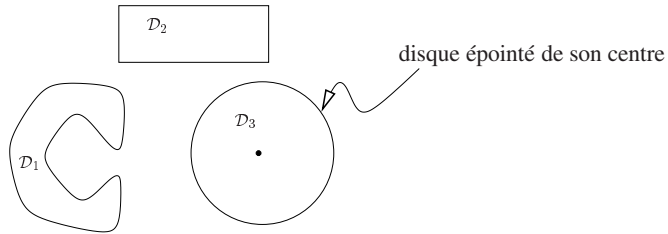
- (2) Soit $f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + iQ(x, y)$. Déterminer $Q(x, y)$ pour que $f(z)$ soit **holomorphe**.

Remarque : Nous considérons désormais des ouverts connexes de \mathbb{C} , appelés domaines de \mathbb{C} .

Définition 5 : Un domaine \mathcal{D} est **simplement connexe** si son bord dans $\overline{\mathcal{C}}$ est connexe ; on pourrait dire aussi que le domaine est "sans trou".

Exemple 4 :

\mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont simplement connexes. \mathcal{D}_3 n'est pas simplement connexe.



Caractérisation de l'holomorphic d'une fonction par l'harmonicité de ses parties réelle et imaginaire :

Rappel : une fonction $g(x, y)$ de classe C^2 est dite **harmonique** si elle est solution de l'équation de **Laplace** :

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

Les potentiels des champs scalaires de la physique sont représentés par des fonctions harmoniques.

Théorème 3 (Relation entre harmonicité et holomorphic.)

- (1) Si f est holomorphic dans un domaine \mathcal{D} , ses parties réelle et imaginaire, P et Q sont harmoniques.
- (2) Si la fonction réelle $P(x, y)$ de classe C^2 est harmonique dans un domaine connexe \mathcal{D} , alors elle est la partie réelle d'une fonction holomorphic f , déterminée à une constante additive près.

Preuve

(1) f holomorphic $\iff P$ et Q différentiables et $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$,

d'où il vient (on admet que P et Q sont C^2 car f est même analytique donc C^∞ . (Cf le chapitre suivant) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \end{array} \right\} \implies \Delta Q = \Delta P = 0$$

(2) Nous ferons la démonstration dans le cas où Ω est le disque ouvert $D(z_0, R)$.

Existence de f :

soit $\Phi(x + x_0, y + y_0) = - \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + u, y_0) du + \int_0^y \frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + x, y_0 + u) du + \text{constante}$; Φ est définie pour tout $(x + x_0, y + y_0)$ de \mathcal{D} . La fonction P étant C^2 , les intégrales sont définies et l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x + x_0, y + y_0) &= - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + x, y_0) + \int_0^y \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_0 + x, y_0 + u) du \\ &= - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + x, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + x, y_0 + y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + x, y_0) \\ &= - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + x, y_0 + y) \end{aligned}$$

De même : $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x + x_0, y + y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + x, y_0 + y)$.

La fonction $f = P + i\Phi$ est donc de classe C^1 dans \mathcal{D} , et vérifie les conditions de Cauchy dans \mathcal{D} : elle est donc holomorphe dans \mathcal{D} et Φ est sa partie imaginaire.

Unicité de f : Supposons f_1 et f_2 , holomorphes dans \mathcal{D} telles que $P_1 = P_2$, alors $f_1 - f_2 = h$ est holomorphe dans \mathcal{D} de partie réelle nulle ; la partie imaginaire a ses deux dérivées partielles en x et y , nulles. Donc h est une constante car \mathcal{D} est connexe. □

Définition 6 : Une **fonction entière** est une fonction holomorphe dans le plan complexe \mathbb{C} .

Les polynômes à coefficients réels ou complexes, les exponentielles, les fonctions $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\operatorname{sh}(z)$, $\operatorname{ch}(z)$ sont des fonctions entières.

E 4 Résolution de l'équation de Laplace avec deuxième membre : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = x^2 + y^2$

- (1) Exprimer les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$
- (2) En déduire l'expression du gradient complexe : $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ et de son conjugué $\bar{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.
- (3) Montrer que $\nabla(P(x, y) + iQ(x, y)) = 0 \iff$ conditions de Cauchy
- (4) Application : transformer l'équation de Laplace en une équation complexe, la résoudre et expliciter la solution générale réelle $U(x, y)$.

Théorème 4 (Propriétés des fonctions holomorphes)

Les fonctions holomorphes du domaine \mathcal{D} dans \mathbb{C} forment un espace vectoriel, et vérifient :

$$\left. \begin{array}{l} - f \text{ holomorphe : } \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2 \\ - g \text{ holomorphe : } \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{C} \end{array} \right\} \implies g \circ f \text{ holomorphe de } \mathcal{D}_1 \text{ dans } \mathbb{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} - f \text{ holomorphe et partout} \\ - \text{différente de } 0 \text{ dans } \mathcal{D} \end{array} \right\} \implies \frac{1}{f} \text{ holomorphe dans } \mathcal{D}$$

E 5 Nous allons montrer que les fonctions holomorphes permettent de générer facilement des familles de courbes orthogonales, utiles en mécanique des fluides et en électromagnétisme pour modéliser les lignes de courant et les équipotentielles.

Soient deux familles de courbes :

$$F_1 = \{(x, y) \mid P(x, y) = \alpha \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$F_2 = \{(x, y) \mid Q(x, y) = \beta \text{ où } \beta \in \mathbb{R}\}$$

P et Q étant les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe donnée, à dérivée non nulle.

- (1) Montrer que ces familles sont **orthogonales** donc que chaque courbe de F_1 coupe chaque courbe de F_2 sous un angle droit.

On calculera $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ puis on en déduira $\frac{dy}{dx}$ pour chacune des familles de courbes.

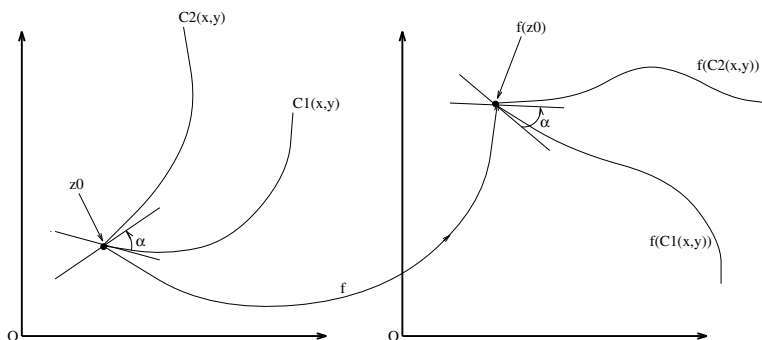
[rappel : deux courbes sont orthogonales en leur point d'intersection si le produit des pentes des deux courbes en ce point est égal à -1 ; exprimer d'abord ces pentes en fonction de P et Q .]

- (2) Déterminer les familles orthogonales F_2, F_2' respectivement associées aux familles de courbes :

$$\left(\begin{array}{l} F_1 = \{(x, y) \mid xy = \alpha\} \\ F_1' = \{(r, \theta) \mid (r + \frac{1}{r}) \cos \theta = \alpha\} \end{array} \right)$$

5.3 Transformations conformes

Une application différentielle f du domaine \mathcal{D} de \mathbb{C} dans $f(\mathcal{D})$ est dite **conforme** en z_0 , si étant données deux courbes continûment différentiables γ_1 et γ_2 se coupant en z_0 selon l'angle α , alors les courbes images $f(\gamma_1)$ et $f(\gamma_2)$ se coupent en $f(z_0)$ selon le même angle.



Théorème 5 Soient deux courbes continûment différentiables γ_1 et γ_2 se coupant en z_0 , selon un angle α :

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ holomorphe en } z_0 \\ \text{et } f'(z_0) \neq 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} f(\gamma_1) \text{ et } f(\gamma_2) \text{ se coupent selon} \\ \text{le même angle } \alpha \text{ que } \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \end{array} \right)$$

Preuve

(\Rightarrow) Rappelons qu'une similitude \mathcal{S} dans \mathbb{C} , d'angle α et de rapport ρ , appliquée à z , s'exprime par le produit de z par $\rho \cdot e^{i\alpha}$; en effet si $z = r \cdot e^{i\theta}$, alors $\rho \cdot e^{i\alpha} z = \rho r \cdot e^{i(\alpha+\theta)}$ est l'image de z par une similitude.

Or les seules applications linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui conservent les angles sont les similitudes ; donc l'application linéaire tangente $Df(z_0)$ de f en z_0 , conservant localement les angles, est nécessairement une similitude de centre z_0 .

Dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , la matrice de $Df(z_0) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array} \right) (z_0)$ est donc une matrice de similitude de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

L'identification des deux matrices conduit aux conditions de Cauchy, qui caractérisent l'holomorphicité de f en z_0 .

Pour démontrer l'implication inverse, il suffit de démontrer que la tangente en z_0 d'une courbe \mathcal{C} du plan complexe passant par z_0 , est transformée par la fonction holomorphe f de dérivée non nulle en z_0 , en une tangente à la courbe $f(\mathcal{C})$ en $f(z_0)$, ayant subi une rotation d'angle égal à $\arg(f'(z_0))$. \square

Interprétation : les fonctions holomorphes sont les seules fonctions complexes qui conservent les angles entre deux courbes, en tout point d'intersection où leurs dérivées sont non nulles ; elles sont dites **transformations conformes**.

Voici quelques transformations conformes classiques :

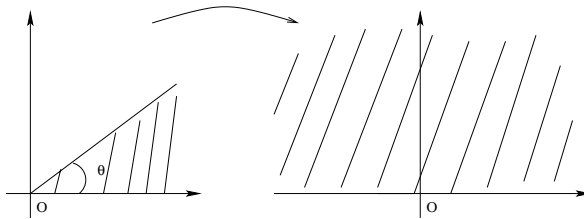
(a) les transformations linéaires $f(z) = a \cdot z + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$, qui sont des compositions de rotations, homothéties et translations ; en effet, $f(z)$ s'écrit toujours $\alpha \cdot e^{i\theta} \cdot z + b$ ($\alpha, \theta \in \mathbb{R}$). On démontre que les seules transformations complexes de \mathbb{C} sur lui-même sont de cette forme.

(b) les puissances $f(z) = z^m$ ($m \in \mathbb{R}^{*+}$).

(c) les homographies $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, où les complexes a, b, c, d vérifient $ad - bc \neq 0$.

E 6 Soit $f(z) = z^m$ où m est un réel $> \frac{1}{2}$:

- (1) Vérifier que f est la transformation conforme qui transforme le secteur angulaire d'angle $\theta = \frac{\pi}{m}$ en le demi-plan $\text{Im}(z) \geq 0$.



- (2) Quelle est l'image d'une droite d'équation $y = ax + b$?

Définition 7 : Toute fonction f holomorphe univoque dont la dérivée ne s'annule pas, d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{C} dans le domaine $f(\mathcal{D})$ est dite **représentation conforme**.

Exemple 5 : Les fonctions z^m (m réel $> \frac{1}{2}$), sont des représentations conformes.

Problème de la représentation conforme : étant donnés deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , existe-t'il toujours une représentation conforme de l'un dans l'autre ?

Ce problème apparaît en physique, notamment en dynamique des fluides, lorsqu'il s'agit de résoudre les problèmes de Dirichlet ou de Neumann, dans lesquels on cherche la solution d'une équation de Laplace $\Delta u = 0$ dans un domaine donné \mathcal{D} , où u (respectivement $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$) prennent des valeurs données à la frontière de \mathcal{D} . La méthode qui sera mise en œuvre lors de la résolution du problème de Dirichlet en fin de chapitre, consiste à déterminer la représentation conforme qui envoie \mathcal{D} dans le demi-plan positif (ou dans le cercle unité), à résoudre ensuite le problème dans le domaine transformé pour enfin aboutir à la solution du problème initial par transformation inverse.

Riemann a résolu le problème dans le cas d'un domaine simplement connexe :

Théorème 6 (Riemann)

Pour tout domaine \mathcal{D} simplement connexe et différent de \mathbb{C} , il existe une représentation conforme de \mathcal{D} dans le disque ouvert $D(0,1)$.

Preuve (Cf : Analyse réelle et complexe de Rudin) □

Conséquence immédiate du théorème :

Entre deux domaines D_1, D_2 simplement connexes différents de \mathbb{C} , il existe toujours une représentation conforme de l'un dans l'autre ; si les frontières sont des circuits simples (courbes fermées à une seule boucle ; (Cf : Définitions D9 et D11), alors la représentation conforme se prolonge par continuité aux ensembles $D_1 \cup Fr(D_1)$ et $D_2 \cup Fr(D_2)$. Toutefois cette représentation est rarement explicitable, sauf dans le cas de figures géométriques simples (demi-plan, disque, couronnes) ou de polygones (cf Théorème 7 - de Schwarz-Christoffel).

Intermède biographique : Bernhard RIEMANN (1826-1866)

Elevé dans une famille de pasteur luthérien du royaume de Hanovre , il entreprit des études de philosophie et de théologie à Göttingen, avant de devenir le talentueux élève de Gauss, grand maître de ce temps, auquel il succédera. Il eut une vie courte mais produisit une des oeuvres les plus puissantes et les plus denses de l'histoire des mathématiques dans les domaines suivants : analyse réelle (définition de l'intégrale qui porte son nom), fonctions holomorphes, théorie des équations aux dérivées partielles, théorie des nombres premiers, géométrie différentielle et physique mathématique.

Son œuvre débuta en 1851 par sa thèse "Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions complexes" dans laquelle il définit des surfaces d'un genre nouveau dont la représentation nécessite plusieurs plans superposés ; l'étude fine de ces objets le conduisit à mettre en place les premiers concepts de topologie. Cette œuvre riche et concise, comme le sont tous les écrits de Riemann, nous concerne au premier chef puisqu'elle contient aussi quelques grands résultats exposés dans ce chapitre (théorème de la représentation conforme, prolongement analytique, etc...). Dans son mémoire d'habilitation "Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie", il définit des espaces courbes, par la donnée d'une métrique locale

$$d^2s = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j,$$

qui est à la base des recherches futures en géométries non-euclidiennes et de leur application à la théorie de la relativité générale.

Notons que c'est dans le cadre de ses travaux sur le problème de la représentation d'une fonction par une série trigonométrique, qu'il conçut l'intégrale qui porte aujourd'hui son nom.

Les seules représentations conformes qui conservent \mathbb{C} sont des applications affines :

$$z \longrightarrow az + b \quad (a \neq 0);$$

celles qui conservent le disque unité sont de la forme

$$z \longrightarrow e^{i\alpha} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \text{ où } |a| < 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dans l'ensemble des transformations conformes, la transformation de **Joukowski** $z \longrightarrow \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ et la transformation homographique $z \longrightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ seront les plus utiles à l'ingénieur :

E 7 Etude des homographies

Elles sont de la forme : $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexes fixés tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, z parcourant $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$.
Démontrer les résultats suivants :

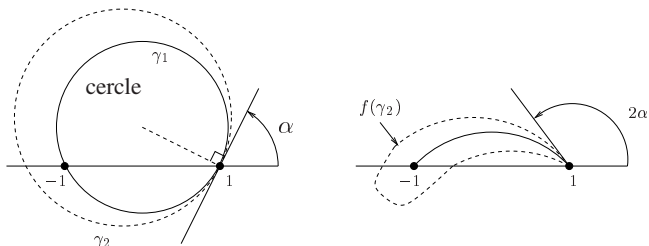
- (1) f est holomorphe et homéomorphe (i.e. : f bijective, f et f^{-1} continues).
- (2) f s'écrit sous la forme $A + \frac{B}{z+C}$ expression d'une composition de transformations classiques du plan (similitude, translation, etc ...).
- (3) En déduire que l'ensemble des homographies est un groupe pour l'opération de composition.
- (4) f conserve les cercles ; on suppose que les droites sont des cercles de rayon infini.

E 8 La transformation de **Joukowski** est fondamentale en aérodynamique car elle transforme une certaine classe de cercles en une classe de courbes fermées très proches des profils d'ailes d'avions.

$$\text{Soit : } f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

- (1) Sur quel domaine D de \mathbb{C} , f est-elle injective ?
- (2) Comment sont transformés les cercles $C(0, R)$ où $R > 1$, et leurs rayons ? Représenter l'image de $C(0, R)$ et de quelques rayons.
- (3) Posons : $f(z) = \frac{1+w}{1-w}$ où $w = (\frac{z-1}{z+1})^2$
 - (a) En déduire que f est une application injective conforme du complémentaire de $D(0, 1)$ sur le complémentaire du segment $[-1, 1]$ de l'axe x' .
 - (b) Démontrer que f est une application conforme injective de l'extérieur du cercle γ_1 sur l'extérieur d'un arc de cercle d'extrémités $\{-1, +1\}$.
 - (c) Démontrer que le cercle γ_2 passant par 1 et contenant -1 a comme image le profil d'une aile d'avion (on établira que $f(1)$ est un point de rebroussement en comparant les images de $1 + i\varepsilon$ et $1 - i\varepsilon$).

Le théorème suivant explicite la transformation conforme qui envoie l'intérieur d'un polygone donné ayant un nombre fini de côtés dans le demi-plan positif :



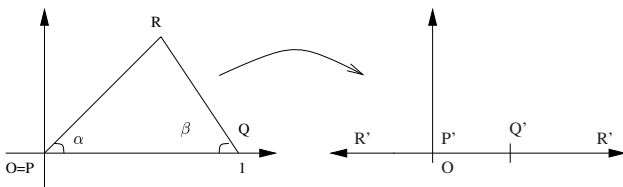
Théorème 7 (Schwarz-Christoffel)

Etant donné un polygone fermé de sommets A_1, \dots, A_n d'angles respectifs intérieurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, il existe une **transformation conforme f qui envoie l'intérieur du polygone dans le demi-plan positif**, et les points $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ sur les points $(A'_i)_{i=1, \dots, n}$ de l'axe $x'x'$: f est définie par sa dérivée :

$$\frac{df}{dz} = K \cdot (z - x'_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \dots (z - x'_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1}$$

où x'_i est l'abscisse de A'_i , et K est une constante complexe.

Exemple 6 : Transformation d'un triangle en le demi-plan positif



$$\frac{\partial f}{\partial z} = K_1 z^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (1 - z)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} \implies f(z) = K_1 \int_0^z u^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (1 - u)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} du + K_2.$$

si $z = 0$, $f(z) = 0$ donc $K_2 = 0$; pour $z = 1$, $f(z)=1$ d'où l'on déduit :

$$K_1 \int_0^1 u^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (1 - u)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} du = 1 \implies \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{\pi}) \cdot \Gamma(\frac{\beta}{\pi})}{\Gamma(\frac{\alpha + \beta}{\pi})} = (K_1)^{-1} \text{ où } \Gamma \text{ est la fonction gamma définie en E19 du Chapitre 1.}$$

5.4 Intégrale d'une fonction complexe

Définition 8 : Une **courbe** est une application continue γ d'un intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{C} . On note Γ le graphe paramétré par la courbe $\gamma : t \in [a, b] \mapsto (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$ qui définissent les coordonnées du point courant décrivant Γ .
Un **chemin** dans \mathbb{C} est une courbe formée d'arcs simples continûment différentiables, tels que pour deux arcs simples consécutifs Γ_{n-1} et Γ_n l'extrémité de Γ_{n-1} coïncide avec l'origine de Γ_n . Un tel chemin est appelé réunion des courbes Γ_i et noté $\cup_{i=1}^N \Gamma_i$.

Définition 9 : Un **circuit** ou **lacet** Γ est un chemin fermé.

Nous considérerons désormais des circuits ne possédant qu'une seule boucle (dits aussi d'indice 1).

Définition 10 : Etant donné un circuit Γ , à tout $z_0 \notin \Gamma$ on associe son **indice** par rapport à Γ défini par :

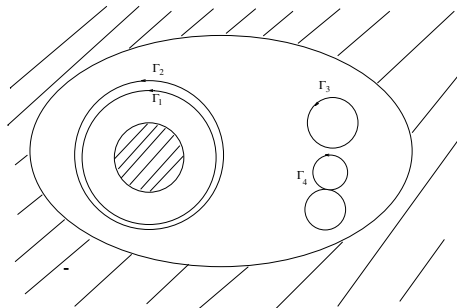
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

noté $j(z_0, \Gamma)$.

L'indice $j(z_0, \Gamma)$ est un entier relatif constant dans tout sous-ensemble connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$: il s'identifie au nombre de tours faits par $z = \gamma(t)$ autour de z_0 lorsque t parcourt $[a, b]$.

Définition 11 :

Deux circuits Γ_1 et Γ_2 sont homotopes, dans un domaine \mathcal{D} , si l'on peut faire coïncider chacun d'eux avec l'autre, par déformation continue dans \mathcal{D} : plus précisément, les circuits Γ_1, Γ_2 paramétrés par le segment I , qu'on prendra égal à $[0, 1]$ vérifient les relations $h(s, 0) = \Gamma_1(s)$, $h(s, 1) = \Gamma_2(s)$, la condition de fermeture du circuit se traduit par $h(0, t) = h(1, t)$ ($\forall s, t \in I$) où h est une application continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans \mathcal{D} .



En pratique, on vérifie visuellement la propriété d'homotopie : Γ_1 et Γ_2 sont **homotopes** ; Γ_3 n'est pas **homotope** à Γ_1 et Γ_2 , mais est **homotope** à Γ_4 .

Définition 12 : (Intégrale complexe)

Soit $f(z)$ définie et continue dans le domaine \mathcal{D} , et Γ un chemin paramétré par la courbe γ définie sur $[a, b]$, contenu dans \mathcal{D} et tel que $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. Alors on pose :

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt .$$

Attention ! $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ n'a aucun sens, si n'est pas précisé le chemin Γ joignant z_1 à z_2 .

Notation : Si Γ est parcouru dans le sens trigonométrique, on notera Γ^+ ; s'il l'est dans le sens inverse, on notera Γ^- .

Théorème 8 Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} f(z) dz &= \int_{\Gamma^+} (Pdx - Qdy) + i \int_{\Gamma^+} (Pdy + Qdx) \\ &= \int_a^b (P(t) \cdot \gamma'_x(t) - Q(t) \cdot \gamma'_y(t)) dt + i \int_a^b (Q(t) \cdot \gamma'_x(t) + P(t) \cdot \gamma'_y(t)) dt \end{aligned}$$

Exemple 7 : Soient $f(z) = \bar{z}$ et Γ définie par $z = t^2 + it$: calculons l'intégrale

$$I = \int_{z=0}^{z=4+2i} f(z) dz, \text{ le long de } \Gamma.$$

$\gamma_x(t) = t^2$, $\gamma_y(t) = t$, $\bar{z} = x - iy$, d'où $P(t) = t^2$, $Q(t) = -t$; à $z = 0$ est associé $t = 0$, et à $z = 4 + 2i$, $t = 2$ d'où $I = \int_0^2 (t^2 \cdot 2t + t) dt + i \int_0^2 (t^2 - t \cdot 2t) dt = 10 - \frac{8}{3}i$

E 9 Calculer $\int_A^B (2y + x^2) dx + (3x - y) dy$ le long de la parabole Γ paramétrée par $\gamma_x = 2t$, $\gamma_y = t^2 + 3$, avec $A = (0, 3)$ et $B(2, 4)$.

Théorème 9 L'intégrale complexe $\int_{\Gamma} f(z) dz$ est indépendante du paramétrage de Γ , au signe près dépendant du sens de parcours de Γ induit par le paramétrage.

Preuve Si γ_1 et γ_2 sont deux paramétrages de Γ , alors nécessairement il existe une bijection φ différentiable à dérivée continue telle que : $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.

$$\gamma_1 : t \in [a_1, b_1] \longrightarrow \gamma_1(t) \in \Gamma$$

$$\gamma_2 : t \in [a_2, b_2] \longrightarrow \gamma_2(t) \in \Gamma$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt &= \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_1(\varphi(t))) \cdot \gamma_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt = \int_{\Gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

□

Théorème 10 (Propriétés de l'intégrale complexe)

- (1) $\int_{\Gamma^+} f + g dz = \int_{\Gamma^+} f dz + \int_{\Gamma^+} g dz.$
- (2) $\int_{\Gamma_1^+} f dz + \int_{\Gamma_2^+} f dz = \int_{\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+} f dz.$
- (3) $\int_{\Gamma^+} \alpha f dz = \alpha \int_{\Gamma^+} f dz$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}.$
- (4) $\int_{\Gamma^-} f dz = - \int_{\Gamma^+} f dz.$

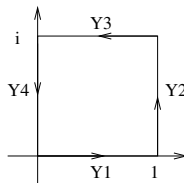
Exemple 8 : Soit $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$ et Γ le segment qui joint $A = 0$ à $B = 1 + i.$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dx + i \int_{\Gamma} 2xy dx + i \int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dy - \int_{\Gamma} 2xy dy \\ &= \int_0^1 0 + i \int_0^1 2x^2 dx - \int_0^1 2x^2 dy = \frac{2}{3}(i - 1) \end{aligned}$$

E 10

On considère la fonction complexe : $f(z) = \exp(\bar{z}).$

(a) Calculer $\int_{\Gamma} f(z) dz$ où $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ est décrit par :



Théorème 11 Si f est continue dans \mathcal{D} , si Γ est un chemin dans \mathcal{D} , alors :

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(s)| ds$$

où s est l'abscisse curviligne de z parcourant Γ .

Preuve $\left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\Gamma} |f(z)| ds$

□

Théorème 12 Sous les mêmes hypothèses, on a :

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{\Gamma} |f(z)| \cdot L \text{ où } L \text{ est la longueur de } \Gamma.$$

5.5 Le théorème de Cauchy et ses corollaires

Ce théorème est au cœur de la théorie des fonctions holomorphes ; de lui découle la plupart des résultats exposés dans ce chapitre et le suivant.

Théorème 13 (Théorème de Cauchy)

Soit un circuit Γ inclus dans un domaine \mathcal{D} simplement connexe et f **holomorphe** dans \mathcal{D} :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

Preuve Nous ferons la démonstration sous l'hypothèse supplémentaire : Γ est sans point double ($P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ont des dérivées continues).

Par le Théorème 8 : $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (P dx - Q dy) + i \int_{\Gamma} (P dy + Q dx)$

Appliquons la formule de Riemann à chacune des intégrales :

$$\int_{\Gamma} (P dx - Q dy) = \iint_{\Delta} \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

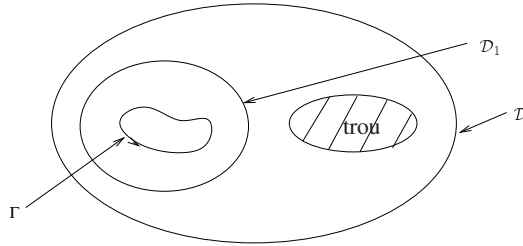
$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy) = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

où Δ est le domaine simplement connexe ayant Γ comme frontière : les conditions de Cauchy permettent de conclure. □

Remarque : Le résultat $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ reste vrai si :

- i. Γ a des points doubles (il suffit de décomposer Γ en circuits) ;

- ii. Si \mathcal{D} n'est pas simplement connexe. Il suffit de construire \mathcal{D}_1 simplement connexe contenu dans \mathcal{D} et incluant Γ , à condition que ce dernier entoure un domaine simplement connexe.



E 11 Démonstration élégante du théorème de Cauchy, à l'aide de la formule de Green-Riemann : $\int_{\Gamma} U dx + V dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy$.

- (1) Démontrer que $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. (Voir le début du paragraphe 5.2)
- (2) En déduire que $\int_{\Gamma} f(z) dz = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$ et conclure. (\mathcal{D} est un domaine simplement connexe de frontière Γ , et $d\bar{z} \wedge dz = 2i dx \wedge dy$ est le produit extérieur de $d\bar{z}$ par dz).

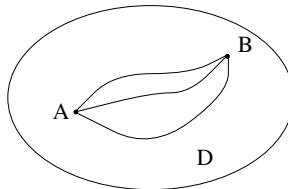
Théorème 14 (Indépendance du chemin d'intégration)

Soient f holomorphe dans un domaine \mathcal{D} , A et B deux points quelconques de \mathcal{D} , et Γ_1 et Γ_2 deux chemins homotopes distincts tous deux d'origine A et d'extrémité B , parcourus de A vers B :

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

Preuve $\Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ forme un circuit auquel on applique le théorème de Cauchy.

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2^-} f(z) dz = 0 = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z) dz \implies \int_{\Gamma_1} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$



□

Voici une autre caractérisation des fonctions holomorphes :

Théorème 15 (Réciproque du théorème de Cauchy, due à Morera)

Si la fonction f , continue dans un domaine \mathcal{D} , vérifie $\int_C f(z) dz = 0$ pour toute courbe fermée simple C contenue dans \mathcal{D} , alors $f(z)$ est holomorphe dans \mathcal{D} .

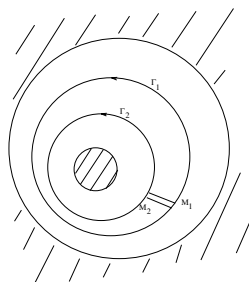
Le théorème suivant, équivalent au théorème de Cauchy, affirme l'invariance de l'intégrale d'une fonction holomorphe lorsque le chemin d'intégration varie continûment à l'intérieur du domaine d'holomorphic en s'appuyant sur ses extrémités fixes : c'est le théorème central de la théorie de l'intégration des fonctions holomorphes.

Théorème 16 (Invariance de l'intégrale par déformation continue du contour)

Soient deux circuits Γ_1 et Γ_2 homotopes dans un domaine \mathcal{D} dans lequel $f(z)$ est holomorphe :

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

Si de plus, \mathcal{D} est simplement connexe alors les intégrales sont nulles.

Preuve

On crée le circuit $\Gamma_1 \cup \overline{M_1 M_2} \cup \Gamma_2^- \cup \overline{M_2 M_1}$ sur lequel l'intégrale de $f(z)$ est nulle, d'où :

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{M_1}^{M_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z) dz + \int_{M_2}^{M_1} f(z) dz = 0 \implies \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

□

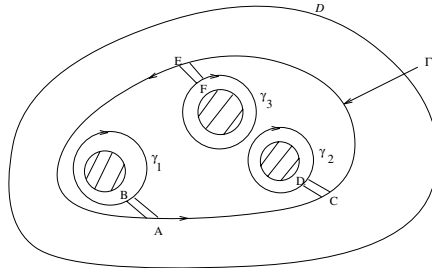
De façon générale si f est holomorphe dans un ouvert non simplement connexe, donc percé de trous, on se ramène au théorème suivant.

Théorème 17 Soit f holomorphe dans \mathcal{D} ouvert, percé des trous O_1, O_2, \dots, O_n ; considérons le circuit Γ contenu dans \mathcal{D} et contenant les O_i , et les circuits Γ_i entourant les O_i , on a alors :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f(z) dz$$

Preuve

Considérons par exemple le cas de trois trous, grâce aux arcs AB, CD et EF, on crée un circuit qui parcourt Γ dans le sens positif et les γ_i dans le sens négatif d'où le résultat par application du théorème précédent.



□

Remarque : Les circuits Γ considérés seront simples (ils ne font qu'un tour).

Théorème 18 (Formules intégrales de Cauchy)

Soit f holomorphe dans un domaine simplement connexe \mathcal{D} , Γ un circuit inclus dans \mathcal{D} sans point double : alors, pour tout z_0 à l'intérieur du domaine délimité par Γ :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Plus généralement : $\forall n$ entier positif, $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{(n+1)}} dz$

d'où on déduit que f est **indéfiniment dérivable**.

Interprétation : la valeur d'une fonction holomorphe en tout point z_0 intérieur au circuit Γ , est complètement déterminée par ses valeurs sur le circuit.

Le mathématicien J. Dieudonné parle joliment de "solidarité" entre les valeurs d'une fonction holomorphe.

Preuve

On choisit un cercle C centré en z_0 de rayon r et intérieur à Γ

Ecrivons : $f(z) = f(z_0) + \phi(z)$ avec $|\phi(z)| < \varepsilon$ si $|z - z_0| < h$.

L'intégrale
$$\int_C \frac{f(z_0) + \phi(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \underbrace{\int_C \frac{dz}{z - z_0}}_I + \underbrace{\int_C \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz}_J$$

Calcul de I : posons $z - z_0 = re^{i\theta}$.
$$I = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi$$

Calcul de $J : \frac{\phi(z)}{z - z_0}$ étant holomorphe sur $\mathcal{D} \setminus \{z_0\}$, r peut être choisi aussi petit que l'on veut. Par continuité de f ,

$\forall \varepsilon > 0 \exists h > 0 \quad |z - z_0| < h \implies |\phi(z)| < \varepsilon$; comme $|z - z_0| = r$, pour ε fixé, on choisira $r < h$.

$|J| \leq \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon$, vrai pour tout ε implique $I = 2i\pi f(z)$.

L'établissement de l'expression de $f^{(n)}(z_0)$ est de structure analogue □

E 12 Soit le chemin Γ de paramétrage γ ;

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \rightarrow \gamma(t) = 4.e^{it}. \text{ Calculer } \int_{\Gamma+} \frac{\cos(z)}{z^2 - \pi^2} dz.$$

E 13 Soit Γ le circuit paramétré par $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$ (a et $b > 0$), avec $t \in [0, 2\pi[$.

(1) Identifier la courbe Γ .

(2) Calculer $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ et en déduire $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

Le résultat suivant annonce le théorème de la moyenne :

E 14 Soient $P(z)$ un polynôme quelconque de degré n , et m un entier positif et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

(1) Montrer que : $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} P(\omega^k) = P(0)$.

(2) Rapprocher le résultat obtenu lorsque m tend vers l'infini, du théorème de Cauchy.

Théorème 19 (de la valeur moyenne, dû à Gauss)

Soit $f(z)$ holomorphe dans le disque $C(z_0, R)$ alors pour tout $r < R$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Interprétation : la valeur d'une fonction holomorphe f en un point z_0 est égale à la moyenne de f sur un cercle centré en z_0 , contenu dans le domaine d'holomorphie ; ce résultat complète la première formule de Cauchy (Théorème 18).

Les fonctions harmoniques dans un ouvert de \mathbb{C} , sont caractérisées par la propriété de la moyenne :

Théorème 20 Si une fonction continue dans un ouvert U de \mathbb{C} , vérifie la propriété de la valeur moyenne, pour tout disque $D(z_0, R) \subset U$, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$, alors f est harmonique dans U .

Théorème 21 (Développement d'une fonction holomorphe en série entière)

Si f holomorphe dans le domaine simplement connexe \mathcal{D} , alors :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n \text{ pour tout } z_0 \in \mathcal{D} \text{ et, pour tout } n, a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \text{ où } C^+ \text{ est le cercle de centre } z_0, \text{ inclus dans } \mathcal{D}, \text{ parcouru dans le sens positif.}$$

Preuve

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (\text{grâce à la formule de Cauchy})$$

□

Remarque : Le coefficient $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ ne dépend pas du rayon du cercle C , puisque $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Application des formules intégrales de Cauchy au calcul d'intégrale.

$$I = \int_{C(0,R)} \frac{1}{z^2 + b^2} dz \text{ où } R > |b| \text{ s'écrit :}$$

$$I = \int_{C(0,R)} \frac{1}{2ib} \left(\frac{1}{z - ib} - \frac{1}{z + ib} \right) dz$$

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_{C^+(0,R)} \frac{1}{z + ib} dz = 2i\pi \\ I &= \int_{C^+(0,R)} \frac{1}{z - ib} dz = 2i\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{C(0,R)} \frac{1}{z^2 + b^2} dz = \frac{1}{2ib} (2i\pi - 2i\pi) = 0$$

E 15 Montrer que $I = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,3)} \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$ si $t > 0$.

E 16 Calculer l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ où Γ est un circuit, dans les deux cas :

(a) 0 est à l'intérieur de Γ et 1 à l'extérieur ;

(b) 1 est à l'intérieur de Γ et 0 à l'extérieur.

[Indication : On utilisera la formule intégrale de Cauchy.]

Théorème 22 (Théorème du module maximum)

Si $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur \mathcal{D} d'une courbe fermée simple C , non constante et continue dans $\overline{\mathcal{D}}$, alors $|f(z)|$ atteint son maximum sur C .

Théorème 23 (*Principe du maximum*)

Si une fonction holomorphe $f(z)$ dans un domaine \mathcal{D} est telle que $|f(z)|$ atteint un maximum relatif en un point de \mathcal{D} , alors elle est constante dans \mathcal{D} .

E 17 Application du théorème du module maximum.

Déterminer le maximum de $|z^2 - 3z + 2|$ dans $\{|z| \leq 1\}$.

Intermède biographique : Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857)

Fils d'un avocat au parlement de Normandie, élève de l'Ecole Polytechnique dès l'âge de seize ans, puis des Ponts et Chaussées, il entretenit très tôt une correspondance mathématique avec deux de ses professeurs de mathématiques : Lagrange et Laplace. A vingt-sept ans, il fut nommé professeur à Polytechnique et au Collège de France. Cauchy est un légitimiste catholique fervent qui n'accepta pas l'accession de Louis-Philippe au pouvoir et s'exila à Turin, où une chaire de physique mathématique fut créée pour lui. De retour à Paris il retrouva son poste à Polytechnique qu'il conservera jusqu'à sa mort.

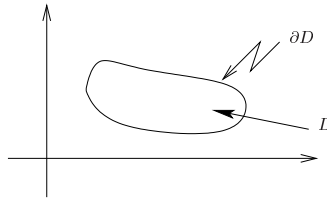
“Maître incontesté de l'analyse de la première moitié du dix-neuvième siècle” d'après J.Dieudonné, il est l'auteur de sept cents notes et articles, touchant à la plupart des domaines mathématiques de son temps, à commencer par l'analyse réelle héritée des recherches prolifiques et souvent confuses du dix-huitième siècle, qu'il établit sur des bases rigoureuses ; la théorie des équations différentielles à laquelle il donne les premiers théorèmes d'existence et d'unicité, la théorie des fonctions complexes dont il fut le créateur inspiré. A cette liste s'ajoutent de remarquables travaux en théorie des groupes et en théorie des déterminants, ainsi que des mémoires concernant l'élasticité et l'équilibre des tiges et plaques dont il dégagera les modèles mathématiques, avant de s'attaquer à la toute nouvelle théorie des ondes due à Fresnel.

Il procéda à un véritable assainissement de l'analyse de son temps : il est le premier à concevoir une notion de limite dégagée de sa gangue géométrique et à définir rigoureusement le concept de fonction continue, ainsi que le concept d'intégrale d'une fonction continue. Son œuvre de fondation de l'analyse sera poursuivie et parachevée par les mathématiciens qui lui succédèrent dont le plus remarquable est Weierstrass.

5.6 Résolution du problème de Dirichlet

Ce problème est central dans toutes les branches de la physique (mécanique des fluides, théorie de la chaleur, électromagnétisme), où il s'agit de déterminer un potentiel inconnu à l'intérieur d'un domaine, mais connu sur sa frontière.

Soit un domaine simplement connexe \mathcal{D} dont la frontière $\partial\mathcal{D}$ est un circuit (chemin fermé C^1 par morceaux) : il s'agit de déterminer une fonction $f(z)$ harmonique dans \mathcal{D} et continue dans $\bar{\mathcal{D}}$, égale sur $\partial\mathcal{D}$ à une fonction donnée $g(z)$.



Ce problème sera résolu en 3 étapes, établissant successivement :

- (1) l'unicité de la solution ;
- (2) la solution dans le cas où \mathcal{D} est le disque $D(0, R)$;
- (3) la construction de la solution générale par transformation conforme.

(1) Supposons deux solutions f_1 et f_2 , alors $f \equiv f_1 - f_2$ est aussi solution, nulle sur $\partial\mathcal{D}$. Si f atteint son max ou son min dans \mathcal{D} , alors le principe de l'optimum entraîne que f est constante dans \mathcal{D} , et par continuité dans $\bar{\mathcal{D}}$. Or $f = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$ implique $f = 0$ dans $\bar{\mathcal{D}}$.

(2) Construisons la fonction $F(z)$ holomorphe dans $D(0, R)$ dont la partie réelle est égale à g sur $C(0, R)$.

Si $z \in D(0, R)$ $z = re^{i\theta}$ ($r < R$) et par la formule intégrale de Cauchy (Théorème 18) :

$$F(z) = F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(0,R)} \frac{F(u)}{u-z} du \quad (*)$$

$$F\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} \frac{F(u)}{u - \frac{R^2}{\bar{z}}} du = 0 \quad (**) \text{ où } \frac{R^2}{\bar{z}} \text{ est extérieur au cercle } C(0, R).$$

En soustrayant (**) à (*), il vient : $F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} \frac{z - \frac{R^2}{\bar{z}}}{(u-z)(u - \frac{R^2}{\bar{z}})} F(u) du$

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)F(Re^{i\phi})}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \quad (\text{Formule de Poisson})$$

La fonction réelle $f(r, \theta)$ solution du problème est donc égale à la partie réelle de $F(z)$

$$\text{soit : } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)g(R, \phi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

où $g(r, \phi)$ est la fonction définie sur $C(0, R)$.

(3) D'après le théorème de Riemann (Théorème 6), il existe une représentation conforme $\phi : \mathcal{D} \mapsto D(0, 1)$; le théorème de Carathéodory, non mentionné dans ce cours, garantit le prolongement par continuité de ϕ aux frontières respectives $\partial\mathcal{D}$ et $C(0, 1)$. Ainsi, si g est continue sur $\partial\mathcal{D}$, la fonction $g \circ \phi^{-1} \stackrel{\text{notée}}{=} G$ est définie sur $C(0, 1)$ et définit le prolongement harmonique dans $D(0, 1)$.

Reste à montrer que $G \circ \phi$ est harmonique dans \mathcal{D} , grâce au théorème de conservation de l'harmonicité par transformation conforme qui affirme que :

si ϕ est une représentation conforme de \mathcal{D}_1 dans \mathcal{D}_2 et G est harmonique dans \mathcal{D}_2 alors $G \circ \phi$ est harmonique dans \mathcal{D}_1 . [Démonstration facile mais calculatoire]

Remarque : La solution du problème de Dirichlet dans le cas du domaine défini par le demi-plan positif admet aussi une forme explicite :

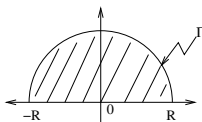
Soit $g(x) = f(x, 0)$ connue, alors pour tout (x, y) du demi-plan positif :

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot g(u)}{y^2 + (x - u)^2} du = \left(\frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2} \right) * g(x) \quad (\forall y > 0)$$

Le lecteur aura sans doute remarqué que l'équation de Laplace, équation aux dérivées partielles, linéaire à coefficients constants, a une solution égale au produit de convolution de la fonction de contrôle g par une fonction caractéristique du domaine. Ce résultat fondamental abordé dans le chapitre "Mesure et Intégration", est développé dans celui consacré aux distributions.

E 18

- (1) En vous inspirant fortement de la construction de la formule de Poisson pour le cercle, en choisissant le domaine ci-dessous, puis en faisant tendre R vers $+\infty$, démontrer la formule de Poisson pour le demi-plan supérieur.



- (2) Application à la répartition des températures en état permanent.
Supposons la température $g(x)$ connue en un point x de l'axe réel.
Calculer $f(x, y)$ si $g(x) = T \quad (\forall x \in \mathbb{R})$.

Mathématiques fondamentales/Mathématiques appliquées.

L'histoire des sciences montre que les théories mathématiques qui paraissent les moins praticables hors de leur champ d'études, ont eu un jour ou l'autre un rapport d'application avec les sciences de la nature ou de l'ingénieur. Tel est le cas parmi bien d'autres, de la théorie des nombres dédiée à la seule étude des nombres entiers positifs, mais sans laquelle les théories du codage et de la cryptographie n'auraient pu connaître leur fulgurant et récent développement. Il semble donc qu'il n'y ait pas de ligne de démarcation nette, entre ce qu'il est encore convenu d'appeler les mathématiques appliquées (certains auteurs parlent très justement de mathématiques orientées vers les applications) et les mathématiques fondamentales, ces dernières étant destinées à intervenir un jour ou l'autre dans un champ pratique.

Parlant de mathématiques appliquées, on ne peut faire l'économie d'une tentative de définition du concept de modèle. En langue latine, *modulus* qui a donné *modèle* en français, désigne la maquette utilisée par les architectes à des fins de présentation d'un projet. De nos jours, le mécanicien des fluides ou l'aérodynamicien attendent du comportement de la maquette qu'ils placent dans le bassin de carène ou la soufflerie, certains résultats que les principes de similitude

physique leur permettront d'interpréter et d'appliquer au prototype réel ; point n'est besoin de souligner l'évidence du gain expérimental et méthodologique.

Le modèle mathématique d'un phénomène physique ou d'un système mis en oeuvre en sciences de l'ingénieur, s'apparente par bien des points à la maquette. Il s'agit cette fois d'une représentation mathématique volontairement simplifiée d'un phénomène ou d'un système, sous forme équationnelle ou fonctionnelle, ayant le plus souvent une faible valeur explicative, destinée à en donner une description partielle ou en déduire d'éventuelles prédictions. Un modèle mathématique est toujours provisoire ; Bachelard le définissait comme étant "un moment technique destiné à son propre démantèlement".

Remarquons que la polyvalence d'un modèle donné, sa capacité à représenter des phénomènes et des systèmes issus de domaines très différents, permet de développer entre eux de fécondes analogies, par la mise en évidence de similitudes structurelles ou fonctionnelles. Ainsi, une même fonction peut rendre compte d'un processus biologique ou de l'évolution d'un paramètre économique.

Pour de nombreux scientifiques non mathématiciens ou d'ingénieurs en recherche et développement, il serait probablement plus facile d'apprendre les mathématiques que d'apprendre à s'en passer, tellement est aujourd'hui prégnante leur nécessité pour la modélisation et l'aide à la décision.

5.7 Thème d'étude : application à la mécanique des fluides

Considérons l'écoulement d'un fluide **bi-dimensionnel** :

- **homogène** : de caractérisation identique dans tous les plans xOy parallèles.
- **stationnaire** : la vitesse $\vec{V} = {}^t (V_x, V_y)$ en un point quelconque ne dépend que des coordonnées (x, y) , et non du temps.
- **irrotationnel** : le champ de vitesse dérive d'un potentiel $\phi(x, y)$; $V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$.
- **incompressible** : $\text{div}(\vec{V}) = 0$, ou encore : $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$.
- **non visqueux** : il n'y a aucune friction sur les parois et les forces de pression qui s'y exercent y sont perpendiculaires.

(a) Montrer que ϕ est harmonique et qu'en conséquence il existe une fonction **holomorphe** $\Omega(z)$ de la forme $\phi(x, y) + i \psi(x, y)$ dite **potentiel complexe**.

Calculer $\frac{d\Omega}{dz}$ et en déduire la **vitesse complexe** $V_x + i V_y$.

(b) D'après les propriétés des familles de courbes orthogonales établies dans l'exercice **E6**, on sait définir les ensembles fonctionnels :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\phi &= \{ \phi(x, y) = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \equiv \text{famille des équipotentielles du flux} \\ \mathcal{F}_\psi &= \{ \psi(x, y) = \beta \mid \beta \in \mathbb{R} \} \equiv \text{famille des lignes de courant} \end{aligned}$$

Considérons désormais le potentiel complexe $\Omega(z) = V_0(z + \frac{a^2}{z})$ où a est une constante réelle $\neq 0$.

(b.1) Exprimer $\Omega(z)$ en coordonnées polaires et en déduire $\phi(r, \theta)$ et $\psi(r, \theta)$.

Il s'agit maintenant de trouver la forme de l'obstacle plongé dans le fluide.

(b.2) Quel est l'ensemble des points du plan en lesquels la vitesse d'écoulement est nulle ? Sous l'hypothèse que seuls les points du contour de l'obstacle sont associés à la ligne de courant $\psi(r, \theta) = 0$, en déduire l'équation du dit obstacle.

(b.3) Etudier le comportement de (V_x, V_y) dans les cas suivants :

- $|x|$ grand et y quelconque ;
- $r^2 = a^2$ (comment évoluent les vitesses sur le bord de l'obstacle ?) ;
- $|y|$ grand et x quelconque.

(b.4) Conclure à l'aide d'un dessin représentant l'obstacle ainsi que quelques lignes de courant et équipotentielles.

(c) On se propose d'étudier des structures d'écoulement en présence de **puits** (points où l'écoulement converge et disparaît) et de **sources** (points à partir desquels l'écoulement diverge).

(c.1) Soit une source S placée à l'origine, de potentiel complexe $\Omega_S(z) = A \ln(z)$ avec $A > 0$: une telle source est dite de puissance A .

L'hypothèse d'incompressibilité est-elle vérifiée ?

Déterminez V_x et V_y ainsi que les équations des équipotentielles et des lignes de courant. Représentez quelques lignes équipotentielles et les lignes de courant.

(c.2) Déterminez par analogie avec le potentiel d'une source, le potentiel $\Omega_P(z)$ d'un puits de puissance A , placé à l'origine. Faites la même étude qu'en (c.1)

(c.3) Généralisation au cas d'une source et d'un puits de même puissance A respectivement placés en $-a$ et $+a$, sachant que la somme des deux potentiels complexes est bien le potentiel complexe $\Omega_{S,P}(z)$ d'un nouvel écoulement (résultat qui sera établi en mécanique des fluides).

Explicitez $\Omega_{S,P}(z)$ (on posera $z - a = \rho_2 e^{i\theta_2}$ et $z + a = \rho_1 e^{i\theta_1}$). Déterminer l'équation des lignes de courant et des équipotentielles ? A quelles courbes correspondent-elles ?

Remarquez la profonde analogie entre les modèles élémentaires de la mécanique des fluides et ceux de l'électromagnétisme classique.

(d) L'étudiant motivé à la fois par l'analyse complexe et par la mécanique des fluides (il n'est pas interdit de rêver !) pourra prolonger cette étude au cas d'un écoulement vérifiant les mêmes hypothèses, à l'intérieur d'un angle de valeur $\alpha < \pi$. (Cf : E7 de ce Chapitre). En pratique, les prévisions données par le modèle théorique et les résultats expérimentaux coïncident d'autant mieux que α est grand.

Pour un exposé complet et pédagogique de la modélisation des écoulements irrotationnels des fluides parfaits incompressibles, le lecteur est invité à se reporter au chapitre 6 de l'ouvrage : "Mécanique des Fluides" de P. Chassaing (Cépaduès Editions).

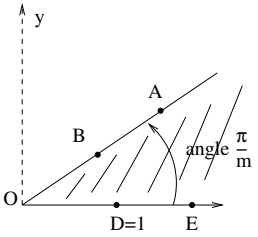
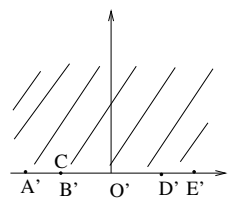
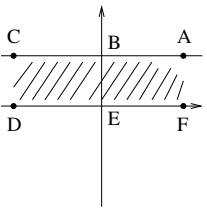
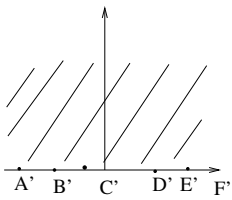
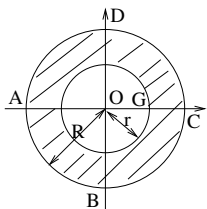
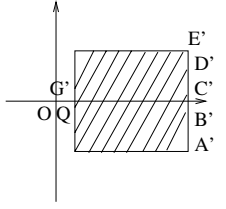
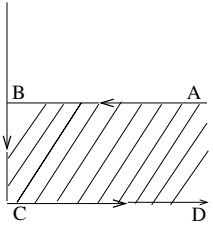
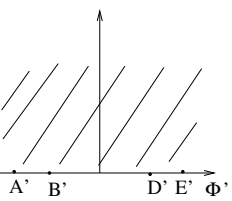
SOUS-ENSEMBLE	TRANSFORMATION CONFORME	IMAGE
 <p style="text-align: center;">ANGLE</p>	$f(z) = z^m$ $m \geq 1/2$ réel	 <p style="text-align: center;">DEMI-PLAN POSITIF</p>
 <p style="text-align: center;">BANDE INFINIE</p>	$f(z) = e^{(\pi z / a)}$	 <p style="text-align: center;">DEMI-PLAN POSITIF</p>
 <p style="text-align: center;">COURONNE</p>	$f(z) = \log z$	 <p style="text-align: center;">RECTANGLE</p>
 <p style="text-align: center;">BANDE SEMI-INFINIE</p>	$f(z) = \text{ch} (z / a)$	 <p style="text-align: center;">DEMI-PLAN POSITIF</p>

FIG. 5.1 – Quelques transformations conformes classiques

5.8 Corrigés des exercices

E1

(1)

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta z = \Delta x \\ -1 & \text{si } \Delta z = i\Delta y \end{cases}$$

d'où deux limites différentes, quand Δz tend vers 0 de deux façons différentes. Donc

$f(z) = \bar{z}$ est non holomorphe. Plus facilement, remarquons que : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$.

Donc f n'est pas holomorphe dans \mathbb{C} .

(2) $h(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

E2

(1) $f(z) = \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cdot \cos iy - \sin x \cdot \sin iy$

or (*) $\begin{pmatrix} \cos iy = \text{ch}y \\ \sin iy = \text{sh}y \end{pmatrix}$ donc $f(z) = \cos x \cdot \text{ch}y - i \sin x \cdot \text{sh}y$

$$g(z) = \sin(x + iy) = \sin x \cdot \cos iy + \sin iy \cdot \cos x \\ = \sin x \cdot \text{ch}y + i \text{sh}y \cdot \cos x$$

pour établir (*) : $\cos iy = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \text{ch}y$
 $\sin iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = i \cdot \text{sh}y$

(2) $f'(z) = -\sin(z)$.(3) $f(z) = 0 \iff \cos x \cdot \text{ch}y - i \sin x \cdot \text{sh}y = 0$
 $\sin x \cdot \text{sh}y = 0 \quad (\cos x = 0 \text{ et } \sin x = 0)$

\iff et \iff ou
 $\cos x \cdot \text{ch}y = 0 \quad (\cos x = 0 \text{ et } \text{sh}y = 0)$

$\iff y = 0 \text{ et } x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

E3

(1) $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$.

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial P}{\partial x} \sin \theta \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial Q}{\partial y} \sin \theta = -\frac{\partial P}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial x} \sin \theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

Démonstration analogue pour la deuxième formule.

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2x^2y + 4y^3 = -\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ d'où } Q = \frac{2}{3}x^3y - 4y^3x + \varphi(y)$$

$$\text{Or } \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^3 - 12y^2x + \varphi'(y) = 4x^3 - 2xy^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{10}{3}x^3y + \frac{10}{3}xy^3 + Cte$$

$$\text{et } Q(x, y) = \frac{12}{3}x^3y - \frac{2}{3}xy^3 + Cte.$$

E5

$$(1) \quad \frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ d'où : } \left(\frac{dy}{dx} \right)_P = \frac{-\frac{\partial P}{\partial x}}{\frac{\partial P}{\partial y}}$$

$$\text{de façon identique : } \frac{dQ}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)_Q = \frac{-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial y}}$$

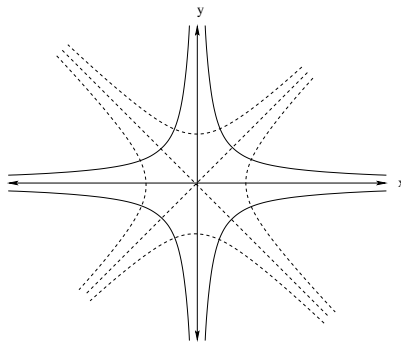
où $\left(\frac{dy}{dx} \right)_P$ est la pente de la courbe $P(x, y) = \alpha$ en un point (x, y) .

Le produit des pentes : $\left(\frac{dy}{dx} \right)_P \times \left(\frac{dy}{dx} \right)_Q = \frac{\left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} \right)}{\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y}} = -1$ (Formule de Cauchy) d'où l'orthogonalité des familles de courbes.

(2) F_1 est la famille des hyperboles d'axes $x'x$ et $y'y$; les conditions de Cauchy sont :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = y = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow Q(x, y) = \frac{y^2}{2} + g(x) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = x = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow Q(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + h(y) \end{array} \right\} \Rightarrow Q(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$$

La famille F_2 de courbes orthogonales à F_1 est définie par $F_2 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}(y^2 - x^2) = \beta \text{ réel}\}$, l'ensemble des hyperboles d'axes égaux aux axes bissecteurs des quarts de plan :



E6

(1) $f(z)$ est une transformation conforme (tous les polynômes en z , quels que soient leurs degrés sont des fonctions holomorphes)

$z \in$ secteur angulaire d'angle $\frac{\pi}{m} \iff z = r \cdot e^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{m} \implies z^m = r^m \cdot e^{im\theta}$ avec $0 \leq m \cdot \theta \leq \pi$.

(2) La demi-droite des abscisses positives ≥ 0 , formé des points $z = \rho \geq 0$, se transforme en elle-même.

Les points $z = \rho \cdot e^{i\frac{\pi}{m}}$ du bord haut de l'angle se transforment en $f(z) = \rho^m \cdot e^{i\pi} = -\rho^m$ qui décrivent la demi-droite des abscisses négatives.

Les points z à l'intérieur de l'angle, $z = \rho \cdot e^{i\frac{\theta'}{m}}$ où $0 < \theta' < \pi$, se transforment en $f(z) = \rho^m \cdot e^{i\theta'}$ qui décrivent le demi-plan strictement positif.

E7

(1) $f(z)$ est holomorphe en tout $z \neq -\frac{\delta}{\gamma}$.

$f(z)$ a la même expression analytique que la fonction réelle $\frac{\alpha \cdot x + \beta}{\gamma \cdot x + \delta}$ qui est bijective, continue et d'inverse continue : $f(z)$ est un homéomorphisme.

(2) On décompose $f(z)$ en transformations géométriques simples :

$$\text{en effet } \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta} = \frac{\alpha \left(z + \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\gamma \left(z + \frac{\delta}{\gamma} \right)} = \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{z + \frac{\beta}{\alpha}}{z + \frac{\delta}{\gamma}} + \frac{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma}}{z + \frac{\delta}{\gamma}} \right) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\frac{\alpha}{\gamma} (\beta\gamma - \alpha\delta)}{\alpha\gamma \left(z + \frac{\delta}{\gamma} \right)} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{K}{z + \frac{\delta}{\gamma}}$$

$$\text{donc : } z \xrightarrow{\text{Translation}} z + \frac{\delta}{\gamma} \xrightarrow{\text{Inversion}} \frac{1}{z + \frac{\delta}{\gamma}} \xrightarrow{\text{Similitude}} \frac{K}{z + \frac{\delta}{\gamma}} \xrightarrow{\text{Translation}} \frac{K}{z + \frac{\delta}{\gamma}} + \frac{\alpha}{\gamma}$$

(3) $f_2 \circ f_1(z) = \frac{\alpha_2 \left(\frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} \right) + \beta_2}{\gamma_2 \left(\frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} \right) + \delta_2}$ qui une fois développée s'écrit sous la forme : $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

(4) Les translations et similitudes conservent les cercles ; prouvons que les inversions conservent les cercles qui ne passent pas par l'origine.

Démontrons que l'image d'un cercle d'équation $|z - z_0|^2 = r^2$, par l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$, est un cercle :

l'image du cercle $C = \{z \mid |z - z_0| = r^2\}$ par f est $f(C) = \left\{ \frac{1}{z} \mid |z - z_0| = r^2 \right\}$.

Posons $w = \frac{1}{z}$: est-ce que $f(C) = \left\{ w \mid \left| \frac{1}{w} - z_0 \right| = r^2 \right\}$ est un cercle ?

Tout calcul fait, on parvient à (*) $|w|^2 - \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} (wz_0 + \bar{w} \cdot \bar{z}_0) = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2}$ qui est bien

l'équation du cercle $C \left(\frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2}, \frac{r}{|z_0|^2 - r^2} \right)$. Si le cercle passe par l'origine, $|z_0| = r$ et l'équation (*) se réduit à l'équation d'une droite.

E8

$$(1) \frac{df}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \text{ existe si } z \neq 0, \pm 1.$$

Etude de l'injectivité : $f(z_2) = f(z_1) \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$
 si $z_1, z_2 \neq 1$: donc f est injective dans tout domaine \mathcal{D} ne contenant aucun couple
 (z_1, z_2) tel que $z_1, z_2 = 1$.

Un tel domaine est constitué par exemple par l'extérieur du disque unité.

$$(2) \text{ Soit } z = R.e^{i\theta} \ (R > 1) \text{ d'image } f(z) \text{ égale à } \frac{1}{2}(R + \frac{1}{R}) \cos \theta + i \frac{1}{2}(R - \frac{1}{R}) \sin \theta.$$

Lorsque z parcourt le cercle $C(O, R)$, $f(z)$ parcourt l'ellipse de demi-axes $\frac{1}{2}(R + \frac{1}{R})$
 et $\frac{1}{2}(R - \frac{1}{R})$.

$$(3) z = 1 \text{ est un point critique ; considérons les points du cercle } P_1 = 1 + i.\varepsilon \text{ et } P_2 = 1 - i.\varepsilon \text{ voisins de } z = 1.$$

$f(P_1) \simeq 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + i\varepsilon^3)$ et $f(P_2) \simeq 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - i\varepsilon^3)$ donc $f(P_2) - f(P_1) = i.\varepsilon^3$, donc
 $f(1)$ est un point de rebroussement de seconde espèce.

E9

$$\int_0^1 (2(t^2 + 3)(2t)^2 + 2t(3(2t) - (t^2 + 3))) dt = \frac{33}{2}$$

E11

$$(1) \text{ Dans E2 : } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \text{ remplaçons } f \text{ par } P + iQ :$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

$$(2) \text{ Appliquons Green-Riemann aux parties réelle et imaginaire de } f(z) :$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} (Pdx - Qdy) + i \int_{\Gamma} (Qdx + Pdy) \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= 2i \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} . dx \wedge dy \end{aligned}$$

Or le produit extérieur $d\bar{z} \wedge dz = idx \wedge dy - idy \wedge dx = 2idx \wedge dy$

d'où $\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$.

E12

Les deux singularités π et $-\pi$ sont à l'intérieur du cercle $C(0, 4)$. Deux solutions :

$$(1) \text{ Formule intégrale de Cauchy : } I = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z-\pi} dz - \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z+\pi} dz \right) \\ = \frac{1}{2\pi} (2i\pi \cos \pi - 2i\pi \cos(-\pi)) = 0.$$

(2) Par le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} I &= 2i\pi (Res(f)(-\pi) + Res(f)(\pi)) \\ &= 2i\pi \left(\frac{\cos(-\pi)}{-2\pi} + \frac{\cos(\pi)}{2\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

E13

(1) $x(t) = a \cos t$ et $y(t) = b \sin t$ donc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et Γ est une ellipse centrée d'axes de longueurs respectives $2a$ et $2b$.

(2) $I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi$ (Formule intégrale de Cauchy)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-(a^2 + b^2) \sin \theta \cdot \cos \theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta + i \cdot ab \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2i\pi.$$

d'où la valeur de l'intégrale : $\frac{2\pi}{a \cdot b}$

E14

(1) Soit $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, donc $P(\omega^k) = \sum_{j=0}^n a_j \omega^{kj} = \sum_{j=0}^n a_j e^{\frac{2i\pi}{m}jk}$

$$\sum_{k=0}^{m-1} P(\omega^k) = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{2i\pi}{m}jk} = a_0 \left(\sum_{k=0}^{m-1} 1 \right) + \sum_{j=1}^n a_j \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{2i\pi}{m}jk}}_{\substack{\text{est égal à 0} \\ \text{comme somme des} \\ \text{racines complexes} \\ \text{de l'unité sur le cercle}}} = m \cdot a_0 = m \cdot P(0).$$

(2)

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} P(\omega^k) = \int_{\mathbf{C}(0,1)} P(z) dz = P(0)$$

E15

Décomposons : $\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right)$

D'où : $\int_{C(0,3)} \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \int_C \frac{1}{2i} \frac{e^{zt}}{z - i} dz - \int_C \frac{1}{2i} \frac{e^{zt}}{z + i} dz = \frac{2i\pi}{2i} (e^{it} - e^{-it})$ (Th. de Cauchy)

D'où : $I = \frac{1}{2i\pi} 2i\pi \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t$

E17

- (1) 1
 - (2) $-\frac{1}{2}e$
-

E18

$z^2 - 3z + 2$ est analytique dans $\{ |z| \leq 1 \}$ donc $|f(z)|$ prend son maximum sur le cercle $C(0, 1)$.

Posons $z = e^{i\theta}$: $z^2 - 3z + 2 = e^{2i\theta} - 3e^{i\theta} + 2 = \cos 2\theta - 3 \cos \theta + 2 + i(-3 \sin \theta + \sin 2\theta)$

$$\begin{aligned} |z^2 - 3z + 2|^2 &= (\cos 2\theta - 3 \cos \theta + 2)^2 + (-3 \sin \theta + \sin 2\theta)^2 \\ \frac{d}{dz} |z^2 - 3z + 2|^2 &= 2 [(\cos 2\theta - 3 \cos \theta + 2)(-2 \sin 2\theta + 3 \sin \theta) \\ &\quad + (-3 \sin \theta + \sin 2\theta)(2 \cos 2\theta - 3 \cos \theta)] \\ &= -2 \sin \theta (8 \cos \theta - 9) \end{aligned}$$

Donc $\frac{d}{dz} |z^2 - 3z + 2|^2 = 0 \iff \begin{cases} \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \max |f(z)| = 6 \\ \cos \theta = \frac{9}{8} \text{ impossible} \end{cases}$

E19

(1) Formule intégrale de Cauchy : $\forall z$ à l'intérieur de Γ $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{u - z} du$ et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{u - \bar{z}} du = 0 \text{ car } \bar{z} \text{ est extérieur à } \Gamma. \text{ Par soustraction des deux intégrales : } f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\eta \cdot f(x) dx}{(x - \xi)^2 + \eta^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma'} \frac{\eta \cdot f(u) du}{(u - z)(u - \bar{z})}$$

où $z = \xi + i\eta$ et Γ' = demi cercle supérieur.

Lorsque $R \uparrow +\infty$, la dernière intégrale tend vers 0 et $f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot f(x) dx}{(x - \xi)^2 + \eta^2}$.

Remplaçons $f(z)$ par $f(x, y)$ et $g(x)$ par $f(x)$, on obtient :

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y \cdot g(u)}{y^2 + (x - u)^2} du$$

(2) Si $g(x) = T$, $f(x, y) = \frac{T}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{y^2 + (x - u)^2} du$

Thème d'étude : application à la mécanique des fluides

(a) $\left. \begin{array}{l} \text{irrotationalité} \\ \text{incompressibilité} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \iff \phi \text{ harmonique}$

Il existe donc une fonction $\Psi(x, y) \in C^2$, vérifiant $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

La fonction complexe $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ vérifie les conditions de Cauchy et est donc

holomorphe.

$$\left(\frac{d\Omega}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial\phi}{\partial y} = V_x - i V_y \right) \text{ d'où : } \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) = V_x + i V_y$$

$$(b.1) \Omega(z) = V_0 \left(r e^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right) = \underbrace{V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta}_{\phi(r,\theta)} + i \underbrace{V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta}_{\Psi(r,\theta)}$$

Les lignes de courant sont déterminées par l'équation :

$\Psi(r, \theta) = \beta$, β variant dans \mathbb{R}

$$(b.2) V = \overline{\Omega'(z)} = \overline{V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)} = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) - i \frac{V_0 a^2}{r^2} \sin 2\theta (*)$$

$$V = 0 \iff (r = a, \theta = \pm\pi)$$

Ces deux points sont dits points d'arrêts.

La ligne de courant passant par $\pm a$ coïncide avec la frontière de l'obstacle (résultat classique de mécanique des fluides) : or, $\Psi(r, \theta) = V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$ est égale à 0 sur le cercle $C(0, r)$.

- $|x|$ grand $\iff r$ grand et θ très proche de 0 ou de $\pi \Rightarrow V \simeq V_0$.

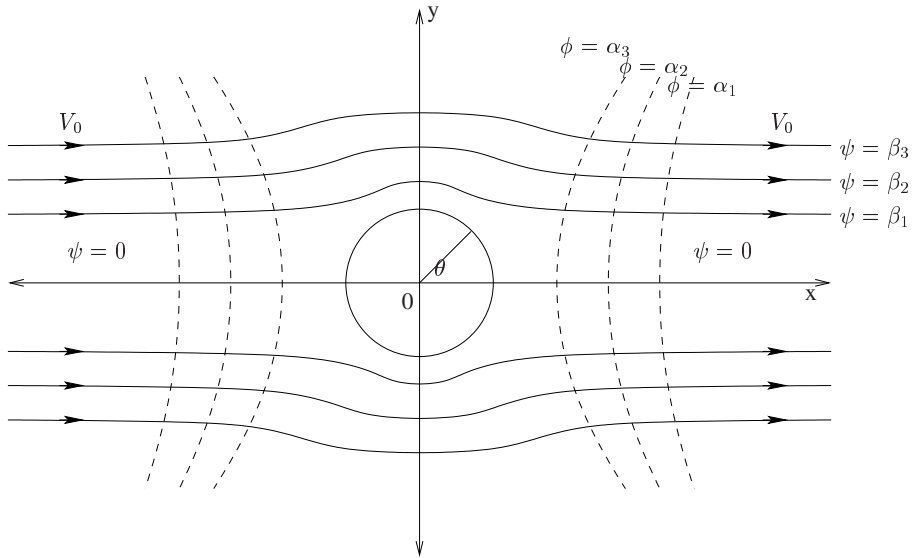
- $|y|$ grand, x quelconque $\iff r$ grand et θ proche de $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \Omega'(z) \approx V_0$

$$\Omega'(z) \approx V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + i \frac{V_0 a^2}{r^2} \cdot 2\theta \approx V_0$$

- $r^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} V_x = V_0(1 - \cos 2\theta) \\ V_y = -V_0 \sin 2\theta \end{cases}$

si $\theta = 0$ ou π alors $V_x = V_y = 0$, si $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$ alors $V_x = 2V_0$, $V_y = 0$.

(la vitesse du fluide au voisinage de l'axe des x , éloignés de 0 est égale à V_0)

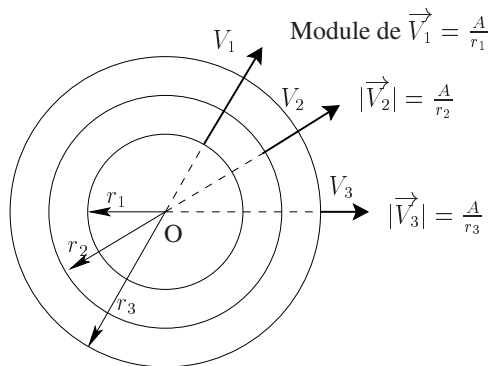


(c.1) $\Omega'_S(z) = \frac{A}{z} = A \left(\frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r} \right)$; $\Omega_S(z) = A \log(r.e^{i\theta}) = A(\log r + i\theta)$

Equation des équipotentielles : $A \log r = \alpha$ ($\alpha > 0$) $\Rightarrow r = cte \iff$ les équipotentielles sont les cercles concentriques de centre 0.

Equation des lignes de courant : $A\theta = \beta \Rightarrow$ les lignes de courant sont les demi-droites issues de 0.

$$V_x = A \frac{\cos \theta}{r}, \quad V_y = A \frac{\sin \theta}{r}, \quad |\vec{V}| = \frac{A}{r}$$



(c.2) $\Omega_P(z) = -A \log(z)$. $V_x = -A \frac{\cos \theta}{2}$, $V_y = A \frac{\sin \theta}{2}$
 mêmes équipotentiels, mêmes lignes de courant, seul le champ des vitesses est inversé.

(c.3)

$$\begin{aligned} \Omega_{S,P}(z) &= \Omega_{S(-a)}(z) + \Omega_{P(+a)}(z) \\ &= A(\log(z+a) - \log(z-a)) \\ &= A(\log \rho_1 e^{i\theta_1} - \log \rho_2 e^{i\theta_2}) \\ &= A \left(\log \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + i(\theta_1 - \theta_2) \right) \end{aligned}$$

Posons $\rho_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ et $\theta_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x+a} \right)$

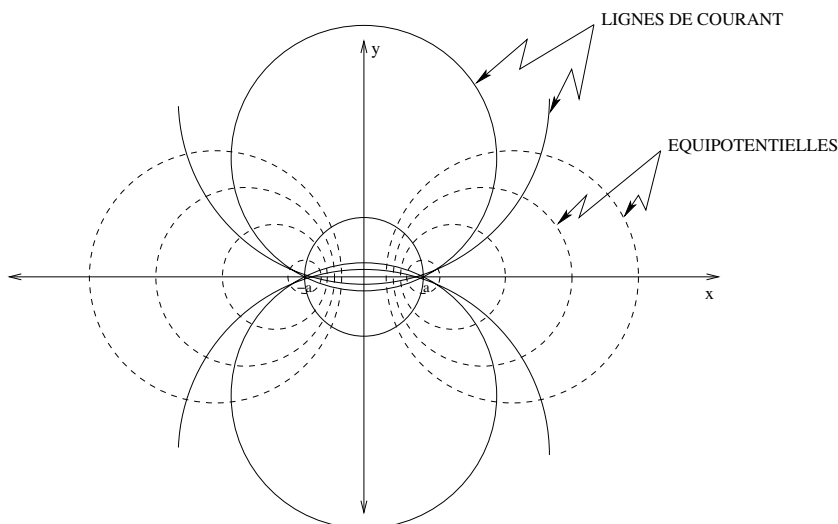
$\rho_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ et $\theta_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x-a} \right)$

L'équation des équipotentiels est de la forme : $\sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = e^{\alpha/A}$ qui est pour diverses valeurs de α , l'équation des cercles de centre $a \operatorname{coth}(\alpha/A)$ et de rayon $a(\operatorname{sh}(\alpha/A))^{-1}$.

(Il suffit de prendre le carré des deux membres, de rassembler les termes non constants et d'effectuer un changement de variables faisant apparaître l'équation du cercle)

Les lignes de courant forment ainsi une famille de cercles (dont les centres sont sur $y'y$), orthogonaux aux cercles équipotentiels.

La vitesse a un module égal à : $\left| \frac{A}{z+a} - \frac{A}{z-a} \right| = \frac{2Aa}{\sqrt{a^4 - 2a^2r^2 \cos 2\theta + r^4}}$



Chapitre 6

Séries entières et de Laurent ; calcul des résidus

Ce chapitre traite du développement en séries, des fonctions holomorphes dans des domaines simplement connexes, et de leur extension à des domaines connexes plus généraux, comme le sont, par exemple, les domaines d'holomorphie des fonctions possédant des singularités. Deux applications puissantes y sont développées : la transformation en Z adaptée au traitement des signaux échantillonnés, et la méthode des résidus qui est non seulement utile, mais souvent incontournable pour expliciter la forme analytique exacte de certaines intégrales paramétrées.

6.1 Rappels sur les séries de fonctions d'une variable complexe

Désignons par $S_n(z) = \sum_{k=1}^n u_k(z)$ la série partielle, de terme général $u_k(z)$.

Définition 1 : La série $S_n(z)$ converge ponctuellement dans le domaine \mathcal{D} vers la somme

$$S(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z) \text{ si :}$$

$$\forall z \in \mathcal{D}, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, z), \forall n > N, |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

Définition 2 : La série $S_n(z)$ converge uniformément vers la somme $S(z)$ dans \mathcal{D} , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n > N, \sup_{z \in \mathcal{D}} |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

Définition 3 : La série $S_n(z)$ est **absolument convergente** dans \mathcal{D} , si la série de terme $|u_k(z)|$ converge dans \mathcal{D} :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, z), \forall n > N \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(z)| < \varepsilon$$

Définition 4 : La série $S_n(z)$ est **normalement convergente** dans \mathcal{D} , si la série de terme $\|u_k\|_\infty = \sup_{z \in \mathcal{D}} |u_k(z)|$ converge :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n > N \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty < \varepsilon$$

On rappelle que la convergence normale d'une série entraîne sa convergence uniforme et absolue, et donc sa convergence simple.

Rappel des critères de convergence des séries numériques.

Théorème 1 (Critères de convergence des séries numériques)

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si est vérifié l'un des critères suivants :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1 \quad (\text{d'Alembert})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1 \quad (\text{Cauchy})$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = L > 1 \quad (\text{Raabe})$$

Notons que si $L = 1$, il est impossible de conclure : il faut alors travailler au cas par cas.

Exemple 1 : Etude de la série de terme $u_n(z) = z^n(1 - z)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) La série converge pour $|z| < 1$: en effet, $S_n(z) = z - z^{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z) = z$.

(b) La série converge absolument dans le même domaine :

$$\sum_{j=1}^n |u_j(z)| = |1 - z|(|z| + |z|^2 + \cdots + |z|^n) = |1 - z||z| \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$$

qui converge vers $\frac{|1 - z||z|}{1 - |z|}$ quand n croît vers $+\infty$.

- (c) La série ne converge pas uniformément dans le domaine : $\{z \mid |z| \leq 1\}$
 car $\sup_{|z| \leq 1} |S_n(z) - z| = \sup_{|z| \leq 1} |z|^{n+1} = 1$, mais converge uniformément dans tout domaine compact inclus dans le disque ouvert $\{z \mid |z| < 1\}$.

Théorème 2 (Critère de Weierstrass)

Si, pour tout $z \in \mathcal{D}$, $|u_n(z)| \leq a_n$, où a_n est indépendant de z et si $\sum_n a_n$ converge, alors

$\sum_n u_n(z)$ est uniformément (et donc absolument) convergente dans \mathcal{D} .

Exemple 2 : Application du critère de Weierstrass.

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}} = \sum_{n \geq 1} u_n(z)$ où $|u_n(z)| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, si $|z| \leq 1$.

$\sum \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$, d'où la convergence uniforme dans $\{|z| \leq 1\}$ de $\sum u_n(z)$.

(b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nz)}{n^3} = \sum v_n(z) \quad |z| \leq 1$

$$\frac{\cos(nz)}{n^3} = e^{-ny} \frac{\cos(nx) + i \sin(nx)}{2n^3} + e^{ny} \frac{\cos(nx) - i \sin(nx)}{2n^3}$$

La série ne peut converger absolument pour des $y \neq 0$, à cause des termes e^{ny} et e^{-ny} ;

si $y = 0$ (z réel) alors $\left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ d'où sa convergence uniforme.

Théorème 3 (Continuité de la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues)

Si les fonctions $(u_n(z))_n$ sont continues au voisinage de $z_0 \in \mathcal{D}$ et si la série $\sum_n u_n(z)$ est uniformément convergente sur tout sous-ensemble compact de \mathcal{D} , alors :

$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est continue en z_0 et peut-être intégrée terme à terme sur tout chemin $\Gamma \subset \mathcal{D}$:

$$\int_{\Gamma} S(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\Gamma} u_n(z) dz$$

Théorème 4 (Propriétés des séries uniformément convergentes de fonctions holomorphes - Weierstrass)

Si la série de fonctions holomorphes $(u_n(z))_n$ dans un domaine \mathcal{D} , est uniformément convergente sur tout sous-ensemble compact de \mathcal{D} , alors :

(1) $\forall z \in \mathcal{D}, S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est holomorphe.

(2) $\forall z \in \mathcal{D}, \forall p \in \mathbb{N}^* S^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(z)$.

E 1

(1) Etudier la convergence de la série $u_n(z) = \frac{z(2-z)^n}{2^{n+1}}$?

(2) Déterminer le domaine de convergence uniforme de la série de terme $\frac{1}{(n+1)z^n}$

E 2

Démontrer le théorème 4. [Pour (1) appliquer le théorème de Morera à la fonction $S(z)$]

6.2 Séries entières et fonctions analytiques

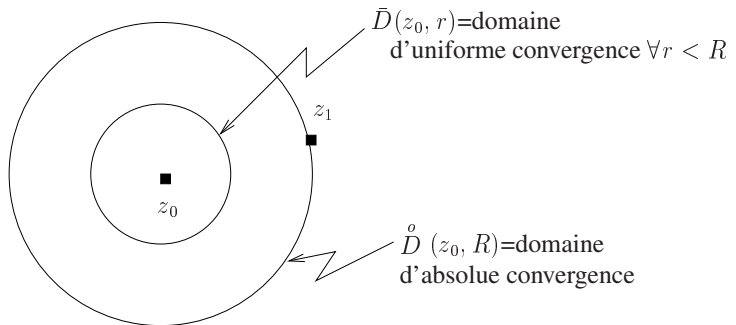
Définition 5 :

Une **série entière** est de la forme : $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - z_0)^n$ où les $c_n \in \mathbb{C}$

Théorème 5 (Lemme d'Abel)

Si la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - z_0)^n$ est **convergente** en z_1 , $z_1 \neq z_0$, alors elle est **absolument**

convergente dans le disque $\overset{\circ}{D}(z_0, R = |z_1 - z_0|)$ et **uniformément convergente** dans tout disque fermé $\bar{D}(z_0, r)$ inclus dans $\overset{\circ}{D}(z_0, R)$.



Preuve Par hypothèse $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z_1 - z_0)^n$ converge, donc $\exists M > 0$ tel que $|c_n (z_1 - z_0)^n| \leq M$

Soit z vérifiant $|z - z_0| \leq r < R$, alors : $\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \leq \frac{r}{R} < 1$, donc :

$$|c_n (z - z_0)^n| = |c_n (z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| \leq M \left(\frac{r}{R} \right)^n$$

d'où la convergence absolue et uniforme dans le disque $\bar{D}(z_0, r)$

□

Soit E_c l'ensemble des points de \mathbb{C} , en lesquels la série $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ converge ; cet ensemble n'étant pas vide, posons $R = \sup_{z \in E_c} |z - z_0|$.

Théorème 6 Le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ est défini par :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{p > n} |c_p|^{1/p} ,$$

si cette limite, finie ou infinie, existe, ce qui n'est pas toujours le cas.

Définition 6 :

Le domaine $\{z \mid |z - z_0| < R\}$ noté $D(z_0, R)$ est le **disque de convergence de la série entière**, éventuellement non borné ou réduit à $\{z_0\}$; R est son **rayon de convergence**.

E 3 Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et sa dérivée $\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Théorème 7 Une série entière converge **normalement** dans tout compact intérieur à son disque de convergence, sa somme est **continue, dérivable terme à terme, intégrable terme à terme** sur toute courbe incluse à l'intérieur du disque de convergence.

Preuve Pour tout compact K inclus dans $D(z_0, R)$, $\exists R'$ tel que $K \subset D(z_0, R')$ avec $R' < R$. Donc $\forall z \in K$, $|z - z_0| \leq R'$, et la série $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ est normalement convergente, majorée dans K par $\sum_n |a_n| (R')^n$ qui est convergente. \square

Attention ! Il n'existe pas de théorème réglant la question du type de convergence d'une série entière sur la frontière de son disque de convergence : on procédera donc au cas par cas.

Exemple 3 : De la diversité des modes de convergence des séries entières.

- (1) $\sum_{n > 0} n! z^n$ a un rayon de convergence nul.
- (2) $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge sur le cercle $C(0, 1)$, mais est normalement donc uniformément convergente dans tout disque $D(0, r)$ inclus dans $D(0, 1)$, pour tout r vérifiant $0 < r < 1$.
- (3) $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n}$ diverge en 1, et est semi-convergente (convergente mais non absolument convergente) sur $C(0, 1) \setminus \{1\}$.
- (4) $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ est normalement convergente sur $C(0, 1)$.

- (5) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ converge dans \mathbb{C} . En effet, $\frac{|u_n(z)|}{|u_{n+1}(z)|} = \left| \frac{-1}{z^2} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \right|$, qui tend vers l'infini avec n , pour tout z de \mathbb{C} . Cette série converge vers $\sin(z)$.
- (6) **Une curiosité** : la série $\sum_{k \geq 3} \frac{e^{i n \ln(\ln(k))}}{\ln(k)} \cdot z^k$ admet 1 comme rayon de convergence et ne converge en aucun point de $C(0, 1)$.

Au vu des propriétés des séries entières, l'important théorème suivant ne devrait pas surprendre le lecteur :

Théorème 8 La somme $S(z)$ d'une série entière est holomorphe dans son disque de convergence $D(z_0, R)$.

Preuve

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n, S'(z) = \sum_{n \geq 1} n c_n (z - z_0)^{n-1} \stackrel{\text{(notée)}}{=} U(z)$$

Or $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ car $(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1)$, donc le rayon de convergence de la série $U(z)$ est égal à celui de $S(z)$; la série $U(z)$ converge uniformément sur tout compact du disque de convergence $D(z_0, R)$, donc $U(z)$ est continue par application du théorème 3.

Intégrons terme à terme la série $U(z)$ sur la frontière d'un triangle quelconque Δ inclus dans $D(z_0, R)$: $\int_{\partial \Delta} U(z) dz = \sum_{n \geq 1} n c_n \underbrace{\int_{\partial \Delta} (z - z_0)^{n-1} dz}_0 = 0$
Th. de Cauchy

Appliquons le lemme d'Abel (Th. 5) :

$$\int_{[z_0, z]} U(u) du = \sum_{n \geq 1} n c_n \int_{[z_0, z]} (u - z_0)^{n-1} du = \sum_{n \geq 1} c_n (z - z_0)^n$$

admet en tout point $z \in D(z_0, R)$ une dérivée égale à $U(z)$, donc : $f(z) = c_0 + \int_{[z_0, z]} U(u) du$
admet en tout z , une dérivée $f'(z) = U(z)$. □

Théorème 9 (Analyticité des fonctions holomorphes)

Toute fonction holomorphe dans un ouvert O admet un développement en série de Taylor unique au voisinage de tout point $z_0 \in O$ du domaine :

$$\exists r > 0, \forall z \in \overset{\circ}{D}(z_0, r) \quad : \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{d'où } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

On dit que $f(z)$ est analytique dans O : elle est donc \mathcal{C}^∞ dans O .

Preuve

Soit Γ un cercle de centre z_0 , de rayon r , inclus dans D :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z)} du \quad (\text{par la formule de Cauchy})$$

Développons $\frac{1}{(u-z)}$:

$$\frac{1}{u-z_0} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)} = \frac{1}{u-z_0} \left(1 + \frac{z-z_0}{u-z_0} + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n + \cdots \right)$$

car : $\left| \frac{z-z_0}{u-z_0} \right| < 1$. La série entre parenthèse est uniformément convergente.

$$\text{donc : } \frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-z_0} + \frac{z-z_0}{(u-z_0)^2} + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}} + \cdots$$

f est continue sur Γ , donc bornée, ce qui justifie l'intégration terme à terme du développement de $f(u) \frac{1}{u-z}$:

Il vient : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(u)}{u-z_0} du + \cdots + (z-z_0)^n \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du + \cdots \right)$, ainsi que le résultat attendu par le Théorème 21 du Chapitre 5. \square

Attention : toute fonction C^∞ n'est pas nécessairement analytique !

En effet, une fonction peut être C^∞ dans \mathbb{R} et ne pas être égale à sa série de Taylor en tout point. C'est le cas de la fonction $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ qui a toutes ses dérivées nulles en 0 et possède donc un développement de Taylor nul au voisinage de 0.

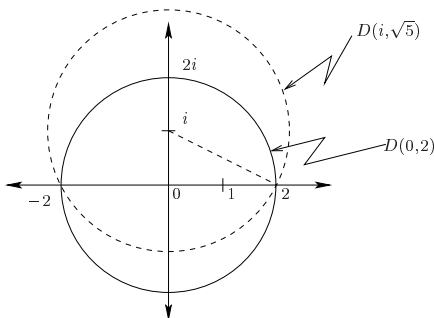
Nous allons maintenant démontrer comment on peut étendre progressivement le domaine d'holomorphic d'une fonction holomorphe hors de son disque de convergence.

Prolongement analytique d'une fonction holomorphe

Considérons par exemple la fonction holomorphe $f_1(z)$ somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ convergente dans son disque de convergence $D(0, 2)$ et de somme $\frac{1}{2-z}$. On sait que pour tout point $z_0 \in D(0, 2)$ la série de Taylor en z_0 de $f_1(z)$, converge non seulement dans tout disque $D(z_0, r)$ inclus dans $D(0, 2)$ mais encore dans son propre disque de convergence, lequel déborde $D(0, 2)$. Prenons $z_0 = i$, la série de Taylor de $f_1(z)$ en $z_0 = i$, s'écrit : $\sum_{n \geq 0} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}} = f_2(z)$; or cette série est convergente dans le disque ouvert $D(i, \sqrt{5})$ non inclus dans $D(0, 2)$.

On vient de prolonger la fonction f_1 par son développement de Taylor en $z_0 = i$, au dehors de son disque de convergence ; sa somme f_2 est dit prolongement analytique de f_1 à $D(i, \sqrt{5})$.

Réciproquement, f_1 est le prolongement analytique de f_2 à $D(0, 2)$.



Il serait possible en choisissant un point $z_1 \in D(i, \sqrt{5}) \setminus D(0, 2)$ de prolonger $f_1(z)$ en dehors de $D(i, \sqrt{5})$, et de poursuivre ainsi la récurrence des prolongements analytiques.

Définition 7 : Une fonction holomorphe f définie sur D est le **prolongement analytique** de la fonction f^* définie sur D^* , contenu dans D , si $f|_{D^*} = f^*$.

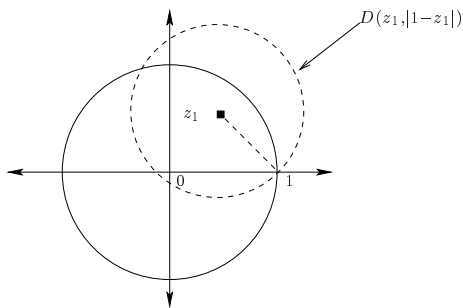
Théorème 10 (Principe du prolongement analytique)
Si deux fonctions f et g sont holomorphes dans un domaine D et coïncident dans un voisinage de z_0 , inclus dans D , alors elles sont identiques dans D .

Interprétation dans le cas des fonctions réelles : *si deux fonctions f et g réelles analytiques sur tout \mathbb{R} sont égales sur un intervalle ouvert, si petit soit-il, elles coïncident partout ; on comprend mieux ce résultat si f et g sont des polynômes.*

Le prolongement analytique est-il toujours possible ?

Remarquons d’abord qu’étant donnée une fonction analytique sur son disque de convergence $D(z_0, R)$, il existe au moins une singularité (point de non analyticité) sur le cercle $C(z_0, R)$, car si ce n’était pas le cas, le disque de convergence serait nécessairement plus grand.

Exemple 4 : Soit $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ qui admet le développement en série de Taylor autour de $z_0 = 0, \sum_{n \geq 0} z^n$, convergent dans $D(0, 1)$; la seule singularité sur la frontière $C(0, 1)$ est le point $z = 1$. Prolongeons $f_1(z)$ en calculant le développement de $f_1(z)$ autour d’un point $z_1 \in D(0, 1) \setminus [0, 1[$. Remarquons que si l’on avait choisi $z_1 \in [0, +1[$, le prolongement n’aurait pas été possible : pourquoi ?



$$f_1(z) = \frac{1}{1 - z_1 - (z - z_1)} = \frac{1}{1 - z_1} \frac{1}{1 - \frac{z - z_1}{1 - z_1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_1)^n}{(1 - z_1)^{n+1}}$$

qui converge dans $D(z_1, |1 - z_1|)$.

En poursuivant la démarche précédente, il est possible de prolonger $f_1(z)$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Remarque : Il existe des séries entières pour lesquelles la frontière du disque de convergence, contient un sous-ensemble de points singuliers, dense dans la frontière, qui la rend infranchissable par prolongement analytique ; c'est le cas de la série suivante.

Exemple 5 : Soit la série $1 + \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ définissant une fonction holomorphe $f(z)$ dans $D(0, 1)$.

On a : $f(z) = z + f(z^2) = z + z^2 + f(z^4) = (\sum_{n=0}^N z^{2^n}) + f(z^{2^{N+1}})$ (par récurrence).

Donc tous les z tels que $z = 1, z^2 = 1, z^4 = 1, \dots$, forment un sous-ensemble des racines complexes de l'unité, dense dans $C(0, 1)$, pour lesquelles la série diverge, constituant des singularités de f . En conséquence, $f(z)$ n'est pas prolongeable au-delà de $D(0, 1)$.

6.3 Les séries de Laurent

Les séries de Laurent généralisent le concept de séries entières dans le cas où le domaine d'holomorphic n'est plus simplement connexe, et possède donc un ou plusieurs sous-ensembles de non-holomorphic. Ces séries permettent d'étudier le comportement d'une fonction holomorphic au voisinage d'une singularité isolée z_0 .

Définition 8 : Le domaine ouvert compris entre deux cercles concentriques C_1 et C_2 de centre z_0 et de rayons r_1, r_2 ($r_1 < r_2$), définit la couronne $\Delta(z_0, r_1, r_2) = \{z \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$

Théorème 11 (dû à Laurent)

Soit $f(z)$ holomorphic dans la couronne $\Delta(z_0, r_1, r_2)$ limitée par les cercles C_1 et C_2 centrés en z_0

Pour tout $z \in \Delta(z_0, r_1, r_2)$, $f(z)$ est représentée par une série unique, dite série de Laurent, définie par :

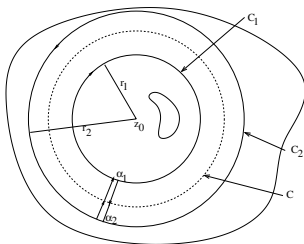
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

égale à la somme d'une série entière en $(z - z_0)$ et d'une série entière en $1/(z - z_0)$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$$

où C^+ est un cercle quelconque concentrique à C_1 et C_2 et inclus dans la couronne.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n}_{\text{partie entière de } f(z)} + \underbrace{\sum_{n \leq -1} a_n (z - z_0)^n}_{\text{partie singulière de } f(z)}$$



Preuve Soit un segment $[\alpha_1, \alpha_2]$ joignant C_1 à C_2 et considérons le chemin Γ partant de α_1 , parcourant C_1 dans le sens négatif, puis $\alpha_1 \alpha_2$, et C_2 dans le sens positif, pour revenir à α_1 .

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u - z)} du = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{C_1^-} \frac{f(u)}{(u - z)} du + \int_{C_2^+} \frac{f(u)}{(u - z)} du \right)$$

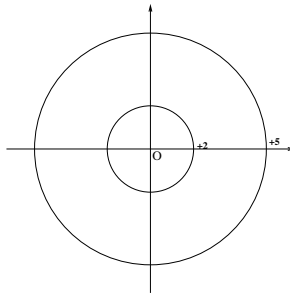
Il suffit de développer $\frac{1}{u - z}$ en série entière, comme on l'a fait dans la preuve du théorème 9, puis d'intégrer. \square

La détermination pratique des développements en séries de Laurent ne nécessite pas toujours le calcul des coefficients a_n par la formule du théorème de Laurent : le cas des fonctions holomorphes définies par des fractions rationnelles en est un exemple, illustré ci-dessous.

Exemple 6 : Soit $f(z) = \frac{1}{(z + 2)(z + 5)}$ holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-2, -5\}$

Déterminons la série de Laurent dans la couronne $\Delta(0, 2, 5) = \{z \mid 2 < |z| < 5\}$.

Décomposons $f(z)$ en éléments simples : $f(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z + 2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z + 5} \right)$



$\forall z \in D_2, |z| > 2$ d'où le développement de $\frac{1}{2+z}$:

$$\frac{1}{z(1 + \frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots \right)$$

et $|z| < 5$ d'où le développement de $\frac{1}{z+5}$:

$$\frac{1}{5} \frac{1}{(1 + \frac{z}{5})} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{z}{5} + \frac{z^2}{25} - \dots \right)$$

ainsi :

$$f(z) = \frac{1}{3z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \dots \right) - \frac{1}{15} \left(1 - \frac{z}{5} + \frac{z^2}{25} - \dots \right)$$

Calculons maintenant le développement de $f(z)$ dans la couronne infinie

$\Delta(0, r_1 = 5, r_2 = +\infty) = \{z \mid |z| > 5\}$:

$$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{z(1 + \frac{5}{z})} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{5}{z} + \frac{25}{z^2} - \frac{125}{z^3} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z(1 + \frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots \right)$$

$$\text{d'où : } f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{7}{z^3} + \dots$$

Remarquons que seul le développement à l'intérieur de la couronne fait apparaître des termes z^n à exposants positifs ou négatifs ; le développement sur la couronne infinie, n'est composé que de termes z^n à exposants négatifs.

E 4

Pour chacune des fonctions $f(z) = z.e^{\frac{1}{z^2}}$ et $g(z) = \frac{(\sin z)^2}{z}$, déterminer la série de Laurent au voisinage de 0.

6.4 Applications des séries de Laurent.

6.4.1 Calcul des séries de Fourier

Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n z^n$ la série de Laurent d'une fonction holomorphe $f(z)$ dans la couronne

$\Delta(0, r_1, r_2)$, où $r_1 < 1$ et $r_2 > 1$. Posons : $z = e^{iu}$ et $\Phi(u) = f(e^{iu})$.

$\Phi(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n e^{inu}$, série convergente si $\log(\frac{1}{r_2}) < \text{Im}(u) < \log(\frac{1}{r_1})$.

Donc $\Phi(u)$ est une série de Fourier à coefficients complexes k_n ; posons : $\forall n, a_n = k_n + k_{-n}$, $b_n = i(k_n - k_{-n})$, $\frac{a_0}{2} = k_0$.

Il vient : $\Phi(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \cos(nu) + \sum_{n \geq 1} b_n \cdot \sin(nu)$.

6.4.2 La transformation en Z .

Le traitement des signaux échantillonnés fait un usage fréquent de la transformation en Z , qui possède des propriétés analogues à celles de la transformation de Laplace. A tout signal échantillonné tempéré $(f(n.a))_{n \in \mathbb{Z}}$, associons la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \cdot \delta_{na}$ où $\forall n, f_n = f(n.a)$ (On rappelle que $(f(n.a))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite tempérée si $\sum_n |f(n.a)|$ ou $\sum_n |f(n.a)|^2$ sont finies).

Le théorème suivant associe à tout signal échantillonné tempéré, une série de Laurent dite transformée en Z du signal, définie sur un domaine de convergence en forme de couronne.

Théorème 12

Etant donné le signal échantillonné tempéré $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ d'un signal $f(t)$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^{-n}$ est une série de Laurent à l'intérieur de la couronne $C = \{z | R_1 < |z| < R_2\}$, y définissant l'unique fonction holomorphe $F(z)$ dite **transformée en Z** du signal $f(t)$: R_2 est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} f(n) \cdot z^{-n}$, $\frac{1}{R_1}$ est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n < 0} f(n) \cdot z^{-n}$$

Preuve En théorie des distributions, on a établi que la transformée de Fourier du signal $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \cdot \delta_{na}$ est égale à $\sum_n f(n) \cdot e^{-2i\pi\nu na} (= \sum_n f(n) \cdot z^{-n}$ si l'on pose $e^{2i\pi\nu a} = z$). Cette dernière série est une série de Laurent, donc holomorphe, dans la couronne $\Delta(0, R_1, R_2)$. \square

Exemple 7 :

(a) Soit $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, alors $F(z) = \frac{1}{z-1}$ est une fonction holomorphe dans $D(0, 1)$.

(b) Le peigne de Dirac \lll admet la série de Laurent $\sum_n z^{-n}$ dont le rayon de convergence est nul : il n'existe pas de transformée en Z de \lll .

E 5 Soit le signal échantillonné $f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{a^n} & \forall n > 0 \\ a^n & \forall n \leq 0 \end{cases}$ où $a > 1$. Déterminer sa transformée en Z et sa couronne de convergence.

Les propriétés de la transformée en Z sont des conséquences immédiates de la théorie des fonctions holomorphes et des séries de Laurent :

Théorème 13 (Propriétés de la transformée en Z)

La transformée en Z du signal $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, notée $F(z)$ et définie à l'intérieur de la couronne $\{z | R_1 < |z| < R_2\}$, vérifie les propriétés :

(1) Pour p entier fixé, $g(n) = f(n-p)$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$), alors $G(z) = F(z)z^p$

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$, si $h(n) = f(-n)$ alors $H(z) = F(\frac{1}{z})$ où $H(z)$ est la transformée en Z du signal $(h(n))_n$, définie dans $\{z | \frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1}\}$.

(3) Soit $(f(n))_n$ le signal égal au produit de convolution des signaux $(f_1(n))$ et $(f_2(n))$; soit, $f(n) = \sum_k f_1(k) \cdot f_2(n-k)$ alors $F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z)$ dans la couronne égale à l'intersection des couronnes de convergence de F_1 et F_2 .

E 6 Prouver ces propriétés.

Problème inverse : connaissant une transformée en Z , comment déterminer le signal échantillonné dont elle provient ?

Il existe deux méthodes selon que $F(z)$ est une fraction rationnelle ou pas :

(1) Si $F(z)$ est une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples puis on détermine les signaux échantillonnés, qui leur sont associés, grâce à une table de correspondance entre les fonctions et leurs transformées en Z .

Considérons, par exemple, $F(z) = \frac{3z+1}{(z-1)(1-3z)}$. Sa couronne de convergence est $\{z | \frac{1}{3} < |z| < 1\}$ et $F(z) = \frac{-2}{z-1} - \frac{3}{1-3z}$.

$$|z| > \frac{1}{3} \text{ alors } F_1(z) = \frac{3}{3z} \left(1 + \frac{1}{3z} + \dots\right)$$

$$|z| < 1 \text{ alors } F_2(z) = 2(1 + z + z^2 + \dots)$$

(2) Si $F(z)$ est différente d'une fraction rationnelle, on fait appel au théorème d'inversion suivant :

Théorème 14 (Inversion de la transformée en Z)

Soit $F(z)$ une transformée en Z définie dans la couronne $C = \{z | R_1 < |z| < R_2\}$ alors le signal échantillonné $f(n)$ est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} z^{n-1} F(z) dz$$

où Γ^+ est un circuit entourant l'origine, contenu dans la couronne C , et parcouru dans le sens positif.

Le calcul de l'intégrale précédente pourra se faire grâce à la méthode des résidus.

6.5 Classification des singularités

Un point z_0 est une singularité d'une fonction f si cette dernière n'est pas holomorphe en ce point. Une singularité est isolée s'il existe un disque $D(z_0, r)$ qui ne contient aucune singularité autre que z_0 .

Il existe trois types de singularités isolées pour les fonctions complexes uniformes, dont l'une n'est qu'apparente.

Définition 9 : z_0 est une **singularité apparente** (ou **artificielle**) de la fonction holomorphe f , si $f(z_0)$ est non définie, mais prolongeable par continuité en z_0 .

Exemple 8 : 0 est une singularité apparente de la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ (résultat déjà connu dans le cas où $z \in \mathbb{R}$).

Définition 10 : Etant donné un point singulier z_0 et le disque pointé $D(z_0, r)$, dans lequel on développe $f(z)$ en sa série de Laurent. On dit que z_0 est un **pôle d'ordre N** de f en z_0 , si un nombre fini seulement de coefficients a_n d'indice négatif de la série de Laurent, sont différents de 0 ; N est alors défini par $a_n = 0$ pour tout $n \leq -(N + 1)$ et $a_{-N} \neq 0$, et $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^N \cdot f(z)$ existe et est différente de 0.

Exemple 9 : Si $f(z)$ est de la forme $\frac{g(z)}{(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_N)^{k_N}}$, g étant une fonction holomorphe aux voisinages de z_1, z_2, \dots, z_N et non nulle en ces points, le résultat précédent est évident. Les z_i sont des pôles de $f(z)$, d'ordre k_i .

Définition 11 : z_0 est une **singularité essentielle** de f si elle n'est ni apparente, ni un pôle. Au voisinage de z_0 , $f(z)$ se développe en série de Laurent $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i(z - z_0)^i$, pour laquelle il existe une infinité de a_i non nuls où $i < 0$. Lorsque z tend vers z_0 , $f(z)$ n'a pas de limite.

Exemple 10 : $z_0 = 0$ est un singularité essentielle de $e^{1/z}$; $\forall z$ tel que $|z| > 0$,
 $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$.

Définition 12 : Une fonction holomorphe dans un domaine D sauf en un nombre fini de pôles est dite **méromorphe**.

E 7 Soient $f(z)$ et $g(z)$ holomorphes dans un domaine D . Soit z_0 tel que :
 $f(z_0) = g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$.

Montrer que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$; application au calcul de $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + i}{z - i}$.

6.6 Théorème des résidus : applications au calcul d'intégrales

Définition 13 :
 Le **résidu** en z^* d'une fonction f holomorphe dans le domaine $\mathcal{D} \setminus \{z^*\}$, est égal au coefficient a_{-1} de son développement en série de Laurent, défini par $\frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} f(u) du$, où C est une courbe fermée simple entourant z^* , et contenue dans \mathcal{D} .

Méthodes pour la détermination pratique d'un résidu.

(a) z^* est un **pôle d'ordre 1** de $f(z) : f(z) = \sum_{i=-1}^{\infty} a_i(z - z^*)^i$

d'où :

$$\boxed{(z - z^*)f(z)|_{z=z^*} = a_{-1} = Res(z^*)}$$

Si $f(z)$ est de la forme $\frac{P_1(z)}{P_2(z)}$ où P_1 et P_2 sont holomorphes tels que $P_1(z^*) \neq 0$, $P_2(z^*) = 0, P_2'(z^*) \neq 0$, alors :

$$\boxed{Res(z^*) = \frac{P_1(z^*)}{P_2'(z^*)}}$$

$$\text{En effet : } \lim_{z \rightarrow z^*} (z - z^*) \frac{P_1(z)}{P_2(z)} = \lim_{z \rightarrow z^*} \frac{P_1(z)}{\frac{P_2(z) - P_2(z^*)}{z - z^*}} = \frac{P_1(z^*)}{P_2'(z^*)}$$

Exemple 11 : Résidus de $f(z) = \frac{1}{z^2(z - 1)}$

- En $z = 1$, pôle d'ordre 1 : d'où le résidu $Res(1) = (z - 1) \frac{1}{z^2(z - 1)} \Big|_{z=1} = 1$

(b) z^* est un pôle d'ordre N de $f(z)$: $Res(z^*) = \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z-z^*)^N \cdot f(z)]_{z=z^*}$

Cette méthode risque d'être laborieuse si N excède 3 ou 4.

– En $z = 0$, pôle d'ordre 2 : d'où le résidu $Res(0) = \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-1} \right) \right)_{z=0} = -1$

(c) z^* est un pôle d'ordre N ou une singularité essentielle de $f(z)$: il faut dans ce cas développer la fonction en série de Laurent.

Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{\tan(z)}{\text{sh}(z)}$ où $\text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

$f(z)$ n'est pas holomorphe en $z_0 = 0$; développons $g(z) = \frac{\tan(z)}{\text{sh}(z)}$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} \frac{\left(z - \frac{z^3}{6} + \dots \right)}{\left(1 - \frac{z^2}{2} + \dots \right) \left(z + \frac{z^3}{6} + \dots \right)} &= \frac{z \left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots \right)}{z \left(1 - \frac{z^2}{2} + \dots \right) \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots \right)} \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots \right) \left(1 + \frac{2}{3}z^2 + \dots \right) \\ &= \left(1 + \frac{z^2}{6} + \dots \right). \end{aligned}$$

D'où le développement en série de Laurent de $f(z)$: $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \dots$ qui fait apparaître le résidu a_{-1} égal à $\frac{1}{6}$.

L'application de la méthode classique (b) serait ici beaucoup plus coûteuse !

Théorème 15 (Lemme de Jordan)

Soient Γ_R un arc de cercle centré en z_0 , d'angle au centre θ , de rayon R et f une fonction continue sur Γ_R :

Si $\lim_{R \rightarrow 0} \sup_{z \in \Gamma_R} |(z - z_0)f(z)| = 0$, alors $\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$.

Si $\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \Gamma_R} |(z - z_0)f(z)| = 0$, alors $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$.

Preuve évidente en majorant $\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right|$.

Théorème 16 (Théorème des résidus)

Soit f holomorphe dans $D \setminus \{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\}$ où les z_i^* sont des pôles ou des singularités essentielles.

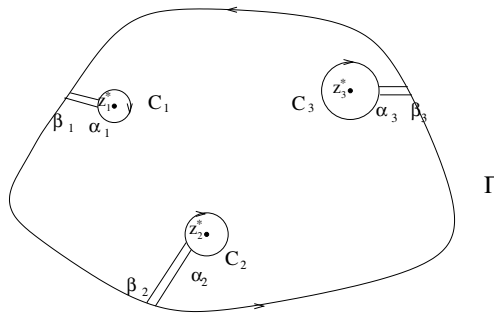
Pour tout circuit Γ d'indice 1 inclus dans D et entourant un sous ensemble quelconque $\{z_{j_1}^*, z_{j_2}^*, \dots, z_{j_p}^*\}$ de l'ensemble des singularités, on a :

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^p Res(z_{j_k}^*)(f)$$

Preuve Entourons chaque singularité z_{jk}^* d'un cercle $C_{jk} = C(z_{jk}^*, r_{jk})$ intérieur à Γ et construisons un arc (α_k, β_k) entre chaque cercle et Γ . Ces arcs sont parcourus dans un sens puis dans l'autre, et forment avec le circuit Γ un circuit Γ' ne contenant aucune singularité z_{jk}^* . D'après le théorème de Cauchy, $\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0$. Mais $\Gamma' = \Gamma \cup (\cup_k C_{jk}^-) \cup (\cup_k (\alpha_k, \beta_k)^\pm)$, ce qui conduit au résultat annoncé :

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^{k=p} \int_{C_k} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^p Res(z_{jk}^*)(f)$$

□



Exemple 12 : Soit $\Gamma_1 = C(0, \frac{1}{2})$, seul le pôle double $z^* = 0$ est à l'intérieur de Γ_1

$$\int_{C(0, \frac{1}{2})} \frac{1}{z^2(z-1)} dz = 2i\pi Res(0) = -2i\pi$$

Soit $\Gamma_2 = C(1, \frac{1}{2})$, seul le pôle simple $z^* = 1$ est à l'intérieur de Γ_2

$$\int_{C(1, \frac{1}{2})} \frac{1}{z^2(z-1)} dz = 2i\pi Res(1) = 2i\pi$$

Pour tout cercle C contenant les deux pôles :

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-1)} dz = (Res(0) + Res(+1)) 2i\pi = 0$$

Le théorème des résidus est à la base d'une méthode de calcul d'intégrales qui est souvent la seule permettant d'en calculer les valeurs exactes ou d'en déterminer l'expression analytique dans le cas où elles dépendent de paramètres. Cette méthode est particulièrement précieuse pour le calcul des transformées de Fourier et de leurs inverses.

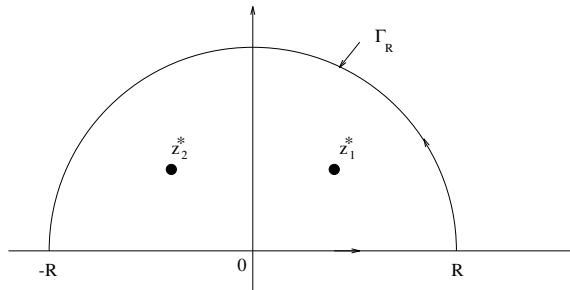
Méthode des résidus pour le calcul des intégrales réelles $\int_a^b f(x) dx$.

- (1) Associer à $f(x)$ la fonction complexe $f(z)$.
- (2) Associer à l'intervalle $[a, b]$ un circuit Γ inclus dans \mathbb{C} , dont une portion Γ^* coïncide avec $[a, b]$; **on prendra soin de choisir le circuit Γ le mieux adapté au problème, entraînant le moins de calculs possible.**
- (3) Calculer $\int_{\Gamma} f(z) dz$ à l'aide du théorème des résidus.
- (4) Calculer $\int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma \setminus \Gamma^*} f(z) dz$ qui est égal à $\int_a^b f(x) dx$.

Exemple 13 : Soit à calculer $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^4}$.

La fonction complexe associée $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, a 4 pôles : $z_k^* = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$, où $k = 0, 1, 2, 3$.

Un circuit devant contenir $[-R, +R]$ ne contiendra que deux pôles parmi les quatre : choisissons par exemple les deux pôles du demi-plan positif : $z_1^* = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2^* = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Soit Γ_R le demi-cercle positif :



$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= 2i\pi \left(\text{Res} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + \text{Res} \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \right) \\ &= 2i\pi \left(-\frac{1}{4} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \frac{(-1+i)}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

d'où, par passage à la limite infinie de R :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Gamma_R} f(z) dz \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Pour montrer que : $\int_{\Gamma_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, appliquons le lemme de Jordan (Théorème 15) :

$$\left| \frac{z}{1+z^4} \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \text{ donc l'intégrale tend vers } 0.$$

En conclusion :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

E 8 Calculer $\int_{C^+} \frac{dz}{(z^4-1)^2}$ où $C = \{z \mid |z-i| = 1\}$.
 [Indication : décomposer en fractions rationnelles]

Une méthode de calcul des intégrales $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$.

Effectuons le changement de variable $z = e^{i\theta}$, d'où :

$$I = \int_{\Gamma^+} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz} \text{ avec } \Gamma = C(0, 1)$$

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^p \text{Res}(z_{i_k}^*)$$

où les $z_{i_k}^*$ sont intérieurs à $C(0, 1)$.

Exemple 14 : Soit à calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta$ où $a > 1$.

Posons : $e^{i\theta} = z$; $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ et $d\theta = \frac{dz}{iz}$. $I = -2i \int_{C(0,1)} \frac{1}{z^2+1+2az} dz$ de la forme $\int_{C(0,1)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} dz$.

Les points singuliers de $\frac{P_1(z)}{P_2(z)}$ sont ici solutions de l'équation $P_2(z) = 0$: ce sont les pôles simples $z_1^* = \sqrt{a^2-1} - a$, $z_2^* = -\sqrt{a^2-1} - a$.

$z_1^* < 0$ et > -1 donc est intérieur au cercle $C(0, 1)$; $z_2^* < -1$, donc extérieur à $C(0, 1)$.

D'après la méthode (a) du début de paragraphe 6.6, on a : $\text{Rés}(z_1^*) = \frac{P_1(z_1^*)}{P_2'(z_1^*)}$, d'où $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Pour les questions (1) et (4) de l'exercice suivant, on utilisera le théorème :

Théorème 17 S'il existe $M > 0$ et $k > 1$ tels que la fonction $f(z)$ vérifie : $f(z) \leq \frac{M}{R^k}$, pour tout z intérieur au demi-cercle positif de rayon R , noté Γ_R , alors, pour tout m :

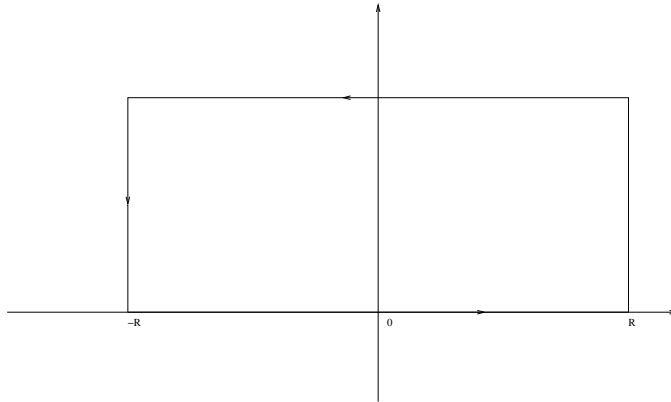
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{imz} f(z) dz = 0 \quad .$$

E 9 Calculer :

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2} dx$ (a et $b > 0$)

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(3) Calcul de la transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$. On intégrera $f(z) = e^{-\pi z^2}$ sur le chemin de forme rectangulaire ci-dessous, et on montrera que l'intégrale de $f(z)$ sur les segments verticaux tend vers 0 quand R tend vers l'infini.



$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

On utilisera d'abord le théorème de Cauchy, appliqué à un circuit dont l'intérieur ne contient pas la singularité 0. On fera ensuite appel au théorème de convergence dominée

pour calculer $\int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz$, où Γ_1 est le demi-cercle positif de rayon ε , que l'on fera tendre vers 0.

6.7 Corrigés des exercices

E1

- (1) Convergence absolue si $|z - 2| < 2$ ou si $z = 0$
 Convergence uniforme si $|z - 2| \leq R$ où $0 < R < 2$
 Pas de convergence uniforme dans tout voisinage contenant $z = 0$
 (2) Domaine de convergence uniforme = $\{z \mid |z| \geq R \text{ avec } R > 1\}$
-

E2

$$(*) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ tq : } |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon \quad \forall n > N \text{ et } \forall z \in D$$

- (1) Soit une courbe fermée simple C de longueur l ; les $u_k(z)$ étant continues, $S(z)$ est continue et $\int_C S(z) dz$ existe.

$$\text{d'où d'après } (*) : \forall n > N, \left| \int_C S(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_C u_k(z) dz \right| < \varepsilon \cdot l$$

$$\text{d'où : } \int_C S(z) dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_C u_k(z) dz$$

Mais, d'après le Théorème de Cauchy : $\int_C u_k(z) dz = 0$ et donc $\int_C S(z) dz = 0$, d'où le résultat par le théorème de Morera.

- (2) Montrons que $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n$. Soit $a \in D$; on peut trouver $R > 0$ tel que $\overline{D}(a, 2R) \subset D$. $\forall z \in D(a, R)$, en utilisant la formule intégrale de Cauchy, et en notant C le chemin fermé d'image le cercle $C(a, 2R)$, on a :

$$S'(z) - S'_N(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{S(u) - S_N(u)}{(u - z)^2} du$$

Mais $z \in D(a, R)$ et $u \in C(a, 2R)$, donc $|z - u| \geq R$. D'où

$$|S'(z) - S'_N(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \|S - S_N\|_{\infty} \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R = \frac{2}{R} \|S - S_N\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{D'où } S' = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n.$$

E3

Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Soit z^* tel que $0 < |z^*| < R$; on choisit N tel que $|a_n| < \frac{1}{|z^*|^n}$ ($\forall n > N$)

Pour $n > N$, $n|a_n||z|^{n-1}$ est inférieur à $n \frac{|z|^{n-1}}{|z^*|^n}$ qui converge.

La série $\sum n a_n z^{n-1}$ converge donc absolument pour tous les points $|z| < |z^*|$.

Si $|z| > R$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z^n \neq 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n z^{n-1} \neq 0$

R est donc le rayon de convergence de la série dérivée. Ceci est vrai si $R = 0$.

E4

(1) $\forall z \neq 0$ $f(z) = z + \sum_{n=0} \frac{z^{-(2n+1)}}{(n+1)!}$; $z = 0$ est un point singulier essentiel.

(2) $g(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{45} + \dots$; $z = 0$ est une singularité apparente.

E5

$$F(z) = - \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(az)^n}}_{F_1(z)} + \underbrace{\sum_{n \leq 0} \left(\frac{a}{z}\right)^n}_{F_2(z)}$$

$F_1(z) = \frac{1}{1-az}$ converge si $|z| > \frac{1}{a}$

$F_2(z) = \frac{a}{a-z}$ converge si $|z| < a$

donc : $F(z) = \frac{1}{1-az} + \frac{a}{a-z}$ pour tout $z \in$ couronne $\{z | \frac{1}{a} < |z| < a\}$.

E7

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \times \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Donc : $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + i}{z - i} = -3$

E8

$$\frac{1}{(z^4 - 1)^2} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{(z - 1)^2} + \frac{C}{z + 1} + \frac{D}{(z + 1)^2} + \frac{E}{z + i} + \frac{F}{(z + i)^2} + \frac{G}{z - i} + \frac{H}{(z - i)^2}$$

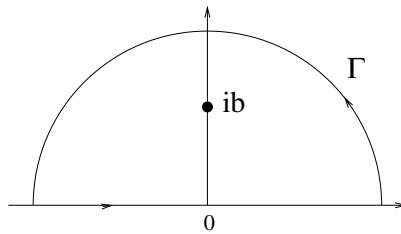
Il y a 4 pôles d'ordre 2 : 1, -1, i , $-i$.

Seul i est à l'intérieur du cercle, donc :

$$\int_{C^+} \frac{dz}{(z^4 - 1)^2} = 2i\pi \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{(z - i)^2}{(z^4 - 1)^2} = \frac{3\pi}{8}$$

E9

(1) Considérons $J = \int_{\Gamma} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} dz$ où Γ est le circuit où $R > b$.



Seul le pôle ib est intérieur au demi-cercle :

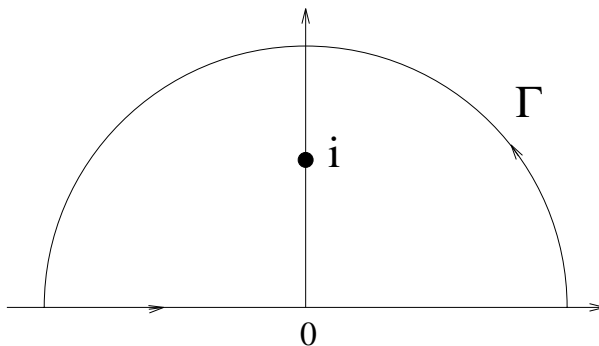
$$\text{Résidu}(i) = \lim_{z \rightarrow ib} (z - ib) \frac{e^{iaz}}{(z - ib)(z + ib)} = \frac{e^{-ab}}{2ib} \text{ d'où } J = \frac{e^{-ab}}{b}$$

$$\text{Or } J = \int_{-R}^{+R} f(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) dz = 2 \int_0^R \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} dz}_{I_3}$$

Grâce au lemme précédent, $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_3 = 0$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-ab}}{b}$$

(2) On associe l'intégrale complexe $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^n}$ où Γ est



$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)^n} + \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(1+z^2)^n} \text{ où } \Gamma_1 \text{ est le demi-cercle.}$$

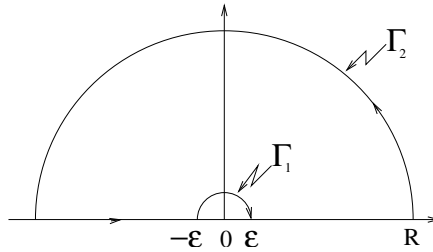
$$\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(1+z^2)^n} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{en utilisant le lemme de Jordan.})$$

$\frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$ d'où deux pôles simples i et $-i$ d'ordre n ; seul i est à l'intérieur de Γ , si $R > 1$.

$$\text{Rés}(f(z))_{\text{en } i} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{(z-i)^n}{(z+i)^n(z-i)^n} \right) \Big|_{z=i}$$

Après une récurrence on obtient : $\frac{1}{(n-1)!}(-1)^n \cdot 2^{-2n+1} \cdot i^{-2n+1}$,
 puis le résultat : $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}$ si $n > 1$ (si $n = 1$ on obtient $\frac{\pi}{2}$).

(4) A $\frac{\sin x}{x}$ on associe $\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z}\right)$ qui admet $z = 0$ comme seule singularité ; d'où le chemin Γ suivant :



$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Le théorème de Cauchy $\rightarrow \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ d'où il vient :

$$2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = - \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz}_{I_1} - \underbrace{\int_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz}_{I_2}$$

Posons : $z = \epsilon \cdot e^{i\theta}$, $\int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\epsilon \cdot e^{i\theta}}}{\epsilon \cdot e^{i\theta}} \epsilon \cdot i \cdot e^{i\theta} d\theta = i \int_{\pi}^0 e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta$. Or $|e^{i\epsilon e^{i\theta}}| = |e^{i\epsilon \cos \theta} e^{-\epsilon \sin \theta}| = |e^{-\epsilon \sin \theta}| \leq 1$, pour $\theta \in [0, \pi]$. En usant du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_{\pi}^0 e^{i\epsilon \cdot e^{i\theta}} d\theta = i \int_{\pi}^0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (e^{i\epsilon e^{i\theta}}) d\theta = i \int_{\pi}^0 1 d\theta = -i\pi$

Pour calculer I_2 , on utilise le Théorème 17 et on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

Annexe A

Le corps des complexes

$\mathbb{C} = \{z = (x + iy) \text{ tels que } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$

$x =$ partie réelle de z , notée $Re(z)$

$y =$ partie imaginaire de z , notée $Im(z)$

En coordonnées polaires : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.

Conjugué de z , noté \bar{z} égal à $(x - iy)$, ou encore :

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

On a : $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$

Module de z , notée $|z|$ égale à $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Soient :
$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases}$$

Le produit

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Le rapport

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

La puissance

$$(z)^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont dites **racines nième de l'unité** et s'équirépartissent sur le cercle unité.

$$z_n = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Ainsi : $z^3 = 1$ admet trois racines : $z_0 = 1$, $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, et $z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Pour tout z , $(z)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right)$ où : $0 \leq \theta < 2\pi$ et $k = 0, 1, \dots, (n-1)$; n entier ≥ 1

Fonctions trigonométriques

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

Fonctions hyperboliques

$$\text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cos(z) = \text{ch}(iz)$$

$$i \sin(z) = \text{sh}(iz)$$

Annexe B

Rappels divers

Fonction **gamma** : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1} dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0$
Propriétés : $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$

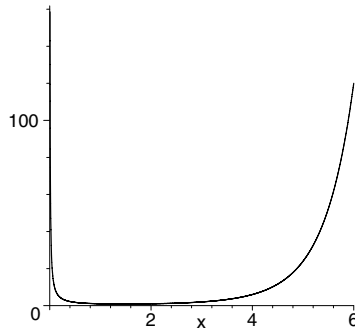


FIG. B.1 – Le graphe de la fonction $\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Fonction **beta** : $B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1} \cdot (1-t)^{z_2-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z_1) \text{ et } \operatorname{Re}(z_2) > 0.$
Propriétés : $B(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}$ et $B(z_1, z_2) = B(z_2, z_1)$

Approximation de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ si n est grand.

Intégrale de Gauss : $\forall a$ réel, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}.$

Intégrales de Fresnel : $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Intégrale du sinus cardinal : $\forall a > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

Formules de trigonométrie

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad ; \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad ; \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

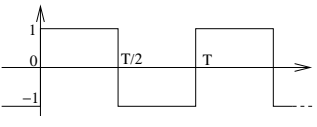
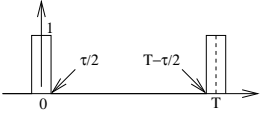
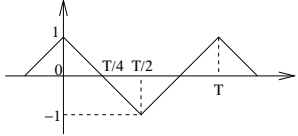
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad ; \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad ; \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Annexe C

Transformées de Fourier et de Laplace

TRANSFORMÉES DE FOURIER DES FONCTIONS.	
$f(t)$	$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt$
$\mathbf{I}_{[-T, T]}(t)$	$2T \operatorname{sinc}(2\pi T\nu)$
$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-2\pi^2\nu^2\sigma^2}$
$\left(1 - \frac{ t }{T}\right) \mathbf{I}_{[-T, T]}(t)$	$T(\operatorname{sinc}(\pi T\nu))^2$
$e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{2T}{1 + 4\pi^2\nu^2 T^2}$
$e^{-\frac{t}{T}} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\frac{T}{1 + 2i\pi\nu T}$
$\frac{1}{\pi(1 + t^2)}$	$e^{-2\pi \nu }$
$\frac{\sin t}{t}$	$\pi \mathbf{I}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\nu)$
$\frac{e^{-\frac{t}{T}} t^{\alpha-1}}{T^\alpha \Gamma(\alpha)} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\frac{1}{(1 + 2i\pi\nu T)^\alpha}$

SÉRIES DE FOURIER DE FONCTIONS T-PÉRIODIQUES CLASSIQUES.	
MOTIF PÉRIODIQUE	SÉRIE DE FOURIER
<p>CRÉNEAU</p> 	$S(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{2\pi(2n+1)\nu}{T}\right)$
<p>IMPULSIONS RÉGULIÈRES</p> 	$S(t) = \frac{\tau}{T} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} \cos\left(\frac{2\pi n\nu}{T}\right) \right)$
<p>TRIANGULAIRE</p> 	$S(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)2\pi\nu}{(2n+1)^2}$

PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER.

$$\widehat{\tau_a f}(\nu) = e^{-2i\pi a\nu} \widehat{f}(\nu) \text{ avec } \tau_a f(x) = f(x - a)$$

$$\widehat{f_{\frac{1}{a}}}(\nu) = a \widehat{f}(a\nu) \text{ avec } f_{\frac{1}{a}}(x) = f\left(\frac{x}{a}\right), a > 0$$

$$\text{Si } f \in C^k, f^{(k)} \in L^1, \widehat{f^{(k)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^k \widehat{f}(\nu)$$

Pour tout couple d'entiers (m, n) :

$$\int_0^\pi \sin(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ 1 - (-1)^{m+n} & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin(mx) \sin(nx) dx = \int_0^\pi \cos(mx) \cos(nx) dx = \delta_{m,n} \frac{\pi}{2}.$$

TRANSFORMEES DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS	
\mathbf{T}	$\widehat{\mathbf{T}}$
δ	1
$\delta_{(t-a)}$	$e^{-2i\pi a\nu}$
1	δ
$e^{2i\pi at}$	$\delta_{(\nu-a)}$
$\cos(2\pi at)$	$\frac{1}{2} [\delta_{(\nu-a)} + \delta_{(\nu+a)}]$
$\sin(2\pi at)$	$\frac{1}{2i} [\delta_{(\nu-a)} - \delta_{(\nu+a)}]$
δ'	$2i\pi\nu$
t	$-\frac{1}{2i\pi}\delta'$
$\delta^{(m)}$	$(2i\pi\nu)^m$
t^m	$\frac{(-1)^m}{(2i\pi)^m}\delta^{(m)}$
$\sum_n \delta(t - n\theta)$	$\frac{1}{\theta} \sum_n \delta\left(\nu - \frac{n}{\theta}\right)$
$\frac{1}{\theta} \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{(2i\pi \frac{p}{\theta} t)}$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n\theta\nu}$
$\operatorname{sgn} t$	$\frac{1}{i\pi} Pf \frac{1}{\nu}$
$H(t)$	$\frac{1}{2} \left[\delta + \frac{1}{i\pi} Pf \frac{1}{\nu} \right]$
$Pf \frac{1}{t}$	$-i\pi \operatorname{sgn} \nu$
$H(t) \cdot t^m$	$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{i}{2\pi} \right)^m \delta^{(m)} \right] + Pf \frac{m!}{(2i\pi\nu)^m}$
$\operatorname{sgn} t^m$	$Pf \left[\frac{2m!}{(2i\pi\nu)^{m+1}} \right]$
$ t $	$-\frac{1}{2\pi^2} Pf \left(\frac{1}{\nu^2} \right)$

TRANSFORMÉES DE LAPLACE DES FONCTIONS	
$f(t)$	$L[f](p)$
$H(t)$	$\frac{1}{p}$
$t \cdot H(t)$	$\frac{1}{p^2} \quad p > 0$
$t^a \cdot H(t) \quad \text{Ré}(a) > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad \text{Ré}(p) > 0$
$\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot H(t) \quad t > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad p > 0$
$e^{at} \cdot H(t)$	$\frac{1}{p-a} \quad \text{Ré}(p) > \text{Ré}(a)$
$e^{iat} \cdot H(t)$	$\frac{1}{p-ia} \quad \text{Ré}(p) > -\text{Im}(a)$
$t^n e^{-at} \cdot H(t) \quad n \text{ entier } \geq 0$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}} \quad p > \text{Im}(a) $
$e^{at} f \cdot H(t)$	$L[f](p-a)$
$f(t-a) \cdot H(t-a)$	$e^{-pa} L[f](p)$
$\cos \omega t \cdot H(t) \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad \text{Ré}(p) > 0$
$\sin \omega t \cdot H(t) \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{Ré}(p) > 0$
$e^{-at} \cos \omega t \cdot H(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2} \quad p > -a$
$e^{-at} \sin \omega t \cdot H(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \quad p > -a$
$A e^{-at} \cos(\omega t + \Phi) \cdot H(t)$	$\frac{\alpha p + \beta}{(p+a)^2 + \omega^2} \quad p > -a$
où $A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + (\beta - a\alpha)^2}$	$\Phi = -\arctan\left(\frac{\beta - a\alpha}{\alpha\omega}\right)$

TRANSFORMEES DE LAPLACE DES DISTRIBUTIONS	
T	L (T)(p)
δ	1
$\delta_{(t-a)} \quad a > 0$	e^{-ap}
$\delta^{(n)}$	p^n
$\delta_{(t-a)}^{(n)}$	$p^n e^{-ap}$
$H(t)$	$\frac{1}{p}$
$H(t) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{1}{p^\alpha}$

Annexe D

Représentation des signaux et leurs propriétés

	FONCTIONS	DISTRIBUTIONS
	$f \in \mathbf{L}_p^1(\mathbf{0}, a)$	T périodique de période a , donc nécessairement tempérés ($\in \mathcal{S}'$)
P	$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_n \cdot e^{ik\frac{2\pi}{a}x}$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$ est notée $\mathbb{1}\mathbb{1}_a$.
E	$c_n = \frac{1}{a} \int_0^a e^{-\frac{2i\pi k}{a}x} f(x) dx$.	$\mathbb{1}\mathbb{1}_1 = \mathbb{1}\mathbb{1}_1$ et $\mathbb{1}\mathbb{1}_a = \frac{1}{a} \mathbb{1}\mathbb{1}_{\frac{1}{a}}$,
R	Si f est \mathcal{C}^1 par morceaux : $\forall x, S_n(x) \xrightarrow[\text{simple}]{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.	$T = T_0 * \mathbb{1}\mathbb{1}_a$ où T_0 est la distribution T restreinte au support $[0, a]$.
I	Si de plus, f continue, $S_n \xrightarrow[\text{unif}]{n \rightarrow +\infty} f$.	$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2i\pi n t}{a}}$
O	Si $f \in \mathcal{C}^k : S_n(x) \xrightarrow[\text{uniforme}]{n \rightarrow +\infty} f$ et,	$\widehat{T} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{\frac{n}{a}} ; c_n = \frac{1}{a} \widehat{T}_0 \left(\left(\frac{n}{a} \right) \right)$.
D	$ c_n \leq \frac{K}{n^k} (\forall n \in \mathbb{N}^*, k = \text{constante})$.	$(c_n, \delta_{\frac{n}{a}})_n$ est le spectre de raies de T .
I	$f \in \mathbf{L}_p^2(\mathbf{0}, a)$	
Q		Si T est définie par une fonction $f \in \mathcal{S}'$
U	$S_n \xrightarrow{(L^2)} f$	alors $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(S')} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n x}$
E	le $n^{\text{ième}}$ harmonique de f est $(a_n \cos \frac{2\pi n x}{a} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{a})$;	où $c_n = \frac{1}{a} \int_0^a e^{-\frac{2i\pi n}{a}x} f(x) dx$
S	il porte la puissance $(a_n^2 + b_n^2)$.	Si de plus f est \mathcal{C}^1 par morceaux, on retrouve les mêmes résultats que dans le cas des fonctions de $L_p^1(0, a)$.
	La puissance moyenne sur une période est égale à $\frac{1}{a} \int_0^a f(x) ^2 dx = \frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 + b_n^2$ (Identité de Parseval)	
	$f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$	T quelconque dans \mathcal{S}'
N	$f \rightarrow (\widehat{f})(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi \nu x} f(x) dx$ est une application	$\forall \mathcal{F} \in \mathcal{S}, \langle \widehat{T}, \mathcal{F} \rangle = \langle T, \widehat{\mathcal{F}} \rangle$
O	linéaire, continue, bornée, injective de L^1 dans \mathcal{C}_0	$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F} \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) \rangle$
N	$\overline{\mathcal{F}}(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi \nu x} f(x) dx$.	$\widehat{\widehat{T}} = \widehat{T}$
P	Si f et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})$	$\widehat{\delta}_a = e^{-2i\pi \nu a}$
E	Si $f, g \in L^1$ alors $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$	$e^{2i\pi \nu a} = \delta_a$
R	Si de plus $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$ alors $\widehat{\widehat{f \cdot g}} = \widehat{f} * \widehat{g}$	Si $R \in \mathcal{E}', T \in \mathcal{S}'$ alors $R * T \in \mathcal{S}'$ et $\widehat{R * T} = \widehat{R} \cdot \widehat{T}$.
I	$f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$	
O		
D	$f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \widehat{f}(\nu) = \lim_{n \xrightarrow{\text{dans } L^2} +\infty} \int_{-n}^n e^{-2i\pi \nu x} f(x) dx$	Si $f \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{S}'$ alors $f * T$ est \mathcal{C}^∞ et
I	(Si $f \in L^1 \cap L^2$ alors $\widehat{f} \in L^2$)	à croissance lente ;
Q	$\ \widehat{f} \ _2 = \ f \ _2$ et $\widehat{\widehat{f}} = \widehat{f} = f$ ($p.p.$)	on a les égalités : $\widehat{f * T} = \widehat{f} \cdot \widehat{T}$.
U	Si $f, g \in L^2 : f * g = \widehat{\widehat{f \cdot g}}$ et $\widehat{\widehat{f \cdot g}} = \widehat{f} * \widehat{g}$	$\widehat{\widehat{f \cdot T}} = \widehat{f} * \widehat{T}$
E	$\int f \cdot g dx = \int \widehat{f} \cdot \widehat{g} d\nu$	
S	Si $f \in L^2$ et $\text{Supp}(\widehat{f}) \subset [-\nu_0, \nu_0]$ alors $\forall \nu, \nu \geq \nu_0$ f est la limite dans L^2 de $\left(\sum_{k=-N}^N f \left(\frac{k}{2\nu} \right) \frac{\sin \pi(2\nu x - k)}{\pi(2\nu x - k)} \right)$ (Formule de Shannon) où $\left(\frac{k}{2\nu} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont les valeurs d'échantillonnage de f .	

Bibliographie commentée

Analyse complexe

H. Cartan	Théorie élémentaire des fonctions analytiques - Hermann	Un classique du genre écrit dans un style rigoureux par l'un des grands mathématiciens du siècle dernier, mais dépourvu d'applications.
Chabat	Introduction à l'analyse complexe - Tome I, Ed. MIR	Un des livres les plus complets et accessibles dans le domaine.
Spiegel	Variables Complexes - Mac Graw Hill	Une présentation riche d'applications à la physique.
W. Rudin	Analyse réelle et complexe - Masson (1990)	Exposé original et profond des théories de l'analyse réelle et complexe.

Analyse fonctionnelle et harmonique

F. Bayen, C. Margaria	Distributions, analyse de Fourier, transformation de Laplace - Ellipses	Plus d'une centaine de problèmes, assortis de solutions détaillées et de rappels de cours.
C. Gasquet, P. Witomski	Analyse de Fourier et applications - Exercices (2 volumes en tout) Masson	Un cours rigoureux et complet sur la transformation de Fourier et les distributions, sous-tendu par de nombreuses applications relevant de la modélisation des signaux.
A. Kolmogorov, S. Fomine	Eléments de théorie des fonctions et d'analyse fonctionnelle - MIR	
M. Mamode	Mathématiques pour la physique - Ellipses	Une mine d'exercices et de problèmes corrigés, couvrant des applications à la physique et aux sciences de l'ingénieur.
H. Reinhard	Eléments de mathématiques du signal, Tome I - Exercices. Tome III - Masson	Exposé clair et structuré des concepts et méthodes à la base de la théorie et du traitement du signal.
Riesz-Nagy	Leçons d'analyse fonctionnelle - Gauthiers-Villars (1965)	Bel ouvrage à l'ancienne par l'un des maîtres de l'analyse.
M. Samuelides, L. Touzillier	Analyse fonctionnelle. Analyse harmonique. Problèmes - Cépadues (Trois tomes)	Une approche complète, riche de nombreux problèmes issus des sciences de l'ingénieur.
L. Schwartz	Topologie générale et analyse fonctionnelle - Hermann	Un grand classique, peu orienté vers les applications.
L. Schwartz	Théorie des distributions - Hermann	Exposé sans concession de la théorie des distributions par son créateur.
L. Schwartz	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques - Hermann	Apprentissage des distributions, par leurs applications.

Histoire des mathématiques

- | | | |
|--|---|--|
| A. Dahan-Dalmedico,
J. Pfeiffer | Histoire des mathématiques - Point-Seuil | De 2000 AV-JC à la fin du 19 ^{ème} , une approche thématique et sélective de l'histoire des mathématiques. |
| J. Dieudonné | Pour l'honneur de l'esprit humain - Hachette | Jean Dieudonné, un des derniers mathématiciens au savoir encyclopédique, met ici ses talents au service d'une haute vulgarisation. |
| J. Dieudonné
(sous la direction de) | Abrégé d'histoire des mathématiques - Hermann (1986) (Deux tomes) | Histoire détaillée des théories mathématiques de 1700 à 1940. |
| B. Hauchecorne,
D. Surrateau | Des mathématiciens de A à Z - Ellipses | Une mine de renseignements sur la plupart des mathématiciens connus. |
| J.P. Kahane,
P.G. Lemarié-Rieusset | Séries de Fourier et ondelettes - Cassini | Le "livre" sur la genèse de l'analyse harmonique et ses prolongements à la théorie des ondelettes. |

Index

A

Abel (lemme d'), 200
accumulation (point d'), 55
adhérent, 54
analytique (fonction), voir fonction
approximation, 75
auto-adjoint (opérateur), 70
autocorrélation, 110

B

Banach
 biographie, 64
 espace de, 61
base
 hilbertienne, 73
 orthonormale, 73
Beppo-Levi (théorème de), 18
Bernstein (polynômes de), voir polynômes
Beta(fonction), voir fonction
boreliens (tribus des), 10
boule
 fermée, 53
 ouverte, 53

C

Cantor (ensemble de), 12
Cauchy
 biographie, 182
 conditions de, 163
 formules intégrales, 179
 Théorème, 176
Cauchy-Schwarz (inégalité de), 65
Cesaro (moyenne), 98
changement de variables (théorème de), 28
chemin, 173
circuit, 173
compact, 57
complet, 56
conforme (transformation), 167
connexe, 58
C0 par morceaux (fonction), 94
convergence dominée (théorème de la), 21

convergence faible, 70
convergence simple, 51

D

décroissance rapide (fonction à), 107
dérivabilité de l'intégrale (théorème de), 25
dense, 54
densité spectrale, 110
difféomorphisme, 27
Dirichlet
 noyau de, 95
 problème de, 37
 problème de, 182
Dirichlet-Jordan (Théorème), 94
distance, 52
distances équivalentes, 52
domaine, 165

E

équation de la chaleur, 36, 92, 117
équation intégrale, 42
espace métrique, 52
espaces fonctionnels
 $L1$, 29
 $L2$, 30
 $L\infty$, 30
 Lp , 30
étagée (fonction), voir fonction
étagée positive(fonction), voir fonction
Euler
 biographie, 161

F

Féjer (noyau), 97
filtre linéaire, 150
filtres, 37
fonction
 analytique, 159
 Beta, 34
 convolution (de), 32
 entière, 166
 étagée, 166

- etagee positive, 16
- Gamma, 34
- harmonique, 165
- holomorphe, 162
- indicatrice, 14
- mesurable, 13
- multiforme, 161
- méromorphe, 211
- uniforme, 160
- Fourier
 - coefficients (de), 90
 - biographie, 100
- frontière, 55
- Fubini (théorème de), 26

- G**
- Gabor (transformation de), 114
- Gamma (fonction), voir fonction
- Gauss (théorème de la valeur moyenne), 180
- Gibbs (phénomène de), 97

- H**
- Hölder (inégalité de), 30
- Hahn-Banach (Théorème), 63
- harmonique de rang n , 99
- Heaviside (fonction de), 14
- Hilbert, 74
- hilbertienne (base), voir base
- holomorphe (fonction), voir fonction
- homéomorphisme, 55
- homographie, 171
- homotopes (circuits), 173

- I**
- indicatrice (fonction), voir fonction
- intégrale de Lebesgue, 16
- inverse (transformée de Fourier), 103
- isolé (point), 55
- isométrie, 55

- J**
- Jordan (lemme de), 212
- Joukovski (transformation de), 171

- L**
- lacet, voir circuit
- Laplace
 - biographie, 43
 - équation, 165
- Laurent
 - séries, 205
 - théorème, 205
- Legendre (polynômes de), voir polynômes lipschitzienne, 56

- M**
- maximum (théorème du module), 181
- mesurable
 - espace, 10
 - fonction, voir fonction
- mesure
 - produit, 15
- Minkowski (inégalité de), 30
- moindres carrés (Méthode), 76
- Morera (théorème de), 178
- multiforme (fonction), voir fonction
- méromorphe (fonction), voir fonction

- N**
- négligeable (ensemble), 13
- norme, 60
- normes équivalentes, 61
- noyau, 38

- O**
- ondelettes, 113
- original, 39
- orthogonalité
 - éléments, 65
 - sous-espace, 68
- orthogonalité
 - fonctions, 167
- orthonormale (base), voir base

- P**
- Parseval (identité de), 99
- peigne de Dirac, 146
- point fixe (Théorème), 57

Poisson (Formule), 149
 polynômes
 de Bernstein, 79
 de Legendre, 80
 potentiel complexe, 185
 presque-partout, 13
 prolongement analytique, 203
 puits, 186
 Pythagore (théorème de), 65

R

rayon de convergence, 201
 Riemann
 biographie, 170
 Riesz (théorème de représentation de), 69
 Riesz-Fischer (théorème de), 62
 Rodriguès (Formule), 80
 résidu
 définition, 211
 détermination pratique, 211
 résidus
 méthode, 214
 théorème, 212

S

séparable (espace), 73
 série trigonométrique, 92
 Schwartz, 131
 Schwarz-Christoffel (théorème de), 172
 semi-norme, 71
 Shannon (théorème de), 111
 σ -additivité, 10
 singularité
 apparente, 210

 artificielle, 210
 essentielle, 211
 source, 186
 spectre de raies, 99
 suite régularisante, 37
 système linéaire sur-déterminé, 68
 série entière, 200

T

totale (famille), 72
 transfert (fonction de), 42
 transformation en $_$, 208
 transformation intégrale, 38
 tribu
 définition, 9
 des boreliens, voir boreliens (tribus des)
 produit, 14

U

uniforme (fonction), voir fonction
 unité approchée, 37

V

valeur moyenne (théorème de la), voir Gauss
 (théorème de la valeur moyenne)
 valeur principale, 20
 Volterra (équation de), 42

W

Wallis (Formule), 80
 Weierstrass
 biographie, 79
 critère, 199
 Théorème, 78

Vous pouvez faire part de vos remarques,
critiques, suggestions
aux auteurs à cette adresse :

auteurs@cepadues.com

Achévé d'imprimer en France
en octobre 2009 chez Messages SAS
111, rue Nicolas-Vauquelin • 31100 Toulouse
Tél. : 05 61 41 24 14 • Fax : 05 61 19 00 43
imprimerie@messages.fr