

ANALYSE FONCTIONNELLE

Jean-Marc Brun

2009

Contents

1	Introduction à l'Analyse fonctionnelle de base	2
2	Espaces Vectoriels Normés : Généralités et Topologie	3
2.1	Quelques notions d'algèbre linéaire	3
2.2	Espaces Vectoriels Normés	5
2.2.1	Normes et semi-normes	5
2.2.2	Convergence	6
2.2.3	Topologie des EVN	7
2.3	Continuité dans un espace normé	8
2.4	Espace dual et applications linéaires.	10
2.4.1	Applications linéaires	10
2.4.2	Dual Algébrique	10
2.4.3	Dual Topologique	11
2.4.4	Norme d'une application linéaire continue	11
2.5	Bidual : Réflexivité et séparabilité	12
2.6	Produits d'espaces normés	13
2.6.1	Multilinéarité	14
2.7	L'opérateur Composition	14
3	Espaces de Banach	15
3.1	Les E.V.N. Complets, Espaces de Banach	15
3.2	Serie et convergence normale	18
3.3	Le théorème du point fixe	19
4	Espaces de Hilbert	23
4.1	Produit scalaire	23
4.2	Espaces de Hilbert	24
5	Analyse fonctionnelle : résultats fondamentaux	29
5.1	Le théorème de Hahn-Banach	29
5.1.1	Enoncé du théorème	29
5.1.2	Des applications	30
5.2	Le théorème de Baire et ses conséquences	33
5.2.1	Théorème de Banach-Steinhaus	34
5.2.2	Exemples d'applications	35
5.2.3	Théorème de Banach-Schauder / de l'Application ouverte	37
5.2.4	Conséquences du théorème de Banach-Schauder	39
5.2.5	Exemple d'application	42

5.3	Autres définitions et propriétés indispensables	42
5.4	Quelques convergences dans les espaces de fonctions	43
5.5	Théorèmes d'Ascoli et conséquences	48
5.5.1	Théorie	48
5.5.2	Applications	52
6	Espaces de fonctions différentiables	53
6.1	La hiérarchie des $C^k(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$	53
6.1.1	Espaces $C^n[a, b]$	53
6.2	Convergences faibles et compacité faibles	56
6.3	La topologie faible	58
6.4	Liens entre topologie faible et topologie forte	59
6.4.1	En dimension finie	59
6.4.2	Dans le cas général	59
7	Espaces de Hölder	62
7.1	Espaces de Hölder	62
7.1.1	Espaces $Lip_\alpha(\Omega)$	62
7.1.2	Espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$	63
7.2	Espaces $L^p[a, b]$	64
7.3	L'espace $L^\infty[a, b]$	65
7.4	Zoologie d'analyse fonctionnelle	65
7.4.1	La topologie faible n'est pas la topologie forte en dimension infinie	66
7.5	Les topologies sur E'	66
7.5.1	La topologie faible-*	67
7.5.2	Un résultat utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach, le théorème d'Ascoli et le théorème de Riesz	68

Généralités, Continuité, Appli Linéaire, Produit d'espace, Opérateur composition, EVN Complets

Chapitres faits :

- Niçaise : chapitre 1 (Banach/Hilbert)
- Donato : chap 1 : (rappels evn)
- MathAgregScSup 13 : An fonc

Chapitres commencés

- Brezis : chap 1, chap 4 L^p , chap 8 Sobolev
- Chaperon : chap 1 (rappel), chap 3 (Inté), chap 6 (Difféo Variétés)
- Donato : chap 2 (Appli Diff), chap 6(ss var), chap 7 (Eq Diff)
- Hirsh chap 1 (fn° C^0 sur compact)
- Liret Eq Diff
- MathAgregScSup 7

Chapter 1

Introduction à l'Analyse fonctionnelle de base

MISE EN GARDE : *Ce document n'est pas finalisé, ni sur le fond ni sur la forme. C'est une compilation de divers ouvrages traitant du sujet. Les notations n'ont pas encore toutes été harmonisées. C'est un premier jet en cours d'amélioration.*

Dans cette partie nous effectuons des rappels concernant les espaces de Banach et de Hilbert. Nous présentons un certain nombre de résultats utiles. Les démonstrations ne seront pas toujours données. Nous renvoyons à des ouvrages consacrés à l'analyse fonctionnelle pour les preuves omises.

Nous énonçons ici ce qu'il faut savoir sur les espaces normés, traités en premier cycle. Les espaces de Banach, leur applications linéaires continues ainsi que les objets topologiques classiques doivent être familiers.

En analyse fonctionnelle, une référence classique, détaillée et complète, est le livre [9]. On présentera ici tout d'abord quelques éléments fondamentaux (13.1), puis les théorèmes d'Ascoli (13.2). Différents espaces de fonctions avec leurs topologies seront alors présentés : les $C^k(\Omega)$ (13.3), la topologie faible (13.4) et ses liens avec la topologie forte (13.5) (des topologies alternatives sur le même espace dual seront présentées en 13.8), les espaces de Hölder (13.6). On verra ensuite un peu de zoologie (13.7).

L'approximation de fonctions est un domaine important de l'analyse fonctionnelle, traité dans un autre chapitre. La topologie, fondement de l'analyse fonctionnelle, fournit une part importante de l'analyse fonctionnelle ; la séparation entre les deux domaines est parfois floue, tant les espaces de fonctions sont munis de topologies diverses. Pour avoir une vue d'ensemble des propriétés d'espaces vectoriels topologique, on peut examiner la figure 7.1.

dans la
marge

Chapter 2

Espaces Vectoriels Normés : Généralités et Topologie

2.1 Quelques notions d'algèbre linéaire

Définition 2.1 (Espace Vectoriel) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un **ensemble non-vide** V dont les éléments sont appelés vecteurs muni d'une opération binaire appelée addition $+: V \times V \rightarrow V$ et d'une multiplication scalaire $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ tel que $(V, +)$ est un groupe commutatif, i.e.,

associativité $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V,$

élément neutre $\exists 0 \in V : x + 0 = x, \forall x \in V,$

inverse $\forall x \in V, \exists -x \in V : x + (-x) = 0,$

commutativité $x + y = y + x, \forall x, y \in V;$

la multiplication scalaire satisfaisant

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,$$

$$1 \cdot x = x, \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

En pratique on enlève le symbole $\cdot$ pour la multiplication scalaire puisqu'il n'y a aucun risque de confusion.

Exemple 1 (Exemples d'espaces vectoriels) • 1) L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n -uples des scalaires. Addition et multiplication sont définies coordonnée par coordonnée.

- 2) L'ensemble $\mathbb{K}^X$ des fonctions $f: \mathbb{K} \rightarrow X$, où X est ensemble non vide. Dans ce cas, tout $f, g \in \mathbb{K}^X, \alpha \in \mathbb{K}$, on définit :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{2.1}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X \tag{2.2}$$

- 3) Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $C(\Omega, \mathbb{K})$ (lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on le notera $C(\Omega)$) des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ continues sur Ω est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni des opérations (2.1)-(2.2)
- 4) Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'entiers positifs ou nuls, on désigne par

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.3)$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ est la longueur du multi-indice α . Rappelons la règle de **Leibniz** :

$$D^\alpha (u \cdot v) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n : \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \cdot D^{\alpha-\beta} v, \quad (2.4)$$

avec la convention $\alpha \leq \beta$ si et seulement si $\alpha_i \leq \beta_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$ et $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

Les ensembles $C^m(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : D^\alpha f \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$ sont des espaces vectoriels muni des opérations (1.1) – (1.2).

- 5) Pour $f \in C(\Omega)$, le **support** de f est la fermeture de $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ et on le note $\text{supp} f$. $C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \text{supp} f \text{ compact} \subset \Omega\}$ est l'ensemble des fonctions continues à support compact de Ω . De manière analogue, on définit $C_0^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_0(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{D} = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ qui sont tous des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ pour les opérations (1.1) – (1.2).
- 6) Si $f : A \rightarrow B$ et $C \subset A$, on désigne par $f|_C$ la restriction de f à C . L'espace vectoriel suivant jouera un rôle essentiel :

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \left\{ \varphi|_\Omega : \varphi \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}^n} \right\}, \quad (2.5)$$

l'espace des restrictions à Ω des fonctions C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2 (Sous-Espace Vectoriel) Nous dirons qu'un sous ensemble M de V est un sous-espace de V s'il est stable pour les opérations de V , autrement dit si

$$x + y \in M, \quad (2.6)$$

$$\alpha x \in M, \forall x, y \in M, \alpha \in \mathbb{K}. \quad (2.7)$$

Il s'ensuit que M est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication scalaire héritée de V .

Définition 2.3 (Noyau, Image d'une application) Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et une application $T : V \rightarrow W$. L'ensemble $\{x \in V : Tx = 0\} \subset V$ est appelé **noyau** de T et est noté $\ker T \subset V$. L'ensemble $\{Tx : x \in V\} \subset W$ noté $R(T) \subset W$, est l'**image** de T .

Cette application est dite **linéaire** si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \quad (2.8)$$

Nous avons alors le résultat suivant dont la vérification est immédiate et est laissée au lecteur.

Lemme 2.1 () *Si $T : V \rightarrow W$ est linéaire, alors $\ker T$ est un sous-espace de V et $R(T)$ est un sous-espace de W .*

2.2 Espaces Vectoriels Normés

2.2.1 Normes et semi-normes

La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$ sont notés $|\cdot|$, chacun est une norme et induit donc une *notion de distance* sur leur espace respectif, ce qui permet des considérations de *convergence* et de *continuité* sur ces espaces. Nous allons étendre ce concept aux espaces vectoriels généraux.

Définition 2.4 (EVN) *Un espace vectoriel normé, e.v.n. en abrégé, est la donnée d'un espace vectoriel E , réel ou complexe, et d'une norme $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tous x, y dans E , et pour tout scalaire λ :*

- 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- 2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- 3) $|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\|$.

L'existence d'une *structure linéaire* sur E est un point important.

Définition 2.5 (Semi-Norme/Norme) *Une semi-norme sur un espace vectoriel V est une application $p : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad (1.3) \tag{2.9}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K} \tag{2.10}$$

Une norme sur V est une semi-norme, notée usuellement $\|\cdot\|$, qui vérifie de plus

$$\text{Pour tout } x \in V : \|x\| = 0 \text{ si et seulement si } x = 0 \tag{2.11}$$

Le couple (V, p) (resp. $(V, \|\cdot\|)$) est alors appelé un espace vectoriel semi-normé (resp. normé).

Énonçons les propriétés suivantes dont la vérification est laissée au lecteur.

Lemme 2.2 (Caractérisation noyau semi-norme, distance) *Si (V, p) est un espace vectoriel semi-normé, alors*

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y), \forall x, y \in V \tag{2.12}$$

le noyau $\ker p$ est un sous-espace de V .

Si $T \in L(W, V)$, alors $p \circ T : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une semi-norme sur W .

Si, de plus, p est une norme, alors l'application

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+ : (x, y) \rightarrow p(x - y) \tag{2.13}$$

est une distance sur V .

Définition 2.6 (Normes équivalentes) Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un espace vectoriel V sont dites équivalentes s'il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que

$$C_1\|x\|' \leq \|x\| \leq C_2\|x\|', \forall x \in V. \quad (2.14)$$

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes si l'application identique de $(E, \|\cdot\|_1)$ vers $(E, \|\cdot\|_2)$ est bicontinue. Grâce aux caractérisations précédentes, cela équivaut à l'existence de deux réels strictement positifs α et β tels que, pour tout $x \in E$, on a :

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \quad (2.15)$$

Il résulte immédiatement de cette définition que les notions de continuité et de convergence sont identiques pour deux normes équivalentes.

THÉORÈME 2.3 Toutes les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes.

Exemple 2 (Exemples de normes) • 1) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit les semi-normes sur $\mathbb{K}^n$ par (si $x \in \mathbb{K}^n$, x_j seront les différentes composantes, i.e., $x = (x_1, \dots, x_n)$)

$$p_k(x) = \sum_{j=1}^k |x_j|, \quad q_k(x) = \left(\sum_{j=1}^k |x_j|^2 \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

et $r_k(x) = \max_{j=1, \dots, k} |x_j|$. Lorsque $k = n$, on a à faire des normes.

- 2) Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et Θ un sous-ouvert de Ω , alors $p_\Theta(f) = \sup_{x \in \Theta} |f(x)|$ est une semi-norme sur $C(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$). p_Ω est bien entendu une norme sur $C(\Omega)$.

2.2.2 Convergence

Définition 2.7 (Convergence en norme/dans un espace vectoriel) Si (V, p) est un espace vectoriel semi-normé, alors on dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de V converge vers $x \in V$ (en abrégé $x_n \rightarrow x$) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n - x) = 0$.

Soit S un sous-ensemble de V , alors la fermeture de S dans V pour la semi-norme p est $\overline{S} = \{x \in V : \exists x_n \in S, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tels que } x_n \rightarrow x \text{ dans } V\}$. S est dit fermé si $S = \overline{S}$.

A noter que $\overline{S}$ est toujours fermé.

Lemme 2.4 (L'adhérence d'un sous espace est un sous espace) Si (V, p) est un espace vectoriel semi-normé et M un sous-espace de V , alors $\overline{M}$ est un sous-espace fermé de V .

Démonstration : Soit $x, y \in \overline{M}$ et $x_n, y_n \in M$ tels que $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ dans V . Par (1.4), on a $p(x_n + y_n - (x + y)) \leq p(x_n - x) + p(y_n - y) \rightarrow 0$. ce qui prouve que $x_n + y_n \rightarrow x + y$ dans V et donc que $x + y \in \overline{M}$, puisque tous les $x_n + y_n \in M$. De même, en utilisant (1.3) on montre que $\alpha x \in \overline{M}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

2.2.3 Topologie des EVN

La *distance* de x à y est le réel $\|x - y\|$.

Définition 2.8 (Boule ouverte) *Etant donné $x \in E$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est définie par :*

$$B(x, r) = \{y \in E / \|x - y\| < r\}. \quad (2.17)$$

Définition 2.9 (Boule fermée) *On s'intéressera aussi à la boule fermée (dont le rayon peut s'annuler) :*

$$B'(x, r) = \{y \in E / \|x - y\| \leq r\}. \quad (2.18)$$

Nous rencontrerons aussi la boule unité : $B(0_E, 1)$, ainsi que la sphère unité définie par l'équation $\|x\| = 1$.

Définition 2.10 (Bornés) *Une partie $A \subset E$ est dite bornée s'il existe une boule qui la contienne.*

Une application $f : X \rightarrow E$ à valeurs dans un espace normé est dite bornée si son ensemble image $f(X)$ est borné dans E .

Définition 2.11 (Voisinage) *Une partie A est voisinage d'un point a si A contient une boule ouverte centrée en a . Toute intersection finie de voisinages de a est encore un voisinage de a . Tout sur-ensemble d'un voisinage de a est encore un voisinage de a .*

Définition 2.12 (Ouverts) *Une partie $O \subset E$ est dite ouverte si, pour tout $x \in O$, O est voisinage de x . L'ensemble vide et E sont ouverts. Les ouverts forment une famille de parties de E appelées topologie, stable pour la réunion quelconque et pour l'intersection finie. Tout ouvert est réunion de boules ouvertes.*

Notons que toute boule ouverte est un ouvert ; en effet l'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\forall y \in B(x, r), B(y, r - \|x - y\|) \subset B(x, r). \quad (2.19)$$

Définition 2.13 (Fermés) *On dira qu'une partie est fermée si son complémentaire est ouvert. Noter également que les boules fermées sont des parties fermées (voir l'exercice 1.1 de ce chapitre).*

Définition 2.14 (Adhérence/Intérieur) *L'adhérence d'une partie A de E , notée $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés contenant A , il s'agit du plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant A . L'intérieur d'une partie A de E , notée A° , est la réunion de tous les ouverts contenus dans A , c'est le plus grand ouverts contenu dans A .*

Définition 2.15 (Topologie induite) *On dira qu'une partie X de A est ouverte (respectivement fermée) dans A , si X est égale à l'intersection d'un ouvert (respectivement d'un fermé) de E avec A , appelée également trace sur A . L'ensemble des ouverts de A forment la topologie induite sur A .*

Définition 2.16 (Convexes) Etant donné deux points $\{a, b\} \subset E$, on définit le segment reliant a à b comme l'ensemble

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\} \quad (2.20)$$

Une partie $C \subset E$ est dite convexe si $\forall \{a, b\} \subset C$, on a $[a, b] \subset C$. En particulier, les boules ouvertes ou fermées, sont convexes.

Définition 2.17 (Connexes) Une partie $A \subset E$ est dite connexe si les seules parties de A qui sont la trace sur A d'un ouvert et d'un fermé de E sont A et l'ensemble vide. Pour tout sous-ensemble X de E , les parties connexes sont appelées composantes connexes, de X forment une partition de X .

Pas clair

Définition 2.18 (Compacts) Un recouvrement ouvert de $A \subset E$ est une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Une partie A d'un normé est compacte si, de façon équivalente :

- de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un recouvrement fini de A ;
- toute suite de A admet une sous-suite convergente dans A . Cette propriété est appelée propriété de **Bolzano-Weierstrass**.

Une partie compacte de E est nécessairement fermée et bornée. La réciproque est vraie si E est de dimension finie. En fait, on a l'équivalence suivante (théorème de Riesz) :

THÉORÈME 2.5 (Théorème de Riesz) Une boule fermée de rayon $r > 0$ est compacte dans $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si E est de dimension finie.

Définition 2.19 (Suite de Cauchy) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(E, \|\cdot\|)$ et $x \in E$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ signifie que, dans $\mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$.

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy si $\|x_n - x_m\|$ tend vers zéro lorsque n et m tendent vers l'infini.

Les points de $\overline{A}$ sont les limites des suites de A convergentes dans E :

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \forall n \in \mathbb{N} a_n \in A. \quad (2.21)$$

2.3 Continuité dans un espace normé

Définition 2.20 (Application continue) Soient (V, p) et (W, q) deux espaces vectoriels semi-normés et une application $T : V \rightarrow W$ (pas nécessairement linéaire). On dit que T est continue en $x \in V$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in V : p(x - y) < \delta \Rightarrow q(Tx - Ty) < \epsilon. \quad (2.22)$$

T est dite continue en x si T est continue en tout point de V .

Définition 2.21 (Application continue 2) Une application $f : A \rightarrow F$, définie sur une partie A d'un espace normé E , est **continue** en $x_0 \in A$ (non nécessairement ouverte) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } x \in B(x_0, \eta) \cap A \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon \quad (2.23)$$

Il est équivalent de dire que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergeant vers x_0 , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

- La continuité de f sur A équivaut à ce que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de A , c'est-à-dire la trace sur A d'un ouvert de E . ($\forall O \in F$ ouvert $A = f^{-1}(O)$ ouvert)

THÉORÈME 2.6 (Caractérisation continuité) T est continue en x si et seulement si $x_n \rightarrow x$ dans V implique que $Tx_n \rightarrow Tx$ dans W .

THÉORÈME 2.7 (Caractérisation continuité d'une application linéaire) Si T est une application linéaire de V dans W alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- T est continue en 0_V ,
- T est continue
- il existe une constante $K \geq 0$ telle que

$$q(T(x)) \leq K(p(x)), \forall x \in V \quad (2.24)$$

Démonstration :

L'équivalence entre (1) et (2) découle immédiatement de la linéarité de T . L'implication (3) $\Rightarrow$ (2) est immédiate. Reste l'implication (1) $\Rightarrow$ (3) : supposons que (3) soit faux, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tel que

$$q(T(x_n)) > n(p(x_n)) \quad (2.25)$$

Par normalisation, on a une suite $y_n = \frac{x_n}{q(T(x_n))}$ satisfaisant $q(T(y_n)) = 1$ et $p(y_n) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui contredit la continuité de T en 0_V . $\circ\bullet$

Définition 2.22 (Homéomorphisme) Un *homéomorphisme* est une bijection $f : A \rightarrow B$ continue telle que f^{-1} est continue (on dit que f est bicontinue). Notons que les boules ouvertes (respectivement fermées de rayon > 0) d'un même espace normé sont homéomorphes entre elles. En effet, $x \mapsto \frac{\rho}{r}(x - a) + b$ réalise un homéomorphisme de $B(a, r)$ sur $B(b, \rho)$.

Définition 2.23 (Continuité uniforme) Une application f définie sur A , à valeurs dans un normé, uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ de sorte que, pour x et y dans A , la condition $\|x - y\| < \alpha$ entraîne $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$. Comme cas particuliers, les applications k -lipshitzziennes, celles qui vérifient $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$ pour tous $\{x, y\} \subset A$, sont uniformément continues.

L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.

L'image continue d'un compact est compacte. En particulier, une fonction continue d'un compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes. la restriction d'une application continue à un compact est uniformément continue.

Définition 2.24 (Chemin) Une *chemin* dans $A \subset E$, est une application continue d'un intervalle réel à valeurs dans A .

Définition 2.25 (connexe par arcs) Une partie $A \subset E$ est dite *connexe par arcs* si, pour tous $\{x, y\} \subset A$, il existe un chemin : $c[a, b] \rightarrow A$, d'un segment de $\mathbb{R}$ dans A telle que $c(a) = x$ et $c(b) = y$.

La connexité par arcs entraîne la connexité. Les parties convexes sont connexes par axes.

Pour les ouverts d'un espace normé E , il y a équivalence entre connexité et connexité par arcs.

L'image continue d'une partie connexe (respectivement connexe par arcs) est connexe (respectivement connexe par arcs).

2.4 Espace dual et applications linéaires.

2.4.1 Applications linéaires

Les applications linéaires continues d'espaces normés sont des objets essentiels au calcul différentiel.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, des espaces normés. Par souci de simplicité, et en dehors de cas particuliers, les normes peuvent parfois être notées pareillement dans E et dans F , seul le contexte les distinguera.

Définition 2.26 (Application linéaire) application linéaire

Définition 2.27 (Forme linéaire) A valeur dans $\mathbb{R}$.

Continuité d'une application linéaire

Proposition 2.8 Etant donné $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire d'e.v.n., il y a alors équivalence entre les propriétés suivantes :

- φ est continue.
- φ est continue à l'origine.
- φ est bornée sur la boule unité.
- φ est bornée sur la sphère unité.
- Il existe un réel $c \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\|\varphi(x)\| \leq c\|x\|$.

2.4.2 Dual Algébrique

Définition 2.28 ($L(E, F)$) Si U et W sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on notera $L(V, W)$, l'espace vectoriel des *applications linéaire* de V dans W .

Définition 2.29 ($\mathcal{L}(E, F)$) On désignera par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des *applications linéaires continues* de $(E, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$. Cette notation n'est pas standard, elle peut désigner les applications linéaires en dehors de la présence de norme et donc sans référence à la continuité. Ce ne sera jamais le cas ici.

Soient (V, p) et (W, p) deux espaces vectoriels semi-normés, alors on désigne par $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble des applications linéaires continues de V dans W .

C'est un sous-espace de $L(V, W)$, dont les éléments sont usuellement appelés **opérateurs bornés** de V dans W (vu le théorème 1.14).

Définition 2.30 (Dual Algébrique, fonctionnelle conjuguée V^*) $V^* = \{\bar{f} : f \in L(V, \mathbb{K})\}$ est appelé le **dual algébrique** de V .

Rappelons que si $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, alors sa fonctionnelle conjuguée est $\bar{f} : V \rightarrow \mathbb{K} : x \rightarrow \overline{f(x)}$; $\bar{z}$ désignant le complexe conjugué de z .

Remarque

Dual Algébrique (opérateurs non nécessairement bornés, non nécessairement continus) + général que dual topo (opérateurs bornés : continus) (restriction) (attention notion de conjuguée...) $E^* \supseteq E'$ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $\overline{f(x)} = f(x)$

2.4.3 Dual Topologique

Définition 2.31 (Espaces des opérateurs bornés = dual topologique, $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$)
On note

$$V' = \{\bar{f} : f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})\} = \{f \in V^* : f \text{ est continue}\} \quad (2.26)$$

le **dual topologique** de V .

On note par E' l'ensemble des **formes linéaires** continues sur E , i.e.

$$f \in E', \quad f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ est linéaire et } \exists C \geq 0 \quad (2.27)$$

$$\text{t.q. } \langle f, x \rangle_E \leq C \|x\|_E \forall x \in E. \quad (2.28)$$

2.4.4 Norme d'une application linéaire continue

Lemme 2.9 ($\mathcal{L}(E, F)$ est un evn) On muni E' de la norme duale

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{cx \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \langle f, x \rangle. \quad (2.29)$$

Avec cette norme E' est un espace de Banach. Lorsque E et F sont deux e.v.n., on note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F , muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Tx\|_F. \quad (2.30)$$

$\mathcal{L}(E, F)$ est lui même un espace normé pour la norme définie par :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\| = \sup_{\|x\| \neq 1} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \quad (2.31)$$

Grâce au théorème précédent, c'est un espace vectoriel normé pour la norme

$$\|f\|_{V'} = \sup_{v \in V : p(v) \leq 1} |f(v)| \quad (2.32)$$

Notons que :

$$\forall x \in E \|\varphi(x)\| \leq C\|x\| \Rightarrow \|\varphi\| \leq C \quad (2.33)$$

On vérifie que la norme de φ est égale à la borne inférieure des réels $C \geq 0$ réalisant l'inégalité ci-dessous (voir l'exercice 1.8 de ce chapitre). De plus, si pour un tel C il existe $x_0 \neq 0_E$ tel que l'égalité $\|\varphi(x_0)\| = C\|x_0\|$ soit réalisée, alors $C = \|\varphi\|$; puisque l'on aurait dans ce cas : $C\|x_0\| = \|\varphi(x_0)\| \leq \|\varphi\|\|x_0\|$. Il suffit alors de simplifier par $\|x_0\| \notin 0$.

Si l'inégalité $\|\varphi(x)\| \leq C\|x\|$ est vraie pour $\|x\| < r$ elle le restera si on multiplie x par un scalaire $\lambda > 0$, et sera donc vérifiée dans tout E ; cette propriété d'homogénéité entraîne que :

Lemme 2.10 (Lemme) *Si, pour tout $x \in B(0_E, \alpha)$, on a $\|\varphi(x)\| \leq \epsilon\|x\|$, alors $\|\varphi\| \leq \epsilon$.*

Toutes les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes. Une application linéaire dont la source est de dimension finie est nécessairement continue.

THÉORÈME 2.11 (Semi-norme sur le dual topologique) *Soient (V, p) et (W, p) deux espaces vectoriels semi-normés, alors pour tout $T \in \mathcal{L}(V, W)$, on pose $|T| = \sup_{x \in V: p(x) \leq 1} q(T(x))$. Alors $|\cdot|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(V, W)$ et on a les égalités*

$$|T| = \sup_{x \in V: p(x)=1} q(T(x)) \quad (2.34)$$

$$= \inf_{K \geq 0: q(T(x)) \leq Kp(x), \forall x \in V} K \quad (2.35)$$

Démonstration :

|| Laissée au lecteur. $\circ\bullet$

On montre aussi le résultat suivant (qui est une conséquence du *théorème de Hahn-Banach*, c.f [1] p.4)

$$\forall x \in E : \|x\|_E = \sup_{f \in E' : \|f\| \leq 1} \langle f, x \rangle. \quad (2.36)$$

Remarque

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E' \mathcal{L}(E', \mathbb{R}) = E'' \quad (2.37)$$

2.5 Bidual : Réflexivité et séparabilité

Soit E un espace de Banach et E' son dual. On note par E'' le bidual de E i.e. le dual de E' . Rappelons que l'on a alors:

$$E'' := \{\xi : E' \rightarrow \mathbb{R}, \xi \text{ est linéaire et continue}\}, \quad (2.38)$$

et muni de la norme

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} \langle \xi, f \rangle. \quad (2.39)$$

L'injection canonique de E dans E''

Il est clair que, pour tout $x \in E$ fixé, l'application $\xi : f \in E' \rightarrow \langle f, x \rangle$ appartient à E'' . Nous notons par $\xi = Jx$ cette application. En fait, nous avons introduit une application $J : E \rightarrow E''$ qui vérifie

$$\langle Jx, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E}, \forall x \in E, \forall f \in E'. \quad (2.4)$$

On vérifie aisément que J est linéaire. En fait J est même une isométrie linéaire (en général non surjective). Autrement dit, on a

$$\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E \quad (2.5)$$

Ceci se prouve en utilisant (2.2): on a

$$\|Jx\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} \langle f, x \rangle \stackrel{(2.2)}{=} \|x\|_E. \quad (2.42)$$

Le fait que J soit une *isométrie linéaire* permet d'identifier E à un sous espace vectoriel de E'' . En effet, $J(E)$ est un sous espace vectoriel fermé de E'' , qui est isomorphe à E .

Définition 2.32 (espace de Banach réflexif) *Un espace de Banach est dit réflexif lorsque $J : E \rightarrow E''$ est surjective.*

Définition 2.33 (Espace métrique séparable) *Un espace métrique E est dit séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ qui est dénombrable et dense.*

2.6 Produits d'espaces normés

A partir d'une famille finie $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i=1 \dots n}$ d'espaces normés, on définit sur leur produit cartésien la **norme produit** :

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \|x\| = \sup_{i=1 \dots n} \|x_i\|_i \quad (2.43)$$

Sauf autre indication, un produit de normés sera toujours supposé de cette norme, pour laquelle les projections :

$$\pi_i : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E_i \quad (2.44)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \quad (2.45)$$

sont linéaires continues et ouvertes (c'est à dire que l'image de tout ouvert est ouverte).

Une application f à valeurs dans un produit $E_1 \times \dots \times E_n$ s'écrira $f = (f_1, \dots, f_n)$, où $f_i = \pi_i \circ f$. Dans ce cas, f est continue si et seulement si toutes les f_i le sont.

Un produit $U_1 \times \dots \times U_n$, d'ouverts $U_i \subset E_i$, est ouvert dans l'espace-produit. Tout ouvert de l'espace-produits est une réunion de tels produits d'ouverts.

Soit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ un produit de normés et $A_i \subset E_i$, $i = 1, \dots, n$ alors :

- $A = A_1 \times \dots \times A_n$ est compact si et seulement si chaque A_i est compact.
- $A = A_1 \times \dots \times A_n$ est connexe (respectivement connexe par arcs) si et seulement si chaque A_i est connexe (respectivement connexe par arcs).

si chaque A_i est connexe (respectivement connexe par arcs).

2.6.1 Multilinéarité

Etant donné une application multilinéaire :

$$\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F, \quad (2.46)$$

il y a équivalence des énoncés suivants :

- φ est continue.
- φ est continue à l'origine.
- φ est bornée sur le produit des boules unités.
- Il existe un réel $C \geq 0$ tel que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ on ait :

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \dots \|x_n\|. \quad (2.47)$$

Le plus petit C pour lequel la dernière inégalité a lieu définit une norme $\|\varphi\|$ sur l'espace noté $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ des applications multilinéaires continues de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F . Cette norme peut être également définie par :

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_n\| \leq 1} \|\varphi(x_1, \dots, x_n)\| \quad (2.48)$$

2.7 L'opérateur Composition

Une application bilinéaire continue très utilisée va être l'opérateur de composition des applications linéaires continues, qui est défini par :

$$B : \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, G) \quad (2.49)$$

$$(u, v) \mapsto u \circ v \quad (2.50)$$

Vérifions la continuité de B . On a, pour tout $x \in E$:

$$\|u(v(x))\| \leq \|u\|\|v(x)\| \leq \|u\|\|v\|\|x\| \quad (2.51)$$

Ce qui montre d'une part que :

$$\|u \circ v\| \leq \|u\|\|v\| \quad (2.52)$$

et d'autre part, que B est continue et vérifie $\|B\| \leq 1$.

Chapter 3

Espaces de Banach

3.1 Les E.V.N. Complets, Espaces de Banach

Comme on vient de le voir, dans un espace normé, on peut définir la *convergence d'une suite*. $\vec{x} \in E$ est alors appelé **limite de la suite** $(\vec{x}_n)$ si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\vec{x} - \vec{x}_n\| < \epsilon$.

Définition 3.1 (Suite de Cauchy) On peut également définir des **suites de Cauchy** (voir p.61), caractérisées par la propriété $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| < \epsilon$ dès que $n \geq n_1$ et $m \geq n_1$.

Soit (V, p) un espace vectoriel semi-normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon \geq 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } p(x_n - x_m) < \epsilon, \forall n, m \geq N. \quad (3.1)$$

Toute suite convergente est une **suite de Cauchy**, mais la réciproque n'est pas vraie dans n'importe quel espace normé. Cependant, à l'aide du **procédé de Cantor** décrit p. 61, on peut, à partir de n'importe quel espace normé, construire un espace complet qui soit son adhérence (au sens de la topologie de l'espace ainsi construit).

Définition 3.2 (Espace de Banach) On dit (V, p) est complet si toute suite de Cauchy de V est convergente. Un espace vectoriel normé complet est appelé **espace de Banach**.

Un espace vectoriel normé complet (c.-à-d. un espace normé vectoriel dans lequel toute suite de Cauchy converge) est appelé **espace de Banach** ; un espace préhilbertien complet (pour la norme associée au produit scalaire) est appelé **espace de Hilbert**.

Un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est dit de Banach s'il est complet pour la distance de la norme, c'est à dire si toute suite de Cauchy dans E y converge. C'est le cas de tous les espaces normés de dimension finie.

Un espace vectoriel normé (e.v.n.) $E, \|\cdot\|_E$ est appelé **espace de Banach** s'il est complet pour la norme $\|\cdot\|_E$.

Exemple 3 L'espace $C^0[a, b]$ muni de la norme de la convergence uniforme (voir p.365) est complet, donc est un espace de Banach.

En effet, si (f_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $C^0[a, b]$ et si $t \in [a, b]$, $(f_n(t))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, qui converge donc vers une limite notée $f(t)$, puisque $\mathbb{R}$ est complet. La fonction définie par $t \mapsto f(t)$ est alors la limite uniforme de (f_n) sur $[a, b]$ car $\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], |f(t) - f_j(t)| = \lim_{k \in \infty} |f_k(t) - f_j(t)| \leq \sup_{k \geq j} \|f_j - f_k\|_\infty$, donc $\|f - f_j\|$ existe et est majorée par $\sup_{k \geq j} \|f_j - f_k\|_\infty$, expression qui tend vers 0 lorsque j tend vers l'infini. D'après le th. 16 p. 289, f est alors continue, donc élément de $C^0[a, b]$.

L'espace de l'ex. (4) p. 365 est aussi un espace de Banach, $\mathbb{R}^\infty$ (tab. C p. 364) est un espace de Hilbert.

Tous les espaces semi-normés de l'exemple 2 sont des espaces complets. Par contre, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $p \in [1, +\infty[$, $C_0(\Omega)$ muni de la norme L^p

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} \quad (3.2)$$

n'est pas complet.

Contre-Exemple :

Définition 3.3 ($L^p(\Omega)$ complet) Rappelons que l'on définit

$$L^p(\Omega) = \{f \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega : |f|^p \text{ est Lebesgue intégrable sur } \Omega\}. \quad (3.3)$$

Muni de la norme (3.3) (en prenant l'intégrale de Lebesgue) c'est un espace de Banach, qui est la complétion au sens ci-dessous de $C_0(\Omega)$ muni de cette même norme.

Notons qu'un produit d'espaces de Banach est de Banach.

Une partie $A \subset E$ est dite *complète* si toute suite de Cauchy de A converge dans A .

Dans un espace de Banach, on a l'équivalence : A fermé $\Leftrightarrow A$ complet.

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et X un ensemble quelconque, l'espace E^X de toutes les applications de X vers E possède une structure naturelle d'espace vectoriel. Le sous-espace $\mathcal{B}(X, E) \subset E^X$ formé des applications bornées est muni d'une norme naturelle dite *norme infinie* ou *norme de la convergence uniforme* et définie par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, E), \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E. \quad (3.4)$$

Le théorème suivant est à l'origine d'une multitude d'exemples d'espaces de Banach.

THÉORÈME 3.1 () Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet alors $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ l'est également.

Démonstration : Soit f_n une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$. Ainsi, $\|f_n - f_m\|_\infty$ est arbitrairement petit ($< \epsilon$) pour n et m suffisamment grands. Comme, pour tout $x \in X$, on a $\|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$, cela fait

que $f_n(x)$ est une suite de Cauchy, donc converge dans E vers une valeur que nous pouvons noter $f(x)$.

Vérifions que f est bornée et que, dans $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$, on a bien $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Fixons $\epsilon > 0$; il existe un rang N au-delà duquel on a $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$, donc pour tout $x \in X$ on a $\|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \epsilon$ d'où il résulte, en faisant tendre m vers l'infini, que $\|f(x) - f_m(x)\|_E \leq \epsilon$. On a donc d'une part $\|f(x)\|_E \leq \|f_m\|_\infty + \epsilon$, donc f est bornée, et, d'autre part, $\|f - f_m\|_\infty$ pour $m > N$, ce qui traduit la convergence uniforme de f_n vers f . •

Exemple 4 • 1) Tous les espaces normés de dimension finie sont complets. Sur $\mathbb{R}^n$ les deux normes les plus généralement utilisées sont la norme euclidienne :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}, \quad (3.5)$$

et la norme du max (ou norme infinie) :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_i |x_i|. \quad (3.6)$$

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on ne considère jamais d'autre norme que la valeur absolue (ou le module).

- 2) Désignons par $l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées. C'est un cas de figure où s'applique le théorème 3.1 avec $X = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}$. Ainsi, $l^\infty(\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme infinie, de même pour $l^\infty(\mathbb{C})$ et $l^\infty(\mathbb{E})$, respectivement espace des suites complexes bornées et des suites bornées à valeurs dans un e.v.n. complet E .
- 3) Tous les sous-espaces fermés de l^∞ seront donc complets. Signalons par ordre décroissant d'inclusion :

$$l^p \subset c_0 \subset c \subset l^\infty \quad (3.7)$$

où c désigne l'espace des suites convergentes, c_0 celui des suites tendant vers 0, l^p (p entier) les suites $x = (x_n)_n$ telles que la série $\|x_n\|_E^p$ converge ($E = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n \dots$).

Outre la norme infinie, l^p est le plus souvent muni de la dite norme p :

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{E?}^p \right]^{1/p} \quad (3.8)$$

- 4) L'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur le segment $[a, b]$ et muni de norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ est complet. Le même espace avec la norme $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ ne l'est plus (le montrer à titre d'exercice). On peut cependant construire un e.v.n. complet noté $L^1([a, b])$, doté d'une norme prolongeant $\|\cdot\|_1$ et dans lequel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est dense.

3.2 Serie et convergence normale

Dans toute la suite de cette partie on ne considérera désormais que des e.v.n. complets.

Le critère de Cauchy s'applique aux séries dans un espace de Banach. Il en découle que toute série **normalement convergente** est convergente.

Définition 3.4 (Convergence normale) Une série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ dans E , est dite **normalement convergente** si la série des normes converge dans $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\| < +\infty \quad (3.9)$$

Dans ce cas, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ forme une suite de Cauchy dans E , en effet :

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^m X_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|X_i\| \quad (3.10)$$

le terme de droite dans la dernière inégalité est le **reste partiel** d'une série réelle convergente, donc arbitrairement petit pour n et m suffisamment grands. E étant supposé complet, la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convergera donc dans E .

Quelques résultats utiles.

THÉORÈME 3.2 (Complétion d'un espace semi-normé) Tout espace semi-normé (V, p) (resp. normé) admet une complétion (W, q) , i.e., que (W, q) est un espace semi-normé complet (resp. normé complet) et il existe une application linéaire injective I de V dans W vérifiant $R(I)$ est dense dans W et I préserve la semi-norme (resp. norme) : $q(I(x)) = p(x)$, pour tout $x \in V$.

THÉORÈME 3.3 (Prolongement uniforme) Soit $f : A \rightarrow F$ une application uniformément continue de $A \subset E$ à valeurs dans un Banach F . Il existe un unique prolongement continu de f à l'adhérence $\overline{A}$. De plus, ce prolongement est uniformément continu.

Démonstration : Existence. Tout point $x \in \overline{A}$ est limite d'une suite $(x_n)_n$ de A . La suite image $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans F (par l'hypothèse de continuité uniforme) donc converge. Sa limite ne dépend que de x , en effet : si (y_n) est une autre suite de A ayant x pour limite, l'uniforme continuité de f fera que $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers zéro. Notons $\tilde{f}(x)$ cette limite commune à toutes les images par f des suites de A convergent vers x . $\tilde{f}$ est évidemment l'unique prolongement continu possible de f à $\overline{A}$.

Vérifions la continuité uniforme de $\tilde{f}$. Pour toute $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ en sorte que, dans A , $\|x - y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$. Soit $\{x, y\} \subset \overline{A}$, tel que $\|x - y\| < \alpha/3$, et deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de A ayant respectivement x et y comme limites. Il existe un rang N à partir duquel on aura simultanément $\|x_n - x\| < \alpha/3$ et $\|y_n - y\| < \alpha/3$, ce qui fera que $\|x_n - y_n\| < \alpha$ donc $\|f(x_n) - f(y_n)\| < \epsilon$. En faisant tendre n vers l'infini on trouve que $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\| \leq \epsilon$. Rq : ($\|x_n - y_n\| = \|x_n - x + x - y + y - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y\| + \|y - y_n\| < \alpha$) l'inégalité stricte sur f devient une inégalité large par passage à la limite avec f .

•.

Du côté des applications linéaires continues, nous aurons besoin de la propriété suivante :

Proposition 3.4 () *Si F est de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet pour sa norme naturelle.*

THÉORÈME 3.5 (Complétude du dual) *Si (V, p) est un espace vectoriel semi-normé et (W, q) est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(V, W)$ et $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ sont des espaces de Banach.*

Démonstration : *Construction limite.*

Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E, F)$. Ainsi $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ est arbitrairement petit pour n et m suffisamment grands. Comme pour tout $x \in E$ on a $\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\|_F \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|x\|_E$, cela fait que $(\varphi_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, donc converge dans F vers une valeur que nous pouvons noter $\varphi(x)$.

Limite dans $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow$ continuité + linéarité, propriétés conservés par passage à la limite.

Vérifions que, dans $\mathcal{L}(E, F)$, on a bien $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$.

La linéarité de φ se montre par passage à la limite dans les inégalités. Etant donné x et y dans E et λ un scalaire :

$$\varphi(\lambda x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\lambda x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \varphi_n(x) + \varphi_n(y) \quad (3.11)$$

$$\lambda \varphi(x) + \varphi(y) \quad (3.12)$$

De plus, φ est continue: étant donné $\epsilon > 0$, il existe un rang N pour lequel $n, m \geq N \Rightarrow \|\varphi_n - \varphi_m\| < \epsilon$; on a dès lors, pour tout $x \in E$,

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\|_F \leq \epsilon \|x\|_E \text{ d'où } \|\varphi_n(x)\|_F \leq (\epsilon + \|\varphi_m\|_{\mathcal{L}(E, F)}) \|x\|_E. \quad (3.13)$$

En faisant tendre n vers l'infini, on aboutit à

$$\|\varphi(x)\|_F \leq (\epsilon + \|\varphi_m\|_{\mathcal{L}(E, F)}) \|x\|_E, \quad (3.14)$$

d'où la continuité de φ .

En reprenant l'inégalité $\|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\|_F \leq \epsilon \|x\|_E$ et en faisant tendre m vers l'infini on trouve pour tout $x \in E$:

$$\|\varphi_n(x) - \varphi(x)\|_F \leq \epsilon \|x\|_E \text{ d'où } \|\varphi_n - \varphi\|_? \leq \epsilon. \quad (3.15)$$

On a bien $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ au sens de $\mathcal{L}(E, F)$. •

3.3 Le théorème du point fixe

Le théorème du point fixe dans les espaces complets est une des pierres angulaires de l'analyse. Rappelons ce dont il s'agit : une *contraction* de $A \subset E$ est une application $f : A \rightarrow A$ qui est k -lipschitzienne avec $k \in [0, 1]$.

Remarquons qu'une contraction est nécessairement uniformément continue.

THÉORÈME 3.6 ((du point fixe)) Toute contraction d'une partie fermée non vide d'un espace de Banach possède un unique point fixe.

Démonstration : Remarquons qu'il y a unicité d'un point fixe en cas d'existence. en effet, si x et y sont tous deux fixes, alors :

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|. \quad (3.16)$$

Comme $0 \leq k < 1$, nécessairement $\|x - y\| = 0$.

On établit alors l'existence d'un point fixe.

On se donne $x_0 \in A$ et on définit la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$. On a donc $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$ et, par une récurrence immédiate : $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\|$. De l'inégalité triangulaire on déduit alors :

$$\|x_n - x_m\| \leq (k^n + k^{n-1} + \dots + k^m)\|x_1 - x_0\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \quad (m < n) \quad (3.17)$$

L'hypothèse $0 \leq k < 1$ entraîne que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy donc converge et sa limite notée x appartient à $A = A$. Par continuité de f on peut ainsi écrire : $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. •.

Corollaire 3.7 (Point fixe) Si A est fermé dans un espace de Banach et $f : A \rightarrow A$ est telle qu'une de ses itérées $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$ est une contraction, alors f possède un unique point fixe.

Démonstration : Remarquons que tout point fixe de f est également fixe pour f^p , il sera donc unique en cas d'existence en vertu du théorème précédent. Montrons que f possède un point fixe. D'après (1.4), il existe un unique x tel que $f^p(x) = x$ d'où $f(f^p(x)) = f(x)$; ce qui peut aussi s'écrire $f^p(f(x)) = f(x)$ donc $f(x)$ est lui aussi, comme x , fixe pour f^p donc par unicité, $f(x) = x$. •.

Si u est un isomorphisme continu de E vers F , a priori rien ne dit que l'isomorphisme réciproque soit continu. C'est pourtant le cas dans les e.v.n. complets et l'on admettra l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3.8 (Théorème de Banach) Si $u : E \rightarrow F$ est une bijection linéaire continue d'espaces de Banach alors l'isomorphisme réciproque u^{-1} est continu.

$Isom(E, F)$ désignera alors les isomorphismes bicontinus de E vers F . Cette notation et le théorème précédent font donc que si $u \in Isom(E, F)$, on aura $u^{-1} \in Isom(F, E)$.

THÉORÈME 3.9 (Application inversion) Etant donné deux espaces de Banach E et F :

- 1) $Isom(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$. En particulier $Gl(E) = Isom(E, E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, E)$.
- 2) L'application d'inversion

$$J : Isom(E, F) \rightarrow Isom(F, E) \quad (3.18)$$

$$u \mapsto u^{-1} \quad (3.19)$$

est continue.

Remarque : utilité (cf exercices ...)

La démonstration nécessite un lemme :

THÉORÈME 3.10 (Lemme 1.10) *Si $v \in \mathcal{L}(E, E)$, il suffit que $\|v\| < 1$ pour que $1_E - v$ soit un isomorphe bicontinu de E .
 $v \in \mathcal{L}(E, E) / \|v\| < 1 \rightarrow 1_E - v \in Gl(E, E)$ ($1_E - v$ linéaire C^0 ,) $\wedge ((1_E - v)^{-1}$ linéaire C^0)*

Démonstration.

Si $\|v\| < 1$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} v^n \quad (3.20)$$

converge normalement donc converge dans $\mathcal{L}(E, E)$. Mais

$$(1_E - v) \circ \left(\sum_{n=0}^N v^n \right) = \left(\sum_{n=0}^N v^n \right) \circ (1_E - v) \quad (3.21)$$

ainsi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1_E - v) \circ \left(\sum_{n=0}^N v^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N v^n \right) \circ (1_E - v) = 1_E \quad (3.22)$$

La continuité de l'opérateur de composition permet de commuter la limite $N \rightarrow \infty$ avec le signe $\circ$, d'où

$$(1_E - v) \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} v^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v^n \right) \circ (1_E - v) \quad (3.23)$$

Donc $1_E - v$ est un isomorphisme et

$$(1_E - v)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \quad (3.24)$$

Ainsi $1_E - v$ est bicontinu et le lemme est prouvé. **•-Lemme**

Nous pouvons à présent **terminer la démonstration du théorème :**

- Si $Isom(E, F)$ est vide, il est en particulier ouvert et la question est réglée. Sinon on fixe $u_0 \in Isom(E, F)$, alors $u \in \mathcal{L}(E, F)$ sera un isomorphisme continu si et seulement si $u_0 \circ u \in Gl(E)$.

Notons $1_E - v := u_0^{-1} \circ u$; pour conclure il suffira que

$$\|v\| = \|1_E - u_0^{-1} \circ u\| = \|u_0^{-1}\| \cdot \|u_0 - u\| < 1 \quad (3.25)$$

ce qui a lieu dès que $\|u_0 - u\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$. Ainsi

$$B \left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|} \right) \subset Isom(E, F) \quad (3.26)$$

Une conséquence de la dernière égalité est que v tend vers zéro lorsque $u \rightarrow u_0$.

Pour tout élément $u_0 \in Isom(E, F)$, $Isom(E, F)$ contient une boule ouverte centrée $B\left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right)$ en u_0 . $Isom(E, F)$ est voisinage de chacun de ses éléments, c'est donc une partie ouverte de $\mathcal{L}(E, F)$.

- Plaçons-nous à présent au voisinage d'un point $u_0 \in Isom(E, F)$ avec $u \in Isom(E, F)$ proche de u_0 (avec $1_E - v := u_0^{-1} \circ u$ et $(1_E - v)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} v^n$) :

$$J(u_0) - J(u) = u_0^{-1} - u^{-1} = (1_E - u^{-1}u_0) \circ u_0^{-1} = \quad (3.27)$$

$$(1_E - (1_E - v)^{-1}) \circ u_0^{-1} = (1_E - \sum_{n=0}^{\infty} v^n) \circ u_0^{-1} \quad (3.28)$$

$$\left(-\sum_{1 \leq n} v^n\right) \circ u_0^{-1} \quad (3.29)$$

donc

$$\|u_0^{-1} - u^{-1}\| \leq \|u_0^{-1}\| \sum_{1 \leq n} \|v\|^n = \frac{\|v\|}{1 - \|v\|} \|u_0^{-1}\| \quad (3.30)$$

la continuité de J au point u_0 découle lors de ce que $\|v\| \rightarrow 0$ lorsque $\|u - u_0\| \rightarrow 0$. •

Chapter 4

Espaces de Hilbert

4.1 Produit scalaire

Dans de nombreuses applications, une notion d'**orthogonalité** est utile. Celle-ci est basée sur la notion de *produit scalaire* que nous introduisons maintenant.

Définition 4.1 (Produit scalaire) *Un produit scalaire sur un espace vectoriel V est une application $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ satisfaisant :*

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \forall x, y, z \in V, \quad (4.1)$$

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K} \quad (4.2)$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in V \quad (4.3)$$

$$(x, x) > 0, \forall x \in V, x \neq 0_V \quad (4.4)$$

Définition 4.2 (Espace préhilbertien) *Le couple $(V, (\cdot, \cdot))$, V espace vectoriel, $(\cdot, \cdot)$ est appelé espace préhilbertien.*

THÉORÈME 4.1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz, continuité du produit scalaire) *Si $(V, (\cdot, \cdot))$ est un espace préhilbertien, alors on a l'inégalité suivante, dite de **Cauchy-Schwartz** :*

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2} (y, y)^{1/2} \quad \forall x, y \in V \quad (4.5)$$

$\|x\| = (x, x)^{1/2}$ est une norme, appelée **norme induite** par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, sur V vérifiant

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V \quad (4.6)$$

Le produit scalaire est continu de $V \times V$ dans $\mathbb{K}$.

Proposition 4.2 (Identité du parallélogramme) *On a l'identité du parallélogramme :*

$$\left\| \frac{a+b}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{a-b}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \forall a, b \in H. \quad (4.10)$$

Démonstration : (Cauchy-Schwartz)

Grâce à (4.4), on a

$$0 \leq (\alpha x + y, \alpha x + y) = |\alpha|^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\alpha(x, y)), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (4.7)$$

Le scalaire $\alpha = -\frac{\overline{(x, y)}}{(x, x)}$ fournit (4.5). pour établir que $\|\cdot\|$ est une norme, par (4.5), on remarque que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re((x, y)) + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \quad (4.8)$$

ce qui prouve (4.6). Les autres propriétés sont immédiates à vérifier.
La continuité du produit scalaire suit de l'inégalité

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq \|x\| \cdot \|x_n - y_n\| + \|y_n\| \cdot \|x - x_n\| \quad (4.9)$$

appliquée à deux suites $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ dans V . $\circ\bullet$

4.2 Espaces de Hilbert

Définition 4.3 (Espace de Hilbert) Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel normé complet (réel ou complexe) dans lequel la norme est définie par un produit scalaire : $\|x\| = \sqrt{\{x|x\}}$.

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H qui est muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, et qui est complet pour la norme

Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien $(V, (\cdot, \cdot))$ dont l'espace normé induit est complet.

$$\|u\|_H := (u, u)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Exemple 5 $\bullet$ 1) $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$.

- 2) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit sur $C_0(\Omega)$ le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (4.12)$$

Comme nous l'avons vu, ce n'est pas un espace de Hilbert.

- 3) L'espace $L^2(\Omega)$ est de Hilbert, c'est la complétion de $C_0(\Omega)$ pour la même norme.
- 4) Le prototype des Hilbert séparables étant $l^2(\mathbb{C})$, muni du produit scalaire :

$$\{x|y\} = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \overline{y_i}. \quad (4.13)$$

La norme associée étant précisément $\|\cdot\|_2$.

Un espace de Hilbert est bien entendu aussi un espace de Banach. De plus, on montre qu'**il est toujours réflexif** (c'est une conséquence de (2.7), voir [1] th. III.29, p51-52). Une propriété intéressante d'un espace de Hilbert est donc qu'on peut identifier son dual avec lui même :

THÉORÈME 4.3 (Représentation de Riesz-Fréchet) *Soit H un espace de Hilbert et $f \in H'$.*

Alors il existe un et un seul élément T_f de H tel que

$$\langle f, g \rangle = \langle T_f, g \rangle, \quad \forall g \in H. \quad (4.14)$$

De plus, on a $\|T_f\| = \|f\|_{H'}$. Autrement dit, l'application

$$T : H' \rightarrow H : f \mapsto T_f, \quad (4.15)$$

est un isomorphisme.

Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $\varphi \in H'$ il existe un unique $f_\varphi \in H$ tel que

$$\langle \varphi, v \rangle = \langle f_\varphi, v \rangle \quad \forall v \in H. \quad (4.16)$$

De plus, $\|f_\varphi\|_H = \|\varphi\|_{H'}$. L'application $\varphi \in H' \rightarrow f_\varphi \in H$ est une isométrie linéaire surjective.

Démonstration : (Représentation de Riesz-Fréchet) voir [1], th. V.5 p 81. •

THÉORÈME 4.4 (Lax-Milgram) *Soit H un espace de Hilbert, et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, une forme bilinéaire continue et coercive, i.e.*

- *i) (bilinéarité) pour $v \in H$ fixé, $u \rightarrow a(u, v)$ est linéaire et pour $u \in H$ fixé, $v \rightarrow a(u, v)$ est linéaire.*
- *ii) (continuité) $\exists C \geq 0$ t.q. $|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in H$.*
- *iii) (coercivité) $\exists \alpha > 0$ t.q. $a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2$, $\forall u \in H$.*

Alors, pour $\varphi \in H'$ quelconque, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H. \quad (4.17)$$

De plus $\|u\|_H \leq (1/\alpha)\|\varphi\|_{H'}$.

Démonstration : (Lax-Milgram) c.f [1] •.

Définition 4.4 (Base hilbertienne) *Soit H un espace de Hilbert. Un système $S = \{e_n\}_{n \geq 1} \subset H$ est appelé **base hilbertienne** de H , lorsque les deux conditions i) et ii) ci-dessous sont vérifiées :*

- *i) S est orthonormée, i.e. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j \geq 1$.*
- *ii) l'espace vectoriel engendré par S (c'est par définition l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de S) est dense dans H .*

THÉORÈME 4.5 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Démonstration : Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ un sous ensemble dénombrable et dense dans H . On note F_k le s.e.v. engendré par $[v_1, v_2, \dots, v_k]$. Les (F_k) forment une suite croissante de s.e.v. de dimension finie telle que $\cup_{k=1}^{\infty} F_k$ est dense dans H .

On choisit alors une base orthonormale pour F_1 , que l'on complète en une base orthonormale de F_2 , et ainsi de suite.. Au final on obtient une base hilbertienne de H . •

Soit H un espace de Hilbert qui admet la base $\{e_n\}_{n \geq 1}$. Pour $k \geq 1$, on pose

$$E_k := \text{Span} \{e_1, \dots, e_k\}, \quad (4.18)$$

et on définit $P_k : H \rightarrow E_k \hookrightarrow H$ par la formule

$$\forall u \in H : P_k(u) := \sum_{i=1}^k (u, e_i) e_i. \quad (4.19)$$

THÉORÈME 4.6 La suite d'opérateurs (P_k) définie en (4.19) possède les propriétés suivantes :

- i) $(P_k) \subset \mathcal{L}(H, H)$ et $\|P_k\|_{\mathcal{L}(H, H)} \equiv 1$.
- ii) $\forall u \in H : (u - P_k u, v) = 0, \forall v \in E_k$
- iii)

$$\forall u \in H : P_k u \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u \text{ dans } H \text{ et, } \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (u, e_i)^2. \quad (4.20)$$

- iv) Pour tout $k \geq 1$, P_k est la projection orthogonale sur E_k , i.e.

$$\|u - P_k u\| = \min_{v \in E_k} \|u - v\|. \quad (4.21)$$

Démonstration : • i) Soit k un entier quelconque. On vérifie facilement que P_k est linéaire et continue, et on a

$$\|P_k u\|_H = \left(\sum_{i=1}^k (u, e_i) e_i, \sum_{j=1}^k (u, e_j) e_j \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^k (u, e_i)^2 \right)^{1/2} \leq \|u\|_H : \quad (4.22)$$

Pour une justification de la dernière inégalité ci-dessus, voir la preuve du point iii). D'autre part, on a $P_k^2 = Id$, d'où

$$\|P_k\|_{\mathcal{L}(H, H)}^2 \geq \|P_k\|_{\mathcal{L}(H, H)}^2 = 1. \quad (4.23)$$

En conséquence $\|P_k\|_{\mathcal{L}(H, H)}^2 = 1$.

- ii) On vérifie la relation sur la base de E_k , i.e. pour $v = e_j, j = 1, \dots, k$:

$$(u - P_k u, e_j) = (u, e_j) - (u, e_j) = 0. \quad (4.24)$$

Par linéarité, la relation reste vraie pour tout $v \in E_k$.

- iii) Soit $u \in H$. On a

$$\|u - P_k(u)\|^2 = (u - P_k u, u - P_k u) \stackrel{ii)}{=} (u - P_k u, u). \quad (2.9) \quad (4.25)$$

Puisque $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H , si on fixe $\epsilon > 0$ quelconque, il existe $K_\epsilon \in \mathbb{N}$ et $\bar{u} \in E_{K_\epsilon}$ tel que $\|u - \bar{u}\| \leq \epsilon$. Pour $k \geq K_\epsilon$, on aura $P_k \bar{u} = \bar{u}$. Ainsi, pour tout $k \geq K_\epsilon$ il vient :

$$\|u - P_k u\|^2 \stackrel{(2.9)}{=} \underbrace{(u - P_k u, \bar{u})}_{=0 \text{ par ii)}} + \underbrace{(u - P_k(u)u, u - \bar{u})}_{|\cdot| \leq \epsilon \|u - P_k u\| k}, \quad (4.26)$$

d'où on conclut que $P_k u$ tend vers u dans H lorsque k tend vers l'infini. En particulier $\|P_k u\| \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \|u\|$, c'est à dire :

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (u, e_i)^2. \quad (4.27)$$

- iv) Soit $u \in H$, on a

$$\|u - P_k u\|^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} (u, e_i)^2. \quad (4.28)$$

Par ailleurs, pour $v \in E_k$, on a

$$\|u - v\|^2 = \sum_{i=1}^k (u - v, e_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{\infty} (u, e_i)^2. \quad (4.29)$$

Il est donc clair que

$$\|u - P_k u\| = \min_{v \in E_k} \|u - v\|. \quad (4.30)$$

•

Définition 4.5 (Opérateur compact) Soit E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est **compact** si $\overline{T(B_E(0, 1))}$ est une partie compacte de F .

THÉORÈME 4.7 Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact. Alors $N(Id - T)$ est de dimension finie.

Démonstration : Soit $E_1 := N(Id - T)$, muni de la norme de E . On vérifie que $B_{E_1} \subset T(B_E)$. En effet, si $x \in B_{E_1}$ alors $Tx = x$ et $\|x\| \leq 1$, d'où $x \in T(B_E)$. Puisque T est compact on obtient alors que $\overline{B_{E_1}}$ est compacte, ce qui permet de conclure avec le théorème 2.3 que E_1 est de dimension finie.

Définition 4.6 (Valeur propre d'un opérateur) Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de T lorsque $N(T - \lambda Id) \neq \{0\}$. On note $VP(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T .

THÉORÈME 4.8 Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Si T est compact alors $VP(T)$ est au plus dénombrable. Dans le cas où $VP(T)$ est infini, c'est une suite qui tend vers 0.

Démonstration : voir [1] p.95

Définition 4.7 (Opérateur auto-adjoint) Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est un **opérateur auto-adjoint** lorsque

$$(Tu, v) = (u, Tv) \forall u, v \in H. \quad (4.31)$$

THÉORÈME 4.9 Soit H un espace de Hilbert **séparable** et $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint et compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T .

Démonstration : Soit (λ_n) une suite formée avec les valeurs propres de T , avec $\lambda_0 = 0$ si 0 est valeur propre de T . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n := N(T - \lambda_n Id)$.

Ces espaces sont deux à deux orthogonaux. En effet, soit $m \neq n$ deux entiers et $u \in E_m$, $v \in E_n$. On a $Tu = \lambda_m u$ et $Tv = \lambda_n v$, d'où en utilisant le caractère auto-adjoint de T : $\lambda_m(u, v) = \lambda_n(u, v)$. Mais, puisque $\lambda_m \neq \lambda_n$ on conclut que $(u, v) = 0$.

En utilisant le fait que T est compact, nous pouvons armer à l'aide de la proposition 2.2 que pour tout $n \geq 1$, l'espace E_n est de dimension finie. Pour chacun de ces sous-espaces, on peut construire une base hilbertienne. Il en est de même pour E_0 (s'il existe).

Le sous-espace E_0 est possiblement de dimension infinie, mais il est toujours fermé dans H . En effet, si (x_n) est une suite de E_0 qui converge vers un certain élément $x \in H$, on a

$$Tx_n \equiv 0, \text{ et } x_n \rightarrow x, \quad (4.32)$$

d'où $Tx = 0$. Il s'en suit que E_0 est fermé, et puisque H est séparable, E_0 est aussi séparable. Ainsi, en utilisant le théorème 2.8, nous voyons que E_0 admet une base hilbertienne.

A ce stade, nous avons muni chacun des espaces E_n d'une base hilbertienne, et nous avons montré qu'il sont deux à deux orthogonaux. On montre ensuite (voir [1] p.97) que la réunion de ces bases est une base hilbertienne de H . •

Chapter 5

Analyse fonctionnelle : résultats fondamentaux

On verra ici les théorèmes de **Hahn-Banach** (prolongement de formes linéaires majorées par une application sous-linéaire), de Baire (déjà vus en chapitre 7), et quelques autres éléments fondamentaux.

5.1 Le théorème de Hahn-Banach

5.1.1 Énoncé du théorème

THÉORÈME 5.1 (13.1 Théorème de Hahn-Banach des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et p une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall (x, y) \in E, p(x, y) \leq p(x) + p(y)$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, p(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot p(x)$

Alors toute forme linéaire l sur F sous-espace vectoriel de E telle que $l(x) \leq p(x)$ peut être prolongée en une forme linéaire L sur E telle que $\forall x, L(x) \leq p(x)$.

Noter que p norme ou semi-norme convient. On parle parfois d'application sous-linéaire pour une application vérifiant les deux conditions évoquées. voir la partie applications juste un peu après.

Démonstration :

Cette preuve fait intervenir le **lemme de Zorn** (voir lemme 1.17). On détaille ici la partie comportant le lemme de Zorn et on donne une idée de la suite.

On considère l'ensemble I des formes linéaires f prolongeant l sur un certain sous-espace vectoriel $D(f)$ de E contenant F , et telle que $f \leq p$ pour tout x de $D(f)$. On munit I de la relation d'ordre définie par

$$f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow D(f_1) \subset D(f_2) \wedge \forall x \in D(f_1), f_1(x) = f_2(x) \quad (5.1)$$

I est inductif. En effet, si J est une partie de I totalement ordonnée, alors la fonction f définie par $D(f) = \bigcap_{g \in J} D(g)$ et $f(x) = g(x)$ si $g \in J$ et $x \in D(g)$ est un majorant de J . Par le lemme de Zorn (lemme 1.17), on déduit que I possède un élément maximal f .

On suppose maintenant que $D(f) \neq E$ (on va chercher à montrer que cette hypothèse est contradictoire). Alors on considère y n'appartenant pas à $D(f)$. On définit f' sur $D(f) + \mathbb{R}.y$ par $f'(x + t.y) = f(x) + \alpha.t$, α étant choisi tel que pour tout x f' contredit la propriété de maximalité de f . D'où le résultat. $\circ\bullet$

5.1.2 Des applications

• Sur les formes linéaires

Corollaire 5.2 (13.2) Soit g une forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E . Alors il existe une forme linéaire continue f sur E prolongeant g et telle que $\|f\|_{Ler} = \|g\|_{Ler}$.

Démonstration :

|| Application directe du théorème de Hahn-Banach. $\circ\bullet$

(la norme d'un espace dual, évoquée ici, est la norme usuelle, ici la norme de f , forme linéaire continue, est le sup des $\|f(x)\|_{\mathbb{R}}$ pour x de norme 1).

Corollaire 5.3 (13.3) Soit x dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E , alors il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $\|f\|_{Ler} = \|x\|_E$ et $f(x) = \|x\|^2$.

Démonstration :

|| Il suffit de prolonger une application linéaire adéquate définie sur $\mathbb{R}.x$. $\circ\bullet$

Corollaire 5.4 (13.4) Pour tout x d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E , on a

$$\|x\|_E = \sup_{f \in E', \|f\|_{\infty}=1} \|f(x)\|_{\mathbb{R}} = \max_{f \in E', \|f\|_{\infty}=1} \|f(x)\|_{\mathbb{R}} \quad (5.2)$$

Démonstration :

L'inégalité $\|x\|_E \geq \sup_{f \in E', \|f\|_{\infty}=1} \|f(x)\|_{\mathbb{R}}$ est évidente. Choisissons alors f_0 donné par le corollaire précédent ($\|f_0\| = \|x\|_E$ et $f_0(x) = \|x\|^2$). En posant $f = f_0/\|f_0\|$, on a

$$\|f\|_{\infty} = \frac{\|f_0\|_{\infty}}{\|x\|_E} = 1 \quad (5.3)$$

$$\|f(x)\| = \frac{\|f_0(x)\|_{\mathbb{R}}}{\|x\|_E} = \frac{\|x\|_E^2}{\|x\|_E} = \|x\|_E \quad (5.4)$$

D'où le résultat annoncé. $\circ\bullet$

Ce corollaire servira pour la partie 13.8.1.

- En géométrie.

THÉORÈME 5.5 (13.5 Existence d'un hyperplan affine fermé séparant deux convexes)

Soient A et B des convexes non vides disjoints d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E ; si A est ouvert, alors il existe une forme linéaire continue f sur E et un réel α tels que $f(x) \leq \alpha$ pour $x \in A$ et $f(x) \geq \alpha$ si $x \in B$.

On notera que cela signifie précisément qu'il existe un hyperplan affine fermé (rappelons que l'image d'un inverse d'un singleton par une forme linéaire non nulle est un hyperplan fermé si et seulement si cette forme linéaire est continue) séparant (au sens large) A et B .

On peut en fait étendre le résultat à $f(x) < \alpha$ (et non seulement $\leq$).

Démonstration :

On va avoir besoin de deux lemmes.

Lemme 5.6 (13.6) On se donne U un ouvert convexe contenant 0_E , et on définit μ_U la jauge nécessaire à U , c'est à dire que $\mu_U(x)$ est l'inf des réels $t > 0$ tels que $t^{-1}.x \in U$. Alors il existe un certain réel M tel que $\forall x, \mu_U(x) \leq M.\|x\|$. En outre, $U = \{x; \mu_U(x) < 1\}$
 $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}^+ \mu_U(\lambda.x) = \lambda \mu_U(x) \quad \forall (x, y) \in E \times E \mu_U(x+y) \leq \mu_U(x) + \mu_U(y)$

Démonstration :

|| Les deux dernières conditions permettent d'utiliser le théorème de Hahn-Banach. $\circ$

Lemme 5.7 (13.7)

Soit U un ouvert convexe non vide et y n'appartient pas à U . Alors il existe une forme linéaire continue f sur E avec $f(x) < f(y)$ pour tout x dans U .

Démonstration :

- ▷ On montre le résultat dans le cas où 0_E appartient à U et on généralise par une translation.
- ▷ En supposant donc que $0_E \in U$, on considère que la jauge μ_U (définie comme précédemment).
- ▷ On définit la forme linéaire g sur $\mathbb{R}.y$ par $g(t.y) = t$.
- ▷ Il est clair que $g(x) \leq \mu_U(x)$
- ▷ On peut donc prolonger g à E tout entier selon le théorème 13.1 de Hahn-Banach ; appelons f la forme linéaire obtenue avec $f \leq \mu_U$.
- ▷ f est continue de par le lemme 13.6 (1ère propriété), et f vérifie les hypothèses demandées (deuxième propriété du lemme 13.6). $\circ$

On peut maintenant revenir à la démonstration du théorème 13.5, toujours non démontré.

- ▷ U est convexe
- ▷ U est ouvert (car $U = \bigcap_{y \in B} A - y =$ union d'ouverts, car A est ouvert).
- ▷ On considère la fonction f donnée par le lemme 13.7 avec $y = 0$, c'est à dire négative sur tout U .
- ▷ Le fait que f soit négative sur tout U se traduit exactement par le fait que pour tout $(x, y) \in A \times B$ on fait $f(x) < f(y)$. On considère alors α le sup des $f(x)$ pour x dans A , et le résultat est démontré.

L'extension ($<$ au lieu de $\leq$) se montre comme suit :

- supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = \alpha$.
- Aouvert implique qu'il existe ϵ tel que $B(x_0, \epsilon)$ soit incluse dans A . (1)
- f non nulle implique qu'il existe g dans E de norme 1 tel que $f(g) > 0$ (2)
- (1) implique que $x'_0 = x_0 + \frac{\epsilon}{2}g \in A$
- (2) implique que $f(x'_0) > \alpha$ ce qui est absurde ! x_0 tel que $f(x_0) = \alpha \circ \bullet \otimes \diamond \diamond$

THÉORÈME 5.8 (13.8) Soient A et B deux convexes disjoints de E (toujours un espace vectoriel normé), non vides. On suppose A fermé et B compact ; alors il existe une forme linéaire continue $f \neq 0$ avec $f(A) \leq c_1$ et $f(B) \geq c_2$ avec $c_1 < c_2$.

Cela signifie exactement que A et B sont séparés par un hyperplan fermé (puisque image inverse d'un singleton par une forme linéaire continue non nulle) au sens strict.

On montrera en utilisant ce théorème que la topologie faible est séparée : voire le corollaire 13.42. On trouvera d'originales (au moins originales dans le cadre de l'agrégation) applications en finance avec [19].

Démonstration :

- ▷ On se donne ϵ positif.
- ▷ On note A_ϵ le ϵ -voisinage de A (i.e. la réunion des boules ouvertes de rayon ϵ de centre dans A), et B_ϵ le ϵ -voisinage de B .
- ▷ Pour ϵ assez petit, A_ϵ et B_ϵ sont disjoints (corollaire 7.182). ▷ D'après le théorème précédent, on peut séparer A_ϵ et B_ϵ au sens large par un hyperplan fermé.
- ▷ On a $f \leq \alpha$ sur A et $f > \alpha$ sur B compact donc $f \geq \beta > \alpha$ sur B . ◦

On retiendra donc que l'on peut séparer dans un espace vectoriel normé par un hyperplan fermé :

au sens large, deux convexes disjoints dont l'un (au moins) est ouvert
au sens strict, deux convexes disjoints dont l'un est fermé et l'autre compact.

• **En topologie**

Corollaire 5.9 (13.9) *Soit F un sous-espace vectoriel de E (qui est toujours un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé), qui n'est pas dense dans E . Alors il existe une forme linéaire continue sur E , non nulle qui est nulle sur F .*

Démonstration :

- ▷ On se donne x qui n'est pas dans l'adhérence de F .
- ▷ $\{x\}$ est compact. ▷ On peut séparer F et $\{x\}$ par un hyperplan au sens strict ; soit f la forme linéaire correspondante. On suppose que $\forall y \in F, f(y) < K < f(x)$
- ▷ f est majorée (par K) sur F , ce qui implique $f(F) = \{0\}$, puisque F est un espace vectoriel. ◦

Corollaire 5.10 (13.10) *Si F est un sous-espace vectoriel de E et si toute forme linéaire continue sur F est nulle sur E , alors F est dense dans E .*

Le théorème de Runge sera démontré grâce à ce corollaire.

Démonstration :

- || C'est une reformulation du théorème précédent. ◦

5.2 Le théorème de Baire et ses conséquences

THÉORÈME 5.11 (Théorème de Baire) *Soit X un espace topologique. Si X est localement compact, ou s'il est métrique complet, alors*

- *Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense*
- *Une réunion dénombrable de fermés recouvrant X comporte un fermé d'intérieur non vide*

Comme le signale le livre [9], on peut en fait énoncer plus précisément que l'intérieur de la réunion d'une suite de fermés d'intérieur vides est vide.

Démonstration :

- || Ce théorème ayant été prouvé (voir le théorème 7.172) on ne fait que rappeler ici que les deux formulations • sont équivalentes (considérer les complémentaires des fermés du deuxième •). ◦

! Notons que le théorème de Baire est en particulier valable pour les espaces de Banach

5.2.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Dans le cas où E et F sont des espaces de Banach, on obtient une série de résultats intéressants. En premier lieu le Banach-Steinhaus.

Le théorème de **Banach-Steinhaus** (aussi appelé **Principe de la borne uniforme**) fait partie, au même titre que le théorème de **Hahn-Banach** et le théorème de **Banach-Schauder**, des résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. Il a été publié en 1927 par *Stefan Banach* et *Hugo Steinhaus*, mais il a aussi été prouvé indépendamment par *Hans Hahn*.

Il affirme qu'une famille d'applications linéaires continues définies sur un espace de Banach est uniformément bornée si et seulement si elle est ponctuellement bornée. C'est une conséquence très importante de la propriété de Baire, qui se généralise d'ailleurs aux espaces de Fréchet.

Énoncé du théorème :

THÉORÈME 5.12 (Banach-Steinhaus) *Soit E, F deux espaces de Banach et $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\|_F < \infty \forall x \in E. \quad (5.5)$$

Alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty. \quad (5.6)$$

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. On considère une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'applications linéaires continues de E dans F . On suppose que cette famille est ponctuellement bornée, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|f_i(x)\| < +\infty \quad (5.7)$$

Alors $(f_i)_{i \in I}$ est uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall i \in I, \|f_i\| \leq K \quad (5.8)$$

*Ce théorème est dit aussi théorème de la **borne uniforme**.*

On se donne E et F des espaces de Banach, et $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F .

Si pour tout x , $\exists M_x$; $\forall i \in I, \|T_i(x)\|_F \leq M_x \|x\|_E$

Alors $\exists M$; $\forall i \in I, \|T_i\| \leq M$

Ce théorème est plus intuitif sous son petit nom de "théorème de la borne uniforme". L'hypothèse est que l'on a une famille d'applications bornées sur chaque point : la conclusion est que l'on peut les borner uniformément sur la sphère ou la boule unité (bien vérifier que l'on a des espaces de Banach).

! Notez bien que la famille des T_i n'est pas nécessairement dénombrable !

Démonstration : (Banach-Steinhaus) La preuve repose sur le fait qu'un espace de Banach est un espace de Baire, c'est-à-dire que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Considérons A_n l'ensemble des éléments de E tels que $\forall i \in I, \|f_i(x)\| \leq n$.

$$A_n = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \|f_i(x)\| \leq n\} \quad (5.9)$$

A_n est une intersection de fermés, c'est donc un fermé. La famille $(f_i)_{i \in I}$ est ponctuellement bornée, cette hypothèse se traduit par l'égalité ensembliste :

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (5.10)$$

Comme E n'est pas d'intérieur vide, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{n_0} ne soit pas d'intérieur vide : il contient une boule de centre a et de rayon $r > 0$.

Prenons un point x de E situé dans la boule unité fermée :

$$\forall i \in I, \|f_i(x)\| = \frac{1}{r} \|f_i(rx)\| \leq \frac{1}{r} \|f_i(a)\| + \frac{1}{r} \|f_i(a+rx)\| \leq \frac{n_0}{r} + \frac{n_0}{r} \quad (5.11)$$

c'est-à-dire : $(f_i)_{i \in I}$ est uniformément bornée (par $\frac{2n_0}{r}$).

Voir aussi [1] p. 17 $\diamond$

|| Là aussi je ne donne pas la preuve, puisqu'elle se trouve au théorème 7.174 •). $\circ$

Variante "forte" de l'énoncé

On a en fait démontré le résultat suivant. Avec les mêmes notations que ci-dessus, l'alternative est :

- ou bien $\sup_{i \in I} \|f_i\| < +\infty$
- ou bien il existe un résiduel U (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts denses ; une telle partie est dense d'après le théorème de Baire) tel que

$$\forall x \in U, \sup_{i \in I} \|f_i(x)\| = +\infty \quad (5.12)$$

En effet, la démonstration précédente montre que, si $\sup_{i \in I} \|f_i\| = +\infty$, alors nécessairement, chaque A_n est un fermé d'intérieur vide. Il suffit alors de prendre pour U le complémentaire de

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \quad (5.13)$$

5.2.2 Exemples d'applications

Limite d'une suite d'applications linéaires continues

Mentionnons un corollaire très important du théorème de Banach-Steinhaus :

Corollaire 5.13 Si (f_n) est une suite d'applications linéaires continues de l'espace de Banach E dans l'espace vectoriel normé F qui converge simplement vers une fonction f , alors f est également une application linéaire continue.

En effet, la linéarité provient d'un simple passage à la limite. Et pour tout $x \in E$, $(fn(x))$ converge, c'est donc une suite bornée, et le théorème de Banach-Steinhaus affirme que (fn) est uniformément bornée. (fn) est bornée en norme subordonnée par une constante C , et par passage à la limite des inégalités f est bornée de norme subordonnée inférieure à C .

Application aux sommes de Riemann

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$, et $F = \mathbb{R}$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, soit un l'opérateur défini par :

$$u_n(f) = n \int_0^1 f(t)dt - \sum_{k=1}^n f(k/n). \quad (5.14)$$

Pour toute fonction f , $\frac{u_n(f)}{n}$ n'est autre que l'erreur commise dans le calcul de l'intégrale de f lorsque l'on prend une somme de Riemann correspondant à une subdivision régulière de $[0, 1]$ en n intervalles égaux. Cette erreur est un $O(\frac{1}{n})$ pour les fonctions de classe C^1 ou lipschitziennes, mais il n'en est pas de même pour les fonctions continues en général. En effet, on montre que $\|u_n\| = 2n$, de sorte que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| = +\infty$ et donc que le complémentaire de A est dense. Une fonction f appartenant à ce complémentaire vérifie donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n(f)\| = +\infty$, ce qui signifie que l'ensemble $un(f)$ n'est pas borné et donc que l'erreur commise $\frac{u_n(f)}{n}$ n'est pas un $O(\frac{1}{n})$.

Le théorème de Banach-Steinhaus donne une preuve de l'existence d'objets vérifiant telle ou telle propriété, mais cette preuve n'est pas constructive.

Application aux séries de Fourier

Si f est une fonction (disons continue) de période 2π , on vérifie que la somme partielle n -ième de sa série de Fourier est

$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$, avec $D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin \frac{t}{2}}$ (noyau de Dirichlet)

Pour n fixé, la norme de l'application $f \mapsto S_n(f)(x)$, vue comme forme linéaire sur l'espace des fonctions continues et de période 2π , muni de la norme sup , est égale à $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$

On vérifie que le nombre $L_n = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$ appelé constante de Lebesgue, tend vers l'infini comme $\log(n)$.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe donc une fonction f telle que $|S_n(f)(x)|$ tende vers l'infini quand n tend vers l'infini. Ainsi, la série de Fourier de f diverge en x .

Si on utilise la version forte du théorème de Banach-Steinhaus, on voit même que l'ensemble des fonctions continues de période 2π dont la série de Fourier diverge en x est dense pour la topologie de la convergence uniforme.

Cet argument est d'autant plus remarquable qu'il n'est pas très facile de trouver des exemples explicites.

On verra une application à la transformation de Toeplitz (proposition 15.48), qui fournit une preuve élégante de la moyenne de Cesaro (corollaire 15.49).

Corollaire 5.14 (13.13) Soient E et F deux Banach, et T_n une suite d'applications linéaires continues de E dans F , avec $T_n(x)$ convergeant pour tout x - on note par la suite $T(x)$ sa limite.

Alors $\|T_n\|$ est borné, T est linéaire continue, et $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

Démonstration :

|| Application directe du théorème de Banach-Steinhaus. $\circ$

Corollaire 5.15 (13.14) Soit E un espace vectoriel normé et X un sous-ensemble de E .

On suppose que pour tout f appartenant à E' l'ensemble $f(X)$ est borné.

Alors X est borné.

Démonstration :

|| On applique le théorème de Banach-Steinhaus dans E' , avec pour famille d'applications linéaires les applications qui à $f \in E'$ associe $f(x)$, pour $x \in X$. $\circ$

Il faut bien noter que le dual d'un espace vectoriel normé E est un Banach (même si l'espace E ne l'est pas), et que ce résultat est nécessaire à cette preuve (voire corollaire 7.165).

Noter aussi que ce résultat exprime que "faiblement borné" implique "fortement borné".

Cette façon de voir est d'ailleurs une belle illustration de la notion de "borne uniforme". Si une partie est bornée "suivant toutes les directions" (traduire : suivant toute forme linéaire), alors elle est bornée "tout court".

5.2.3 Théorème de Banach-Schauder / de l'Application ouverte

En analyse fonctionnelle, le théorème de **Banach-Schauder**, également appelé *théorème de l'application ouverte* est un résultat fondamental qui affirme qu'une application linéaire continue surjective entre deux espaces vectoriels normés complets est ouverte. C'est une conséquence importante du théorème de Baire, qui affirme que dans un espace métrique complet (et donc en particulier dans un espace de Banach), toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense, ce qui permet de généraliser le théorème de Banach-Schauder aux *espaces de Fréchet*.

Énoncé du théorème de **Banach-Schauder** :

THÉORÈME 5.16 (de l'application ouverte / Banach-Schauder) Soit E , F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que T est surjectif. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que $T(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, c)$.

Soit E et F deux espaces de Banach et f une application linéaire continue de E vers F .

Si f est surjective, alors f est ouverte, i.e l'image de tout ouvert de E par f est un ouvert de F .

Soient E et F des espaces de Banach, et T une application linéaire continue surjective de E dans F . Alors T est ouverte (c'est à dire que l'image de tout ouvert par T est un ouvert).

Démonstration :

|| voir le théorème 7.177. ◦

Bien entendu, dans le cas où T est bijective, on en déduit le théorème d'isomorphisme de Banach 7.178, qui stipule qu'une bijection linéaire continue entre espaces de Banach est de réciproque continue (et donc est un homéomorphisme).

Il faut noter un corollaire important : si un espace vectoriel E muni de la norme N_1 est un espace de Banach, et si E muni de la norme N_2 est aussi un espace de Banach, alors si N_1 est plus fine que N_2 , alors en fait N_2 est équivalente à N_1 .

Noter aussi que l'hypothèse N_1 plus fine que N_2 peut être levée : on montre par ce qui précède que les normes N_1 et $N_1 + N_2$ sont équivalentes, et de même que les normes N_2 et $N_1 + N_2$ sont équivalentes, d'où l'équivalence des normes N_1 et N_2 .

Démonstration : (Banach-Schauder) Pour montrer que f est ouverte, il suffit par linéarité de montrer que l'image de tout voisinage de 0 (dans E) par f est un voisinage de 0 (dans F), i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, B_F(0, \eta) \subset f(B_E(0, \varepsilon)) \quad (5.15)$$

(Par homogénéité de f , il suffit même de le faire pour un seul ε). On introduit les fermés suivants :

$$F_n = \overline{f(B_E(0, n))} \quad (5.16)$$

Comme f est surjective, on dispose de l'égalité ensembliste :

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad (5.17)$$

F est un espace de Banach, en particulier il vérifie la **propriété de Baire**, donc un de ces fermés, F_N est d'intérieur non vide : il contient une boule $B_F(y, \eta)$.

Le fermé F_{2N} contient donc la boule $B_F(0, \eta)$. Par homogénéité de f on dispose ainsi d'un entier M tel que :

$$B_F(0, 1) \subset \overline{f(B_E(0, M))} \quad (5.18)$$

Il ne reste plus qu'à faire sauter la barre. Par homogénéité de f , on déduit de ce résultat que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_F(0, 1/2^n) \subset \overline{f(B_E(0, M/2^n))} \quad (5.19)$$

Montrons que $B_F(0, 1) \subset f(B_E(0, 3M))$. Pour cela, donnons-nous un $z \in B_F(0, 1)$

- * Il existe x_0 de norme inférieure à M tel que $z_1 = z - f(x_0)$ soit de norme inférieure à $1/2$.
- * Il existe x_1 de norme inférieure à $M/2$ tel que $z_2 = z_1 - f(x_1)$ soit de norme inférieure à $1/4$.

On construit par récurrence une suite (x_n) de points de E telle que $\|x_n\| \leq M/2^n$ et $z_n = z - f(x_0 + \cdots + x_n)$ soit de norme inférieure à $1/2^n$.

La série $\sum x_n$ est absolument convergente, donc comme E est un espace de Banach, elle converge. De plus,

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2M \quad (5.20)$$

Et, par passage à la limite :

$$z = f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right) \in f(\overline{B_E(0, 2M)}) \subset f(B_E(0, 3M)) \quad (5.21)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. •

Voir [1] p. 19,20. •

5.2.4 Conséquences du théorème de Banach-Schauder

Théorème d'isomorphie de Banach

Le théorème de Banach-Schauder a une conséquence fondamentale (en fait, il s'agit d'une forme équivalente du théorème, et non d'un résultat plus faible), appelée **théorème d'isomorphie de Banach**, théorème de Baire-Banach ou plus simplement théorème de Banach :

THÉORÈME 5.17 (d'isomorphie de Banach) *Si f est une application linéaire bijective continue entre deux espaces de Banach, alors f est un homéomorphisme.*

Théorème du graphe fermé

Le théorème de **Banach-Schauder** est également à l'origine d'un puissant critère de continuité des applications linéaires entre deux espaces de Banach, il s'agit du théorème du graphe fermé :

THÉORÈME 5.18 (du graphe fermé) *Soit E et F deux espaces de Banach, et f une application linéaire de E dans F . f est continue si et seulement si son graphe est une partie fermée de $E \times F$.*

Soit $T : E \rightarrow F$, linéaire entre les Banach E et F . L'application T est continue si et seulement si le graphe de T est fermé dans $E \times F$.

Démonstration :

|| voir le théorème 7.180. ◦

Application : voir le théorème 13.46.

Supplémentaire topologique

Dans le cas de la *dimension infinie*, rien ne garantit que les projecteurs associés à des sous-espaces supplémentaires soit continus. C'est la raison d'être de la définition suivante :

Définition 5.1 () * Soient E un espace de Banach et F un sous-espace fermé de E . Un sous-espace G est un supplémentaire topologique si et seulement s'il est un supplémentaire algébrique et s'il est fermé.

Un *supplémentaire algébrique*, par définition est un sous-espace tel qu'il existe une et une unique manière d'écrire un vecteur de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Le théorème de Banach-Schauder permet de démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.19 () * Les projecteurs associés à des supplémentaires topologiques sont continus.

Démonstration : (Corollaire) *

C'est un corollaire immédiat de la proposition précédente.

Ce résultat est la conséquence de la proposition suivante, utilisée par exemple pour démontrer des propriétés d'orthogonalités dans un espace de Banach.

Proposition 5.20 (Décomposition) * Soient E un espace de Banach, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels fermés tel que leurs somme soit fermée. Alors il existe une constante C strictement positive tel que tout x de E admette une décomposition de la forme $x = x_1 + x_2$ avec x_1 élément de F_1 , x_2 élément de F_2 et :

$$\|x_1\| \leq C\|x\| \quad \text{et} \quad \|x_2\| \leq C\|x\| \quad (5.22)$$

Démonstration : (Décomposition) Soit l'espace $F_1 \times F_2$ muni de la norme suivante :

$$\forall (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \quad \|(x_1, x_2)\|_{F_1 \times F_2} = \max(\|x_1\|, \|x_2\|) \quad (5.23)$$

L'espace $F_1 \times F_2$ est un Banach et l'application de $F_1 \times F_2$ dans E qui à un couple associe la somme des deux éléments est linéaire surjective. L'inégalité triangulaire montre que l'application est continue. (Remarque, évidemment h n'est pas bilinéaire.)

$$h : F_1 \times F_2 \rightarrow E, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \quad (5.24)$$

$$h(x_1 + \alpha y_1, x_2) = x_1 + \alpha y_1 + x_2 \neq h(x_1, x_2) + \alpha h(y_1, x_2) \text{ pas de linéarité première variable} \quad (5.25)$$

$$h(x_1, x_2 + \beta y_2) = x_1 + x_2 + \beta y_2 \neq h(x_1, x_2) + \beta h(x_1, y_2) \text{ pas de linéarité seconde variable} \quad (5.26)$$

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) h(x + \lambda y) = h(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2) = x_1 + x_2 + \lambda y_1 + \lambda y_2 \quad (5.27)$$

$$= h(x_1, y_1) + \lambda h(y_1, y_2) = h(x) + \lambda h(y) \text{ linéarité dans } F_1 \times F_2 \quad (5.28)$$

$$\|h(x_1, x_2)\|_E = \|x_1 + x_2\|_E \leq \|x_1\|_E + \|x_2\|_E \text{ inégalité triangulaire} \quad (5.29)$$

$$\leq 2 \max(\|x_1\|_E, \|x_2\|_E) = 2 \max \|(x_1, x_2)\|_{F_1 \times F_2} \quad (5.30)$$

Soit x le vecteur de la proposition. Le théorème de Banach-Schauder montre l'existence d'un réel c strictement positif tel que :

$$c \cdot \max(\|x_1\|, \|x_2\|) \leq \|x\| \quad (5.31)$$

Il suffit alors de choisir C comme l'inverse de c . •

La proposition précédente admet le corollaire suivant :

Corollaire 5.21 * Avec les mêmes notations que la proposition précédente, il existe une constante C strictement positive telle que la distance d entre un élément x de E et l'intersection de F_1 et F_2 soit donnée par la formule suivante :

$$d(x, F_1 \cap F_2) \leq C(d(x, F_1) + d(x, F_2)) \quad (5.32)$$

Ce corollaire est aussi utilisé pour établir des propriétés d'orthogonalités¹.

Démonstration : (Corollaire) * il existe une constante D strictement positive telle que la distance d entre un élément x de E et l'intersection de F_1 et F_2 soit donnée par la formule suivante :

$$d(x, F_1 \cap F_2) \leq D(d(x, F_1) + d(x, F_2)) \quad (5.33)$$

Soit ϵ un réel strictement positif et C la constante strictement positive établie dans la (démonstration de la) proposition précédente. Par définition de la distance entre un vecteur et un ensemble, il existe un vecteur y_1 (resp. y_2) de F_1 (resp. F_2) tel que :

$$d(x, F_1) \leq \|x - y_1\| - \frac{\epsilon}{1 + 2C} \quad \text{et} \quad d(x, F_2) \leq \|x - y_2\| - \frac{\epsilon}{1 + 2C} \quad (5.34)$$

La proposition précédente montre d'un vecteur x_1 (resp. x_2) élément de F_1 (resp. F_2) tel que :

$$y_1 - y_2 = x_1 + x_2, \quad \|x_1\| \leq C\|y_1 - y_2\| \quad \text{et} \quad \|x_2\| \leq C\|y_1 - y_2\| \quad (5.35)$$

L'égalité suivante montre que $x_1 - y_1$ est un élément de l'intersection de F_1 et F_2 :

$$y_1 - x_1 = x_2 + y_2 \quad \text{et} \quad y_1 - x_1 \in F_1, \quad x_2 + y_2 \in F_2 \quad (5.36)$$

On en déduit :

$$d(x, F_1 \cap F_2) \leq \|x - (y_1 - x_1)\| \leq \|x - y_1\| + \|x_1\| \quad \text{et} \quad d(x, F_1 \cap F_2) \leq \|x - y_1\| + C\|y_1 - y_2\| \leq \|x - y_1\| + C\|x_1\| \quad (5.37)$$

Si D est choisi égal à $1 + C$, la majoration précédente est vraie pour tout ϵ , ce qui démontre la proposition.

¹Ce paragraphe ainsi que les démonstrations s'inspirent de la référence : Haïm Brezis, Analyse fonctionnelle : théorie et applications p 21-22

5.2.5 Exemple d'application

Soient $E = L^1(S^1)$ l'espace de Banach des fonctions intégrables sur le cercle, et $F = c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des suites complexes indexées par les entiers relatifs et tendant vers zéro. L'application $f \mapsto (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ qui associe à la fonction f la suite de ses coefficients de Fourier est continue et injective de E dans F , mais n'est pas surjective. En effet, si tel était le cas, il existerait une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in E$,

$$\|f\|_1 \leq C \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \quad (5.38)$$

En appliquant une telle inégalité à la suite des noyaux de Dirichlet D_k , on arrive à une contradiction. En effet, $\|D_k\|_1$ est d'ordre $\log(k)$ alors que les $|\widehat{D}_k(n)|$ sont bornés par 1.

Corollaire 5.22 (application ouverte) *Soit E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que T est bijectif. Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Démonstration : • La linéarité de l'application T^{-1} se montre facilement. Par exemple, pour prouver que $T^{-1}(\lambda y) = \lambda T^{-1}(y)$, on peut procéder comme suit. Soit $y \in F$, et $x = T^{-1}y \in E$. On a

$$T^{-1}(\lambda y) = T^{-1}(\lambda T x) = T^{-1}(T(\lambda x)) = \lambda x = \lambda T^{-1}(y). \quad (5.39)$$

• Pour prouver la continuité de T^{-1} , on considère $y \in F$, $\|y\| < c$, où c est la constante donnée dans le théorème 2.2 de l'application ouverte. On pose $x = T^{-1}(y)$, ce qui implique que $\|Tx\| < c$. En appliquant le théorème 2.2 on obtient alors $\|x\| < 1$, i.e. $\|T^{-1}(y)\| < 1$. Ainsi, nous avons prouvé l'implication

$$\|y\| < c \Rightarrow \|T^{-1}(y)\| < 1. \quad (5.40)$$

Pour $z \in F$ quelconque, on écrit

$$z = \underbrace{\frac{c}{2\|z\|}}_{c < \|\cdot\|} \frac{2}{c} \|z\|, \quad (5.41)$$

d'où

$$\|Tz\| < \frac{2}{c} \|z\|, T \text{ est continue.} \quad (5.42)$$

5.3 Autres définitions et propriétés indispensables

Il est indispensable de connaître la topologie faible, la topologie quotient, la topologie produit, la topologie forte, pour la suite. on travaillera exclusivement sur un espace de Banach E , son dual sera un espace de Banach noté E' (comme tout dual d'espace vectoriel normé). On notera S la sphère unité de E , c'est à dire l'ensemble des vecteurs de norme 1.

En résumé (on se reportera à la partie topologie 7 pour toutes les preuves) :

- Dans un espace vectoriel normé les opérations algébriques (multiplications par un scalaire et somme) sont continues. La norme est continue elle aussi.

- La topologie associée à la norme sur E est parfois appelée **topologie forte**.
- La topologie faible sur E est la topologie engendrée par la famille des applications linéaires continues ; c'est à dire que c'est la topologie la moins fine qui rende toutes ces applications linéaires continues (ce n'est pas une erreur s'il y a deux fois le mot continu !), c'est à dire qu'une base d'ouverts est constituée par les intersections finies de "bandes" de la forme $\{x; |f_i(x - x_0)| < \epsilon_i\}$, pour certains f_i dans E' , certains $\epsilon_i > 0$, et un certain x_0 dans E . La boule unité fermée de E' (déterminée par la norme $\|\cdot\|_\infty$ ci-dessous rappelée) est compacte pour la topologie faible-* (théorème de Banach-Alaoglu).
- La topologie forte sur le dual est la topologie engendrée par la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui à $f \in E'$ associe $\sup_{x \in S} \|f(x)\|$. La topologie forte est plus fine que la topologie faible, elle-même plus fine que la topologie faible-*.
- Etant donné X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X , la topologie quotient est l'ensemble des parties Y de $X/\mathcal{R}$ telles que $p^{-1}(Y)$ soit un ouvert de X , avec p la projection canonique de X sur $X/\mathcal{R}$. Il faut savoir que par définition p est continue et ouverte.
- La topologie induite par une famille d'applications de X dans d'autres espaces topologiques, est la topologie la moins fine qui rende toutes ces applications continues. Une application f à valeurs dans X muni de la topologie engendrée par la famille des f_i est continue si et seulement si sa composée avec chaque f_i est continue. Il faut noter que la topologie faible est la topologie engendrée par les application linéaire continues.
- La topologie produit, définie sur un produit d'espaces topologiques, est la topologie engendrée par les projections canoniques (i.e. de ses composantes) est continue. Un produit est séparé si et seulement si chacun des facteurs l'est. Le théorème de Tykhonov affirme qu'un produit de compacts est compact.

5.4 Quelques convergences dans les espaces de fonctions

a) Quelques rappels de topologie

Les résultats sont parfois donnés sans preuves ; on se référera à la partie 7.

- La **convergence simple**

Définition 5.2 (13.17 Convergence simple) On dit qu'une suite f_n d'applications de X dans Y converge simplement vers f si pour tout x dans X , $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ pour n tendant vers $+\infty$.

La convergence simple correspond-elle à une topologie ?

Proposition 5.23 (13.18) *Soit l'espace Y^X des applications de Y dans X , avec Y un espace topologique. La topologie produit (??) sur Y^X a pour suites convergentes les suites simplement convergentes. C'est pourquoi on appelle cette topologie la topologie de la convergence simple.*

Démonstration :

Soit f_n une suite d'éléments de Y^X , convergeant simplement vers une certaine fonction f . Montrons qu'elle converge aussi vers une fonction f pour la topologie produit. Soit U un ouvert pour la topologie produit, contenant f . Alors (par définition) il existe $x_1, \dots, x_n$ dans X et V_i voisinage de $f(x_i)$ dans Y tel que $U = \prod V_i$. Il est alors clair qu'à partir d'un certain rang les f_n sont dans U .

Supposons maintenant que (f_n) est une suite d'éléments de Y^X , convergeant vers une certaine fonction f pour la topologie produit. Donnons nous alors x dans X ; et U un voisinage de $f(x)$ dans Y . Alors $V = \{f\}$ est un voisinage de f dans Y^X , donc f_n est dans V à partir d'un certain rang, donc $f_n(x) \in U$ à partir de ce même rang. Ceci montre que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$. $\bullet$

Grâce à ce résultat on obtient facilement quelques propriétés, dues à la stabilité de certaines propriétés topologiques par passage au produit.

Corollaire 5.24 (13.19 Caractéristique de la topologie de la convergence simple)
On considère la topologie de la convergence simple sur Y^X .

- Si Y est séparé la topologie de la convergence simple est séparée
- Si Y est compact, alors la topologie de la convergence simple est compacte
- Si Y est connexe (resp. par arcs), alors la topologie de la convergence simple est connexe (resp. par arcs).

Démonstration :

Un produit de séparés est séparé, un produit de compacts est compact, un produit de connexes est connexe, un produit de connexes par arcs est connexe par arcs. $\bullet$

- convergence uniforme, convergence uniforme des parties

Définition 5.3 (13.20 Suite uniformément convergente) On dit qu'une suite (f_n) d'applications de X dans Y avec Y un espace métrique converge uniformément vers f si pour tout ϵ positif il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout x dans X , $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon$.

Etant donné S une partie de $P(X)$, on dit que la suite (f_n) de fonctions de X dans Y (avec Y espace métrique) est uniformément convergente sur les éléments de S si pour tout $L \in S$ la suite $(f_n|_L)$ est uniformément convergente sur L .

Souvent, X sera un espace topologique localement compact et S sera l'ensemble des compacts de X .

Définition 5.4 (13.21 Topologie de la convergence uniforme) Soit X un ensemble (non vide) et F un espace métrique. L'espace F^X des applications de X dans F est métrique avec les distances

$$d_1(f, g) = \min[1; \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))] \text{ et} \quad (5.43)$$

$$d_2(f, g) = \sup_{x \in X} \frac{d(f(x), g(x))}{1 + d(f(x), g(x))} \quad (5.44)$$

Ces deux distances induisent une même topologie, dite topologie de la convergence uniforme.

Si X est en fait un espace topologique compact, alors sur l'espace des applications continues de X dans F , noté $C^0(X, F)$, cette topologie est aussi induite par la distance

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)). \quad (5.45)$$

Proposition 5.25 (13.22 Métrisabilité : topologie de convergence uniforme)

Lorsque X est un espace topologique compact, et si on se limite à l'ensemble $C^0(X, F)$ des applications continues de X dans F (métrique) alors la topologie définie par la distance $d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ sur $C^0(X, Y)$ est telle que les suites convergentes sont les suites uniformément convergentes au sens de la définition 13.20.

Définition 5.5 (13.23 Topologie de la convergence uniforme sur tout compact)

Si X est un espace topologique localement compact, on peut définir sur $C^0(X, F)$ la famille d'écarts (N_K) , pour K compact non vide de X , par :

$$N_K(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) \in [0, \infty[. \quad (5.46)$$

Et la topologie engendrée par ces écarts a pour suites convergentes les suites uniformément convergentes sur les compacts de X . C'est pourquoi on appelle la topologie engendrée par ces applications **topologie de la convergence uniforme sur tout compact**.

Si la famille $(K_i)_{i \in I}$ (I non nécessairement dénombrable !) est telle que tout compact K de X est inclus dans un certain K_i , alors la famille des N_{K_i} suffit.

La topologie de la convergence uniforme sur tout compact a donc pour base d'ouverts les $(g \mapsto N_K(f, g))^{-1}[0, \epsilon]$ pour $\epsilon > 0$, K compact non vide et f application continue de X dans Y

Proposition 5.26 (13.24 Métrisabilité de la topologie de convergence uniforme sur tout compact)

On suppose X localement compact, réunion dénombrable de compacts K_n , $\forall m, K_m \subset K_{m+1}$, Y métrique ; alors la topologie engendrée par la distance

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{N_{K_k}(f, g)}{1 + N_{K_k}(f, g)} \quad (5.47)$$

admet pour suites convergentes les suites uniformément convergentes sur tout compact au sens de la définition 13.20.

Exercice Soit $x \in K$. Montrer que la fonction qui à $f \in C^0(K, F)$ associe $f(x)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme. (resp. de la convergence uniforme sur tout compact).

- Comparatif entre toutes ces notions de convergence
- Comparatif entre toutes ces notions de convergence

Proposition 5.27 (13.25) *Supposons que X est un espace topologique localement compact, et Y un espace métrique. Alors*

- Convergence pour la topologie de la convergence uniforme
- $\Rightarrow$ Convergence pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact
- $\Rightarrow$ Convergence pour la topologie de la convergence simple

Démonstration :

$\parallel \circ \bullet$

b) Topologies dues aux mesures

(X, μ) étant un espace mesuré, les espaces de fonctions $\mathcal{L}^p(X)$ et $L^p(X)$ ont été définis et étudiés en partie 9.

Rappelons juste que $L^p(X)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalences de l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{R}$ pour la relation d'équivalence "être égales presque partout" qui contiennent au moins un élément dans $\mathcal{L}^p(X)$.

Rappelons aussi que $L^p(X)$, si X est réunion d'une suite croissante (pour l'inclusion) de compacts de mesure finie, pour $1 \leq p < \infty$, est le complété pour la norme $\|\cdot\|_p = f \mapsto \sqrt[p]{\int_X |f|^p}$ de l'ensemble des fonctions continues à support compact (le résultat n'est pas valable pour $p = \infty$; ici l'adhérence serait simplement l'ensemble des applications continues qui, pour tout $\epsilon > 0$, sont inférieures à ϵ^2 en dehors d'un certain compact K_ϵ).

On définit en outre deux autres notions de convergence, liées à la notion de mesure : la convergence en mesure et la convergence presque partout.

Définition 5.6 (13.26 Convergence presque partout et Cvgce en mesure)

Soit f_n une suite de fonctions de X dans Y , avec X un espace mesuré, et Y un espace topologique.

On dit que f_n converge presque partout vers f s'il existe N négligeable inclus dans X tel que f_n converge simplement vers f sur le complémentaire de N .

Soit f_n une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ avec X un espace mesuré.

On dit que f_n converge en mesure vers f si pour tout ϵ la limite pour $n \rightarrow \infty$ de la mesure de $\{x; |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$ est nulle.

On a alors les résultats entre nos différentes notions de convergence des f_n vers f (lorsque toutes sont définies) : (notez bien que $p < \infty$)

- $\Rightarrow$ Convergence uniforme
- $\Rightarrow$ Convergence uniforme sur tout compact

²en module !

- $\Rightarrow$ Convergence simple
- $\Rightarrow$ Convergence presque partout
- $\Downarrow$ si les f_n sont majorées en module par une fonction g appartenant à L^p

Convergence dans L^p

- $\Rightarrow$ Convergence en mesure (on dit aussi, pour des variables aléatoires, en probabilité)
- $\Rightarrow$ Convergence presque partout d'une suite extraite

et Convergence presque partout et X de mesure finie $\Rightarrow$ convergence en mesure

Démonstration :

De la dernière implication :

Il suffit de montrer que si f_n tend vers 0 presque partout, alors f_n tend vers 0 en mesure. (si l'on suppose $\mu(X) < \infty$). On considère $\epsilon > 0$, et on définit l'ensemble mesurable $A_n = \{x \in X; |f_n(x)| > \epsilon\}$; le but est démontrer que $\lim \mu(A_n) = 0$.

L'hypothèse que f_n tend vers 0 presque partout signifie qu'il existe un ensemble N négligeable tel que $\forall x, x \in N \Rightarrow \lim_n f_n(x) = 0$

Ceci implique $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \subset N$.

N étant négligeable, on en déduit que $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 0$.

On a donc une intersection décroissante d'ensembles. En mesure finie, on sait qu'alors

$$\lim_n \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 0 \quad (5.48)$$

(par le lemme de Fatou 8.42)

Enfin, comme $A_n \subset \bigcup_{k \geq n} A_k$, on a $0 \leq \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$, d'où en passant à la limite $\lim_n \mu(A_n) = 0$. $\circ \bullet$

Ci-dessous une liste de contre-exemples, pour bien se mettre en tête qu'il ne faut pas confondre convergences et convergences :

- **convergence uniforme sur tout compact n'implique pas la convergence uniforme.**

En effet, sur $[0, +\infty[$ la suite f_n définie par

$$f_n = 1 \text{ si } x < n, f_n(x) = 0 \text{ sinon} \quad (5.49)$$

converge uniformément sur tout compact vers la fonction constante égale à 1, mais ne converge pas uniformément vers cette fonction.

- **Convergence simple n'implique pas convergence uniforme sur tout compact.**

Il suffit de prendre $f_n = \max(1-nx, 0)$ sur $[0, 1]$, $f_n(x)$ converge clairement vers 0 pour $x > 0$ et vers 1 pour $x = 0$. La convergence n'est pas uniforme car le sup de $|f_n - f|$ reste égal à 1 ; elle n'est pas non plus uniforme sur tout compact car $[0, 1]$ étant compact on aurait alors convergence uniforme.

- **Convergence presque partout n'implique pas convergence simple.**
Evident : $f_n(x) = 1$ pour tout x de $[0, 1[$ et $f(1) = 0$.
- **Convergence presque partout et même convergence simple n'implique pas convergence dans L^p .**
si les fonctions ne sont pas majorées en module par une fonction de L^p (i.e. sans hypothèse de domination).
Par exemple, sur $\mathbb{R}$, $f_n(x) = n$ si $x \in]0, 1/n[$, $f_n(x) = 0$ sinon (on pourrait aussi avoir ce résultat avec des fonctions continues, en considérant des fonctions affines par morceaux...).
- **Convergence dans L^p n'implique pas convergence presque partout.**
On considère $f_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1$ si il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $x + u$ est compris au sens large entre $\sum_{k=1}^n 1/k$ et $\sum_{k=1}^{n+1} 1/k$, 0 sinon.
- **Convergence en mesure n'implique pas convergence dans L^p .**
Même contre-exemple que pour "convergence presque partout et même convergence simple n'implique pas convergence dans L^p " si les f_n ne sont pas majorées en module par une fonction de $L^{p'}$.
- **Convergence presque partout n'implique pas convergence en mesure si X n'est pas finie.**
Sur $\mathbb{R}$, on considère comme contre-exemple l'application f_n qui à x associe $\sin(x/n)$.

5.5 Théorèmes d'Ascoli et conséquences

5.5.1 Théorie

Définition 5.7 (13.27 Equicontinuité) Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications $X \rightarrow Y$ où X est un espace topologique et Y un espace métrique. on dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue en $x \in X$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V_x de x dans X tel que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $y \in V_x$.

On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue sur X si $\mathcal{F}$ en tout point x de X .

Si X est aussi métrique, $\mathcal{F}$ est dite uniformément équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x, y vérifiant $d(x, y) < \alpha$ et tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Exemples.

Une famille finie d'applications continues est toujours équicontinue. On a un équivalent du théorème de Heine pour les familles équicontinues sur un espace compact.

THÉORÈME 5.28 (13.28) Si X est métrique compact et si Y est métrique, si $\mathcal{F}$ est une famille d'applications équicontinues de X dans Y , alors la famille $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue.

Démonstration :

On considère α_x le rayon d'une boule contenue dans le V_x correspondant à un ϵ donné ; on recouvre l'espace avec ces boules, on en extrait un recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue), puis on prend le min des α_x , et on a le résultat. $\bullet$

THÉORÈME 5.29 (13.29 Théorème d'Ascoli) • Soit F un espace métrique³ et E un espace topologique ; soit $\mathcal{F}$ une famille équicontinue en $e \in E$ de fonctions de E dans F . Alors $\overline{\mathcal{F}}$ ⁴ est équicontinue en e .

- Si $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point alors $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinue en tout point.
- Avec $\mathcal{E}$ une partie dense de E , la topologie de la convergence simple, la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, la topologie induite par la convergence simple sur $\mathcal{E}$ ⁵, induisent la même topologie sur $\mathcal{F}$ (si $\mathcal{F}$ est équicontinue sur X).

Démonstration :

▷▷ On prouve les deux premiers • points ◦

On se donne $\epsilon > 0$. On a donc un certain U voisinage de e tel que pour tout x dans U et tout $f \in \mathcal{F}$, $d(f(x), f(e)) < \epsilon$. On cherche à montrer que cela est en fait vrai pour tout $f \in \overline{\mathcal{F}}$. On se donne une telle fonction f , et un certain x dans U .

On définit alors V_x , l'ensemble des applications g de E dans F telles que $d(g(x), f(x)) < \epsilon$ et $d(g(e), f(e)) < \epsilon$. V_x est un voisinage de f pour la topologie simple, donc il doit intersecter $\mathcal{F}$; soit g dans l'intersection obtenue. Il suffit alors d'écrire

$$\{g \in \mathcal{F}; \forall y \in K, d(f(y), g(y)) < \epsilon\} \quad (5.50)$$

▷ Il est clair que la topologie de la convergence sur $\mathcal{E}$ est moins fine que la topologie de la convergence simple, elle-même moins fine que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (rappelons qu'un singleton, comme tout ensemble fini séparé, est compact).

Le seul problème est la réciproque. On se donne donc U un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, f dans U , et on cherche à montrer que U contient un voisinage pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{E}$ de f .

U étant ouvert en f pour la topologie forte, il existe un compact K et un réel $\epsilon > 0$ tels que

$$\{g \in \mathcal{F}; \forall y \in K, d(f(y), g(y)) < \epsilon\}. \quad (5.51)$$

soit inclu(s) dans U .

$$\forall x, \exists U_x, \text{ ouvert en } x; \forall g \in \mathcal{F}, \forall y \in U_x, d(g(x), g(y)) < \epsilon/5 \quad (5.52)$$

Alors par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un sous-ensemble I fini de K tel que $K \subset \bigcup_{x \in I} U_x$. Les U_x étant ouverts non vides et $\mathcal{E}$ étant dense dans E , on choisit pour $x \in I$ un point $y_x \in \mathcal{E} \cap U_x$. (Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous recouvrement fini)

Considérons alors $W = \{ \}$

$$\forall z \in K, \exists x \in I / z \in U_x \quad (5.53)$$

$$\text{et } d(g(z), f(z)) \leq d(g(z), g(x)) + d(g(x), g(y_x)) + d(g(y_x), f(y_x)) + d(f(y_x), f(x)) + d(f(x), f(z)) \leq (5.54)$$

Donc $g \in U$, donc $W \subset U$ et donc U est un voisinage de f pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{E}$. d'où le résultat. ▷ ◦•

³Hypothèse facile à retenir ; on ne pourrait pas définir la notion de famille équicontinue si F n'était pas métrique.

⁴Adhérence prise pour la topologie de la convergence simple, c'est à dire la topologie produit dans F^E .

⁵C'est à dire la topologie induite par les projections canoniques de F^E sur les (F^x) pour $x \in \mathcal{E}$.

Hirsh : Ascoli : relativement compacte ssi équicontinue & bornée (ds $C(X)$)
 Arzela-Ascoli (ds $C^0(K, F)$) relativement compacte ssi équicontinue & $\forall x \in K, \{f(x), f \in \mathcal{F}\}$
 Hirsh : Ascoli : critère de relative compacité ds $C(X)$

THÉORÈME 5.30 (13.30 Théorème d'Arzela-Ascoli) *Soit K un espace compact et F un espace métrique. Une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C^0(K, F)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*

- *La famille est équicontinue*
- *Pour tout $x \in K$ l'ensemble des $f(x)$ pour $f \in \mathcal{F}$ est relativement compact*

(Une partie Y d'un espace métrique est relativement compacte dans X s'il existe un compact K de X tel que $Y \subset K$ ou, ce qui revient au même, si l'adhérence de Y dans X est compacte. En terme de suites, Y relativement compact ssi de toute suite de Y on peut extraire une suite convergente (dont la limite est dans X mais pas nécessairement dans Y)).

Application :

Voire simplement la partie applications, ci-dessous ; mais aussi le théorème 13.57 ou le théorème d'existence de Cauchy-Peano. On peut aussi citer des applications étonnantes en mécanique quantique des fluides (équation de Shrödinger), sur lesquelles on ne s'aventurera pas ici.

Notons l'existence d'une extension dite de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, du théorème d'Arzela-Ascoli : dans cette extension, $\mathcal{F}$, au lieu d'être un ensemble de fonctions continues, est un borné de L^p pour $p \in [1, +\infty[$. Ce théorème permet en particulier de montrer le théorème de Rellich-Kondrachov.

Figure 5.1: Illustration de la preuve du théorème d'Arzela-Ascoli. L'adhérence de la famille considérée est un fermé d'un produit de compacts, donc est un compact ; il reste à vérifier que l'adhérence est bien incluse dans $C^0(K, F)$, et que la topologie produit induit bien la topologie de la distance uniforme.

Démonstration :

Tout d'abord supposons que notre famille $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C^0(K, F)$. Pour tout x l'évaluation $\hat{x} : C^0(K, F) \rightarrow F$, $f \mapsto \hat{x}(f) = f(x)$ est continue donc l'image $\hat{x}(\mathcal{F})$ est compacte, or il contient $\{f(x); f \in \mathcal{F}\}$; donc l'adhérence de ce dernier ensemble est un fermé d'un compact, et est donc compacte, d'où le second point. Par ailleurs, comme $\mathcal{F}$ est relativement compacte, avec $\epsilon > 0$, on peut trouver $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, $d(f_i, f) < \epsilon$; la famille des f_i étant équicontinue comme toute famille finie, pour $x \in K$ donné, il existe un voisinage V_x de x tel que $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon$ pour tout $y \in V_x$. Comme $d(f(x), f(y)) \leq d(f_i(x), f_i(y)) + 2d(f_i, f)$, on voit que, pour tout $y \in V_x$ on a $d(f(x), f(y)) \leq 3\epsilon$.

Réciproquement (voir figure 13.1), supposons les deux conditions données remplies, et montrons que la famille $\mathcal{F}$ est relativement compacte. pour cela on considère $C^0(K, F)$ comme un sous-ensemble de F^K muni de la topologie produit, cette inclusion induisant sur $C^0(K, F)$ la topologie de la convergence simple. Posons $C_x = \{f(x); f \in \mathcal{F}\}$.

Par la seconde condition (qui n'intervient qu'ici), C_x est compact. Comme $\mathcal{F}$ est inclus dans le produit des C_x , $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans F^K . Il faut alors montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est inclus dans $C^0(K, F)$, et que la topologie produit sur $\overline{\mathcal{F}}$ et la topologie de la distance sont les mêmes, ce qui finira la preuve.

Lemme 5.31 (13.31) Si $\mathcal{F}$ est équicontinue alors $\overline{\mathcal{F}} \subset C^0(K, F)$ (adhérence pour la topologie produit).

Démonstration :

Le théorème d'Ascoli (2ème point) implique que la famille $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinue, ce qui implique clairement le résultat. $\circ\bullet$

Lemme 5.32 (13.32) La topologie induite par la topologie produit sur $\overline{\mathcal{F}}$ et la topologie de la distance (=topologie de la convergence uniforme) sont les mêmes.

Démonstration :

Chaque fonction $\hat{x}$ (évaluation en x) étant continue, tout ouvert de $\overline{\mathcal{F}}$ est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme.

Il reste à voir que tout voisinage de f_0 (appartenant à $\overline{\mathcal{F}}$) dans $\overline{\mathcal{F}}$ pour la métrique contient un voisinage de f_0 dans $\overline{\mathcal{F}}$ muni de la topologie produit. Soit $\epsilon > 0$, et considérons $\{g \in \overline{\mathcal{F}}; \max \{d(g(x), f_0(x)) \leq \epsilon\}\}$ (qui décrit une base de voisinages de $\overline{\mathcal{F}}$ pour la métrique). Pour tout x , on obtient par la condition 1 un voisinage ouvert de x dans K tel que si $y \in V_x$ on ait $d(h(x), h(y)) < \epsilon/3$ pour tout $h \in \overline{\mathcal{F}}$. Par compacité de K on peut trouver $x_1, \dots, x_n$ tels que $K = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Considérons alors $\mathcal{V} = \{g \in \overline{\mathcal{F}}; d(g(x_i), f_0(x_i)) < \epsilon/3\}$; c'est un voisinage de f_0 pour la topologie produit. Si $g \in \mathcal{V}$ et $x \in K$, soit x_{i_0} tel que $x \in V_{x_{i_0}}$; on a alors

$$d(g(x), f_0(x)) \leq d(g(x), g(x_{i_0})) + d(g(x_{i_0}), f_0(x_{i_0})) + d(f_0(x_{i_0}), f_0(x)) \quad (5.55)$$

donc $d(g(x), f_0(x)) \leq \epsilon$ pour tout $x \in K$. Par conséquent le voisinage $\{g \in \overline{\mathcal{F}}; d(g(x), f_0(x)) \leq \epsilon\}$ de f_0 pour la topologie de la convergence uniforme contient $\mathcal{V}$ qui est un voisinage de f_0 pour la topologie produit. En résumé, pour cette preuve, un sens est trivial, et l'autre sens se prouve en utilisant une boule pour la distance, et en appliquant à la fois l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ et la compacité de K . $\circ\bullet$

Ces deux règles achèvent donc le théorème d'Arzela-Ascoli. En résumé il faut donc, pour le sens difficile :

- $\triangleright$ Utiliser la condition sur les parties relativement compactes de F pour conclure à la relative compacité de $\mathcal{F}$ dans l'espace produit
- $\triangleright$ Utiliser l'équicontinuité pour montrer que $\overline{\mathcal{F}} \subset C^0(K, F)$
- $\triangleright$ Utiliser l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ et la compacité de K pour montrer que les deux topologies sont égales.

$\circ\bullet$

5.5.2 Applications

a) Topologie dev $H(\Omega)$

On travaille sur $H(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{C}$, munie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Rappelons que $H(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Définition 5.8 (13.33 Borné de $H(\Omega)$) On dit d'une partie $\mathcal{F}$ de $H(\Omega)$ qu'elle est **bornée** si pour tout compact K de Ω il existe une certaine constante C_K telle que pour toute f dans $\mathcal{F}$ et tout k dans K , $|f(k)| \leq C_K$.

THÉORÈME 5.33 (13.34) Les parties compactes de $H(\Omega)$ sont les parties fermées et bornées.

Démonstration :

- ▷ Montrons tout d'abord (partie facile) que les parties compactes sont fermées et bornées.
 - Les parties compactes sont des fermées, par le lemme 7.105 (tout compact d'un espace séparé est fermé).
 - Les parties compactes sont bornées : c'est évident.
- ▷ Supposons que K soit une partie fermée bornée de $H(\Omega)$.
 - Montrons tout d'abord que K est équicontinue en tout point x de Ω . Soit donc un tel x .
 - x est centre d'un certain disque compact inclus dans Ω
 - toute f de K est bornée par un certain M sur ce disque de rayon R
 - donc la dérivée de f en tout point du disque de centre x et de rayon $R/2$ est majorée par $2M/R$, grâce à l'estimateur de Cauchy (théorème 17.37).
 - donc $\mathcal{F}$ est équicontinue en x , par le théorème des accroissements finis 12.15.
 - Etant donné x dans Ω , l'ensemble des $f(x)$ pour f dans $\mathcal{F}$ est borné, donc relativement compact.
 - Par le théorème d'Arzela-Ascoli 13.30, K est donc relativement compact, or il est fermé, donc il est compact.

◊ • ◊

Corollaire 5.34 (13.35) $H(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est métrisable, mais pas normable.

Démonstration :

Pour voir que $H(\Omega)$ est métrisable, il suffit de consulter le lemme 7.183 (approximation d'ouverts par des compacts) et le théorème 13.24 (métrisabilité de la convergence uniforme). D'après le théorème de Riesz 7.119, si $H(\Omega)$ était normable, alors la boule unité fermée serait compacte si et seulement si l'espace était de dimension finie. or $H(\Omega)$, n'est pas de dimension finie. ◊ •

Chapter 6

Espaces de fonctions différentiables

6.1 La hiérarchie des $C^k(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^\times$

6.1.1 Espaces $C^n[a, b]$

Au-delà de $C^0[a, b]$, on peut construire des espaces de Banach dont les éléments sont des fonctions sur $[a, b]$, et dont on exige non seulement la continuité, mais aussi une certaine différentiabilité.

Définition 6.1 (5) *L'espace des fonctions f sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles, n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) fois continûment différentiables, muni de l'addition interne et de la multiplication externe par un élément de $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ que l'on peut normer par*

$$\|f\|_n := \sup \left(\left\{ \|f^{(k)}\|_0 \mid k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \right). \quad (6.1)$$

Il est noté $C^n[a, b]$ ($f^{(k)}$ désigne la k -ième dérivée de f).

THÉORÈME 6.1 (2) *Les espaces $C^n[a, b]$ sont des espaces de Banach.*

Définition 6.2 (13.36 Espaces $C^k(\Omega)$) *Etant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $C^k(\Omega)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions k fois continûment dérivables de Ω dans $\mathbb{C}$.*

$C^k(\Omega)$ est stable par produit, et si f est dans $C^k(\Omega)$ et ne s'annule pas alors $1/f$ est dans $C^k(\Omega)$.

Pour f dans $C^k(\Omega)$ et ν dans $\mathbb{N}^n$ telle que $\sum_{i=1}^n \nu_i \leq k$, on note

$$\partial^\nu f = \frac{\partial^{|\nu|} f}{(\partial x_1)^{\nu_1} \cdots (\partial x_n)^{\nu_n}} \quad (6.2)$$

L'ordre des dérivations importe peu, comme on l'a vu dans le chapitre de calcul différentiel.

Définition 6.3 (13.37 Opérations dans $\mathbb{N}^n$) *Etant donnés ν et η dans $\mathbb{N}^n$:*

on note $\nu! = \prod_{i=1}^n (\nu_i)!$.

- on note $\nu \geq \eta$ si $\forall i \in [1, n], \nu_i - \eta_i \geq 0$
- si $\nu \geq \eta$ on note $\alpha = \nu - \eta$ avec $\forall i \in [1, n], \alpha_i = \nu_i - \eta_i$
- si $\nu \geq \eta$ on note $C_\nu^\eta = \frac{\nu!}{\eta!(\nu - \eta)!} = \prod_{i=1}^n C_{\nu_i}^{\eta_i}$
- on note $|\nu| = (\text{longueur de } \nu)$
- on note 0 l'élément $(0, \dots, 0)$ de $\mathbb{N}^n$.

Proposition 6.2 (13.38 Formule de Leibnitz)

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} g \quad (6.3)$$

Bicaïroul Il s'agit d'un produit et pas d'une composition.

Démonstration :

|| Récurrence facile, utilisant le corollaire 12.10. $\circ \bullet$

Définition 6.4 (13.39 Distance sur $C^k(\Omega)$) On définit maintenant K_m comme étant l'intersection de la boule $\overline{B}(0, m)$ et de $\left\{ x; d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{m} \right\}$. On définit ensuite $N_m(f)$, pour f dans $C^k(\Omega)$ par $N_m(f) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^d / |\nu| \leq k} \sup_{K_m} |\partial^\nu f(x)|$.

On définit ensuite sur $C^k(\Omega)$ la distance :

$$d(f, g) = \sum_{m>0} \frac{1}{2^m} \frac{N_m(f - g)}{1 + N_m(f - g)} \quad (6.4)$$

Il est indispensable pour la suite de consulter les propriétés topologiques des K_m ainsi définis ; voir 7.183.

THÉORÈME 6.3 (13.40) • N_m est une semi-norme

- d est bien définie et est une distance
- La topologie définie par cette distance a pour suites convergentes les suites de fonctions (f_n) de $C^k(\Omega)$ telles que pour tout ν tel que $|\nu| \leq k$, $\partial^\nu f_n$ converge uniformément sur tout compact K de Ω .
- $C^k(\Omega)$ est complet pour cette distance.

Démonstration :

▷ Le fait que N_m soit une semi norme est évident (rappelons qu'une semi-norme a tout d'une norme à ceci près qu'une semi-norme peut être nulle ailleurs qu'en 0)

▷ d est bien définie, car $\frac{1}{2^m} \frac{N_m(f-g)}{1+N_m(f-g)} \leq \frac{1}{2^m}$. Il est clair que $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$, et que $d(f,g) = d(g,f)$. Il reste à voir l'inégalité triangulaire.

Pour cela soient f, g et h dans $C^k(\Omega)$ alors

$$N_m(f-g) \leq N_m(f-h) + N_m(h-g) \quad (6.5)$$

Par croissance de $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{N_m(f-g)}{1+N_m(f-g)} \leq \frac{N_m(f-h) + N_m(h-g)}{1+N_m(f-h) + N_m(h-g)} \quad (6.6)$$

$$\frac{N_m(f-g)}{1+N_m(f-g)} \leq \frac{N_m(f-h)}{1+N_m(f-h)} + \frac{N_m(h-g)}{1+N_m(h-g)} \quad (6.7)$$

Il ne reste qu'à sommer en pondérant par $\frac{1}{2^m}$ pour avoir le résultat désiré.

▷ Commençons par montrer qu'une suite convergente pour cette distance est bien convergente uniformément sur tout compact, ainsi que toutes ses dérivées. Ce résultat est en fait clair ; il suffit de voir que tout compact de K est inclus dans un K_i ($\subset K_m$ pour $m \geq i$) ; et que pour que $d(f,g)$ tende vers 0, il faut que $N_m(f,g)$ tende vers 0.

La réciproque est plus laborieuse.

Réciproquement, supposons que toutes les dérivées $\leq k$ de f_n converge uniformément sur tout compact, notons f la fonction limite. Alors donnons nous $\epsilon > 0$. Soit m tel que $\sum_{i=m+1}^{\infty} 1/2^i < \epsilon$. Choisissons ensuite N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $m' < m$, $N_{m'}(f_n - f) \leq \epsilon$. Alors on a bien $d(f_n, f) \leq 2\epsilon$ pour tout $n \geq N$.

▷ Il reste à montrer la propriété de complétude.

Donnons-nous (f_n) une suite de Cauchy pour la distance ainsi définie sur $C^k(\Omega)$. pour tout x dans Ω il existe un certain m tel que $x \in \text{Int}(K_m)$

Le fait que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy nous permet de déduire que pour tout $\nu \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\nu| \leq k$, $(\partial^\nu f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. On note $f_{\infty, \nu}(x)$ la limite.

Pour tout m , on va montrer par récurrence sur $|\nu|$ que f est $C^{|\nu|}$ sur K_m , et que sur l'intérieur de K_m , on a $f_{\infty, \nu} = \partial^\nu f_{\infty, 0}$.

La propriété est claire pour $|\nu| = 0$; une limite uniforme de fonctions continues est continue.

On se donne alors ν en supposant la propriété vraie jusqu'à $|\nu| - 1$.

On définit ν' tel que $\partial^\nu = \frac{\partial}{\partial x_p} \partial^{\nu'}$

Alors sur K_m tel que y appartienne à l'intérieur de K_m , intéressons-nous à la dérivée suivant ∂x_p de $\partial^{\nu'} f_{\infty, \nu}$ (si on montre son existence et sa continuité, on aura conclu grâce au théorème 12.29).

Pour y' suffisamment proche de y pour être dans K_m et pour que le segment $[y, y']$ soit dans K_m , avec $\forall i \in [1, n], i \neq p \Rightarrow y_i = y'_i$ (c'est-à-dire que le point y' est juste déplacé suivant la coordonnée p).

$$\partial^{\nu'} f_i(y') - \partial^{\nu'} f_i(y) = \int_{y_p}^{y'_p} \frac{\partial}{\partial x_p} f_i(y_1, \dots, y_{p-1}, u, y_{p+1}, \dots, y_n) du \quad (6.8)$$

$$\partial^{\nu'} f_i(y') - \partial^{\nu'} f_i(y) = \int_{y_p}^{y'_p} \partial^\nu f_i(y_1, \dots, y_{p-1}, u, y_{p+1}, \dots, y_n) du \quad (6.9)$$

Corollaire 6.4 (13.41 Autre façon de voir la topologie sur $C^k(\Omega)$) *La même topologie serait définie en définissant les fermés comme étant les sous-ensembles contenant les limites de toutes suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées d'ordre total $\leq k$ sur tout compact.*

6.2 Convergences faibles et compacité faibles

Rappelons tout d'abord que, lorsque E est un espace métrique, une partie $K \subset E$ est dite compacte si l'une des deux propriétés équivalentes i) et ii) ci-dessous est vérifiée

- i) Pour tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous recouvrement fini, i.e.

$$\forall \{U_i\}_{i \in I} \text{ ouverts de } Et.q.K \subset \cup_{i \in I} U_i, \exists I_k \text{ finie } \subset I \text{ t.q. } K \subset \cup_{i \in I_k} U_i \quad (6.12)$$

- ii) Pour toute suite $(x_n) \subset K$, on peut extraire une sous suite convergente dans K i.e.

$$\forall (x_n) \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } x \in K \text{ t.q. } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x. \quad (6.13)$$

On a le théorème suivant

THÉORÈME 6.5 (2.3 (de Riesz)) *Soit E un e.v.n., alors*

$$\overline{B}_E(0, 1) \text{ est compacte, } \dim E < \infty. \quad (6.14)$$

En conséquence, lorsque E est un e.v.n. de dimension infinie, si $(x_n) \subset E$ et $\|x_n\|_E \leq C$, on ne peut pas conclure qu'il existe une sous suite (x_{n_k}) convergente (contrairement au cas où $\dim E < 1$). Néanmoins, dans certains cas, on pourra conclure positivement pour une convergence plus faible.

Définition 6.5 (2.3) *Soit E un espace de Banach.*

- 1) Soit $(x_n) \subset E$. On dit que x_n converge faiblement vers x dans E , et on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\forall f \in E' : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle. \quad (6.15)$$

- 2) Soit $(f_n) \subset E'$. On a la notion de convergence précédente (car E' est un espace de Banach), i.e.

$$f_n \rightharpoonup_{n \rightarrow \infty} f \Leftrightarrow \langle \xi, f_n \rangle \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \langle \xi, f \rangle, \forall \xi \in E''. \quad (6.16)$$

*On a encore une autre notion (différente de la précédente si E n'est pas réflexif). On dit que f_n converge faible * vers f dans E' , et on note $f_n \rightharpoonup^* f$, si*

$$\forall \xi \in J(E) \langle \xi, f_n \rangle \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \langle \xi, f \rangle, \quad (6.17)$$

$$\Leftrightarrow (2.4) \langle f_n, x \rangle \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \langle f, x \rangle \forall x \in E. \quad (6.18)$$

On a les propriétés suivantes:

Proposition 6.6 (2.1) • *i) si $x_n \rightarrow x$ dans E alors $x_n \rightharpoonup x$*

- *ii) si $f_n \rightharpoonup f$ dans E' alors $f_n \rightharpoonup^* f$*
- *iii) si $x_n \rightharpoonup x$ dans E et $f_n \rightarrow f$ dans E' alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.*
- *iv) si $x_n \rightharpoonup x$ dans E alors (x_n) est bornée et $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \|x\|$.*

Preuve.

$J(E) \subset E''$, et si E non réflexif : $J(E) \neq E''$

Les propriétés i), ii) et iii) sont faciles à montrer, leur démonstration est laissée au lecteur. Montrons iv). Soit $x_n \rightharpoonup x$ dans E . on a :

$$\forall f \in E' : \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad (6.19)$$

et, en particulier, pour tout $f \in E'$ fixé, $\langle f, x_n \rangle$ est une suite bornée (dans $\mathbb{R}$). Nous définissons $(T_n) \subset \mathcal{L}(E', \mathbb{R})$ en posant

$$T_n(f) := \langle f, x_n \rangle. \quad (6.20)$$

Cette suite d'opérateurs vérifie

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| < \infty \forall f \in E'. \quad (6.21)$$

Nous utilisons alors le théorème 2.1, pour obtenir :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E', \mathbb{R})} < \infty. \quad (6.22)$$

Mais, par ailleurs nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(E', \mathbb{R})} = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x_n \rangle| \stackrel{(2.2)}{=} \|x_n\|_E. \quad (6.23)$$

Nous pouvons donc conclure que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty, \quad (6.24)$$

i.e. (x_n) est bornée.

On a

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \|x_n\|, \forall f \in E', \quad (6.25)$$

et en prenant la limite inférieure (voir les rappels après cette preuve), nous obtenons:

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|. \quad (2.6) \quad (6.26)$$

En passant au suprémum sur $f \in E'$, $\|f\| \leq 1$ dans (2.6), et en utilisant la propriété (2.2) nous obtenons alors

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|, \quad (6.27)$$

ce qui termine la preuve. •

Rappels sur $\liminf$ et $\limsup$

Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$, une suite quelconque. Nous pouvons lui associer les suites (x_n) et $(\bar{x}_n)$ définies par:

$$\underline{x}_n := \inf_{k \leq n} x_k \quad \bar{x}_n := \sup_{k \geq n} x_k. \quad (6.28)$$

On vérifie facilement que pour tout entier n : $\underline{x}_n \leq x_n \leq \bar{x}_n$, et encore que $(\underline{x}_n)$ est croissante, alors que $(\bar{x}_n)$ est décroissante. Il s'en suit que $(\underline{x}_n)$ et $(\bar{x}_n)$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$, et on pose

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n \leq \infty, \quad (6.29)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n \leq \infty. \quad (6.30)$$

Dans le cas où (x_n) converge vers x , alors $(\underline{x}_n)$ et $(\bar{x}_n)$ convergent aussi vers x . Lorsque (x_n) est seulement bornée alors (x_n) est encore convergente (car elle est croissante et majorée). Dans ce cas donc la limite inférieure de (x_n) existe (dans $\mathbb{R}$). C'est cette propriété que nous avons utilisé dans la preuve précédente.

Nous avons vu dans le théorème 2.3 que, si E est un espace de Banach de dimension infinie, et que $(x_n) \subset E$ est une suite bornée, il n'est pas possible d'affirmer que l'on peut en extraire une sous suite convergente. Cependant, on a les deux résultats suivant:

THÉORÈME 6.7 (2.4) *Soit E un espace de Banach séparable et (f_n) une suite bornée dans E' . Alors il existe une sous suite extraite qui converge faiblement vers un certain $f \in E'$, i.e.*

$$f_{n_k} \rightharpoonup^* f. \quad (6.31)$$

pourquoi faible étoile, pourquoi hypothèse séparabilité

Preuve. c.f. [1], corollaire III.26, p50. •

THÉORÈME 6.8 (2.5) *Soit E un espace de Banach réflexif et (x_n) bornée dans E . Alors il existe une sous suite extraite qui converge faiblement vers un certain $x \in E$, i.e.*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x. \quad (6.32)$$

pourquoi hypothèse séparabilité

Preuve. c.f. [1], théorème III.27, p50. •

6.3 La topologie faible

Nous allons montrer ici quelques propriétés de la topologie faible.

Corollaire 6.9 (13.42) *La topologie faible est séparée.*

Démonstration :

|| C'est une application directe du théorème 13.8 ; les singleton sont compacts, on en prend deux, on les sépare au sens strict par un hyperplan fermé ; les deux demi-espaces ouverts restants sont des ouverts séparants les deux points. ◯•

Définition 6.6 (13.43 Convergence pour la topologie faible) On se place dans un espace vectoriel normé E . On note $x_n \rightharpoonup x$ le fait que la suite x_n d'éléments de E converge vers $x \in E$ pour la topologie faible.

On note $x_n \rightarrow x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie de la norme, et $f_n \rightarrow f$ dans E' pour la convergence de f_n vers f pour la topologie forte. On pourra aussi qualifier de convergence forte la convergence dans E pour la norme.

Exercice 1 Dans cette proposition, les $\forall f$ désignent $\forall f \in E'$.

$$(x_n \rightharpoonup x) \Rightarrow (\forall f, f(x_n) \rightarrow f(x)) \quad (6.33)$$

$$(x_n \rightarrow x) \Rightarrow (x_n \rightharpoonup x) \quad (6.34)$$

$$(x_n \rightharpoonup x) \Rightarrow (\|x_n\| \text{ bornée et } \|x\| \leq \liminf \|x_n\|) \quad (6.35)$$

$$(x_n \rightharpoonup x \text{ et } f_n \rightarrow f) \Rightarrow (f_n(x_n) \rightarrow f(x) \text{ dans } \mathbb{R}) \quad (6.36)$$

$$(x_n \rightarrow x \text{ et } f_n \rightarrow f) \Rightarrow (f_n(x_n) \rightarrow f(x) \text{ dans } \mathbb{R}) \quad (6.37)$$

6.4 Liens entre topologie faible et topologie forte

6.4.1 En dimension finie

THÉORÈME 6.10 (13.44) Si E est de dimension finie, alors la topologie faible sur E et la topologie forte sur E sont égales.

Démonstration :

▷ La topologie forte est toujours plus fine que la topologie faible (évident au vu des définitions) ; dans un ouvert (au sens de la topologie faible), tout point possède un voisinage de la forme $\bigcap_{i \in I} \{x; f_i(x - x_0) < \epsilon_i\}$, et pour tout point x dans cette intersection on loge une boule ouverte centrée sur x de rayon $\inf \{(\epsilon_i - \|x - x_0\|; \|f_i\|_\infty | i \in I)\}$: il s'agit là d'un ouvert pour la topologie forte.

▷ Réciproquement, soit x dans E , et U un ouvert (pour la topologie forte) contenant x . On cherche à construire un ouvert pour la topologie faible qui contiennent x et qui soit inclus dans U . On peut naturellement se restreindre à $U = B(x, \epsilon)$, boule ouverte de centre x et de rayon ϵ .

▷ On fixe $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E de vecteurs de norme 1.

▷ On note $(f_i)_{i \in [1, n]}$ la famille des formes linéaires telles que $\forall t \in E, t = \sum_{i \in [1, n]} f_i(t) e_i$ (i.e. (f_i) est la base duale de (e_i)).

▷ On peut alors écrire

$$\|t - x\| \leq \sum_{i \in [1, n]} |f_i(t - x)|. \quad (6.38)$$

▷ Il suffit alors d'écrire $V = \{t; |f_i(t - x)| < \epsilon/n\}$ pour avoir un ouvert V pour la topologie faible inclus dans U et contenant x . ◻

On verra en partie 13.7.1 que cette propriété est caractéristique de la dimension finie.

6.4.2 Dans le cas général

THÉORÈME 6.11 (13.45 Faiblement fermé équiv à fortement fermé pour les convexes) Soit E un espace vectoriel normé, et C convexe inclus dans E . Alors C est

faiblement fermé (i.e. fermé pour la topologie faible) si et seulement si C est fortement fermé (i.e. fermé pour la topologie forte).

Application :

On trouvera une application avec la proposition 13.52.

Démonstration :

- Il est clair que si C est faiblement fermé, alors il est fortement fermé. Il suffit donc de se préoccuper de la réciproque.
- Supposons maintenant C fortement fermé.
- On se donne un point x appartenant au complémentaire de C .
- D'après le théorème 13.8 il existe un hyperplan fermé qui sépare C et $\{x\}$ au sens strict.
- L'hyperplan délimite deux demi-espaces faiblement ouverts, dont l'un contient x et est inclus dans le complémentaire de C .
- C a donc un complémentaire faiblement ouvert, et C est donc faiblement fermé.

◦●

THÉORÈME 6.12 (13.46) Soient E et F des espaces de Banach. On se donne T une application linéaire de E dans F . Alors T est continue pour E et F munis chacun de sa topologie faible si et seulement si T est continue pour E et F munis de leur topologie d'espaces vectoriels normés (i.e. la topologie forte).

Démonstration :

- ▷ Supposons tout d'abord que T est continue de E dans F pour la topologie forte, et montrons que T est continue pour la topologie faible.
 - on va procéder en montrant que pour toute forme linéaire continue f sur F , l'application $f \circ T$ est continue (de E muni de la topologie faible dans $\mathbb{R}$).
 - soit donc $f \in F'$.
 - $f \circ T$ est continue pour la topologie forte, et linéaire.
 - $f \circ T$ est donc continue pour la topologie faible aussi (puisque, par définition, la topologie faible rend continues toutes les formes linéaires continues).
- ▷ Supposons maintenant que T est continue de E dans F pour la topologie faible, et montrons que T est continue pour la topologie forte.
 - le graphe de T est alors fermé dans le produit $E \times F$, muni de la topologie produit des topologies faibles de E et F .
 - le graphe de T est donc aussi fermé pour le produit des topologies fortes car ce graphe est un convexe faiblement fermé de $E \times F$, et donc T est continue pour la topologie forte (re-utilisation du théorème du graphe fermé 7.180).

◦●

Noter que la topologie forte sur $E \times F$ correspond à la topologie produit des topologies fortes sur E et sur F ; et il en est de même pour les topologies faibles.

Chapter 7

Espaces de Hölder

7.1 Espaces de Hölder

Les espaces de Hölder ont une grande importance en ingénierie. Fréquemment, on cherche une fonction "régulière" qui représente bien des données. Typiquement, on va alors chercher une fonction qui ait un bon compromis entre "la fonction représente bien les données" et "la fonction n'est pas trop bizarre". On pourra se référer à [45] pour une analyse de la significativité statistique de l'adéquation de fonctions à des données empiriques (mais cela va très au-delà du programme de l'agrégation). On définit préliminairement les espaces $Lip_\alpha(\Omega)$ avant de généraliser aux espaces de Hölder.

7.1.1 Espaces $Lip_\alpha(\Omega)$

Définition 7.1 (13.47 Condition de Hölder d'ordre α) On dit qu'une application d'un métrique E dans $\mathbb{C}$ vérifie la **condition de Hölder** d'ordre α s'il existe C dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tous x et y dans E , $|f(x) - f(y)| \leq C d(x, y)^\alpha$.

Étant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et α un réel appartenant à $]0, 1]$, on note $Lip_\alpha(\Omega)$ l'ensemble des applications bornées de Ω dans $\mathbb{C}$ vérifiant la condition de Hölder d'ordre α sur Ω .

Étant donné f dans $Lip_\alpha(\Omega)$, on note $\|f\|_\alpha$ le réel $\|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha}$. Il s'agit d'une norme.

Bicaïrfoule ! Définir Lip_α pour $\alpha > 1$ est peu intéressant, car on travaillerait sur des fonctions localement constantes sur un ouvert, c'est à dire, les composantes connexes d'un ouvert étant ouvertes et dénombrables, sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^N$.

Proposition 7.1 (13.48 Propriétés de $Lip_\alpha(\Omega)$) • Toute fonction dans $Lip_\alpha(\Omega)$ est uniformément continue.

- Toute fonction dans $Lip_\alpha(\Omega)$ se prolonge en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$.
- Si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, alors $Lip_\beta(\Omega) \subset Lip_\alpha(\Omega)$
- Toute fonction C^1 à dérivée bornée est dans $Lip_\alpha(\Omega)$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$.

Démonstration :

La plupart des points sont évidents ; le prolongement en une fonction continue utilise le fait que $\mathbb{R}$ est complet, le fait que Ω est dense dans $\overline{\Omega}$, l'uniforme continuité de toute fonction dans $Lip_\alpha(\Omega)$ et le théorème 7.169. $\circ\bullet$

THÉORÈME 7.2 (13.49 ($Lip_\alpha(\Omega), \|\cdot\|_\alpha$) **est un Banach**) $Lip_\alpha(\Omega)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha$) est un espace de Banach.

Démonstration :

- Donnons-nous (f_m) une suite de Cauchy dans $Lip_\alpha(\Omega)$
- (f_m) est aussi de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- Soit donc f la limite de la suite (f_m) pour la convergence uniforme.
- f est bien bornée, puisque limite uniforme de fonctions bornées.
- $|f_m(x) - f_m(y)| \leq \underbrace{\|f_m\|_\alpha}_{\text{bornée}} \|x - y\|^\alpha$
- On fait alors tendre m vers ∞ , et on constate que f vérifie la condition de Hölder d'ordre α .
- Vérifier que f_m tend vers f pour $\|\cdot\|_\alpha$ est facile...

$\circ\bullet$

Il existe une fonction qui est dans $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ pour tout α dans $]0, 1[$ mais pas dans $Lip_1(\mathbb{R})$; par exemple la fonction définie au théorème 12.48. Ce fait n'est pas immédiat.

7.1.2 Espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$

Définition 7.2 (13.50 Espaces de Hölder, $C^{k,\alpha}(\Omega)$) Etant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, α dans $]0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence sur k les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ par

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = Lip_\alpha(\Omega) \quad (7.1)$$

et pour $k \geq 1$,

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \left\{ f \text{ bornée de } \Omega \text{ dans } C; \forall i \in [1, n] \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ existe et } \in C^{k-1,\alpha} \right\} \quad (7.2)$$

Cette définition équivaut à (voir la définition 13.37 pour les opérations sur $\mathbb{N}^n$) :

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{ f \in C^k(\Omega); f \text{ bornée} \wedge \forall \nu / |\nu| \leq k \Rightarrow D^\nu f \in Lip_\alpha(\Omega) \} \quad (7.3)$$

On munit $C^{k,\alpha}(\Omega)$ de la norme $f \mapsto \|f\|_{k,\alpha} = \sum_{|\nu| \leq k} \|D^\nu f\|_\alpha$

De manière équivalente, $\|f\|_{k,\alpha} = \sum_{|\nu| \leq k} \left(\|D^\nu f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f^\nu(x) - f^\nu(y)|}{|x - y|^\alpha} \right)$
(c'est la même expression développée !) et la norme suivante est équivalente à

celle-ci :

$$f \mapsto \|f\|'_{k,\alpha} = \sum_{|\nu| \leq k} \|D^\nu f\|_\infty + \sum_{|\nu|=k} \sup_{x \neq y} \frac{|f^\nu(x) - f^\nu(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad (7.4)$$

Bien sûr il convient de vérifier l'équivalence des deux définitions.
Quelques résultats sans preuve :

THÉORÈME 7.3 (13.51 Propriétés de $C^{k,\alpha}(\Omega)$) • $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est un espace de Banach.

- Les fonctions de $C^{k,\alpha}(\Omega)$ sont prolongeables par continuité sur $\bar{\Omega}$ en fonctions vérifiant la condition de Hölder pour toutes les dérivées $\leq k$.
- $k + \alpha \geq k' + \alpha'$ implique $C^{k,\alpha} \subset C^{k',\alpha'}$
- $\|uv\|_{k,\alpha} \leq \|u\|_{k,\alpha} \|v\|_{k,\alpha}$

Démonstration :

|| Pour plus d'informations sur les espaces de Hölder, on pourra consulter le livre [48] : sur les aspects statistiques de la recherche de fonctions hölderiennes représentatives de données, on pourra aller fouiller [45]. ◦ •

7.2 Espaces $L^p[a, b]$

Définition 7.3 (6) L'espace des fonctions f sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ dont, pour $p \in \mathbb{R}_+^*$ donné, l'intégrale de Lebesgue —8— existe, muni des opérations précédentes, est noté $\mathcal{L}^p[a, b]$.

$\mathcal{L}^p[a, b]$ est un espace vectoriel. On peut définir la fonction à valeurs réelles positives $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ mais ce n'est pas une norme, car $\|f\|_p = 0$ pour toute fonction f nulle presque partout (voir p. 361), et donc non nécessairement nulle partout. Soit F le sous-ensemble de $\mathcal{L}^p[a, b]$ formé des fonctions nulles presque partout. F est un sous espace vectoriel.

THÉORÈME 7.4 (3) L'espace quotient $L^p[a, b] := \mathcal{L}^p[a, b] / F$ est un espace de Banach si $p \in \mathbb{R}_+^* \setminus]0, 1[$.

La norme de $L^p[a, b]$ est également notée $\|\cdot\|_p$. On a $\|[f]\|_p = \|f\|_p$.

Prouver que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme et que l'espace est bien complet est difficile.

Si $p \in]0, 1[$, les espaces ne sont plus complets.

L'espace particulier $L^2[a, b]$ est en outre un espace de Hilbert. Si f_1, f_2 , sont des représentants de deux classes d'équivalence de $L^2[a, b]$, on peut montrer qu'il est possible de définir un produit scalaire par

$$\langle [f_1] \mid [f_2] \rangle := \int_a^b f_1(t) f_2(t) dt, \quad (7.5)$$

car cette expression est indépendante du choix de f_1 et f_2 , puis une norme par

$$\|[f]\|_2 := \sqrt{\langle [f], [f] \rangle} \quad (7.6)$$

7.3 L'espace $L^\infty[a, b]$

Définition 7.4 (7 borne essentielle) Soit $f[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction mesurable (voir p. 361), $c \in \mathbb{R}$, est dite borne essentielle de f si $|f(t)| \leq c$ presque partout.

Définition 7.5 (8) L'ensemble de toutes les fonctions définies sur $[a, b]$, essentiellement bornées, muni des opérations usuelles est noté $\mathcal{L}^\infty[a, b]$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

On définit alors $\|f\|_\infty$ comme la borne inférieure de toutes les bornes essentielles de f . Comme pour les espaces $\mathcal{L}^p[a, b]$, on obtient pas une norme, et il est nécessaire de considérer l'espace quotient par le sous-espace vectoriel F des fonctions nulles presque partout, dont la norme sera également notée $\|\cdot\|_\infty$.

THÉORÈME 7.5 (4) L'espace quotient $L^\infty[a, b] := \mathcal{L}^\infty[a, b]/F$ est un espace de Banach.

On a les relations suivantes entre les différents espaces construits ci-dessus :

$$\forall p, q \in \mathbb{R} \bigcup_{\infty} \text{ tels que } 1 \leq p < q \leq \infty \text{ et } \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ tels que } n < m \quad (7.7)$$

$$C^m[a, b] \subset C^n[a, b] \subset L^q[a, b] \subset L^p[a, b] \quad (7.8)$$

$C^0[a, b]$ admet une base topologique dénombrable (ill. B p. 364), mais il n'en est pas de même pour $L^\infty[a, b]$ et l'espace de l'exemple (4). La dimension infinie de ces espaces entraîne un comportement fondamentalement différent de celui des espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ utilisés en analyse réelle et complexe. Par exemple, un théorème de Banach affirme qu'un espace de Banach est localement compact (voir p. 229) si, et seulement si, il est de dimension finie. Comme les propriétés de compacité sont très utilisées en analyse réelle ou complexe, on comprend que l'analyse dans les espaces de Banach décrits ci-dessus soit plus compliquée.

7.4 Zoologie d'analyse fonctionnelle

Proposition 7.6 (13.52) Soit E Banach de dimension finie. Alors la topologie faible est différente de la topologie forte.

Démonstration :

On a vu au théorème 13.44 que si la dimension est finie, alors la topologie faible et la topologie forte sont égales. On a aussi vu que dans le cas général, la topologie forte est plus fine que la topologie faible. on va montrer ici que la topologie forte est strictement plus fine en dimension infinie, en exhibant un ouvert pour la topologie forte qui n'est pas un ouvert pour la topologie faible, ou ce qui revient au même par passage au complémentaire, un fermé pour la topologie faible.

- On considère la sphère unité S de E . Elle est fortement fermé, comme image réciproque d'un singleton (donc un fermé) par une application continue (la norme).
- On va chercher à déterminer l'adhérence de S pour la topologie faible.
- Soit x de norme < 1 . On va montrer que x est dans l'adhérence de S .
- On se donne U un voisinage de x pour la topologie faible.
- Alors (propriété de la base topologique faible), U contient une intersection d'un nombre fini d'ensemble de la forme $\{t; |f_i(x - t)| < \epsilon_i\}$ où les f_i sont linéaires continues.
- Les f_i étant en nombre fini, l'intersection de leurs noyaux ne saurait être réduite à 0 (en effet sinon l'application qui à t associe $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ serait injective, et donc la dimension de E serait finie majorée par n).
- On peut donc choisir y non nul tel que $f_i(y) = 0$ pour tout i .
- $x + \lambda \cdot y$ est dans U pour tout λ .
- $\|x + \lambda \cdot y\|$ est minorée par

$$|\lambda| \cdot \|y\| - \|x\|, \quad (7.9)$$

et donc on faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on conclut que U intersecte S .

- On en déduit d'un coup que la boule ouverte de rayon 1 n'est pas faiblement ouverte, que la sphère de rayon 1 n'est pas fermée, et que l'adhérence de la sphère de rayon 1 contient au moins la boule fermée de rayon 1. La boule unité fermée du dual d'un espace vectoriel normé étant compacte pour la topologie faible (voire théorème 7.120), cette boule est fermée pour la topologie faible¹ ; et donc l'adhérence de la sphère unité est bien la boule unité fermée.

◐

7.4.1 La topologie faible n'est pas la topologie forte en dimension infinie

7.5 Les topologies sur E'

Rappelons que E' est le dual, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E . En tant que dual d'un espace vectoriel normé, E' est un Banach, c'est-à-dire qu'il est normé complet

E' est muni naturellement de deux topologies déjà vues ; d'une part la topologie forte (c'est-à-dire la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$, avec $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} \|f(x)\|$ - S étant la sphère unité), d'autre part la topologie faible - définie par rapport

à son dual $(E')'$ c'est-à-dire la bidual E'' de E .

On va introduire une troisième topologie, encore moins fine que la topologie faible, la topologie faible- $*$.

7.5.1 La topologie faible- $*$

Pour plus d'informations que dans cette brève introduction on pourra consulter le livre [9] et la section 7.2.4, et feuilleter le résumé qui est 13.1.3. L'intérêt de la topologie faible- $*$ est qu'elle est très faible, plus que la plupart des topologies usuelles (voir la proposition 7.89). En outre, la boule unité fermée est compact pour la topologie faible- $*$ (théorème 7.120). Elle est définie à partir d'une famille d'applications d'où l'importance de la section 7.2.4. La section 4.7.1 sur le dual et le bidual sont importantes aussi - voir aussi le bidual en dimension finie section 6.

Définition 7.6 (13.53 Injection canonique de E dans son bidual E'') On définit une injection canonique de E dans son bidual E'' par $x \mapsto (f \mapsto f(x))$. A tout élément de E on associe donc une forme linéaire continue sur E' (il s'agit donc bien d'un élément de E''). On notera φ_x , pour x dans E , l'application qui à f dans E' associe $f(x)$.

Proposition 7.7 (13.54 Propriétés de l'injection canonique dans le bidual)

On a les propriétés suivantes de l'injection canonique dans le bidual :

- Il s'agit bien d'une injection (voir résultat 13.42).
- Il s'agit d'une isométrie (voir corollaire 13.4).
- Il ne s'agit pas nécessairement d'une bijection : c'est toutefois le cas lorsque E est de dimension finie ou est un espace de Hilbert. Par définition, l'espace E est dit **réflexif** lorsqu'il s'agit d'une bijection.

Démonstration :

|| $\circ \bullet$

Définition 7.7 (13.55 Topologie faible- $*$) La topologie faible étoile, alias topologie faible- $*$, est la topologie engendrée par la famille des φ_x pour x dans E .

On notera $f_n \xrightarrow{*} f$ la convergence de la suite f_n vers f dans E' pour la topologie faible- $*$.

Proposition 7.8 (13.56 Propriétés de la topologie faible- $*$) • La topologie faible- $*$ est séparée.

- $f_n \xrightarrow{*} f$ si et seulement si pour tout x $f_n(x) \rightarrow f(x)$.
- Convergence forte $\Rightarrow$ convergence faible $\Rightarrow$ convergence faible- $*$ (le fait que la convergence faible entraîne la convergence faible- $*$ est due à l'injection canonique de E dans son bidual).
- Si $f_n \xrightarrow{*} f$ alors $\|f_n\|_\infty$ est bornée et $\|f\|_\infty \leq \liminf \|f_n\|_\infty$.
- Si $f_n \xrightarrow{*} f$ et $f_n(x_n)$ alors $f(x)$.

Démonstration :

|| $?? \circ \bullet$

7.5.2 Un résultat utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach, le théorème d'Ascoli et le théorème de Riesz

Le joli théorème suivant est inspiré de [29].

THÉORÈME 7.9 (13.57 Joli théorème) *Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $\|f\|_0 = \max_{[0,1]} |f(t)|$. Alors tout sous-espace vectoriel de E formé de fonctions C^1 et fermé (pour la topologie de $(E, \|\cdot\|_0)$) est de dimension finie.*

Démonstration :

Soit F un tel sous-espace.

- $\triangleright F$ est un Banach pour la norme $\|\cdot\|_1$ où $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$. Prouvons le :
 - Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_1)$.
 - f_n est aussi de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_0)$.
 - f'_n aussi.
 - f_n et f'_n convergent donc uniformément vers deux fonctions, disons f et g respectivement, continues.
 - pour tout t dans $[0, 1]$, $\int_0^t f'_n(u) du \rightarrow \int_0^t g(u) du$.
 - donc $f_n(t) - f_n(0) \rightarrow \int_0^t g$, donc $f(t) - f(0) \rightarrow \int_0^t g$
 - donc $g = f'$
 - donc $f_n \rightarrow f$ dans $(F, \|\cdot\|_1)$.
- $\triangleright$ La norme $\|\cdot\|_1$, définie par $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$ pour $f \in C^1$, est majorée sur F au sens où $\|f\|_1 \leq A\|f\|_0$, pour un certain $A > 0$. Prouvons le :
 - Considérons l'application J identité de $(F, \|\cdot\|_1)$ dans $(F, \|\cdot\|_0)$, où $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$
 - F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_0)$, donc $(F, \|\cdot\|_0)$ est un Banach.
 - F est aussi un Banach dans $(E, \|\cdot\|_1)$ (voir le $\triangleright$ précédent)
 - J est linéaire, continue, bijective entre 2 Banach ; c'est donc un homéomorphisme.
 - ainsi par le théorème d'isomorphisme de Banach (7.178), on a bien le résultat annoncé.
- $\triangleright$ Soit maintenant $B = \overline{\{f \in F / \|f\|_0 \leq 1\}}$. Alors B est équicontinue. Prouvons le :
 - $\|f\|_1 \leq A\|f\|_0 \leq A$, pour tout $f \in B$, donc par l'inégalité des accroissements finis, B est équicontinue.
- $\triangleright$ Pour tout x dans $[0, 1]$, l'ensemble des $f(x)$ pour f dans B est inclus dans $[-1, 1]$, par définition de B ; donc cet ensemble est relativement compact.
- $\triangleright$ Par le théorème d'Arzela-Ascoli, et grâce aux deux points précédents, B est relativement compact. B est fermée par définition.
- $\triangleright$ Par le théorème de Riesz 7.119, F est donc de dimension finie.

◻