

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Cours sur

La théorie spectrale des opérateurs

Enseigné aux étudiants de

Master Analyse Fonctionnelle

Au premier semestre

Préparé par

Mme Saïdi Soumia

Année universitaire 2016/2017

Table des matières

0	Introduction	3
0.1	Introduction générale	3
0.2	Notations générales	6
1	Opérateurs linéaires	8
1.1	Définitions et exemples	8
1.2	Opérateur linéaire borné	9
1.3	Opérateur inverse	14
1.4	Spectre d'un opérateur	17
1.5	Opérateur adjoint	20
1.5.1	Définitions et exemples	20
1.5.2	Propriétés spectrales de l'opérateur adjoint	24
1.5.3	Opérateur adjoint dans un espace euclidien	26
1.6	Opérateurs auto-adjoints	27
1.6.1	Définitions et exemples	27
1.6.2	Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints	28
1.7	Exercices	29
2	Opérateurs compacts	33
2.1	Définitions et exemples	33
2.2	Propriétés fondamentales des opérateurs compacts	36

2.3	Opérateur compact dans un espace de Hilbert	40
2.4	Propriétés spectrales des opérateurs compacts	43
2.5	Alternative de Fredholm	49
2.6	Exercices	52
3	Opérateurs compacts auto-adjoints	54
3.1	Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints	54
3.2	Développement en série de Fourier	57
3.3	Fonctions propres et décomposition spectrale	60
3.3.1	Exemple de l'équation de la chaleur	60
3.3.2	Exemple d'un opérateur différentiel	62
3.4	Exercices	64
4	Annexe	66
4.1	Première définition des espaces de Hilbert et exemples	66
4.2	Géométrie dans un Hilbert	68
4.3	Orthogonalité	68
4.4	Base hilbertienne, Somme hilbertienne	70
	Bibliographie	74

Chapitre 0

Introduction

0.1 Introduction générale

Ce cours est essentiellement centré sur le thème de la théorie spectrale des opérateurs. On donne d'abord, un bref aperçu sur cette théorie. La théorie spectrale est une théorie qui étend à des opérateurs définis sur des espaces fonctionnels généraux la théorie élémentaire des valeurs propres et des vecteurs propres de matrices. Ces idées venaient au départ du développement de l'algèbre linéaire, mais elles sont aussi liées à l'étude des fonctions analytiques, car les propriétés spectrales d'un opérateur sont liées à celles de fonctions analytiques sur les valeurs de son spectre.

Introduite par Hilbert dans sa formulation initiale de la théorie des espaces de Hilbert, énoncée en termes de formes quadratiques à une infinité de variables. Le théorème spectral initial était conçu comme une généralisation du théorème définissant les axes principaux d'un ellipsoïde, dans le cas d'un espace de dimension infinie.

La théorie spectrale a été formulée de trois manières différentes. Les développements ultérieurs de la théorie des espaces de Hilbert et de la théorie spectrale d'un unique

endomorphisme normal accompagnèrent le développement de la physique quantique, en particulier dans les travaux de von Neumann. Cette théorie se développa pour inclure celle des algèbres de Banach, et des constructions plus abstraites. La différence entre ces approches peut mieux se voir dans le cas de l'analyse de Fourier. On peut aussi étudier les propriétés spectrales d'opérateurs sur des espaces de Banach. En particulier, les opérateurs compacts sur ces espaces ont des propriétés spectrales analogues à celles des matrices.

La théorie spectrale est très utile en physique, en particulier pour les phénomènes vibratoires. Les bases théoriques de la notion d'espace de Hilbert furent développées, à partir des idées de Hilbert, par Schmidt et Riesz. Des années plus tard, lorsque la mécanique quantique fut formulée à partir de l'équation de Schrödinger, le lien fut fait avec les raies spectrales ; cette relation avec la physique mathématique des vibrations avait déjà été envisagée. Aussi, la découverte ultérieure de ce que la théorie spectrale pouvait expliquer les caractéristiques des spectres atomiques fut fortuite, et non un des objectifs de la théorie de Hilbert.

Ce cours vise plutôt une étude qualitative des opérateurs et cherche en particulier à en déterminer des propriétés spectrales spécifiques. Il se décline en trois chapitres.

Le premier chapitre porte sur les opérateurs linéaires. On y étudie les opérateurs linéaires bornés. Ce chapitre rassemble des concepts sur le spectre, les valeurs et vecteurs propres qui interviennent aux chapitres suivants. Il permet aussi d'aborder d'importantes notions pour la suite telles que l'inverse, l'adjoint d'un opérateur, et l'opérateur auto-adjoint, suivis de quelques exemples. À cela, s'ajoute l'étude des propriétés spectrales de chacun de ces opérateurs. Cette dernière consiste à mettre en relation les propriétés spectrales de ces opérateurs avec l'étude des propriétés des espaces orthogonaux.

Une classe intéressante d'opérateurs "opérateurs compacts" est étudiée au chapitre 2.

À titre d'exemple, on considère l'opérateur intégral. On traite en particulier, le cas d'un opérateur compact dans le cadre d'un espace de Hilbert. Dans ce contexte, on présente l'exemple des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Ensuite, on détermine les propriétés spectrales des opérateurs compacts. Enfin, un résultat fondamental sur les opérateurs compacts "l'alternative de Fredholm" fait l'objet de la dernière partie de ce chapitre.

Le troisième chapitre a pour objectif de généraliser les résultats de décomposition spectrale en dimension infinie. Dans le cas hilbertien, le résultat est connu en dimension finie, on en explore d'autres aspects en dimension infinie. Une partie est consacrée à l'étude des séries de Fourier. Les questions qui se posent alors sont : Sous quelles conditions générales ce formalisme s'applique-t-il, et quels sont les opérateurs qui peuvent ainsi être développés en série ? Toute fonction peut-elle être exprimée en termes de fonctions propres (autrement dit, les fonctions propres forment-elles une base) ? Pour répondre à ces questions, on a considéré deux exemples. Il s'agit en particulier de parler dans l'un des deux de la fameuse équation de la chaleur sur un domaine borné.

Ce polycopié est rédigé dans un style assez théorique. Chaque chapitre est constitué de notes de cours illustrées par des exemples. À quelques exceptions près, les résultats sont accompagnés de leur démonstration. Lorsque celle-ci n'est pas utile à la compréhension du cours ou est trop difficile, quand encore, on a peur de sortir du contexte d'une certaine partie du cours, la preuve a été ignorée. À la fin de chaque chapitre, on propose des exercices non résolus.

Une annexe vient compléter cet ouvrage, comprenant des rappels sur les espaces de Hilbert.

Il est bon de rappeler qu'un bagage mathématique s'entretient. La bibliographie comporte quelques livres ainsi que des documents internet.

Ces notes de cours correspondent à un cours donné à l'université de Jijel pendant le premier semestre (Master). Le contenu du cours est conforme au Canevas-M1, première année Master analyse fonctionnelle. On espère que la façon d'aborder le sujet en facilite la compréhension, et puisse rendre l'utilisation de cet ouvrage commode pour un lecteur motivé et ayant un niveau initial équivalent à celui du L3.

0.2 Notations générales

Tout au long de ce polycopié, on adopte les notations et définitions suivantes :

On note par $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$, par $|a|$ la valeur absolue (resp. le module) de a , si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ; par $\bar{a}$ le conjugué de a dans $\mathbb{C}$. Le complémentaire d'une partie $M \subset \mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K} \setminus M$.

H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. On note par B_H la boule unité fermée de H , par $\overline{B}_H(x_0, r_0)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r_0 et par I_{d_H} l'application identité de H . On désigne par $\text{vect}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{x_1, \dots, x_n\} \subset H$.

À quelques exceptions près, on note par E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et par $\| \cdot \|$ la norme associée.

Sur l'espace $\mathcal{C}(I, H)$ des fonctions continues $f : I \rightarrow H$ (I intervalle de $\mathbb{R}$), on considère $\| \cdot \|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur I . L'espace des fonctions infiniment continue avec dérivée continue est noté $\mathcal{C}^\infty(I, H)$.

Par $L^p(I, H)$ pour $p \in [1, +\infty[$ (resp. $p = +\infty$), on note l'espace des fonctions mesurables $f : I \rightarrow H$ tel que $\int_I \|f(t)\|^p dt < +\infty$ (resp. qui sont essentiellement bornées) muni de la norme usuelle $\|f\|_p = (\int_I \|f(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < +\infty$ (resp. muni de la norme usuelle

essentielle supremum $\| \cdot \|_{L^\infty}$). L'espace $L^2(I, H)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt.$$

On note $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'espace des suites réelles ou complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 < +\infty$, qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme associée

$$\langle (u_n)_n, (v_n)_n \rangle_2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \overline{v_n} \quad \text{et} \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'adhérence d'un ensemble C est noté $\overline{C}$. La composée de deux applications linéaires A et B est souvent noté AB .

Dans la section 3.3, on aura besoin de définir les espaces suivants : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, on note par $\mathcal{C}^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$) l'espace des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ qui sont k fois continûment différentiables avec $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\Omega)$ et par $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω . On note par $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions f mesurables sur Ω tel que $\int_\Omega |f(t)|^2 dt < +\infty$.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \exists g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial f}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i f \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), i = 1, \dots, n\}.$$

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Pour $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, où $\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$). On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

On note $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ le gradient de u , et par $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ le Laplacien de u .

Chapitre 1

Opérateurs linéaires

Au sein de ce premier chapitre, on propose des notions générales sur les opérateurs. Une grande partie de ce chapitre est inspirée de [12].

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On dit que l'application ou l'opérateur $A : E \longrightarrow F$ est linéaire si

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : A(x + y) &= Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax.\end{aligned}$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et l'on a $A(0) = 0$.

Cas particuliers : Si A est bijectif alors, A est un isomorphisme.

Si $E = F$ alors, A est un endomorphisme de E .

Si A est un isomorphisme de E dans E alors, A est un automorphisme.

Si $F = \mathbb{K}$ alors, A est une forme linéaire sur E . Quand E est un ensemble de fonctions, A est souvent appelé une fonctionnelle linéaire.

Exemple 1.1.1 Dans l'espace usuel les rotations, les homothéties, les similitudes et les projections sont des applications linéaires.

Définition 1.1.2 Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On définit l'image de l'opérateur A par

$$Im(A) = \{Ax, x \in E\}$$

et le noyau de l'opérateur A par

$$Ker(A) = \{x \in E : Ax = 0\}.$$

1.2 Opérateur linéaire borné

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire.

Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 1.2.1 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) A est continu,
- (2) A est continu en 0,
- (3) il existe une constante c telle que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. L'implication (1) $\implies$ (2) est évidente.

On va montrer l'implication (2) $\implies$ (3). On suppose que A est continu en 0, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : (\|x\| < \delta) \implies (\|Ax\| < \varepsilon). \quad (1.1)$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E, x \neq 0$. On pose $x' = \frac{\delta}{2\|x\|}x$, alors, $\|x'\| = \frac{\delta}{2}$.

D'où, $\|x'\| < \delta$ et par conséquent $\|Ax'\| < \varepsilon$ (de (1.1))

$$\begin{aligned} \|Ax'\| &= \|A(\frac{\delta}{2\|x\|}x)\| \\ &= \frac{\delta}{2\|x\|}\|Ax\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Il résulte que $\|Ax\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|$. Il existe alors c satisfaisant (3).

Cette inégalité est vraie aussi pour $x = 0$ et (3) est vérifiée avec $c = \frac{2\varepsilon}{\delta}$.

On va montrer l'implication (3) $\implies$ (1). On suppose que (3) est vérifiée, alors, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|A(x - y)\| \leq c\|x - y\|, \text{ i.e., } \|Ax - Ay\| \leq c\|x - y\|.$$

L'application A est lipschitzienne donc, elle est continue. $\square$

Définition 1.2.1 Une application linéaire $A : E \longrightarrow F$ entre espaces vectoriels normés qui est continue est souvent dite bornée.

Notation : On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E et F . Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$. Quand $F = \mathbb{K}$, on note E' l'espace dual (topologique) de E qui est l'espace vectoriel des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$. Par E'' , on note le bidual de E .

Remarque 1.2.1 Si E est de dimension finie, alors, toute application linéaire de E dans F est continue.

On définit maintenant la norme d'un opérateur linéaire continu.

Définition 1.2.2 (Norme d'un opérateur linéaire continu) Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu entre les espaces vectoriels normés. Le nombre $\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, qui est par le Théorème 1.2.1 fini, est appelé la norme de A et est noté $\|A\|$.

Remarque 1.2.2 1. Si pour une constante c , on a $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$, alors, A est borné et $\|A\| \leq c$. De plus, on a

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \text{ pour tout } x \in E.$$

2. On vérifie facilement que $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ ainsi que

$$\|A\| = \inf\{c : \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in E\}.$$

Proposition 1.2.2 (*Propriétés de la norme d'opérateur*) Soient E, F, G des espaces vectoriels normés.

- (1) Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.
- (2) Si $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, $A + B \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- (3) Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, $\alpha A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.
- (4) Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|$.

De (1)-(3) de la Proposition 1.2.2, $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Notation : La composée $A \circ B$ de deux opérateurs A et B sera souvent noté AB .

Exemple 1.2.1 (*Projection orthogonale sur un sous-espace fermé*) Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . L'opérateur projection P_F (voir Théorème 4.3.4) est continu de norme 1 car $P_F(x) = x$ pour tout $x \in F$ et $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H$ avec égalité si $x \in F$.

Exemple 1.2.2 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. On définit l'opérateur linéaire de Volterra (primitive s'annulant en 0) A sur E par

$$\forall f \in E, \quad Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Pour tout $f \in E$, on a $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, donc $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\|A\| \leq 1$. De plus, $\|A\| = 1$ car si $f \equiv 1$, on obtient $\|f\|_\infty = 1$ et $\|Af\|_\infty = 1$.

À ces deux exemples, s'ajoutent d'autres comme suit

Exemple 1.2.3 1. L'opérateur schift en anglais, opérateur de décalage en français S défini sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ par

$$S(x_0, x_2, \dots) = (0, x_0, x_2, \dots),$$

est borné et on a $\|S\| = 1$.

2. Soient (X, Ω, μ) un espace mesuré σ -fini et $H = L^2(X, \Omega, \mu)$. Si $\varphi \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$, on peut définir un opérateur $M_\varphi \in \mathcal{L}(H)$ en posant $M_\varphi f = \varphi f$, et alors, on a $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty}$.

On rappelle que la norme $\|\varphi\|_{L^\infty}$ est définie comme le supremum essentiel de φ

$$\|\varphi\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0 : \mu(\{x \in X : |\varphi(x)| > c\}) = 0\}.$$

L'opérateur M_φ défini ainsi s'appelle opérateur de multiplication et la fonction φ s'appelle le symbole de M_φ .

3. Soit H un espace de Hilbert séparable admettant une base orthonormée $(h_n)_n$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes. On définit l'opérateur Δ_α sur H par

$$\forall c = (c_n)_n \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \quad \Delta_\alpha\left(\sum_{n \geq 0} c_n h_n\right) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n c_n h_n.$$

L'opérateur linéaire Δ_α est dit diagonal car il admet une représentation matricielle diagonale relativement à la base $(h_n)_n$, avec $(\alpha_n)_n$ sur sa diagonale. Cet opérateur est continu et l'on a $\|\Delta_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

Théorème 1.2.3 Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Alors, l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N, m \geq N) \implies (\|A_n - A_m\| < \varepsilon).$$

Soit $x \in E$. Comme $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\|$, alors, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in E, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N, m \geq N) \implies (\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|).$$

Cela dit que la suite $(A_n x)_n$ est une suite de Cauchy dans F . L'espace F étant complet, cette suite est convergente et la limite $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ existe dans F . Soit l'application

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Cet opérateur est linéaire. En effet, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y.$$

Par passage à la limite, on trouve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y.$$

Cet opérateur est continu. En effet, la suite $(A_n)_n$ étant de Cauchy, alors, elle est bornée en norme, i.e., $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \|A_n x\| \leq M \|x\|, \forall n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on obtient

$$\|A x\| \leq M \|x\|, \forall x \in E.$$

Reste à montrer que la suite $(A_n)_n$ converge en norme vers A dans $\mathcal{L}(E, F)$.

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in E, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n, m > N) \implies (\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|).$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, il résulte

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} : (n > N) \implies (\|A_n x - A x\| < \varepsilon \|x\|).$$

Ceci montre que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N} : (n > N) \implies (\|A_n - A\| < \varepsilon).$$

La démonstration du théorème est alors terminée. $\square$

Corollaire 1.2.4 *Soit E un espace vectoriel normé. Le dual E' d'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach.*

Démonstration. Le corps $\mathbb{K}$ est complet, on peut alors déduire du Théorème 1.2.3. $\square$

1.3 Opérateur inverse

Définition 1.3.1 Soient $A \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $AB = I_{d_F}$ (inversible à droite) et $BA = I_{d_E}$ (inversible à gauche). Un tel opérateur (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

Remarque 1.3.1 Si un opérateur est inversible à droite et injectif (resp. inversible à gauche et surjectif) alors il est inversible et tout inverse à droite (ou à gauche) est égal à l'inverse.

Exemple 1.3.1 (Opérateur inversible à gauche mais non-inversible à droite) Soit $E = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites réelles $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty$. Soit $S : E \longrightarrow E$ l'opérateur shift (voir Exemple 1.2.3) défini par

$$Sx = (0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots).$$

L'opérateur $S \in \mathcal{L}(E)$ est injectif (c'est une isométrie car $\|Sx\| = \|x\|$ pour tout x dans E). Cet opérateur admet un inverse à gauche T où $T : E \longrightarrow E$ est défini par $Tx = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \dots)$ car $TS = I_{d_E}$, mais l'opérateur T n'est pas son inverse à droite (S n'est pas surjectif).

On rappelle que E est un espace de Banach. Pour des raisons de simplicité, on adopte une seule notation de la norme $\|\cdot\|$ et c'est au lecteur de faire attention pour deviner de quelle norme il s'agit quand on travaille avec plusieurs espaces vectoriels normés.

Théorème 1.3.1 (Théorème de l'inverse de Banach) Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ (F espace de Banach) est bijectif alors, son inverse A^{-1} est continu.

Notation : On note $\mathcal{IL}(E)$ l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{L}(E)$ inversibles.

Proposition 1.3.2 Soit F un espace vectoriel normé et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ bijectif. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.
- (2) Il existe $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$: $\|Ax\| \geq c\|x\|$.
- (3) F est un espace de Banach.

Démonstration. (1) $\implies$ (2) Comme A^{-1} est continu, alors, on a

$$\forall x \in E : \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\|.$$

Il s'en suit, pour tout $x \in E$: $\|Ax\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|$.

(2) $\implies$ (3) Soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy dans F . L'opérateur A est bijectif, alors, il existe une suite $(x_n)_n$ dans E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Ax_n = y_n$.

Or, d'après (2), pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\|x_n - x_m\| \leq c^{-1}\|A(x_n - x_m)\| \leq c^{-1}\|y_n - y_m\|.$$

Alors, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E . Donc, elle converge vers un élément $x \in E$. L'opérateur A étant continu, la suite de terme général $y_n = Ax_n$ converge alors vers $Ax \in F$. Il s'en suit que F est un espace de Banach.

(3) $\implies$ (1) Elle découle du théorème de Banach. $\square$

Corollaire 1.3.3 Soient F un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Il existe $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$: $\|Ax\| \geq c\|x\|$.
- (2) A est injectif et $\text{Im}(A)$ est fermé dans F .

Démonstration. On pose $G = \text{Im}(A)$.

(1) $\implies$ (2) On suppose qu'il existe $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a $\|Ax\| \geq c\|x\|$. Alors, A est injectif donc est une bijection de E sur G . D'après la Proposition 1.3.2, on conclut que $G = \text{Im}(A)$ est un espace de Banach et donc est fermé dans F .

(2) $\implies$ (1) On suppose que A est injectif et G est fermé dans F . Alors, A est une bijection

de E sur G et G est un espace de Banach. D'après la Proposition 1.3.2, il résulte l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a $\|Ax\| \geq c\|x\|$. $\square$

Corollaire 1.3.4 *Soient F un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\overline{Im(A)} = F$ et il existe $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$: $\|Ax\| \geq c\|x\|$.
- (2) A est inversible.

Démonstration. (1) $\implies$ (2) Si (1) a lieu, d'après le Corollaire 1.3.3, A est injectif et $Im(A)$ est fermé dans F . Alors, $Im(A) = \overline{Im(A)} = F$ donc, A est surjectif et donc inversible.

(2) $\implies$ (1) Si (2) a lieu, on a $F = Im(A) \subset \overline{Im(A)} \subset F$. Donc, $\overline{Im(A)} = Im(A) = F$, ce qui donne le résultat d'après le Corollaire 1.3.3. $\square$

Lemme 1.3.5 *Soient E, F et G des espaces de Banach. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux opérateurs inversibles. Alors, $BA \in \mathcal{L}(E, G)$ est inversible et l'on a*

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Théorème 1.3.6 (i) *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|A\| < 1$, alors $I_{d_E} - A$ est inversible et*

$$(I_{d_E} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

(ii) *Si A est inversible alors, $A+B$ est inversible pour tout $B \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|B\| < \|A\|^{-1}$ et on a*

$$\begin{aligned} (A+B)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1}. \\ (A+B)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-1-n} B^n \text{ si } A \text{ et } B \text{ commutent.} \end{aligned}$$

(iii) *L'ensemble $\mathcal{IL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue et même $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{IL}(E)$ dans $\mathcal{IL}(E)$.*

Remarque 1.3.2 *Le résultat de (i) du théorème précédent peut être utile dans la situation suivante. La question qui se pose est : Résoudre l'équation intégrale avec $A \in \mathcal{L}(E)$, $g \in E$ donnés et $f \in E$ l'inconnue :*

$$f(x) = g(x) + Af(x).$$

Il convient aussi de savoir utiliser le résultat de (i) sous la forme suivante : Si $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|I_{d_E} - A\| < 1$, alors A est inversible et l'on a

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I_{d_E} - A)^n.$$

1.4 Spectre d'un opérateur

Cette section est consacrée aux rudiments de la théorie spectrale : ensemble résolvant, spectre et valeurs propres.

Définitions 1.4.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *On appelle spectre de A , l'ensemble*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{d_E} - A) \text{ non inversible}\} \quad (\text{non inversible i.e., non bijectif}).$$

Tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale.

Le rayon spectral de A noté $r(A)$ est défini par $r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$ et l'on a toujours $r(A) \leq \|A\|$. Si $\sigma(A) = \emptyset$, alors, par convention, on pose $r(A) = 0$.

2. *On appelle valeur propre de A tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I_{d_E} - A$ n'est pas injectif. On appelle spectre ponctuel de A , l'ensemble*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Une valeur propre de A est une valeur spectrale et on a toujours $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$. On appelle espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \sigma_p(A)$, le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\lambda I_{d_E} - A) \neq \{0\}$. On appelle multiplicité géométrique d'une valeur propre $\lambda \in \sigma_p(A)$ la dimension de $\text{Ker}(\lambda I_{d_E} - A)$ et multiplicité algébrique, la limite de $\dim \text{Ker}(\lambda I_{d_E} - A)^k$ quand $k \rightarrow +\infty$.

3. On appelle spectre continu de A , l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{d_E} - A) \text{ injectif, } \text{Im}(\lambda I_{d_E} - A) \text{ dense mais distinct de } E\}.$$

4. On appelle spectre résiduel de A , l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{d_E} - A) \text{ injectif, } \text{Im}(\lambda I_{d_E} - A) \text{ non dense dans } E\}.$$

5. On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{d_E} - A) \text{ inversible}\}.$$

Tout scalaire $\lambda \in \rho(A)$ est dit valeur résolvante. On a $\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A)$.

Si $\lambda \in \rho(A)$ alors, on note $R_\lambda(A) = (\lambda I_{d_E} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ la résolvante de A .

Exemple 1.4.1 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. Si on considère l'opérateur de Volterra (voir Exemple 1.2.2) alors, on a $\text{Ker}(A) = \{0\}$ et $\text{Im}(A) = \{g \in E : g(0) = 0\}$. En particulier, A est injectif donc $0 \notin \sigma_p(A)$ mais non surjectif donc $0 \in \sigma(A)$.

Théorème 1.4.1 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $|\lambda| > \|A\|$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et $\sigma(A) \subset \overline{B}(0, \|A\|)$.
2. $\rho(A)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{K}$.
3. $\sigma(A)$ est un compact non vide de $\mathbb{K}$.
4. Si A est inversible, alors, $\sigma(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$.
5. On a $\sigma(A) \subset \overline{B}(0, r(A))$. De plus, on a

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration.

1. Si $|\lambda| > \|A\|$ alors $\lambda \neq 0$ et $\|\lambda^{-1}A\| < 1$. On en déduit du Théorème 1.3.6 que $I_{d_E} - \lambda^{-1}A$ est inversible, i.e., $\lambda \in \rho(A)$.
2. On a $\rho(A)$ est non vide (d'après 1.) On considère l'application $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ par $f(\lambda) = \lambda I_{d_E} - A$. On remarque que $\rho(A) = f^{-1}(\mathcal{IL}(E))$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I_{d_E}\| \leq |\lambda - \mu|.$$

Il résulte que f est continue. Or, $\mathcal{IL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ (voir Théorème 1.3.6). On en déduit que $\rho(A) = f^{-1}(\mathcal{IL}(E))$ est un ouvert de $\mathbb{K}$.

3. On a $\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A)$ est fermé (d'après 2.), il est borné (d'après 1.) alors il est compact. $\square$

Remarque 1.4.1 Si E est de dimension finie, alors, $(\lambda I_{d_E} - A)$ est inversible si et seulement si $\text{Ker}(\lambda I_{d_E} - A) = \{0\}$. En particulier, on déduit $\sigma_p(A) = \sigma(A)$.

En effet, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors, tout opérateur linéaire A sur E peut être représenté par une matrice carrée A , et que l'opérateur linéaire $(\lambda I_{d_E} - A)$ est inversible quand la matrice $(\lambda I_{d_E} - A)$ est inversible. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'un des cas suivants doit apparaître :

(i) λ est une valeur propre de A ,

(ii) la matrice $(\lambda I_{d_E} - A)$ est inversible, i.e., la matrice $(\lambda I_{d_E} - A)^{-1}$ existe.

Il en résulte que le spectre $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice A , et la dimension de l'espace vectoriel propre correspondant à toute valeur propre est finie.

Le spectre d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie a une structure simple, mais pour un opérateur général dans un espace de dimension infinie, le spectre peut être différent et plus complexe.

Exemple 1.4.2 Soit I_{d_H} l'opérateur identité de l'espace de Hilbert H . Il est clair que $\sigma(I_{d_H}) = \{1\}$, car $\lambda I_{d_H} - I_{d_H} = (\lambda - 1)I_{d_H}$ est inversible si $\lambda - 1 \neq 0$.

De même, si $\mu \in \mathbb{K}$, alors, $\sigma(\mu I_{d_H}) = \{\mu\}$.

Exemple 1.4.3 Soit $H = L^2([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de multiplication $A : H \rightarrow H$ défini par

$$Af(t) = tf(t), \quad t \in [0, 1].$$

Alors, on a $\sigma(A) = [0, 1]$. De plus, l'opérateur A n'a pas de valeurs propres.

En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in H$, $t \in [0, 1]$, on a $(\lambda I_{d_H} - A)f(t) = (\lambda - t)f(t)$. On distingue deux cas :

Si $\lambda \notin [0, 1]$, alors, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\lambda - t}$ est bornée, et l'opérateur $(\lambda I_{d_H} - A)^{-1}$ défini par

$$(\lambda I_{d_H} - A)^{-1}g(t) = \frac{1}{\lambda - t}g(t), \quad g \in H.$$

est un opérateur borné.

Si $\lambda \in [0, 1]$, alors, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\lambda - t}$ n'est pas dans H , car il y a la singularité non intégrable en $t = \lambda$. Il résulte que $(\lambda I_{d_H} - A)$ n'est pas inversible et tous les λ sont des points singuliers. D'où, on déduit que $\sigma(A) = [0, 1]$.

On suppose maintenant que λ soit une valeur propre de A et f le vecteur propre associé dans H . Alors, on a

$$(\lambda - t)f(t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

Il s'en suit que $f \equiv 0$ dans H . D'où, A n'a pas de valeurs propres et $\sigma_p(A) = \emptyset$.

1.5 Opérateur adjoint

1.5.1 Définitions et exemples

On commence par rappeler le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 1.5.1 (a) Soit H un espace préhilbertien. Pour tout $y \in H$, l'application $x \in H \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire continue de norme $\|y\|$.
 (b) Soit f une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H , alors, il existe un élément y unique de H tel que $f(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H$.

Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ et $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ des espaces de Hilbert.

Proposition 1.5.2 Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, pour tout $y \in H_2$, il existe un unique $z \in H_1$ tel que

$$\forall x \in H_1 : \langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, z \rangle_1. \quad (1.2)$$

On note $z = A^*y$.

Définition 1.5.1 L'application A^* définie de H_2 dans H_1 par

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 : \langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^*y \rangle_1 \quad (1.3)$$

est appelé l'adjoint de A .

Démonstration de la Proposition 1.5.2. Soit $y \in H_2$. L'application $\varphi_y : x \mapsto \langle Ax, y \rangle_2$ est linéaire et pour tout $x \in H_1$, on a

$$|\varphi_y(x)| \leq |\langle Ax, y \rangle_2| \leq \|A\| \|y\|_2 \|x\|_1.$$

Alors, φ_y est une forme linéaire continue sur H_1 . On en déduit d'après le théorème de représentation de Riesz, qu'il existe un unique $z \in H_1$ tel que $\varphi_y(x) = \langle x, z \rangle_1$ pour tout $x \in H_1$. Ceci donne (1.2). $\square$

Proposition 1.5.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ et $\|A^*\| = \|A\|$.

Démonstration. Soient $y_1, y_2 \in H_2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $x \in H_1$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, A^*(y_1 + \alpha y_2) \rangle_1 &= \langle Ax, y_1 + \alpha y_2 \rangle_2 = \langle Ax, y_1 \rangle_2 + \alpha \langle Ax, y_2 \rangle_2 \\ &= \langle x, A^* y_1 \rangle_1 + \alpha \langle x, A^* y_2 \rangle_1 \\ &= \langle x, A^* y_1 + \alpha A^* y_2 \rangle_1. \end{aligned}$$

D'où, $A^*(y_1 + \alpha y_2) = A^* y_1 + \alpha A^* y_2$, i.e., A^* est linéaire. De plus, pour tout $y \in H_2$, on a

$$\begin{aligned} \|A^* y\|_1^2 &= \langle A^* y, A^* y \rangle_1 \\ &= \langle y, A A^* y \rangle_2 \leq \|y\|_2 \|A\| \|A^* y\|_1. \end{aligned}$$

D'où, $\|A^* y\|_1 \leq \|A\| \|y\|_2$. Cela dit que $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ et $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Enfin, pour $x \in H_1$, on a

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= \langle Ax, Ax \rangle_2 = \langle x, A^* Ax \rangle_1 \\ &\leq \|x\|_1 \|A^*\| \|Ax\|_2. \end{aligned}$$

Alors, on obtient $\|Ax\|_2 \leq \|A^*\| \|x\|_1$. On en déduit que $\|A\| \leq \|A^*\|$.

D'où, résulte l'égalité des normes. Ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

La proposition suivante rassemble des résultats relatifs à l'adjoint d'un opérateur.

Proposition 1.5.4 Soient $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $C \in \mathcal{L}(H_2, H)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a

1. $(I_{d_H})^* = I_{d_H}$.
2. $A^{**} = A$.
3. $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$.
4. $CA \in \mathcal{L}(H_1, H)$ et $(CA)^* = A^*C^*$.
5. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.

Démonstration. Ces propriétés se démontrent directement de la définition de l'adjoint par la relation (1.3). $\square$

Théorème 1.5.5 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible si et seulement si A^* est inversible et on a $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Démonstration. Si $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible, alors, d'après la Proposition 1.5.4, on a

$$\begin{aligned} (A^{-1})^*A^* &= (AA^{-1})^* = (Id_{H_2})^* = Id_{H_2} \\ A^*(A^{-1})^* &= (A^{-1}A)^* = (Id_{H_1})^* = Id_{H_1}. \end{aligned}$$

Donc, $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Maintenant, si $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est inversible, alors l'étape précédente montre que $(A^*)^* \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible. Or, d'après la Proposition 1.5.4, on a $(A^*)^* = A$. Il s'en suit que A est inversible. La démonstration est alors terminée. $\square$

Exemple 1.5.1 (Opérateur intégral à noyau) Soit $k : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($c < d$, $a < b$) une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'opérateur intégral $A : L^2([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow L^2([c, d], \mathbb{C})$ tel que pour tout $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, Af est la fonction définie par

$$\forall x \in [c, d], \quad Af(x) = \int_a^b k(x, t)f(t) dt,$$

où la fonction $k(\cdot, \cdot)$ s'appelle le noyau de l'opérateur intégral A .

Par la définition du produit scalaire dans $L^2([c, d], \mathbb{C})$, pour tout $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, pour tout $g \in L^2([c, d], \mathbb{C})$, on a

$$\begin{aligned}\langle Af, g \rangle &= \int_c^d \left[\int_a^b k(x, y) f(y) dy \right] \overline{g(x)} dx \\ &= \int_c^d \int_a^b k(x, y) f(y) \overline{g(x)} dy dx \\ &= \int_a^b f(y) \left[\int_c^d k(x, y) \overline{g(x)} dx \right] dy \\ &= \int_a^b f(y) \overline{\left[\int_c^d k(x, y) g(x) dx \right]} dy \\ &= \langle f, A^* g \rangle.\end{aligned}$$

L'utilisation de Fubini est justifiée par l'intégrabilité sur $[c, d] \times [a, b]$ de la fonction

$$F(x, y) = k(x, y) f(y) \overline{g(x)}.$$

D'où, l'opérateur adjoint A^* de A est défini pour tout $g \in L^2([c, d], \mathbb{C})$ par

$$\forall s \in [a, b], \quad (A^* g)(s) = \int_c^d \overline{k(t, s)} g(t) dt.$$

Exemple 1.5.2 Soient $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $S : H \rightarrow H$ l'opérateur shift (voir Exemple 1.2.3) défini par

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, \dots).$$

Alors, S^* est défini par

$$S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots) \quad \text{pour tout } (x_0, x_1, \dots) \in H.$$

En effet, pour tous $(x_n)_n, (y_n)_n$ dans H . De la définition de l'opérateur adjoint, on a

$$\begin{aligned}\langle S^*(x_n), (y_n) \rangle &= \langle (x_n), S(y_n) \rangle \\ &= \langle (x_0, x_1, \dots), (0, y_0, \dots) \rangle \\ &= x_1 y_0 + x_2 y_1 + \dots \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (y_0, y_1, \dots) \rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, S^* est bien donné par la formule énoncée.

Exemple 1.5.3 Si on revient à Exemple 1.2.3, l'opérateur M_φ a pour adjoint l'opérateur $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$, tandis que l'adjoint de l'opérateur Δ_α est l'opérateur $\Delta_{\bar{\alpha}}$.

On donne maintenant la définition suivante.

Définition 1.5.2 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est dit unitaire si $AA^* = I_{d_{H_2}}$ et $A^*A = I_{d_{H_1}}$.

1.5.2 Propriétés spectrales de l'opérateur adjoint

Proposition 1.5.6 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a

1. $\text{Ker}(A) = [\text{Im}(A^*)]^\perp$
2. $\overline{\text{Im}(A)} = [\text{Ker}(A^*)]^\perp$.

Démonstration.

1. On a

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(A) &= \{x \in H : Ax = 0\} \\
 &= \{x \in H : \forall y \in H : \langle Ax, y \rangle = 0\} \\
 &= \{x \in H : \forall y \in H : \langle x, A^*y \rangle = 0\} \\
 &= [\text{Im}(A^*)]^\perp.
 \end{aligned}$$

2. D'après 1., et tenant compte du Corollaire 4.3.6, on obtient

$$[\text{Ker}(A^*)]^\perp = [\text{Im}(A)^\perp]^\perp = \overline{\text{Im}(A)},$$

d'où, résulte l'égalité cherchée. $\square$

Proposition 1.5.7 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a

1. $\rho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \bar{\lambda} \in \rho(A)\}$, $\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \bar{\lambda} \in \sigma(A)\}$

2. Pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$, $R_\lambda(A^*) = (R_{\bar{\lambda}}(A))^*$.

Démonstration.

1. On a équivalence : $\lambda I_{d_H} - A^*$ est inversible si et seulement si $(\lambda I_{d_H} - A^*)^*$ est inversible (d'après le Théorème 1.5.5). Or, $(\lambda I_{d_H} - A^*)^* = \bar{\lambda} I_{d_H} - A$ donc

$$\begin{aligned} \rho(A^*) &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I_{d_H} - A^* \text{ est inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \bar{\lambda} I_{d_H} - A \text{ est inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \bar{\lambda} \in \rho(A)\}. \end{aligned}$$

De plus, $\sigma(A^*) = \mathbb{K} \setminus \rho(A^*)$, ce qui donne le résultat.

2. Si $\lambda \in \rho(A^*)$, alors, on a

$$\begin{aligned} R_\lambda(A^*) &= (\lambda I_{d_H} - A^*)^{-1} \\ &= ((\bar{\lambda} I_{d_H} - A)^*)^{-1} \\ &= ((\bar{\lambda} I_{d_H} - A)^{-1})^* = (R_{\bar{\lambda}}(A))^* \end{aligned}$$

ceci découle du Théorème 1.5.5. D'où, résulte l'égalité attendue. $\square$

Remarque 1.5.1 On peut généraliser la notion d'opérateur adjoint au cas d'espaces de Banach E . Pour $f \in E'$ et $x \in E$, on note $\langle f, x \rangle_{E', E}$ au lieu de $f(x)$ et on appelle $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$ le crochet de dualité de E', E . Alors, le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$ est similaire au produit scalaire d'espace de Hilbert. En particulier, si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, il existe $A^* \in \mathcal{L}(F', E')$ tel que

$$\forall x \in E, \forall f \in F' : \langle A^* f, x \rangle_{E', E} = \langle f, Ax \rangle_{F', F}.$$

Il s'agit d'une généralisation car si E est un espace de Hilbert alors, E' peut être identifié avec E d'après le théorème de représentation de Riesz. Le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$ est alors le produit scalaire de E .

Définition 1.5.3 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal s'il commute avec son adjoint, i.e., $AA^* = A^*A$.

Exemple 1.5.4 Les opérateurs M_φ et Δ_α définis dans Exemple 1.2.3 sont normaux.

1.5.3 Opérateur adjoint dans un espace euclidien

Définition 1.5.4 On appelle espace vectoriel euclidien tout espace préhilbertien $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ réel de dimension finie.

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel euclidien $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension n .

On rappelle la notion d'opérateur adjoint dans un espace euclidien qui est un cas particulier du cas général sous forme de définition :

Définition 1.5.5 Pour tout $U \in \mathcal{L}(F)$, il existe un unique $U^* \in \mathcal{L}(F)$, appelé adjoint de U , défini par

$$\forall x, y \in F : \langle x, U(y) \rangle = \langle U^*(x), y \rangle.$$

Notation : Si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de F et si $A = \text{Mat}_B(U)$ (la matrice de l'application U dans la base B), alors, $\text{Mat}_B(U^*) = A^*$, où $A^* = A^t$ est la matrice transposée de A .

Proposition 1.5.8 Des propriétés suivantes sur les matrices, on en déduit les propriétés similaires sur les adjoints des endomorphismes d'un espace euclidien, on retrouve ainsi facilement les résultats de la Proposition 1.5.4 et du Théorème 1.5.5.

1. $(AB)^t = B^t A^t$.
2. $(A^t)^t = A$.
3. $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
4. $\det(A) = \det(A^t)$.
5. Si $\det(A) \neq 0$, alors, on a $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Définition 1.5.6 Si un endomorphisme U vérifie $U^* = U$, on dit que U est auto-adjoint.

Théorème 1.5.9 Soit A une matrice réelle $n \times n$ (considérée comme un endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique). Alors, on a

$$\text{Im}(A) = [\text{Ker}(A^t)]^\perp \text{ et } \text{Ker}(A) = [\text{Im}(A^t)]^\perp.$$

1.6 Opérateurs auto-adjoints

Dans cette section, on se place dans le cadre d'un espace de Hilbert H .

1.6.1 Définitions et exemples

Définition 1.6.1 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est un opérateur auto-adjoint si $A = A^*$. On dit aussi symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemples 1.6.1 1. L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.

2. Les opérateurs linéaires sur $\mathbb{C}^n$ donnés par des matrices hermitiennes (a_{ij}) , $1 \leq i, j \leq n$, c'est à dire telles que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ sont auto-adjoints.

3. Les projections orthogonales sur des sous-espaces fermés de H sont auto-adjoints. En effet, soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . Soit P_F la projection orthogonale de H sur F (voir Théorème 4.3.4). Alors, pour tous $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\langle x, P_F(y) \rangle &= \langle P_F(x), P_F(y) \rangle \\ &= \langle P_F(x), y \rangle.\end{aligned}$$

4. L'opérateur intégral défini pour tout $x \in [0, 1]$ par $Af(x) = \int_0^1 k(x, t)f(t)dt$ sur $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ avec un noyau hermitien, c'est à dire tel que $k(x, t) = \overline{k(t, x)}$ pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$, est auto-adjoint.

5. Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, on a $A^*A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint car $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$, d'après la Proposition 1.5.4.

Remarque 1.6.1 (a) Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si A est auto-adjoint, alors, pour tout $x \in H$: $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

(b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A est auto-adjoint si et seulement si, pour tout $x \in H$: $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Définition 1.6.2 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit positif (notation $A \geq 0$) si A est auto-adjoint et si pour tout $x \in H$: $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

Exemple 1.6.1 Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, on a $A^*A \geq 0$ car pour tout $x \in H$

$$\langle A^*Ax, x \rangle = \|Ax\|^2 \geq 0.$$

1.6.2 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

On s'intéresse dans la proposition suivante aux valeurs propres des opérateurs auto-adjoints.

Proposition 1.6.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors, on a*

1. $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.
2. $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\text{Im}(\lambda I_{d_H} - A)} \neq H$.
3. Si $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, alors, $\text{Ker}(\lambda I_{d_H} - A) \perp \text{Ker}(\mu I_{d_H} - A)$, i.e., les sous-espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Démonstration.

1. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors, il existe $x \in H \setminus \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. D'où

$$\lambda = \frac{\langle \lambda x, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$. D'après la Proposition 1.5.6, on a

$$\overline{\text{Im}(\lambda I_{d_H} - A)} = [\text{Ker}(\lambda I_{d_H} - A)^*]^\perp = [\text{Ker}(\bar{\lambda} I_{d_H} - A)]^\perp.$$

Comme $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A)$, ce qui équivaut à

$\text{Ker}(\bar{\lambda} I_{d_H} - A) \neq \{0\}$, soit encore $[\text{Ker}(\bar{\lambda} I_{d_H} - A)]^\perp \neq H$. On déduit que $\lambda \in \sigma_p(A)$

si et seulement si $\overline{\text{Im}(\lambda I_{d_H} - A)} \neq H$.

3. Si $x \in \text{Ker}(\lambda I_{d_H} - A)$ et $y \in \text{Ker}(\mu I_{d_H} - A)$, alors, $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$.

Comme $A = A^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle - \langle x, \mu y \rangle = \langle Ax, y \rangle - \langle x, Ay \rangle = 0.$$

Il résulte : $\langle x, y \rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$. D'où, $\text{Ker}(\lambda I_{d_H} - A) \perp \text{Ker}(\mu I_{d_H} - A)$.

La démonstration de la proposition est ainsi terminée. $\square$

Les propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints sont réunies dans le théorème suivant.

Théorème 1.6.2 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$l = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle \text{ et } L = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle.$$

Alors, on a

1. $l, L \in [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.
2. $l, L \in \sigma(A)$.
3. $\sigma(A) \subset [l, L]$.
4. $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x \rangle|, x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$. En particulier, $\|A\| = \max(|l|, |L|)$.

Les points 2., 3. et 4. entraînent immédiatement :

Corollaire 1.6.3 Si $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors, $\|A\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

On termine ce chapitre par énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 1.6.4 Soit A un opérateur auto-adjoint sur H . Si $\sigma(A) = \{0\}$ alors, $A = 0$.

On laisse au lecteur le soin de résoudre les exercices suivants.

1.7 Exercices

Exercice 1 :

Soit $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 < +\infty$ muni de la norme

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $(\lambda_n)_n$ une suite réelle bornée quelconque. On définit l'application A de H dans H par

$$A((u_n)_n) = (\lambda_n u_n)_n.$$

1. Montrer que A est bien définie et continue. Calculer sa norme.

2. Déterminer le spectre de A .
3. Donner un exemple de suite $(\lambda_n)_n$ pour laquelle $\sigma(A) = [0, 2]$.

Exercice 2 :

Soient $H = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ et $A : H \rightarrow H$ défini par

$$Af(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

1. Montrer que $\|A\| < 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a

$$A^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t) dt.$$

2. Résoudre l'équation intégrale avec $g \in H$ donnée et $f \in H$ l'inconnue :

$$f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

Exercice 3 :

Soit l'espace de Hilbert $H = l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ des suites complexes (indexées par les entiers relatifs) de carré sommable. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la base hilbertienne canonique de H , i.e., la suite $(e_n)_n$ a tous ses termes nuls, sauf le n -ième qui vaut 1. Soit S l'opérateur de décalage sur H défini par

$$S(e_n) = e_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

1. Quel est l'adjoint de S ?
1. Quel est le spectre ponctuel de S ?
1. Quel est le spectre de S ?

Exercice 4 :

Soit H un espace de Hilbert complexe.

- (a) Soient B et C deux opérateurs sur H . Montrer que les opérateurs BC et CB ont le même rayon spectral.

(b) Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur inversible tel que $\|A\| \leq 1$ et $\|A^{-1}\| \leq 1$. On définit l'ensemble M par $M = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Montrer que $\sigma(A) \subset M$, et que A est unitaire. Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Exercice 5 :

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $f \in E$, on définit

$$Af(x) = \int_0^x k(x, t)f(t) dt,$$

où $k(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R})$. On pose $M = \sup_{0 \leq x, t \leq 1} |k(x, t)|$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $|A^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_\infty$.
En déduire pour tout $n \geq 1$, $\|A^n\| < \frac{M^n}{n!}$.
3. Déterminer le spectre de A .

Exercice 6 :

Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall x \in H, \quad \langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \text{Ker}(A), \forall y \in H, \forall t \in \mathbb{R} : \quad t \langle Ay, ty - x \rangle \geq 0.$$

En déduire que $\text{Ker}(A) \subset [\text{Im}(A)]^\perp$.

2. Montrer que $\text{Ker}(A) = [\text{Im}(A)]^\perp$ (on peut se servir de A^*). Que vaut alors $[\text{Ker}(A)]^\perp$?

Exercice 7 :

Soit H un espace de Hilbert complexe.

1. Si $P \in \mathcal{L}(H)$ est hermitien et vérifie $P^2 = P$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \subset H$ tel que P soit la projection orthogonale de H sur F .

On suppose que $B \in \mathcal{L}(H)$ est hermitien, et que l'intervalle ouvert $]0, 1[$ est disjoint du spectre $\sigma(B)$. On considère la fonction continue g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \min(1, \max(0, x)).$$

2. Montrer que $g(B)$ est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé $G \subset H$. Montrer que G est stable par B .

On suppose maintenant que $1 \in \sigma(B)$.

3. Montrer que $G \neq \{0\}$. Montrer que la restriction de B au sous-espace G définit un opérateur inversible $B_1 \in \mathcal{L}(G)$.

Chapitre 2

Opérateurs compacts

Tout au long de ce chapitre, on entend par E , F et G des espaces de Banach.

Une importante partie de ce chapitre est inspirée de [12].

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1 *Un opérateur linéaire A de E dans F est dit compact si $\overline{A(B_E)}$ est compact de F . L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $\mathcal{K}(E, F)$. Si $E = F$ alors, on note $\mathcal{K}(E)$.*

On rappelle que si (X, d) est un espace métrique, un sous-ensemble Y de X est dit relativement compact si son adhérence dans X est compacte. Alors, la définition 2.1.1 équivaut à la définition suivante.

Définition 2.1.2 *Un opérateur linéaire A de E dans F est dit compact si et seulement si $A(B_E)$ est relativement compact, ou encore, $A \in \mathcal{K}(E, F)$ si et seulement si $A(M)$ est relativement compact pour toute partie bornée M de E .*

Proposition 2.1.1 *Si A est un opérateur linéaire de E dans F , alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $A \in \mathcal{K}(E, F)$
2. Pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de E , la suite $(Ax_n)_n$ admet une sous suite convergente dans F .

Démonstration. On suppose que A soit compact et on considère une suite bornée quelconque $(x_n)_n$. Si on pose $\alpha = \sup_n \|x_n\|$, alors la suite $(Ax_n)_n$ est contenue dans l'ensemble $A(B_E(0, \alpha))$. Or $A(B_E(0, \alpha))$ est relativement compact, on peut alors extraire de $(Ax_n)_n$ une sous suite convergente.

Soient maintenant M une partie bornée de E et $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{A(M)}$. Il existe alors une suite $(z_n)_n$ d'éléments de $A(M)$ telle que

$$\|z_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)_n$ admet une sous suite convergente, la suite $(y_n)_n$ aussi. Il s'en suit que $A(M)$ est relativement compact. D'où, A est compact. $\square$

Remarque 2.1.1 *Un opérateur compact est nécessairement continu, car sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornée telle que $\|Ax_n\| \rightarrow +\infty$, ce qui contredit la compacité.*

On rappelle maintenant le théorème d'Ascoli, qui est un outil pour montrer qu'un opérateur est compact.

Théorème 2.1.2 *(Théorème d'Ascoli) Soient (I, d) un espace métrique compact et (X, d') un espace métrique complet. Alors, une partie H de $\mathcal{C}(I, X)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. H est équicontinue, i.e.,

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall f \in H, \forall y \in I, (d(x, y) < \delta) \implies (d'(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

2. Pour tout $x \in I$, l'ensemble $H(x) = \{f(x), f \in H\}$ est relativement compact.

Exemple 2.1.1 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. L'opérateur de Volterra $A : E \rightarrow E$ défini dans Exemple 1.2.2 par

$$\forall f \in E, \quad Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in [0, 1],$$

est compact.

On va utiliser le théorème d'Ascoli avec $I = [0, 1]$ et $X = \mathbb{K}$. On pose $H = A(B_E)$.

Soit $f \in B_E$, pour tous $x, y \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |Af(x) - Af(y)| &= \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leq |x - y| \|f\|_\infty \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

D'où, on a

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0 / \forall f \in B_E, \forall y \in I, (|x - y| < \delta) \implies (|Af(x) - Af(y)| < \varepsilon).$$

Autrement dit, l'ensemble H est équicontinu. De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, $H(x)$ est une partie de $\mathbb{K}$ donc si $H(x)$ est bornée alors, $H(x)$ est relativement compacte. Or, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \forall f \in B_E : |Af(x)| &\leq \int_0^x |f(t)|dt \\ &\leq x \|f\|_\infty \\ &\leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème d'Ascoli sont satisfaites, il s'en suit que A est compact.

Exemple 2.1.2 Soient $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et $k \in \mathcal{C}([a, b]^2, \mathbb{K})$. Soit l'opérateur intégral défini par

$$\forall f \in E : Af(x) = \int_a^b k(x, t)f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

L'opérateur A est compact.

Démonstration. Laissée en exercice. $\square$

2.2 Propriétés fondamentales des opérateurs compacts

On commence par rappeler le théorème de Riesz sous forme de lemme

Lemme 2.2.1 (*Théorème de Riesz*) Soit X un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.

Remarque 2.2.1 (a) Il résulte du théorème de Riesz que l'application identité sur X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.

(b) Si E et F sont de dimensions infinies, le théorème de Riesz entraîne que si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible alors, A n'est pas compact.

Théorème 2.2.2 L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$. En particulier, $\mathcal{K}(E, F)$ est un espace de Banach.

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.3 Si M est un fermé d'un espace métrique complet (X, d) , alors, M est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \dots, y_n \in X$ tels que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^n B_X(y_i, \varepsilon)$$

où $B_X(y_i, \varepsilon) := \{x \in X : d(x, y_i) < \varepsilon\}$.

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{K}(E, F)$, on a

$$\sup_{x \in B_E} \|Ax\| = \sup_{y \in A(B_E)} \|y\| \leq \sup_{x \in \overline{A(B_E)}} \|y\| < +\infty,$$

alors $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ avec $0 \in \mathcal{K}(E, F)$. On va montrer que $\mathcal{K}(E, F)$ est stable par combinaisons linéaires. Soient $B, A \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de E , il existe une sous-suite $(Bx_{\phi(n)})_n$ de $(Bx_n)_n$ qui converge vers un point y de F

(d'après la Proposition 2.1.1). De même, il existe une sous-suite $(Ax_{\theta(\phi(n))})_n$ de $(Ax_{\phi(n)})_n$ qui converge vers un point z de F . D'où, on trouve

$$(B + \lambda A)x_{\theta(\phi(n))} \longrightarrow y + \lambda z \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On en déduit que pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de E , la suite $((B + \lambda A)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $((B + \lambda A)x_{\theta(\phi(n))})_n$ qui converge dans F . D'où, l'opérateur $B + \lambda A$ est compact, d'après la Proposition 2.1.1 et $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Il reste à montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{K}(E, F)$ muni de la norme induite par celle de $\mathcal{L}(E, F)$ est fermé. Soit $A \in \overline{\mathcal{K}(E, F)}$. Alors, il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{K}(E, F)$ qui converge dans $\mathcal{L}(E, F)$ vers A . On veut montrer que $A \in \mathcal{K}(E, F)$ donc que $\overline{A(B_E)}$ est un compact de F .

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|A_{n_0} - A\| < \varepsilon/4$. Or $A_{n_0} \in \mathcal{K}(E, F)$ donc $\overline{A_{n_0}(B_E)}$ est un compact de F . En particulier, d'après le Lemme 2.2.3, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \dots, y_n \in F$ tels que

$$A_{n_0}(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^n B_E(y_i, \frac{\varepsilon}{4}),$$

où $B_E(x, r) := \{y \in E : \|x - y\| < r\}$. Alors, si $x \in B_E$, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$A_{n_0}x \in B_E(y_{i_0}, \frac{\varepsilon}{4}).$$

D'où, on trouve

$$\begin{aligned} \|Ax - y_{i_0}\| &= \|Ax - A_{n_0}x\| + \|A_{n_0}x - y_{i_0}\| \leq \|A - A_{n_0}\| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$Ax \in B_E(y_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup_{i=1}^n B_E(y_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Par conséquent,

$$A(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^n B_E(y_i, \frac{\varepsilon}{2}),$$

Enfin, on trouve

$$\overline{A(B_E)} \subset \bigcup_{i=1}^n B_E(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{B_E(y_i, \frac{\varepsilon}{2})} \subset \bigcup_{i=1}^n B_E(y_i, \varepsilon),$$

et $\overline{A(B_E)}$ est compact (d'après le Lemme 2.2.3). $\square$

Remarque 2.2.2 *Si F n'est pas complet, le résultat précédent peut être faux.*

Théorème 2.2.4 *Si E ou F est de dimension finie, alors $\mathcal{K}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. Si E est de dimension finie, alors B_E sera compacte, d'où, $A(B_E)$ est compacte pour tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$ car A est continu.

On suppose que F est de dimension finie, alors, $A(B_E)$ est bornée donc relativement compacte (car F est de dimension finie). $\square$

Remarque 2.2.3 *Toute fonctionnelle linéaire $f \in E'$ est compacte (Il suffit de remarquer que $\dim(\mathbb{K}) = 1$).*

Proposition 2.2.5 *Soient $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$. Si A ou B est compact alors BA est compact.*

Démonstration. Si A est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $\overline{A(M)}$ est compact.

Or, l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc, $B(\overline{A(M)})$ est compact. Il résulte que $B \circ A(M) \subset B(\overline{A(M)})$ est relativement compacte.

Si B est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $A(M)$ est aussi borné et donc $B \circ A(M)$ est relativement compacte. $\square$

On s'intéresse maintenant à une classe d'opérateurs dits de rang fini.

Définition 2.2.1 (*Opérateurs de rang fini*) *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que A est un opérateur de rang fini si $\text{Im}(A)$ est de dimension finie.*

Exemple 2.2.1 Soient $E = L^p([0, 1[, \mathbb{R})$ et A l'opérateur défini sur E par

$$\forall f \in E, \quad Af(x) = \int_0^1 xy(1 - xy)f(y)dy, \quad \forall x \in]0, 1[.$$

Alors, A est à valeurs dans $F = \mathbb{R}_2[x]$ (espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux). Comme F est de dimension finie, l'opérateur A est de rang fini.

Proposition 2.2.6 Tout opérateur borné de rang fini est compact.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur de rang fini. L'opérateur A est continu donc, pour tout $x \in B_E : \|Ax\| \leq \|A\|$. Alors, $A(B_E)$ est borné dans F et, par conséquent, $\overline{A(B_E)}$ aussi. De plus, $Im(A)$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, donc, $\overline{A(B_E)} \subset \overline{Im(A)} = Im(A)$. Enfin, $\overline{A(B_E)}$ est fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $Im(A)$, il est compact de $Im(A)$. D'où, il résulte $A \in \mathcal{K}(E, F)$. $\square$

L'espace $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé et tout opérateur borné de rang fini est compact. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 2.2.7 Toute limite dans $\mathcal{L}(E, F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.

Proposition 2.2.8 Soit $A \in \mathcal{K}(E, F)$. Alors, $Im(A)$ est fermé si et seulement si A est de rang fini.

On rappelle d'abord le théorème de l'application ouverte.

Théorème 2.2.9 Soient E, F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Alors, A est ouverte, i.e., A transforme tout ouvert de E en un ouvert de F .

Démonstration de la Proposition 2.2.8. On suppose que $Im(A)$ est fermé dans l'espace de Banach F alors, $Im(A)$ est aussi un espace de Banach. L'opérateur A est continu et surjectif de l'espace de Banach E sur l'espace de Banach $Im(A)$. Alors, A est ouverte

(d'après le théorème de l'application ouverte). Comme la boule fermée B_E est un voisinage de 0 dans E et A est ouverte, alors $A(B_E)$ est un voisinage de $A(0) = 0$ dans $Im(A)$. D'où, il existe $r > 0$ tel que

$$B_{Im(A)}(0, r) := \{y \in Im(A) : \|y\| < r\} \subset A(B_E).$$

L'adhérence $\overline{B_{Im(A)}(0, r)}^F$ de $B_{Im(A)}(0, r)$ dans F est un fermé dans le compact $\overline{A(B_E)}$, elle est donc un compact de F . De plus, on a

$$\overline{B_{Im(A)}(0, r)}^F \subset \overline{A(B_E)}^F \subset \overline{Im(A)}^F = Im(A),$$

donc $\overline{B_{Im(A)}(0, r)}^F$ est un compact de $Im(A)$. On en déduit que la boule unité de $Im(A)$ est un compact de $Im(A)$. D'où, $Im(A)$ est de dimension finie (d'après le Lemme 2.2.1). La réciproque est évidente. $\square$

2.3 Opérateur compact dans un espace de Hilbert

On va donner une caractérisation plus précise de la compacité dans le cadre hilbertien. On a vu au Corollaire 2.2.7 que toute limite dans $\mathcal{L}(E, F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.

La réciproque est fausse en général, mais si F est un espace de Hilbert, on a le résultat

Théorème 2.3.1 *Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{K}(E, H)$. Alors, il existe une suite $(A_n)_n$ de $\mathcal{L}(E, H)$ d'opérateurs de rang fini, qui converge vers A dans $\mathcal{L}(E, H)$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. En vertu du Lemme 2.2.3, comme $\overline{A(B_E)}$ est compact de H , il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \dots, y_{k_n} \in H$ tels que

$$\overline{A(B_E)} \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B_H(y_i, \frac{1}{n+1}) \quad (2.1)$$

où $B_H(y, r) := \{x \in H : \|x - y\| < r\}$. Or, $F_n = \text{vect}\{y_1, \dots, y_{k_n}\}$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc un fermé de l'espace de Hilbert H , d'où, $H = F_n \oplus F_n^\perp$.

Soit $P_n \in \mathcal{L}(H)$ la projection orthogonale de H sur F_n . Alors, $A_n = P_n A \in \mathcal{L}(E, H)$ est un opérateur de rang fini car

$$\dim(\text{Im}(A_n)) = \dim(\text{Im}(P_n A)) \leq \dim(F_n) \leq k_n.$$

D'autre part, pour $x \in B_E$, d'après (2.1), il existe $i_0 \in \{1, \dots, k_n\}$ tel que

$$\|Ax - y_{i_0}\| < \frac{1}{n+1}.$$

Or, y_{i_0} est dans F_n et $P_n Ax$ est la projection orthogonale de Ax sur F_n donc

$$\|Ax - P_n Ax\| = d(Ax, F_n) \leq \|Ax - y_{i_0}\| < \frac{1}{n+1}.$$

Il résulte que

$$\forall x \in B_E : \|Ax - A_n x\| < \frac{1}{n+1}.$$

En revenant à la définition de la norme d'opérateurs, on trouve $\|A - A_n\| < \frac{1}{n+1}$. $\square$

Remarque 2.3.1 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. De ce qui précède, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. L'opérateur A est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des opérateurs linéaires bornés de rang fini.
2. L'opérateur A est compact de H dans H .

Définition 2.3.1 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt) Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(x_k)_k$ une base hilbertienne de H . Un opérateur linéaire $A : H \rightarrow H$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (ou simplement HS) si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 < +\infty.$$

Le réel

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de A .

Voici un exemple sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Exemple 2.3.1 (*Opérateurs à noyau*) Soient $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) et $k(\cdot, \cdot) \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$.

Alors, l'opérateur

$$f \mapsto Af(x) = \int_{\Omega} k(x, t) f(t) dt$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Remarque 2.3.2 Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ se représente de manière unique à l'aide d'une fonction $k(\cdot, \cdot) \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$.

Théorème 2.3.2 Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

Démonstration. On va montrer que A est limite d'opérateurs de rang fini. Soit A un opérateur HS. On pose

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 < +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors, il existe $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ (fini) tel que

$$\sum_{k > N_{\varepsilon}} \|Ax_k\|^2 \leq \varepsilon.$$

Soit $F_{\varepsilon} = \text{vect}\{x_1, \dots, x_{N_{\varepsilon}}\}$ un sous espace vectoriel de dimension finie. Soit F l'orthogonal de F_{ε} , alors, $F = \text{vect}\{x_k\}_{k > N_{\varepsilon}}$. Soient P_{ε} (resp. P) la projection orthogonale de H sur F_{ε} (resp. sur F), alors, $P_{\varepsilon} + P = I_{d_H}$. On pose $A_{\varepsilon} = AP_{\varepsilon}$ qui est un opérateur de rang fini et $A - A_{\varepsilon} = AP$. Or,

$$Px_k = \begin{cases} x_k & \text{si } k > N_{\varepsilon}, \\ 0 & \text{si } k \leq N_{\varepsilon}. \end{cases}$$

On introduit la norme de Hilbert-Schmidt, on trouve

$$\begin{aligned} \|A - A_{\varepsilon}\|_{HS}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|APx_k\|^2 \\ &= \sum_{k > N_{\varepsilon}} \|Ax_k\|^2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or, $\|A - A_{\varepsilon}\| \leq \|A - A_{\varepsilon}\|_{HS}$ alors, l'opérateur A est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. Il est donc compact d'après le Corollaire 2.2.7. $\square$

Théorème 2.3.3 *On considère un espace de Hilbert séparable H et un opérateur $A \in \mathcal{K}(H)$. Soit (e_n) une base orthonormée de H . Alors, la suite (Ae_n) tend vers 0.*

Démonstration. On suppose que (Ae_n) ne tende pas vers 0. Sinon, on pourrait (pour un certain $\varepsilon > 0$) extraire de (e_n) une sous-suite $(e_{k(n)})$ telle que $\|Ae_{k(n)}\| > \varepsilon$ pour tout n . Comme A est compact, on peut extraire de $(Ae_{k(n)})$ une sous-suite (notée $(Ae_{k(n)})$) convergente. Si on note x sa limite, on a $\|x\| \geq \varepsilon$. Or, pour tout $y \in H$, on a

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Ae_{k(n)}, y \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle e_{k(n)}, A^*y \rangle = 0.$$

La dernière égalité découle du fait que pour tout vecteur $z \in H$, la série $\sum_n |\langle e_n, z \rangle|^2$ converge (voir Théorème 4.4.6) alors, son terme général tend vers 0. En choisissant $y = x$, on obtient $x = 0$, ce qui est une contradiction. $\square$

2.4 Propriétés spectrales des opérateurs compacts

On décrit dans cette section le spectre des opérateurs compacts. Pour cela, on a besoin de rappeler les outils nécessaires que voici.

Définition 2.4.1 *Soit L un sous-espace vectoriel de E . On dit que L admet un supplémentaire topologique dans E s'il existe un sous-espace vectoriel M de E tel que*

1. $E = L \oplus M$, i.e., pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(P(x), Q(x)) \in L \times M$ tel que $x = P(x) + Q(x)$,
2. l'application P de E dans E ainsi définie est linéaire continue.

Remarque 2.4.1 *Si L admet un supplémentaire topologique M dans E , alors, L et M sont fermés dans E . De plus, si L est de dimension finie, alors, L admet un supplémentaire topologique.*

Lemme 2.4.1 *Si $A \in \mathcal{K}(E)$, alors, $L := \text{Ker}(I_{d_E} - A)$ est de dimension finie. En particulier, d'après la remarque précédente, L admet un supplémentaire topologique.*

Démonstration. On remarque que $A(B_L) = B_L$. En effet, par définition de L , tout élément de L vérifie $x = Ax$. Comme $L = (I_{d_E} - A)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E , $B_L = B_E \cap L$ est aussi un fermé de E . Comme $B_L \subset B_E$, on a

$$B_L = A(B_L) \subset \overline{A(B_E)},$$

d'où, B_L est un fermé de E , inclus dans $\overline{A(B_E)}$, qui est un compact de E car $A \in \mathcal{K}(E)$. Donc, B_L est un compact de L . On en déduit, d'après le Lemme 2.2.1 que L est de dimension finie. $\square$

Lemme 2.4.2 Soient $A \in \mathcal{K}(E)$, $L := \text{Ker}(I_{d_E} - A)$ et M le supplémentaire topologique de L . Alors, l'opérateur $B := (I_{d_E} - A)|_M$ est linéaire, continu et injectif. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \in M$, on a $\|Bx\| \geq c\|x\|$.

Remarque 2.4.2 On déduit d'après le Corollaire 1.3.3 que $\overline{\text{Im}(B)} = \text{Im}(B)$.

Proposition 2.4.3 Si $A \in \mathcal{K}(E)$, alors, $\text{Im}(I_{d_E} - A)$ est fermé dans E .

Démonstration. On pose $L := \text{Ker}(I_{d_E} - A)$. Soit M le supplémentaire topologique de L . Soit $t \in \overline{\text{Im}(I_{d_E} - A)}$ alors, il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E telle que

$$t_n - At_n \longrightarrow t \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Comme $E = L \oplus M$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in L \times M$ tel que $t_n = x_n + y_n$.

Soit $B := (I_{d_E} - A)|_M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in L = \text{Ker}(I_{d_E} - A)$, i.e., $x_n - Ax_n = 0$, on a

$$By_n = y_n - Ay_n = t_n - At_n - (x_n - Ax_n) \longrightarrow t \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On en déduit d'après la Remarque 2.4.2, que $t \in \overline{\text{Im}(B)} = \text{Im}(B) \subset \text{Im}(I_{d_E} - A)$.

Ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

Les deux résultats suivants seront utiles dans le développement de la démonstration du théorème spectral des opérateurs compacts.

Théorème 2.4.4 *Si $A \in \mathcal{K}(E)$, alors, $I_{d_E} - A$ est injectif si et seulement si $I_{d_E} - A$ est inversible.*

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4.5 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Si Y est un sous-espace vectoriel fermé de X , distinct de X , alors il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, Y) \geq \frac{1}{2}$.*

Démonstration du Théorème 2.4.4. Il suffit de montrer que si $I_{d_E} - A$ est injectif, alors $I_{d_E} - A$ est surjectif. On raisonne par l'absurde en supposant que $I_{d_E} - A$ n'est pas surjectif.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n := \text{Im}((I_{d_E} - A)^n)$. Comme $I_{d_E} - A$ n'est pas surjectif on a $E_1 \subsetneq E = E_0$. On procède par récurrence. On montre que la propriété

$$E_n \text{ est fermé dans } E \text{ et } E_{n+1} \subsetneq E_n \quad (P_n)$$

est vraie. La propriété (P_0) est vérifiée d'après la Proposition 2.4.3 et car $E_1 \subsetneq E_0$. On suppose maintenant que (P_n) est vérifiée et on montre que (P_{n+1}) est vraie. Comme $E_{n+1} \subset E_n$, on a $(I_{d_E} - A)(E_n) \subset E_n$, alors $A(E_n) \subset E_n$. Donc, on peut définir $A_n := A|_{E_n} \in \mathcal{L}(E_n)$. On a $\overline{A_n(B_{E_n})}^{E_n} = \overline{A(B_{E_n})} \cap E_n \subset \overline{A(B_E)} \cap E_n$. Or $\overline{A(B_E)}$ est un compact de E et, comme (P_n) est vérifiée, E_n est fermé dans E , donc $\overline{A(B_E)} \cap E_n$ est un compact de E_n et $\overline{A_n(B_{E_n})}^{E_n}$ aussi, il s'en suit que $A_n \in \mathcal{K}(E_n)$. D'après la Proposition 2.4.3 appliquée à A_n , $\text{Im}(I_{d_{E_n}} - A_n)$ est fermé dans E_n donc dans E . Or, on a

$$E_{n+1} = (I_{d_E} - A)(E_n) = (I_{d_{E_n}} - A_n)(E_n) = \text{Im}(I_{d_{E_n}} - A_n).$$

On en déduit que

$$E_{n+1} \text{ est fermé dans } E. \quad (2.2)$$

De plus, en utilisant $E_{n+1} \subsetneq E_n$ et $I_{d_E} - A$ injectif, on trouve

$$E_{n+2} = (I_{d_E} - A)(E_{n+1}) \subsetneq (I_{d_E} - A)(E_n) = E_{n+1}. \quad (2.3)$$

Enfin, (2.2) et (2.3) montrent que (P_{n+1}) est satisfaite.

b) D'après la partie **a)**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété (P_n) est vraie. On applique le Lemme 2.4.5 avec $X = E_n$ et $Y = E_{n+1}$, il existe $x_n \in E_n$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$.

Alors, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q > p$, on a

$$Ax_q \in E_q \subset E_{p+1} \text{ et } (I_{d_E} - A)x_p \in E_{p+1},$$

donc $Ax_q + (I_{d_E} - A)x_p \in E_{p+1}$. On en déduit

$$\begin{aligned} \|Ax_p - Ax_q\| &= \|x_p - (Ax_q + (I_{d_E} - A)x_p)\| \\ &\geq d(x_p, E_{p+1}) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente, ce qui est en contradiction avec le fait que $A \in \mathcal{K}(E)$ et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E . On en déduit que $I_{d_E} - A$ est surjectif. $\square$

Lemme 2.4.6 Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ et $\varepsilon > 0$. Alors, l'ensemble $\{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ est fini.

Pour démontrer ce lemme, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4.7 Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de vecteurs de X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n := \text{vect}\{e_0, \dots, e_n\}$. Alors, il existe une famille libre $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X_n := \text{vect}\{f_0, \dots, f_n\}, \quad \|f_n\| = 1 \text{ et } d(f_{n+1}, X_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ tel qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, Ae_n = \lambda_n e_n$. Alors, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda_{n+1}I_{d_X} - A)f_{n+1} \in X_n.$$

Démonstration du Lemme 2.4.6. On suppose que le résultat est faux. Alors, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\sigma_p(A)$ d'éléments distincts les uns des autres et vérifiant, pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Par définition de $\sigma_p(A)$, il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E \setminus \{0\}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Ae_n = \lambda_n e_n$.

Comme $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de valeurs propres de A , deux à deux distinctes, la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une famille libre de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n := \text{vect}\{e_0, \dots, e_n\}$.

En vertu du Lemme 2.4.7, il existe une famille libre $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E_n = \text{vect}\{f_0, \dots, f_n\}, \quad (2.4)$$

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad d(f_{n+1}, E_n) \geq \frac{1}{2}, \quad (2.5)$$

et

$$(\lambda_{n+1}I_{d_E} - A)f_{n+1} \in E_n. \quad (2.6)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n := \lambda_n^{-1}f_n \in E_n$. Comme $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ et $\|f_n\| = 1$, on a $\|y_n\| \leq \varepsilon^{-1}$.

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $q > p$. D'après (2.6), on a $\lambda_q^{-1}(\lambda_q I_{d_E} - A)f_q \in E_{q-1}$.

De plus, d'après (2.4), on a les inclusions suivantes

$$Ay_p \in A(E_p) \subset E_p \subset E_{q-1}.$$

Il s'en suit que $Ay_p + \lambda_q^{-1}(\lambda_q I_{d_E} - A)f_q \in E_{q-1}$. Alors, d'après (2.5), on trouve

$$\begin{aligned} \|Ay_q - Ay_p\| &= \|f_q - (Ay_p + f_q - Ay_q)\| = \|f_q - (f_q + Ay_p - \lambda_q^{-1}Af_q)\| \\ &= \|f_q - (Ay_p + \lambda_q^{-1}(\lambda_q I_{d_E} - A)f_q)\| \\ &\geq d(f_q, E_{q-1}) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|y_n\| \leq \varepsilon^{-1}$ alors, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Comme $A \in \mathcal{K}(E)$, la suite $(Ay_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans E , ceci n'est pas possible d'après (2.7). $\square$

Théorème 2.4.8 (*Théorème spectral des opérateurs compacts*) Soit $A \in \mathcal{K}(E)$.

1. Si E est de dimension infinie, alors, $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma_p(A) \setminus \{0\} = \sigma(A) \setminus \{0\}$ et pour tout $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, le sous-espace vectoriel propre associé $\text{Ker}(\lambda I_{d_E} - A)$ est de dimension finie.
3. Le spectre $\sigma(A)$ de A est dénombrable. De plus, s'il est infini, les éléments de $\sigma(A) \setminus \{0\}$ forment une suite $(\lambda_n)_n$ de $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0.$$

Démonstration.

1. Par la contraposée : Si $0 \notin \sigma(A)$, alors, A est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et $I_{d_E} = A^{-1}A \in \mathcal{K}(E)$, d'après la Proposition 2.2.5. Or, d'après la Remarque 2.2.1, l'opérateur identité de E est compact si et seulement si E est de dimension finie.
2. On a $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda I_{d_E} - A$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$, ce qui est équivalent à, $\lambda \neq 0$ et $I_{d_E} - \lambda^{-1}A$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Or, d'après le Théorème 2.4.4 appliqué à $\lambda^{-1}A$, $I_{d_E} - \lambda^{-1}A$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si $I_{d_E} - \lambda^{-1}A$ n'est pas injectif. D'où, $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in \sigma_p(A)$. De plus, d'après le Lemme 2.4.1, $\text{Ker}(I_{d_E} - \lambda^{-1}A)$ est de dimension finie, donc, $\text{Ker}(\lambda I_{d_E} - A)$ est de dimension finie.
3. D'après le Lemme 2.4.6 et 2., pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble

$$\{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

est fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors, l'ensemble

$$\{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

est fini. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n_0}$ ses éléments classés de la façon suivante

$$|\lambda_0| \geq \dots \geq |\lambda_{n_0}| \geq \frac{1}{n}.$$

De même, l'ensemble

$$L_n = \{\lambda \in \sigma(A) : \frac{1}{n+1} \leq |\lambda| < \frac{1}{n}\}$$

est fini. On pose $L_n = \{\lambda_{n_0+1}, \dots, \lambda_{n_1}\}$ où les λ_i sont classés de la façon suivante

$$\frac{1}{n+1} \leq |\lambda_{n_1}| \leq \dots \leq |\lambda_{n_0+1}| < \frac{1}{n} \leq |\lambda_{n_0}| \leq \dots \leq |\lambda_0|.$$

En procédant ainsi par récurrence, on peut ranger les éléments de $\sigma(A) \setminus \{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_n$ qui décroît en module vers 0.

Ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

Remarque 2.4.3 *Étant donnée une suite réelle $(\lambda_n)_n$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. On peut construire un opérateur compact A tel que $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$. Soit $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, il suffit de considérer l'opérateur A sur H défini par $A((x_n)_n) = (\lambda_n x_n)_n$. Cet opérateur est compact car il existe une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs de rangs finis telle que $\|A_n - A\|$ tend vers 0. On remarque ici que 0 peut appartenir, ou ne pas appartenir à $\sigma_p(A)$. Si $0 \in \sigma_p(A)$, l'espace propre associé $\text{Ker}(A)$ peut être de dimension infinie.*

2.5 Alternative de Fredholm

Avant d'aller plus loin dans cette section, il est convenable de donner les définitions suivantes.

Définition 2.5.1 *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel (non supposé fermé). On appelle codimension de F la dimension de E/F . On note $\text{codim} F = \dim(E/F)$, où E/F est l'espace vectoriel quotient, qui est une notion algébrique. Lorsque F est fermé, on a la somme directe $E = F \oplus F^\perp$, donc E/F est isomorphe à $F^\perp$ et $\text{codim} F = \dim(F^\perp)$.*

Définition 2.5.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On dit que A est un opérateur de Fredholm, si les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *l'image de A est fermée,*

(b) le noyau de A est de dimension finie,

(c) l'image de A est de codimension finie.

On note alors, $\text{Ind}(A) = \dim(\text{Ker}(A)) - \text{codim}(\text{Im}(A))$ et le nombre entier $\text{Ind}(A)$ s'appelle l'indice de A .

Exemple 2.5.1 L'opérateur $f \mapsto f''$ est un opérateur de Fredholm de $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Il est clair qu'il est surjectif et son noyau est de dimension 2 (fonctions affines).

Théorème 2.5.1 (Théorème de Fredholm) Soient $A \in \mathcal{K}(E)$ et $B = I_{d_E} - A$. Alors, B est un opérateur de Fredholm et $\text{Ind}(B) = 0$. Autrement dit, si $A \in \mathcal{K}(E)$ alors, on a

- i) $\text{Ker}(I_{d_E} - A)$ est de dimension finie et $\text{Im}(I_{d_E} - A) = [\text{Ker}(I_{d_E} - A^*)]^\perp$;
- ii) l'opérateur $I_{d_E} - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif;
- iii) $\dim(\text{Ker}(I_{d_E} - A)) = \dim(\text{Ker}(I_{d_E} - A^*))$.

Démonstration. i) Dans le Lemme 2.4.1, on a démontré que $\dim(\text{Ker}(I_{d_E} - A))$ est finie. D'après la Proposition 1.5.6, on a $\overline{\text{Im}(I_{d_E} - A)} = [\text{Ker}(I_{d_E} - A^*)]^\perp$. Or, $\text{Im}(I_{d_E} - A)$ est un fermé dans E (voir Proposition 2.4.3), d'où, résulte l'égalité attendue.

ii) Il suffit de voir Théorème 2.4.4.

iii) On pose $d_1 = \dim(\text{Ker}(I_{d_E} - A))$ et $d_2 = \dim(\text{Ker}(I_{d_E} - A^*))$. Pour montrer que $d_2 \leq d_1$, on raisonne par l'absurde. On suppose que $d_1 < d_2$. Le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(I_{d_E} - A)$ étant de dimension finie, alors, il admet un supplémentaire topologique dans E . Alors, il existe une projection continue P de E dans $\text{Ker}(I_{d_E} - A)$.

Or, $\text{Im}(I_{d_E} - A) = [\text{Ker}(I_{d_E} - A^*)]^\perp$ est de codimension finie d_2 , il résulte que $\text{Im}(I_{d_E} - A)$ admet un supplémentaire topologique dans E , noté F , de dimension d_2 . Comme $d_1 < d_2$, il existe une application linéaire $B : \text{Ker}(I_{d_E} - A) \longrightarrow F$ qui est injective et non surjective.

On considère $C = A + BP$, alors, $C \in \mathcal{K}(E)$ car BP est de rang fini.

On va montrer que $\text{Ker}(I_{d_E} - C) = \{0\}$. En effet, si

$$0 = x - Cx = (x - Ax) - (BPx),$$

alors,

$$x - Ax = 0 \quad \text{et} \quad BPx = 0,$$

ce qui équivaut à $x \in \text{Ker}(I_{d_E} - A)$ et $Bx = 0$, donc $x = 0$.

Maintenant, on applique *ii*) à l'opérateur C , il résulte que $\text{Im}(I_{d_E} - C) = E$. Cela est absurde car il existe $f \in F$, $f \notin \text{Im}(B)$, l'équation $x - Cx = f$ n'admet pas de solution.

D'où, on vient de montrer que $d_2 \leq d_1$.

En appliquant ce résultat à A^* , on trouve

$$\dim(\text{Ker}(I_{d_E} - A^{**})) \leq \dim(\text{Ker}(I_{d_E} - A^*)) \leq \dim(\text{Ker}(I_{d_E} - A)).$$

Or, $\text{Ker}(I_{d_E} - A) \subset \text{Ker}(I_{d_E} - A^{**})$, il s'en suit que $d_1 = d_2$.

La démonstration est donc achevée. $\square$

Corollaire 2.5.2 (*Alternative de Fredholm*) Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. On considère l'équation de Fredholm : pour $y \in E$, trouver $x \in E$ tel que

$$\lambda x - Ax = y. \tag{2.8}$$

Alors, on distingue deux cas

1. Soit, pour tout $y \in E$, il existe une unique solution $x \in E$ de l'équation (2.8).
2. Soit, l'équation homogène $\lambda x - Ax = 0$ admet une solution $x \neq 0$.

Dans le deuxième cas, l'équation (2.8) admet une solution (non unique) si et seulement $y \in \text{Im}(\lambda I_{d_E} - A)$.

Démonstration. Si $\lambda \notin \sigma_p(A)$, $\lambda I_{d_E} - A$ est injectif donc inversible, d'où, l'unicité de la solution de (2.8).

Si $\lambda \in \sigma_p(A)$, il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $\lambda x_0 - Ax_0 = 0$.

La démonstration du corollaire est alors terminée. $\square$

À la fin de ce chapitre, on propose au lecteur de résoudre les exercices suivants.

2.6 Exercices

Exercice 1 :

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'opérateur intégral à noyau $k \in \mathcal{C}([a, b]^2, \mathbb{K})$ défini par

$$\forall f \in E : Af(x) = \int_a^b k(x, t)f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Montrer que $A \in \mathcal{K}(E)$.

Exercice 2 :

Soit $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites $x = (x_n)_n$ tel que $\sum_{n \geq 1} |x_n|^2 < +\infty$, muni de la norme

$$\|x\| = \left(\sum_{n \geq 1} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'opérateur matriciel de Hilbert-Schmidt A sur H par

$$A(x_n)_n = (y_n)_n, \quad \text{avec } y_n = \sum_{j \geq 1} a_{nj}x_j, \quad n = 1, 2, \dots$$

et les (a_{nj}) vérifient $\sum_{n \geq 1} \sum_{j \geq 1} |a_{nj}|^2 < +\infty$.

Montrer que A est un opérateur compact sur H .

Exercice 3 :

Soient E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

- (i) Il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(E)$ tel que $I_{d_E} - AB$ et $I_{d_E} - BA$ sont compacts.
- (ii) $\text{Ker}(A)$ est de dimension finie et $\text{Im}(A)$ est un sous-espace fermé de codimension finie.

1. En supposant (i), montrer que $\text{Ker}(BA)$ est de dimension finie, $\text{Im}(AB)$ de codimension finie, et en déduire (ii).

2. Soit $F \subset E$ un sous-espace fermé. Montrer que F admet un complémentaire si et seulement si il existe $P \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $P^2 = P$ et $\text{Im}(P) = F$.
3. Démontrer l'implication $(ii) \implies (i)$.

Exercice 4 :

Soit $H = L^2(]0, 1[, \mathbb{R})$. On définit l'opérateur A sur H par

$$\forall f \in H, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad Af(x) = \int_0^1 e^{x+t} f(t) dt.$$

1. Montrer que A est un opérateur borné de rang fini.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés. En déduire $\sigma(A)$.

Exercice 5 :

Soient H un espace de Hilbert séparable et $(x_k)_k$ une base hilbertienne de H . On note l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H dans H par $\mathcal{L}_{HS}(H)$. On rappelle qu'un opérateur linéaire $A : H \rightarrow H$ est de Hilbert-Schmidt (ou simplement HS) si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 < +\infty.$$

On pose

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que

- (1) Si $A, B \in \mathcal{L}_{HS}(H)$, alors, $A + B \in \mathcal{L}_{HS}(H)$.
- (2) Si $A \in \mathcal{L}_{HS}(H)$, alors, $A^* \in \mathcal{L}_{HS}(H)$ et on a $\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$.
- (3) Si $A \in \mathcal{L}(H)$ et $B \in \mathcal{L}_{HS}(H)$, alors, $BA \in \mathcal{L}_{HS}(H)$ et $AB \in \mathcal{L}_{HS}(H)$. De plus, on a

$$\max(\|AB\|_{HS}, \|BA\|_{HS}) \leq \|A\| \|B\|_{HS}.$$

- (4) Pour tous $A, B \in \mathcal{L}_{HS}(H)$, la forme $\langle A, B \rangle = \sum_k \langle Ax_k, Bx_k \rangle$ est bien définie (ne dépend pas du choix de (x_k)) et qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}_{HS}(H)$.

Chapitre 3

Opérateurs compacts auto-adjoints

Un résultat d'algèbre linéaire dit que pour une matrice A symétrique, i.e., $A^* = A$, il existe une base orthonormée dans laquelle elle est diagonale réelle. On va montrer un résultat analogue pour les opérateurs compacts auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Pour cela, on considère un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$.

3.1 Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints

On commence par rappeler le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints en dimension finie.

Théorème 3.1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si H est de dimension finie n , alors*

1. *Les sous-espaces propres $\text{Ker}(\lambda I_{d_H} - A)$, où $\lambda \in \sigma_p(A)$, sont deux à deux orthogonaux ;*
2. *A est diagonalisable dans une base orthonormée et*

$$H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(A)} \text{Ker}(\lambda I_{d_H} - A)$$

3. A admet la décomposition spectrale suivante

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\text{Ker}(\lambda I_{d_H} - A)$.

On caractérise dans ce lemme, la norme d'un opérateur auto-adjoint compact.

Lemme 3.1.2 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors,

$$\|A\| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma_p(A)\}.$$

Démonstration. La condition $H \neq \{0\}$ est nécessaire pour assurer l'existence d'une valeur propre. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors, il existe $y \in H$ tel que $\|y\| = 1$ et $Ay = \lambda y$. D'où,

$$\begin{aligned} |\lambda| &= |\langle \lambda y, y \rangle| = |\langle Ay, y \rangle| \\ &\leq \|Ay\| \|y\| \\ &\leq \|A\| \|y\|^2 = \|A\|. \end{aligned}$$

De plus, comme l'opérateur A est auto-adjoint, d'après le Théorème 1.6.2, il existe $\lambda_0 \in \sigma(A)$ telle que $|\lambda_0| = \|A\|$. Si $\lambda_0 = 0$, alors, $A = 0$, d'où $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ (car H est non réduit à $\{0\}$).

Si $\lambda_0 \neq 0$, comme A est compact, on a

$$\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}.$$

D'où, $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$. On en déduit

$$\|A\| = |\lambda_0| \leq \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma_p(A)\} \leq \|A\|.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. $\square$

Le théorème suivant est connu sous le nom du théorème de Hilbert-Schmidt.

Théorème 3.1.3 (*Décomposition spectrale*) Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Si H est séparable, alors, il admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de A . Autrement dit, A est diagonalisable dans une base hilbertienne.

Démonstration. Comme A est compact, alors, son spectre est constitué de 0 et d'une suite finie ou non de valeurs propres non nulles. Comme A est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles. Soit $(\lambda)_{n \geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de A ($\lambda_0 = 0$). On pose $F_n = \text{Ker}(\lambda_n I_H - A)$ et $F_0 = \text{Ker}(A)$. D'après le théorème de Fredholm (Théorème 2.5.1), F_n est de dimension finie pour tout $n \geq 1$. De plus, les sous-espaces F_n sont deux à deux orthogonaux (voir Proposition 1.6.1).

Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(F_n)_{n \geq 0}$. On va montrer que F est dense dans H .

On remarque d'abord que $A(F) \subset F$ de sorte que $A(F^\perp) \subset F^\perp$. En effet

$$\forall x \in F^\perp, \forall y \in F, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = 0.$$

Soit B la restriction de A à $F^\perp$. D'après ce qui précède B est un opérateur de $F^\perp$ dans $F^\perp$. L'opérateur $B = A|_{F^\perp}$ est auto-adjoint compact et $\sigma(B) = \{0\}$. En effet, d'après le Théorème 2.4.8, $\sigma(B) \setminus \{0\}$ est constitué des valeurs propres de B , qui seraient alors aussi des valeurs propres de A . Les vecteurs propres associés appartiendraient donc à F et à $F^\perp$, ce qui est absurde. D'après le Corollaire 1.6.4, $B = 0$ et on a

$$F^\perp \subset \text{Ker}(A) \subset F,$$

ce qui entraîne que $F^\perp = \{0\}$. Autrement dit, F est dense dans H .

Reste à la fin de choisir dans chaque F_n une base hilbertienne. La réunion de ces bases est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de A . $\square$

Ainsi, le résultat obtenu en dimension finie (Théorème 3.1.1) se généralise en dimension infinie comme suit :

Théorème 3.1.4 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, on a

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\text{Ker}(\lambda I_{d_H} - A)$.

3.2 Développement en série de Fourier

On a vu dans la section précédente comment construire une base hilbertienne formée de vecteurs propres d'opérateurs auto-adjoints compacts. Dans l'espace L^2 , on utilise très souvent des bases spéciales formées de fonctions propres d'un opérateur différentiel, ce qui est par exemple le point de départ de l'analyse harmonique.

On commence cette section par donner la définition suivante.

Définition 3.2.1 Un polynôme trigonométrique est une somme finie du type

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{2i\pi kt}$$

où $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et $c_k \in \mathbb{C}$. Le degré du polynôme P est le plus petit n possible dans cette représentation.

Notation : Tout au long de cette section, on note par H l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ des classes de fonctions de carré intégrables sur $[0, 2\pi]$. On rappelle le produit scalaire et la norme sur H pour tous $f, g \in H$, par

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \\ \|f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 Toute classe de fonctions appartenant à H est représentée par une fonction $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable et de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. Il est pratique de prolonger f en une fonction $\tilde{f}$, 2π -périodique et mesurable, il suffit de modifier f en un

point afin que $f(0) = f(2\pi)$ et de poser $\tilde{f}(x + 2k\pi) = f(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$. L'inverse est possible, une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique mesurable et de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ définit, par restriction, un élément de H .

Proposition 3.2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction e_n sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes par $e_n(x) = e^{inx}$. La famille $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H .*

Démonstration. Les fonctions 2π -périodiques et continues sur $[0, 2\pi]$ constituent un sous-espace vectoriel dense dans $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, i.e., pour tout élément f de $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g , 2π -périodique et continue sur $[0, 2\pi]$ telle que $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. Il existe aussi un polynôme trigonométrique P tel que $\|g - P\|_\infty \leq \varepsilon$. A fortiori, on a $\|g - P\|_2 \leq \varepsilon$ (c'est ce qu'on exprime en disant que la convergence uniforme implique la convergence en moyenne quadratique). De l'inégalité triangulaire résulte $\|f - P\|_2 \leq 2\varepsilon$.

Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ceci justifie le fait que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale dans $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ et en est donc une base hilbertienne. $\square$

Définition 3.2.2 *Si $f \in H$, on appelle n -ième coefficient de Fourier de f , le nombre complexe*

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

La série formelle $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ est appelée série de Fourier de f .

Exemple 3.2.1 *Soit la fonction 2π -périodique définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, \pi[\\ -1 & \text{sur } [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

Le n -ième coefficient de Fourier de f est

$$\begin{aligned} c_n(f) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &:= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{in} - \frac{(-1)^n}{in} \right). \end{aligned}$$

Alors, on a $c_n(f) = 0$ pour n pair et $c_n(f) = \frac{2}{in\pi}$ pour n impair.

Le développement en série de Fourier de f est $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{i(2n+1)\pi} e^{i(2n+1)x}$.

Maintenant, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ étant une base hilbertienne de l'espace H , on a alors le développement :

$$\forall f \in H, \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n.$$

La série de Fourier d'une fonction f de H converge pour la topologie de H et sa somme est égale à f , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{|i| \leq n} c_i(f) e_i\| = 0 \text{ avec } c_i(f) = \langle f, e_i \rangle.$$

De plus, pour deux fonctions f et g dans H , on a les formules

(i) **Inégalité de Bessel** : pour tout $J \subset \mathbb{Z}$

$$\sum_{n \in J} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

(ii) **Identité de Plancherel** :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

(iii) **Identité de Parseval** :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

Dans le cas de fonctions réelles, on note les coefficients de Fourier par $a_n(f)$ et $b_n(f)$, où

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Des relations précédentes, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} [|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2] \\ \langle f, g \rangle &= a_0(f) a_0(g) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} [a_n(f) a_n(g) + b_n(f) b_n(g)]. \end{aligned}$$

Le corollaire suivant est une conséquence du théorème précédent.

Corollaire 3.2.3 *Soit f un élément de H . Dans l'ensemble des polynômes trigonométriques P de degré inférieur ou égal à n , le polynôme de Fourier $S_n f = \sum_{|i| \leq n} c_i(f) e_i$ réalise le minimum de $\|f - P\|_2$, et il est l'unique à avoir cette propriété.*

Remarque 3.2.2 *On peut généraliser le résultat suivant pour $f \in L^p([0, 2\pi], \mathbb{C})$, $1 < p < +\infty$: la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ converge et a pour somme $f(x)$ pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$.*

On note qu'il existe des fonctions f intégrables sur $[0, 2\pi]$ dont la série de Fourier diverge en tout point.

3.3 Fonctions propres et décomposition spectrale

L'analyse de Fourier a pour but de résoudre le problème de la décomposition d'une onde périodique suivant ses différentes harmoniques. Fourier s'est particulièrement intéressé à la propagation de la chaleur, et c'est à cette occasion qu'il a eu l'idée de décomposer toute fonction périodique en une somme infinie de sinus et cosinus (série de Fourier). Lorsque la fonction à analyser n'est pas périodique, on remplace la décomposition en série par une décomposition continue sous forme d'intégrale.

3.3.1 Exemple de l'équation de la chaleur

Avant de passer à l'exemple, on introduit d'abord le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de réels strictement positifs avec $\lambda_n \rightarrow \infty$ tels que*

$$\begin{aligned} e_n &\in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \\ -\Delta e_n &= \lambda_n e_n \quad \text{sur } \Omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les (λ_n) sont les valeurs propres de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet (la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est dite condition de Dirichlet) et les (e_n) sont les fonctions propres associées.

Démonstration. Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, on note $u = Af$ l'unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

On considère alors A comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, A est un opérateur compact. Il est aussi auto-adjoint

$$\int_{\Omega} (Af)g = \int_{\Omega} \nabla(Ag) \nabla(Af) = \int_{\Omega} (Ag)f.$$

De plus, $\text{Ker}(A) = \{0\}$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} (Af)f = \int_{\Omega} |\nabla(Af)|^2 \geq 0.$$

En vertu du Théorème 3.1.3, on en déduit que $L^2(\Omega)$ admet une base hilbertienne $(e_n)_n$ constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres μ_n avec $\mu_n > 0$ et $\mu_n \rightarrow 0$. Alors, on a $e_n \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla e_n \nabla \varphi = \frac{1}{\mu_n} \int_{\Omega} e_n \varphi.$$

D'où, e_n est une solution faible de (3.1) avec $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$. $\square$

Exemple 3.3.1 (Équation de la chaleur sur un domaine borné)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$. On note par t la variable du temps. Étant donnée une fonction u^0 définie sur Ω , soit l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0, +\infty[\quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) &= u^0(x) && \text{sur } \Omega. \end{aligned}$$

modélisant la distribution de la température u dans le domaine Ω à l'instant t , si l'on maintient le bord à une température nulle. C'est l'exemple le plus simple d'équation aux dérivées partielles parabolique. L'équation de la chaleur apparaît dans de nombreux phénomènes de diffusion.

Pour résoudre ce problème, on considère $u(x, t)$ comme une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans un espace H , où H est un espace de fonctions dépendant que de x , par exemple $H = L^2(\Omega)$ ou $H = H_0^1(\Omega)$. On note alors, $u(t)$ un élément de H , i.e., la fonction $x \mapsto u(x, t)$ à t fixé. Ce point de vue permet d'obtenir facilement une solution du problème (3.2).

Lorsque le domaine Ω est borné, le problème (3.2) peut être résolu par décomposition sur une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet (Théorème 3.3.1)

$$\begin{aligned} -\Delta e_n &= \lambda_n e_n \text{ sur } \Omega \\ e_n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On cherche une solution de (3.2) sous la forme $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) e_n(x)$, par la méthode de Fourier.

On remarque que l'on a

$$a'_n(t) + \lambda_n a_n(t) = 0, \text{ alors } a_n(t) = a_n(0) e^{-\lambda_n t}.$$

On détermine les constantes $a_n(0)$ à partir de la relation

$$u^0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) e_n(x),$$

les constantes $a_n(0)$ sont les composantes de $u^0(x)$ dans la base (e_n) .

Enfin, la solution de (3.2) s'écrit sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) e^{-\lambda_n t} e_n(x).$$

3.3.2 Exemple d'un opérateur différentiel

Théorème 3.3.2 Soient $I =]0, 1[$, $p \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ avec $p \geq \alpha > 0$ sur I et $q \in \mathcal{C}(\bar{I})$. Il existe alors, une suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de réels et une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de $L^2(I)$ telles que

$e_n \in \mathcal{C}^2(\bar{I})$ et

$$\begin{aligned} -(pe'_n)' + qe_n &= \lambda_n e_n \quad \text{sur } I, \\ e_n(0) &= e_n(1) = 0, \end{aligned}$$

avec $\lambda_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

Les (λ_n) sont les valeurs propres de l'opérateur différentiel

$$Au = -(pu')' + qu$$

avec condition de Dirichlet et les (e_n) sont les fonctions propres associées.

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du Théorème 3.3.1. Pour tout $f \in L^2(I)$, il existe alors u unique vérifiant

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur } I \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On note par A l'opérateur $f \mapsto u$ considéré comme un opérateur de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$. Il suffit de vérifier que A est auto-adjoint compact pour déduire du Théorème 3.1.3, le résultat attendu. $\square$

Exemple 3.3.2 Dans le cas où $p \equiv 1$ et $q \equiv 0$, on trouve pour tout $n \geq 1$

$$e_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) \quad \text{et} \quad \lambda_n = n^2 \pi^2.$$

Ainsi, on aboutit à un développement en série de Fourier de la solution.

Remarque 3.3.1 L'opérateur de Sturm-Liouville $Au = -(pu')' + qu$ avec condition de Dirichlet sur I a de nombreuses propriétés spectrales : Toute valeur propre est de multiplicité 1.

Si l'on range les valeurs propres (λ_n) dans un ordre croissant, alors, la fonction propre e_n associée à λ_n possède $(n - 1)$ zéros sur I et la première fonction propre e_1 est de signe constant sur I .

On propose en dernier ces problèmes à résoudre sous forme d'exercices.

3.4 Exercices

Exercice 1 :

Soit l'espace de Hilbert complexe $H = L^2([0, 1], \mathbb{C})$ et on pose pour tout $f \in H$

$$Af(x) = ie^{i\pi x} \left(\int_0^x e^{-i\pi t} f(t) dt - \int_x^1 e^{-i\pi t} f(t) dt \right), \quad \forall x \in [0, 1].$$

1. Vérifier que pour tout $f \in H$, la fonction Af est continue sur $[0, 1]$ et que $A \in \mathcal{L}(H)$.
2. Montrer que pour toute suite (f_n) dans la boule unité de H qui converge faiblement vers une fonction $f \in H$, la suite de fonctions (Af_n) converge simplement vers Af sur $[0, 1]$. En déduire que $\lim_n \|Af_n - Af\| = 0$.
3. Montrer que l'opérateur A est auto-adjoint compact.
4. Montrer que lorsque f est continue sur $[0, 1]$, la fonction Af est dérivable et vérifie une équation différentielle simple.
5. Comparer $Af(0)$ et $Af(1)$. Déterminer les valeurs propres non nulles de A , et en déduire le spectre de A .

Exercice 2 :

Soit l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. On considère l'opérateur intégral A qui à tout $f \in H$ associe la fonction Af définie par

$$Af(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x - y) f(y) dy, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

1. Montrer que $Af \in H$ et que $\|A\| \leq \pi$.
2. Montrer que l'opérateur A est auto-adjoint.
3. Montrer que pour tout $f \in H$, la fonction Af est deux fois dérivable et vérifie une équation différentielle à préciser.
4. Donner une expression explicite de Af de deux façons différentes :
 (i) en utilisant la question 3. (ii) par un calcul direct.
5. En déduire que A est un opérateur borné de rang fini.

6. Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

En déduire $\sigma(A)$.

7. Montrer que $H = \text{Ker} A \oplus \text{Ker}(A - \pi I)$. Que peut-on dire sur la dimension de $\text{Ker} A$?

8. Le théorème de diagonalisation s'applique-t-il à A ? Si la réponse est oui, préciser la forme diagonale de A .

Exercice 3 :

Soit Q la projection orthogonale de $H = L^2([0, 1], \mathbb{C})$ sur le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle, qui est défini par

$$\forall f \in H, \quad \forall x \in [0, 1], \quad Qf(x) = f(x) - \int_0^1 f(t) dt.$$

On considère l'opérateur $A = QP \in \mathcal{L}(H)$, où P est défini par

$$\forall f \in H, \quad \forall x \in [0, 1], \quad Pf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Diagonaliser l'opérateur auto-adjoint compact $B = A^*A$.
2. Montrer que B est un opérateur de Hilbert-Schmidt, calculer son noyau $k(\cdot, \cdot)$ et exprimer ce noyau à partir des fonctions propres.

Chapitre 4

Annexe

Les espaces de Hilbert sont des espaces vectoriels réels ou complexes, de dimension finie ou infinie, dans lesquels on peut étudier : des équations différentielles et aux dérivées partielles, en mécanique classique (fréquences propres), en physique (équation de Schrödinger, mécanique quantique, $\dots$). On peut aussi faire de la géométrie comme on a l'habitude de le faire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ou l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$. En particulier, on peut décomposer leurs éléments dans des bases orthonormées.

On rappelle dans ce chapitre des résultats établis dans le contexte hilbertien.

4.1 Première définition des espaces de Hilbert et exemples

Définition 4.1.1 (*Produit scalaire*) Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire sur H est une application

$$\begin{aligned} H \times H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

telle que

(i) L'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est anti-linéaire, i.e., pour tous $x, y_1, y_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ on a

$$\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, y_2 \rangle,$$

l'application $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire, i.e., pour tous $x_1, x_2, y \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ on a

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle.$$

(ii) Pour tous $x, y \in H$, on a $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(iii) Pour tout $x \in H$, on a : $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $(\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0)$.

Remarque 4.1.1 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors, l'application satisfaisant (i) est dite bilinéaire (resp. sesquilinéaire), satisfaisant (ii) est dite symétrique (resp. hermitienne). L'application vérifiant (iii) est dite définie-positive.

Définition 4.1.2 Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Sur cet espace, on définit une norme par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in H$, dite norme induite par le produit scalaire.

Définition 4.1.3 Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet, i.e., un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.

Exemples 4.1.1 1. Tout espace euclidien ou hermitien de dimension finie est un espace de Hilbert. L'espace $\mathbb{K}^n$, muni du produit scalaire défini pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

2. L'espace $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire

$$\langle (x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}.$$

3. Si (X, Ω, μ) est un espace mesuré, alors l'espace des classes d'équivalence

$$L^2(X, \Omega, \mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < +\infty\} / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par

$$f \sim g \iff f = g \mu p p,$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

4.2 Géométrie dans un Hilbert

Théorème 4.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit H un espace préhilbertien, alors, on a pour tous $x, y \in H$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

De cette inégalité, résulte la continuité des applications de H dans $\mathbb{K} : x \mapsto \langle x, y \rangle$ et $y \mapsto \langle x, y \rangle$.

Proposition 4.2.2 Dans un espace préhilbertien H , on a pour tous $x, y \in H$:

(a) L'identité du parallélogramme

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\} \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

(b) La formule de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\} & \text{dans le cas réel} \\ \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\} & \text{dans le cas complexe.} \end{cases}$$

4.3 Orthogonalité

Définition 4.3.1 Dans un espace préhilbertien H , deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

Lemme 4.3.1 (Pythagore) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs deux à deux orthogonaux dans un espace préhilbertien, alors

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Définition 4.3.2 Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien H . L'orthogonal de A dans H est

$$A^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in A\}.$$

Lemme 4.3.2 (i) $A^\perp$ est un sous-espace fermé de H .

(ii) $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$

(iii) A a même orthogonal que le sous-espace fermé engendré par A .

Théorème 4.3.3 Soit A une partie non-vide convexe fermée d'un espace de Hilbert H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe $y \in A$ unique tel que

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}.$$

On note $y = P_A(x)$ la projection de x sur A .

Ce théorème s'applique en particulier au cas où A est un sous-espace fermé de H .

Théorème 4.3.4 (Théorème de la projection) Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . Alors, il existe une application linéaire continue $P_F : H \longrightarrow F$ telle que

$$x = P_F(x) + (x - P_F(x)) \text{ et } \|x - P_F(x)\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

De plus, pour tout $x \in H : x - P_F(x) \in F^\perp$.

On appelle $P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F .

Corollaire 4.3.5 Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . Alors, on a la décomposition orthogonale $H = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 4.3.6 Soit F un sous-espace d'un espace de Hilbert H . Alors, on a

(a) $(F^\perp)^\perp$ coïncide avec l'adhérence $\overline{F}$ de F dans H .

(b) F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Critère de fermeture : Soit H un espace de Hilbert. Un sous ensemble $F \subset H$ est fermé si et seulement s'il existe une application linéaire $f : H \longrightarrow \mathbb{K}$ continue telle que $F = \text{Ker}(f)$.

4.4 Base hilbertienne, Somme hilbertienne

Pour simplifier l'étude, on se place dans un espace de Hilbert séparable.

Définition 4.4.1 Une partie F de H est dite dense dans H si

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists f \in F : \|f - h\| < \varepsilon,$$

ou de manière équivalente si tout h de H est limite d'une suite d'éléments f_n de F :
 $\|f_n - h\| \rightarrow 0$.

Lemme 4.4.1 Soit H un espace de Hilbert (et plus généralement espace normé). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) H contient un sous-ensemble D qui est dénombrable et dense.
- (b) H contient une famille libre $\{f_1, \dots\}$ qui est au plus dénombrable (qui est finie ou dénombrable) et qui engendre un sous-espace F dense dans H .

Dans ce cas, on dit que H est séparable.

Définition 4.4.2 Dans un espace de Hilbert séparable H . On a les définitions suivantes

- (a) Une famille $\{e_i, i \in I\}$ est orthogonale si

$$\forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j : \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

- (b) Une famille $\{e_i, i \in I\}$ est orthonormée si

$$\forall i \in I, \forall j \in I : \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

- (c) Une famille $\{e_i, i \in I\}$ est totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{e_i, i \in I\}$ est dense dans H (qui engendre un sous-espace vectoriel dense dans H).
- (d) Une base hilbertienne de H ou base orthonormée est une famille orthonormée totale dans H .

Exemples 4.4.1 1. Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la base canonique

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$.

2. Dans $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on considère la base canonique

$$e_0 = (1, 0, 0, \dots), e_1 = (0, 1, 0, \dots), e_n = (0, 0, 1, \dots), \dots$$

Alors, pour tout $x \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on a : $x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i e_i$ avec $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^2$.

Théorème 4.4.2 Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie possède une base hilbertienne dénombrable.

Corollaire 4.4.3 Tout espace de Hilbert séparable H est isométriquement isomorphe à

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n & \text{en dimension finie} \\ l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) & \text{en dimension infinie.} \end{cases}$$

Remarque 4.4.1 Le Chapitre 3 montre comment construire une base hilbertienne formée de vecteurs propres d'opérateurs auto-adjoints compacts. Dans l'espace L^2 , on utilise fréquemment des bases spéciales formées de vecteurs propres d'un opérateur différentiel. Par exemple, dans $L^2([0, 1], \mathbb{C})$, on considère une base hilbertienne donnée par $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n est la fonction définie par

$$e_n(x) = \exp(2\pi i n x), \quad x \in [0, 1].$$

On trouve ainsi la théorie des séries de Fourier.

On définit maintenant la somme hilbertienne comme suit.

Définition 4.4.3 Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-espaces fermés de H . On dit que H est somme hilbertienne des $(H_n)_{n \geq 1}$ et on note $H = \bigoplus_n H_n$ si

1) les H_n sont deux à deux orthogonaux, i.e.,

$$\langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in H_n, \forall y \in H_m, \quad n \neq m,$$

2) l'espace vectoriel engendré par les (H_n) est dense dans H .

Théorème 4.4.4 Soit H une somme hilbertienne des $(H_n)_{n \geq 1}$. Soit $x \in H$ et $x_n = P_{H_n}x$. Alors, on a

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \text{ i.e., } x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k x_n.$$

Remarque 4.4.2 Dans la suite, on considère un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie. On indexe la base hilbertienne par I au lieu de $\mathbb{N}$, car il existe d'importants exemples où la base est indexée par I dénombrable autre que $\mathbb{N}$.

Théorème 4.4.5 Soit $\{e_i, i \in I\}$ une famille orthonormée de H . Pour toute partie finie $J \neq \emptyset$ de I , pour tout $x \in H$ et tous scalaires $a_j, j \in J$,

$$\|x - \sum_{j \in J} c_j(x) e_j\| \leq \|x - \sum_{j \in J} a_j e_j\| \quad (4.1)$$

où $c_j(x) := \langle x, e_j \rangle$.

L'égalité a lieu dans (4.1) si et seulement si $a_j = c_j(x)$ pour tout $j \in J$.

Théorème 4.4.6 (Inégalité de Bessel) Soit $\{e_i, i \in I\}$ une famille orthonormée de H . Alors, pour tout $x \in H$, la série de terme générale $|\langle x, e_i \rangle|^2$ est convergente et on a

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Théorème 4.4.7 (Développement dans une base hilbertienne) Soit H un espace de Hilbert séparable.

i) Si $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne de H , on a le développement

$$\forall x \in H : x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad (4.2)$$

où la série converge pour la topologie de H .

ii) Si $\{e_i, i \in I\}$ est une famille orthonormée de H et si (4.2) est satisfaite, alors, $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne de H .

(iii) Si $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne de H , on a l'identité de Plancherel

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2, \quad (4.3)$$

et celle de Parseval

$$\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}. \quad (4.4)$$

- (iv) Si $\{e_i, i \in I\}$ est une famille de vecteurs unitaires de H (i.e., $\forall i \in I, \|e_i\| = 1$) satisfaisant (4.3), alors, c'est une base hilbertienne de H .

Proposition 4.4.8 (*Unicité du développement*) Si $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert séparable H et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires telle que la série $\sum_{i \in I} a_i e_i$ converge au sens de la topologie de H vers $x \in H$ pour au moins une numérotation de l'ensemble dénombrable I . Alors, $a_i = \langle x, e_i \rangle$ pour tout $i \in I$.

Bibliographie

- [1] J.P. Anker, Méthodes hilbertiennes et analyse de Fourier, M1, 2011.
Polycopié disponible à l'adresse
<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/anker/enseignement/MHAF/CoursHilbert.pdf>
- [2] J.P. Aubin, Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2, Presses Universitaires de France, 1987.
- [3] G. Aubrun, Théorie des opérateurs, M1 Mathématiques, Université de la Réunion.
Polycopié disponible à l'adresse
<http://math.univ-lyon1.fr/aubrun/enseignement/operateurs/cours.pdf>
- [4] F. Bayen, C. Margaria, Espaces de Hilbert et opérateurs Problèmes de mathématiques appliquées, Tome 2, Ellipses, 1986.
- [5] H. Brézis, Analyse fonctionnelle Théorie et applications, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, 1983.
- [6] I. Chalendar, E. Fricain, Compléments en analyse : cours et exercices (Master en Mathématiques pures), 2010-2011. Polycopié disponible à l'adresse
<http://math.univ-lille1.fr/fricain/cours-M2-2010-2011.pdf>
- [7] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Dunod, Paris, 2010.

- [8] R. Danchin, P. Raphaël, Solitons, Dispersion et explosion Une introduction à l'étude des ondes non linéaires, 2015. Polycopié disponible à l'adresse
[http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.rafael/cours/ananonlinX14.pdf](http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.rafael/cours/ananonlinX14.pdf)
- [9] E-encyclopédie Wikipedia disponible au lien
[https ://en.wikipedia.org/wiki/Category :Mathematics](https://en.wikipedia.org/wiki/Category:Mathematics)
- [10] E. Fricain, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : cours et exercices (Master en Mathématiques pures), 2009-2010. Polycopié disponible à l'adresse
[http ://math.univ-lille1.fr/ fricain/cours-M2-2009-2010.pdf](http://math.univ-lille1.fr/fricain/cours-M2-2009-2010.pdf)
- [11] A. Kolmogorov, S. Fomine, Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir Moscou, 1977.
- [12] S. Maingot, D. Manceau, Théorie spectrale. Polycopié disponible à l'adresse
[http ://d.p.manceau.free.fr/ThSpect/ThSpect.pdf](http://d.p.manceau.free.fr/ThSpect/ThSpect.pdf)
- [13] F. Poupaud, Analyse fonctionnelle pour la Licence. Polycopié disponible à l'adresse
[http ://math1.unice.fr/ rascl/pdffiles/coursanapp/ana-fonc.pdf](http://math1.unice.fr/rascl/pdffiles/coursanapp/ana-fonc.pdf)
- [14] L. Saint-Raymond, Analyse fonctionnelle. Polycopié disponible à l'adresse
file :///C :/Users/SONY/Downloads/analyse-fonctionnelle2013-2
- [15] L. Schwartz, Analyse. Tome 1, Théorie des ensembles et topologie, Hermann, 1997.
- [16] C. Suquet, Chapitre 7 Espaces de Hilbert et séries de Fourier Cours I.F.P. 2003-2004. Polycopié disponible à l'adresse
[http ://math.univ-lille1.fr/ suquet/ens/IFP/Cours/cours04/Chap7ifp04.pdf](http://math.univ-lille1.fr/suquet/ens/IFP/Cours/cours04/Chap7ifp04.pdf)
- [17] V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Soboléva, Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle, Mir Moscou, 1987.