Université Ibn Khaldoun. Tiaret
Département de Mathématiques

# Analyse fonctionnelle **Exercices**

Niveau M1

**Exercice 1** Soient $E$ et $F$ deux espaces normés et $L : E \to F$ une application linéaire vérifiant : $(L(x)_n)_n$ est bornée dans $F$ pour toute suite $(x_n)_n$ de $E$ tendant vers $0 \in E$. Montrer que $L$ est continue.

**Correction.** Comme $L$ est linéaire, il suffit de montrer que $L$ est continu en 0. Supposons que cela ne soit pas vrai. Alors : $L$ n'est pas continu en 0.

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \forall x \in E \ :\quad (\|x\| < \eta \text{ et } \|L(x)\| \geq \epsilon).$$

Pour $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient $y_n$ tel que $y_n\| \leq \frac{1}{n}$ et $\|L(y_n)\| \geq \epsilon$. On pose $x_n = \sqrt{n} y_n$, alors $\|x_n\| = \sqrt{n}\|y_n\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $(x_n)$ est une suite de $E$ qui tend vers 0. par contre

$$\|L(x_n)\| = \sqrt{n}\|L(y_n)\| \geq \epsilon\sqrt{n}$$

donc la suite $(L(x_n))_n$ n'est pas bornée. Par contraposition nous avons obtenu le résultat souhaité.

**Exercice 2** Soient $E, F$ des espaces normés et $A_n, A \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer l'équivalence entre :

(i) $A_n \to A$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

(ii) Pour toute partie bornée $M \subset E$, la suite $A_n x$ converge uniformément vers $Ax$, $x \in M$.

**Correction.** 1. (1)⇒(2). Supposons que $A_n$ converge vers $A$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. Soit $M \subset E$ une partie bornée (c'est-à-dire : Pour tout $x \in M$, $\|x\| \leq B$). Alors :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : \|A_n - A\| \leq \frac{\epsilon}{B} \Rightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in M :$ $\|A_n(x) - A(x)\| \leq \frac{\epsilon\|x\|}{B}$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in M : \|A_n(x) - A(x)\| \leq \epsilon.$

Ce qui exactement la convergence uniforme de $A_n$ vers $A$ sur $M$.

2. (2)⇒(1). Par définition de la norme d'un opérateur nous avons :

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n(x) - A(x)\|.$$

Prenons comme partie bornée la sphère unité $M = S(0, 1) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. Alors
$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in S(0, 1) : \|A_n(x) - A(x)\| \leq \epsilon.$
Donc $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, : \|A_n - A\| \leq \epsilon$. Par conéquent ; $\|A_n - A\|$ tend vers 0.