

l'intégrale

Jean-Marie Monier

MATHÉMATIQUES

MÉTHODES ET EXERCICES

MP

uploading by KAMAL-EDDINE RKE/

- Les méthodes à retenir
- Plus de 600 énoncés d'exercices
- Indications pour bien démarrer
- Tous les corrigés détaillés

DUNOD

Consultez nos parutions sur dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2009
ISBN 978-2-10-054258-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

MATHÉMATIQUES

MÉTHODES ET EXERCICES

MP

Jean-Marie Monier

*Professeur
en classe de Spéciales
au lycée La Martinière-Monplaisir
à Lyon*

DUNOD

Table des matières

1. Espaces vectoriels normés

Les méthodes à retenir
Énoncés des exercices
Du mal à démarrer ?
Corrigés des exercices

1
2
8
16
20

2. Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Les méthodes à retenir
Énoncés des exercices
Du mal à démarrer ?
Corrigés des exercices

43
44
48
55
59

3. Intégration sur un intervalle quelconque

Les méthodes à retenir
Énoncés des exercices
Du mal à démarrer ?
Corrigés des exercices

77
78
81
89
95

4. Séries

Les méthodes à retenir
Énoncés des exercices
Du mal à démarrer ?
Corrigés des exercices

135
136
140
149
154

5. Suites et séries d'applications

Les méthodes à retenir
Énoncés des exercices
Du mal à démarrer ?
Corrigés des exercices

185
186
192
201
205

6. Séries entières

Les méthodes à retenir
Énoncés des exercices
Du mal à démarrer ?
Corrigés des exercices

247
248
253
262
267

7. Séries de Fourier

Les méthodes à retenir
Énoncés des exercices
Du mal à démarrer ?
Corrigés des exercices

311
311
313
318
320

8. Équations différentielles

Les méthodes à retenir
Énoncés des exercices
Du mal à démarrer ?
Corrigés des exercices

335
336
339
347
351

9. Fonctions de plusieurs variables réelles	377		
Les méthodes à retenir	378		
Énoncés des exercices	382		
Du mal à démarrer ?	385		
Corrigés des exercices	387		
10. Compléments d'algèbre linéaire	397		
Les méthodes à retenir	398		
Énoncés des exercices	400		
Du mal à démarrer ?	406		
Corrigés des exercices	410		
11. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	427		
Les méthodes à retenir	428		
Énoncés des exercices	431		
Du mal à démarrer ?	441		
Corrigés des exercices	445		
12. Algèbre bilinéaire	471		
Les méthodes à retenir	472		
Énoncés des exercices	475		
		Du mal à démarrer ?	486
		Corrigés des exercices	492
13. Algèbre sesquilinéaire	519		
Les méthodes à retenir	519		
Énoncés des exercices	520		
Du mal à démarrer ?	522		
Corrigés des exercices	523		
14. Compléments d'algèbre générale	527		
Les méthodes à retenir	528		
Énoncés des exercices	529		
Du mal à démarrer ?	533		
Corrigés des exercices	535		
15. Géométrie	545		
Les méthodes à retenir	545		
Énoncés des exercices	547		
Du mal à démarrer ?	549		
Corrigés des exercices	551		
Index alphabétique	557		

[illegible]

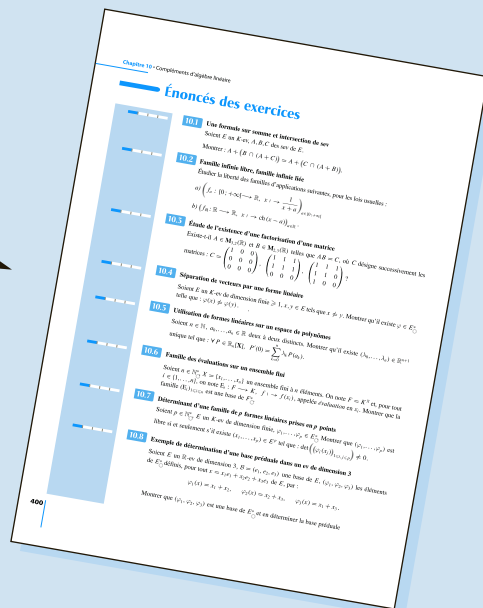
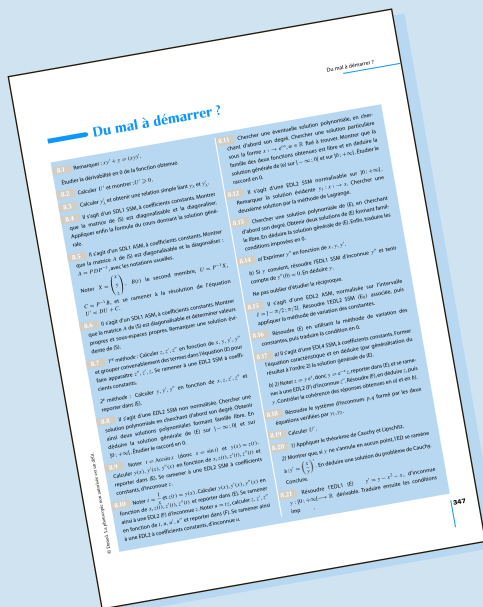
Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.



Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.

Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.



Préface

Alors que, récemment, je feuilletais l'un des manuels de mathématiques qui servait de référence lorsque – voici quelques décennies ! – j'étais en prépa, me revinrent en mémoire certaines sensations : à la lecture des énoncés des exercices que j'avais jadis cochés, d'une concision à la fois élégante et provocante, je me rappelais le plaisir que j'avais éprouvé à la résolution de quelques-uns d'entre eux mais aussi, cette étrange amertume, pas encore totalement estompée aujourd'hui, que j'avais ressentie en abandonnant la recherche de quelques-uns, pourtant signalés d'un simple astérisque, après de vains efforts et plusieurs tentatives avortées.

Les volumes *Méthodes et Exercices* (pour MP d'une part, PC-PSI-PT d'autre part) que J.-M. Monier nous présente aujourd'hui semblent tout spécialement écrits pour éviter ce traumatisme aux étudiants d'aujourd'hui et de demain.

Chacun de ces ouvrages se compose de deux parties éminemment complémentaires :

- Les *méthodes* constituent ce guide précieux qui permet à l'étudiant de passer, confiant, efficacement « coaché », du cours qu'il apprend à la recherche nécessaire et fructueuse des exercices. Si les théorèmes du cours sont les outils de l'artisan-étudiant, les méthodes et techniques proposées ici en sont les modes d'emploi. Évidemment, ces conseils sont particulièrement soignés et pertinents : ne sont-ils pas le fruit de la longue et multiple expérience de J.-M. Monier, pédagogue avéré, interrogateur recherché et auteur apprécié de maints ouvrages reconnus ?

Pour une aide encore plus précise, chaque méthode est assortie de la liste des exercices dans lesquels sa mise en œuvre est souhaitable.

- Les *exercices*, nombreux, variés et souvent originaux, couvrent la totalité du programme, chapitre après chapitre. Ils répondent parfaitement à un triple objectif :
 - ★ permettre d'assurer, d'approfondir et d'affiner, pendant son apprentissage, la compréhension du cours ;
 - ★ consolider et enrichir ses connaissances par la résolution d'exercices plus substantiels et de questions plus délicates ;
 - ★ réaliser des révisions efficaces et ciblées lors de la préparation des épreuves écrites ou orales des concours.

Ces exercices sont judicieusement classés en quatre niveaux de difficulté croissante, permettant ainsi aussi bien au néophyte de se mettre en confiance en traitant une application directe du cours (niveau 1) qu'à l'étudiant chevronné de se mesurer à des exercices plus difficiles et délicieusement subtils (niveau 4). On notera avec plaisir que chaque chapitre est couvert par des exercices des quatre niveaux. L'abandon douloureux devant une question trop abruptement posée, dont je parlais au début, ne saurait se produire avec l'ouvrage de J.-M. Monier : en effet, dans la rubrique « Du mal à démarrer », il apporte à l'étudiant(e) qui le souhaite une aide discrète, rappelant ici la méthode adéquate, donnant là une indication précieuse, ouvrant ailleurs une piste de recherche...

Pour chaque exercice, l'auteur s'est imposé la rédaction complète et appliquée d'un corrigé clair, précis, détaillé, osons le mot, exemplaire. S'il est louable et formateur de chercher, il est plus gratifiant de trouver ! Et, ici encore, le manuel permet à chacun, soit de constater que sa solution est celle qui est fournie (et il en éprouve un indicible plaisir !), soit de s'aider du corrigé pour parvenir, rassuré et guidé, à cette solution.

Qu'il me soit aussi permis d'insister sur l'ampleur de ces volumes, liée à la grande variété des exercices choisis, et qui est rare à ce niveau d'études, en même temps que sur leur prix très modique !

Ces ouvrages de consultation particulièrement agréables constituent l'outil efficace et complet qui permettra à chacun, à son rythme mais en magnifiant ses propres aptitudes, de développer son goût pour les mathématiques et ses compétences et, tout à la fois, de forger son succès.

Quant à moi, un regret est en train de m'assaillir : pourquoi n'ai-je pas attendu la rentrée prochaine pour commencer ma prépa ?

H. Durand,
professeur en Mathématiques Spéciales PT*
au lycée La Martinière Monplaisir à Lyon.

Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Gérard Bourgin, Jean-Paul Charroin, Jean-Paul Christin, Carine Courant, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Cécile Lardon, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Jean-Marie Monier

Plan

Les méthodes à retenir	2
Énoncés des exercices	8
Du mal à démarrer ?	16
Corrigés	20

Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'une application est une norme
- Obtention d'inégalités portant sur des normes
- Montrer que deux normes sont (ne sont pas) équivalentes
- Montrer qu'une partie d'un evn est (n'est pas) fermée, est (n'est pas) ouverte
- Manipulation d'adhérences, d'intérieurs, de fermés, d'ouverts
- Calcul de la distance d'un point à une partie
- Utilisation de la continuité, de la continuité uniforme, du caractère lipschitzien
- Montrer qu'une application linéaire f est continue, calculer $|||f|||$
- Montrer qu'une partie est (n'est pas) compacte, manipulation de parties compactes
- Utilisation d'une suite de Cauchy
- Montrer qu'une partie est (n'est pas) complète, manipulation de parties complètes
- Montrer qu'une partie est (n'est pas) connexe par arcs, manipulation de parties connexes par arcs
- Montrer qu'une application est un produit scalaire
- Déterminer l'orthogonal d'une partie d'un espace préhilbertien

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de norme, espace vectoriel normé, distance associée à une norme, inégalité triangulaire renversée, normes équivalentes
- Définition de boule ouverte, boule fermée, parties bornées
- Définition et propriétés de : ouvert, fermé, adhérence, intérieur, point adhérent, point intérieur
- Définition de la distance d'un point x à une partie A d'un evn E , caractérisation de $d(x, A) = 0$
- Définition et propriétés de la convergence des suites, suites extraites, valeurs d'adhérence d'une suite

- Définition et propriétés des limites, de la continuité en un point, de la continuité sur une partie
- Définition de la continuité uniforme, du caractère lipschitzien, liens entre continue, uniformément continue, lipschitzienne
- Caractérisation des applications linéaires continues parmi les applications linéaires, définition et propriétés de la norme $||| \cdot |||$
- Définition séquentielle de la compacité, liens entre compact et fermé, liens entre compact et fermé borné, produit cartésien de deux compacts, image continue d'un compact, théorème de Heine, équivalence des normes en dimension finie
- Définition d'une suite de Cauchy, d'une partie complète, lien entre compact et complet, liens entre complet et fermé, tout evn de dimension finie est complet
- Définition de connexe par arcs, lien avec la convexité, connexes par arcs de $\mathbb{R}$, image continue d'un connexe par arcs, théorème des valeurs intermédiaires
- Définition d'un produit scalaire (réel ou complexe), d'un espace préhilbertien, inégalité de Cauchy et Schwarz et cas d'égalité, inégalité de Minkowski et cas d'égalité
- Définition et propriétés de l'orthogonalité dans un espace préhilbertien, théorème de Pythagore, procédé d'orthogonalisation de Schmidt, théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie.

Les méthodes à retenir

On abrège :

espace vectoriel en ev

sous-espace vectoriel en sev

espace vectoriel normé en evn.

Pour montrer qu'une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E

Revenir à la définition.

Ne pas oublier de montrer que, pour tout $x \in E$, $N(x)$ existe, en particulier lorsque $N(x)$ est donnée par une borne supérieure ou une intégrale.

➡ Exercices 1.28 a), 1.32, 1.46.

Pour exprimer la distance d associée à une norme sur un $\mathbb{K}$ -ev E à partir de cette norme, ou pour exprimer une norme à partir de la distance associée d sur E

Utiliser les formules :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = N(x - y),$$

$$\forall x \in E, \quad N(x) = d(0, x).$$

Pour établir une inégalité faisant intervenir une norme $\|\cdot\|$ sur un $\mathbb{K}$ -ev

Essayer d'appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

ou l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

➡ Exercices 1.1, 1.44.

Pour montrer que deux normes N, N' sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E sont équivalentes

- Lorsque E n'est pas nécessairement de dimension finie, revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

➡ Exercices 1.4, 1.32, 1.46

- Si E est de dimension finie, d'après le cours, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Pour montrer que deux normes N, N' sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E ne sont pas équivalentes

Chercher une suite $(f_n)_n$ dans $E - \{0\}$ telle que :

$$\frac{N'(f_n)}{N(f_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{ou} \quad \frac{N(f_n)}{N'(f_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

➡ Exercices 1.18, 1.46.

Pour montrer qu'une partie A d'un evn E est fermée dans E

- Si on peut faire intervenir la notion de suite, utiliser la caractérisation séquentielle des fermés : la partie A de E est fermée dans E si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_n$ dans A convergeant vers un élément x de E , on a : $x \in A$.

➡ Exercices 1.3 a), 1.16, 1.17, 1.48

- Essayer de montrer que :
 - * A est une intersection de fermés de E
 - * A est une réunion d'un nombre fini de fermés de E
 - * A est un produit cartésien d'un nombre fini de fermés
- Essayer de montrer que A est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

➡ Exercice 1.34.

- Si le contexte fait intervenir des ouverts, essayer de montrer que $\mathcal{C}_E(A)$ est ouvert dans E .

Pour montrer qu'une partie Ω d'un evn E est ouverte dans E

- Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\forall x \in \Omega, \exists r > 0, B(x; r) \subset \Omega.$$

- Montrer que $\mathcal{C}_E(\Omega)$ est un fermé de E

Pour montrer qu'un point x d'un $\mathbb{K}$ -evn E est adhérent à une partie A de E

- Essayer de montrer que :
 - * Ω est une réunion d'ouverts de E
 - Essayer de montrer que Ω est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- Exercice 1.5 b)
- Exercices 1.5 a), 1.33, 1.34.

Pour montrer qu'un point x d'un $\mathbb{K}$ -evn E est intérieur à une partie A de E

- Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ dans A convergeant vers x .
 - Montrer, pour tout voisinage V de x dans E : $V \cap A \neq \emptyset$.
- Exercices 1.2, 1.29, 1.30 a)
- Exercice 1.31.

Pour manipuler des adhérences et/ou des intérieurs de parties d'un $\mathbb{K}$ -evn E

- Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $B(x; r) \subset A$.
- Exercices 1.2, 1.29.
- Utiliser les propriétés ensemblistes (globales) des adhérences et des intérieurs :
 - 1) * A° est ouvert dans E
 - * si $\Omega \subset A$ et si Ω est ouvert dans E , alors $\Omega \subset A^\circ$
 - * $A^{\circ\circ} = A^\circ$, $E^\circ = E$, $\emptyset^\circ = \emptyset$
 - * $A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ$
 - 2) * $\overline{A}$ est fermé dans E
 - * si $A \subset F$ et si F est fermé dans E , alors $\overline{A} \subset F$
 - * $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\overline{E} = E$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$
 - * $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$
 - 3) $\mathbb{C}_E(\overline{A}) = \left(\mathbb{C}_E(A)\right)^\circ$, $\mathbb{C}_E(A^\circ) = \overline{\mathbb{C}_E(A)}$.
 - On ne se résoudra à faire intervenir les éléments de E que lorsque des calculs globaux ne seront pas réalisables.
- Exercice 1.45
- Exercices 1.15, 1.45.

Pour manipuler la distance $d(x, A)$ d'un point x d'un $\mathbb{K}$ -evn E à une partie non vide A de E

- Utiliser la définition : $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$, ce qui revient à :
- $$\begin{cases} \forall a \in A, d(x, A) \leq d(x, a) \\ \forall k \in \mathbb{R}_+, \left((\forall a \in A, k \leq d(x, a)) \implies k \leq d(x, A) \right). \end{cases}$$
- On fera souvent alors intervenir l'inégalité triangulaire ou l'inégalité triangulaire renversée.
- Exercice 1.17.

Pour montrer qu'une application $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue en un point a de X

- Appliquer les théorèmes généraux (opérateurs) relatifs à la continuité en un point.

➡ **Exercice 1.19**

- Si f est à valeurs dans un produit cartésien, montrer que chaque fonction-coordonnée de f est continue en a .
- Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, (d_E(x, a) \leq \eta \implies d_F(f(x), f(a)) \leq \varepsilon).$$

- Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité, c'est-à-dire montrer que, pour toute suite $(a_n)_n$ dans A convergeant vers a , la suite $(f(a_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Pour montrer qu'une application $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue sur X

- Appliquer les théorèmes généraux (opérateurs) relatifs à la continuité sur une partie.

➡ **Exercice 1.6**

- Montrer que f est continue en chaque point de X , en se ramenant aux méthodes vues plus haut.
- Montrer que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de X , ou montrer que l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de X .
- Se souvenir que le caractère lipschitzien ou l'uniforme continuité entraînent la continuité.

Pour montrer qu'une application $f : X \subset E \longrightarrow F$ est uniformément continue sur X

- Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x'') \in X^2, (d_E(x', x'') \leq \eta \implies d_F(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

- Se rappeler que, si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue.
- Se rappeler le théorème de Heine : si f est continue sur X et si X est compact, alors f est uniformément continue sur X .

Pour manipuler une application $f : X \subset E \longrightarrow F$ k -lipschitzienne

Utiliser la définition :

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, d_F(f(x_1), f(x_2)) \leq k d_E(x_1, x_2).$$

➡ **Exercice 1.7**

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue

- Exprimer f comme combinaison linéaire ou composée d'applications linéaires continues.
- Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$$

➡ **Exercices 1.8, 1.12, 1.35, 1.36**

- Se rappeler que, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est continue.

Pour calculer la norme $|||f|||$ d'une application linéaire continue $f \in \mathcal{LC}(E, F)$

Montrer d'abord qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, ||f(x)||_F \leq M ||x||_E,$$

et on a alors $|||f||| \leq M$, où, par définition :

$$|||f||| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E} = \sup_{x \in B(0;1)} ||f(x)||_F.$$

On peut espérer, si M a été convenablement obtenu, que l'on ait : $|||f||| = M$.

La borne supérieure définissant $|||f|||$ peut être atteinte ou non.

Si E est de dimension finie, alors la borne supérieure est atteinte et on

cherchera donc $x_0 \in E - \{0\}$ de façon que $\frac{||f(x_0)||_F}{||x_0||_E} = M$.

Si E n'est pas de dimension finie, la borne supérieure peut être atteinte ou non. Essayer :

* soit de chercher $x_0 \in E - \{0\}$ de façon que $\frac{||f(x_0)||_F}{||x_0||_E} = M$

➡ Exercices 1.8, 1.20, 1.35, 1.36

* soit de chercher une suite $(x_n)_n$ dans $E - \{0\}$ de façon que :

$$\frac{||f(x_n)||_F}{||x_n||_E} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M.$$

Dans un contexte de compacité, pour établir une inégalité stricte

Essayer de faire intervenir une application continue sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

➡ Exercice 1.38.

Dans un contexte de compacité

Un raisonnement par l'absurde peut permettre de construire une suite, puis d'appliquer la compacité pour obtenir une suite convergente et amener une contradiction.

➡ Exercice 1.22.

Pour montrer qu'une partie X d'un evn E est compacte

• Essayer de faire apparaître X comme image directe d'un compact par une application continue.

➡ Exercice 1.9

• Essayer de montrer que X est fermé dans un compact.

• Si E est de dimension finie, montrer que X est fermée et bornée.

➡ Exercices 1.10, 1.21, 1.39, 1.41.

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ d'un evn E est de Cauchy

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,$$

$$\left(\begin{array}{l} p \geq N \\ q \geq N \end{array} \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon \right).$$

➡ Exercices 1.11, 1.24, 1.50.

Pour montrer qu'une partie X d'un evn E est complète

- Montrer que X est fermée et qu'il existe une partie Y de E telle que $X \subset Y$ et que Y soit complète.
- Se rappeler que, si X est compacte, alors X est complète.
- Se rappeler que, si E est de dimension finie et si X est fermée dans E , alors X est complète.
- Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que toute suite de Cauchy dans X converge dans X .

Pour montrer qu'une partie A d'un evn E est connexe par arcs

- Se rappeler d'abord que :
 - * toute partie convexe est connexe par arcs
 - * les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

➡ Exercice 1.51.

- Montrer que A est l'image directe d'une partie connexe par arcs par une application continue.

➡ Exercices 1.25, 1.51.

- Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que, pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe un chemin joignant continument x et y en restant dans A , c'est-à-dire montrer qu'il existe une application continue $\gamma : [0; 1] \longrightarrow A$ telle que :

$$\begin{cases} \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \\ \forall t \in [0; 1], \gamma(t) \in A. \end{cases}$$

➡ Exercice 1.26.

Pour exploiter la connexité par arcs

Essayer d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires : si A est connexe par arcs et si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f atteint tout réel entre deux réels qu'elle atteint déjà.

Pour montrer qu'une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire, où E est un $\mathbb{K}$ -ev

Revenir à la définition.

➡ Exercice 1.43.

Pour relier un produit scalaire $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ et la forme quadratique $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ associée

Utiliser la formule qui exprime ϕ à l'aide de φ :

$$\forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x),$$

Pour obtenir des inégalités dans un contexte d'espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$

ou, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une des formules exprimant φ à l'aide de ϕ :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y)),$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\phi(x + y) - \phi(x - y)).$$

Utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, |(x | y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

ou l'inégalité de Minkowski, c'est-à-dire l'inégalité triangulaire pour la norme associée au produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

➡ Exercice 1.52.

Pour manipuler des orthogonaux de parties dans un espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$

- Revenir à la définition de l'orthogonal d'une partie A de E :

$$A^\perp = \{x \in E ; \forall a \in A, (x | a) = 0\}.$$

- Utiliser les propriétés ensemblistes (globales) de l'orthogonalité :

$$* A \subset B \implies A^\perp \supset B^\perp$$

$$* A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$$

$$* A \subset A^{\perp\perp}, E^\perp = \{0\}, \{0\}^\perp = E$$

$$* A \cap A^\perp \subset \{0\}.$$

➡ Exercice 1.27.

- Se rappeler que, d'après le théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie, si F est de dimension finie, alors : $F \oplus F^\perp = E$.

Énoncés des exercices

1.1 Inégalité sur des normes

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $x, y, z, t \in E$. Montrer :

$$\|x - y\| + \|z - t\| \leq \|x - z\| + \|y - t\| + \|x - t\| + \|y - z\|.$$

1.2 Adhérence, intérieur d'un produit cartésien de deux parties

Soient E, F deux evn, $A \subset E, B \subset F$. Montrer :

$$a) \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

$$b) (A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ.$$

1.3 Une partie est-elle fermée, est-elle ouverte ?

On note E le $\mathbb{R}$ -ev des applications continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de $||\cdot||_\infty$.

a) Est-ce que $F = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$ est fermée dans E ?

b) Est-ce que $U = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$ est ouverte dans E ?

1.4 Exemple de deux normes équivalentes

On note $E = C^1([0; 1]; \mathbb{R})$ et ν_1, ν_2 les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies, pour toute $f \in E$,

$$\text{par : } \nu_1(f) = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt, \quad \nu_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

Montrer que ν_1 et ν_2 sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

1.5 Somme d'une partie et d'un ouvert

Soient E un evn, Ω un ouvert de E .

a) Montrer que, pour tout $a \in E$, la partie $\{a\} + \Omega = \{a + x; x \in \Omega\}$ est un ouvert de E .

b) En déduire que, pour toute partie A de E , la partie $A + \Omega = \{a + x; (a, x) \in A \times \Omega\}$ est un ouvert de E .

1.6 Fonction continue à deux variables

Soient E, F, G des evn, $A \subset E$ telle que $A \neq \emptyset$, $B \subset F$ telle que $B \neq \emptyset$, et $f : A \rightarrow G$, $g : B \rightarrow G$ deux applications.

On note : $\varphi : A \times B \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = f(x) + g(y)$.

Montrer que φ est continue sur $A \times B$ si et seulement si : f est continue sur A et g est continue sur B .

1.7 Exemple d'application lipschitzienne

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $||\cdot||_1$ définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par : $|(x_1, x_2)|_1 = |x_1| + |x_2|$. On note $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = (ax_2, bx_1)$. Montrer que f est lipschitzienne.

1.8 Étude d'une application linéaire continue sur un espace de fonctions, calcul de sa norme

On note $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$, muni de $||\cdot||_1$ définie par : $\forall f \in E$, $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$

et on considère l'application : $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \phi(f) = \int_0^1 f(t) dt$.

Montrer $\phi \in \mathcal{LC}(E, \mathbb{R})$ et calculer $||\phi||$.

1.9 Somme de deux compacts

Soient E un evn, K, L deux compacts de E . Montrer que $K + L$ est compact.

1.10 Une partie est-elle compacte, non compacte ?

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et on note :

$$A = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R}; f(x) \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Est-ce que A est compacte ? Est-ce que B est compacte ?

1.11 Suite proche d'une suite de Cauchy

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans E telles que : $d(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Montrer que, si l'une des deux est de Cauchy, alors l'autre l'est aussi.

1.12 Exemple d'application diminuant strictement les distances, dans un evn complet, et sans point fixe

Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|)$$

et que, cependant, f n'a pas de point fixe.

1.13 Caractérisation de l'égalité de deux boules pour deux normes

Soient E un $\mathbb{K}$ -evn, N_1, N_2 deux normes sur E . On note, pour tout $i \in \{1, 2\}$:

$$B_i = \{x \in E; N_i(x) < 1\}, \quad B'_i = \{x \in E; N_i(x) \leq 1\},$$

qui sont la boule ouverte et la boule fermée de E , de centre 0, de rayon 1, pour la norme N_i . Montrer :

$$a) B'_1 = B'_2 \iff N_1 = N_2 \quad b) B_1 = B_2 \iff N_1 = N_2.$$

1.14 Intérieur d'un sous-espace vectoriel

a) Soient E un evn, F un sev de E . Montrer que, si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.

b) On note E le $\mathbb{R}$ -ev $C([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, E_1 (resp. P) la partie de E formée des applications de classe C^1 (resp. polynomiales). Montrer : $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{P} = \emptyset$.

1.15 Adhérence d'une boule ouverte, intérieur d'une boule fermée

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer :

$$a) \overline{B(a; r)} = B'(a; r) \quad b) (B'(a; r))^\circ = B(a; r).$$

1.16 Exemple de partie fermée dans un espace de fonctions

On note E le $\mathbb{R}$ -ev des applications de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on considère $A = \{f \in E; \forall x \in [0; 1], e^{f(x)} \geq 2 + f(x)\}$.

Montrer que A est une partie fermée, non bornée, de E .

1.17 Exemple de calcul de la distance d'un point à une partie

On note $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

$$a) \text{ On note } A = \left\{ f \in E; f(0) = 1 \text{ et } \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

1) Montrer que A est une partie fermée de E .

2) Calculer $d(0, A)$. Cette distance est-elle atteinte ?

$$b) \text{ Mêmes questions pour } B = \left\{ f \in E; f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f = 1 \right\}.$$

1.18 Exemple de trois normes deux à deux non équivalentes

On note $E = C^2([0; 1]; \mathbb{R})$ et $N_\infty, N'_\infty, N''_\infty$ les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies, pour toute $f \in E$, par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|, \quad N'_\infty(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0; 1]} |f'(x)|,$$

$$N''_\infty(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x \in [0; 1]} |f''(x)|.$$

a) Montrer que $N_\infty, N'_\infty, N''_\infty$ sont des normes sur E .

b) Comparer les normes $N_\infty, N'_\infty, N''_\infty$ pour la relation d'équivalence entre normes.

1.19 Exemple d'application continue

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. On considère l'application $f : E \longrightarrow E, x \longmapsto f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|^2}$.

$$\text{Montrer :} \quad a) f \text{ est continue sur } E \quad b) f(E) = B\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

1.20 Étude d'une application linéaire continue sur un espace de suites

On note ℓ^∞ l'evn formé des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$, et on considère l'opérateur de différence $\Delta : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ défini par $\Delta(x) = y$ où $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = x_{n+1} - x_n.$$

Montrer $\Delta \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$, et calculer $\|\Delta\|$.

1.21 Exemple de partie compacte de $\mathbb{R}^2$

La partie $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4) = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle compacte ?

1.22 Suites, dans un compact, n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence

Soient E un evn, K une partie compacte de E , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans K ; montrer que, si $(u_n)_n$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors $(u_n)_n$ converge.

1.23 Exemple d'evn non complet

Montrer que $C([0; 1]; \mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_1$, est un evn non complet.

1.24 Étude de la distance d'un point fixé aux points d'une suite de Cauchy

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, d la distance associée à $\|\cdot\|$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$.

a) Montrer que, pour tout $a \in E$, la suite $(d(a, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

On note $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \longmapsto f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, u_n)$.

b) Montrer $\inf_{a \in E} f(a) = 0$, et que cette borne inférieure est atteinte si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1.25 Somme de deux parties connexes par arcs

Soient E un evn, A, B deux parties connexes par arcs de E . Montrer que $A + B$ est connexe par arcs.

1.26 Toute partie étoilée est connexe par arcs, exemple

a) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, A une partie étoilée de E , c'est-à-dire une partie de E telle qu'il existe $a \in E$ tel que : $\forall x \in A$, $[a; x] \subset A$, où $[a; x] = \{(1-t)a + tx; t \in [0; 1]\}$ est le segment joignant a et x dans E .

Montrer que A est connexe par arcs.

b) Exemple : l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

1.27 Exemple de sev F d'un ev préhilbertien E , tel que $F^\perp$ ne soit pas un supplémentaire de F dans E

On note $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ et on considère $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

Montrer : a) $F^\perp = \{0\}$ b) $F \oplus F^\perp \neq E$.

1.28 Exemple de norme sur $\mathbb{R}^2$, détermination d'une boule

On note $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$.

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Représenter graphiquement la boule $B'_N(0; 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; N(x, y) \leq 1\}$ dans le plan usuel.

c) Calculer l'aire (dans le plan usuel) de $B'_N(0; 1)$.

1.29 Adhérence et intérieur d'une partie convexe d'un evn

Soient E un evn, C une partie convexe de E .

Montrer que $\overline{C}$ et C° sont convexes.

1.30 Adhérence de la somme de deux parties

- a) Soient E un evn, A, B des parties de E . Montrer : $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.
- b) Montrer, par un exemple, qu'il peut ne pas y avoir égalité dans l'inclusion de a).

1.31 Adhérence d'une intersection

- a) Soient E un evn, A un ouvert de E , B une partie de E . Montrer : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- b) Soient E un evn, A une partie de E . On suppose que, pour toute partie B de E , on a $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Montrer que A est un ouvert de E .
- c) Donner un exemple d'ouverts A, B de $\mathbb{R}$ tels que les cinq ensembles $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ soient deux à deux distincts.

1.32 Exemple de deux normes équivalentes

On note E le $\mathbb{R}$ -ev des applications $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0; 1]$ et telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on note $N(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0; 1]} |f'(x)|$ et $\nu(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x) + f'(x)|$. Montrer que N et ν sont des normes sur E , et qu'elles sont équivalentes.

1.33 Séparation de deux fermés disjoints par deux ouverts disjoints

Soient E un evn, F, G deux fermés de E tels que $F \cap G = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux ouverts U, V de E tels que : $F \subset U$, $G \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

1.34 Diverses caractérisations de la continuité

Soient E, F deux evn, $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (i) f est continue
- (ii) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
- (iii) $\forall B \in \mathfrak{P}(F), \quad \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$
- (iv) $\forall B \in \mathfrak{P}(F), \quad f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}$.

1.35 Exemple d'application linéaire continue sur un espace de suites, calcul de sa norme

On note ℓ^∞ le $\mathbb{R}$ -ev des suites réelles bornées (indexées par $\mathbb{N}^*$), muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ qui, à tout élément $(u_n)_{n \geq 1}$ de ℓ^∞ associe la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$.

- a) Montrer que T est correctement définie, que $T \in \mathcal{LC}(\ell^\infty)$, et calculer $\|T\|$.
- b) Déterminer $\text{Ker}(T)$, $\text{Im}(T)$. Est-ce que T est injective ? surjective ?

1.36 Exemple d'application linéaire continue sur un espace de fonctions, calcul de sa norme

On note $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_p \in [0; 1]$ deux à deux distincts, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

On note : $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \phi(f) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(a_k)$.

Montrer $\phi \in \mathcal{LC}(E, \mathbb{R})$ et calculer $\|\phi\|$.

1.37 Somme d'un fermé et d'un compact

Soient E un evn, F est un fermé de E , K un compact de E . Montrer que $F + K$ est fermée dans E .

1.38 Application diminuant strictement les distances sur un compact

Soient E un evn, K une partie compacte de E , $f : K \longrightarrow K$ une application telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad (x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y))$$

où d est la distance sur E . Montrer que f admet un point fixe et un seul.

1.39 Applications continues de limites infinies en $+\infty$ et en $-\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) L'image réciproque par f de tout compact de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$

(ii) $\lim_{-\infty} |f| = +\infty$ et $\lim_{+\infty} |f| = +\infty$

(iii) $\left(\lim_{-\infty} f = -\infty \text{ ou } \lim_{-\infty} f = +\infty \right)$ et $\left(\lim_{+\infty} f = -\infty \text{ ou } \lim_{+\infty} f = +\infty \right)$.

1.40 Réunion d'une famille de boules fermées de même rayon indexée par un compact

Soient E un evn, K une partie compacte de E , $r \in \mathbb{R}_+^*$. On note $F = \bigcup_{x \in K} B'(x; r)$. Montrer que F est fermé dans E .

1.41 Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée dans un evn de dimension finie

Soient $(E, ||.||)$ un evn de dimension finie, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E . On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E . Montrer que V est une partie compacte non vide de E .

1.42 Natures différentes pour $[0; 1]^2$ et $[0; 1]$

Montrer qu'il n'existe aucune application continue injective de $[0; 1]^2$ dans $[0; 1]$.

1.43 Exemple de norme issue d'un produit scalaire

On note $E = C^1([0; 1]; \mathbb{R})$ et $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall f \in E, \quad N(f) = \left(\int_0^1 f'^2 + f(0)f(1) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que N est une norme sur E .

1.44 Inégalité sur des normes

Soient $(E, ||.||)$ un evn, $x, y \in E - \{0\}$. Démontrer : $\left\| \frac{x}{||x||} - \frac{y}{||y||} \right\| \leq \frac{2 ||x - y||}{\text{Max} (||x||, ||y||)}.$

1.45 Intersection de deux ouverts partout denses

Soit E un evn.

a) Montrer, pour tous ouverts U, V de E : $\overline{U} = \overline{V} = E \implies \overline{U \cap V} = E$.

b) En déduire, pour tous fermés F, G de E : $\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{G} = \emptyset \implies (F \cup G)^\circ = \emptyset$.

1.46 Exemple de norme paramétrée par une fonction

On note $E = C([0; 1], \mathbb{R})$ et, pour $\varphi \in E$, $N_\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall f \in E, \quad N_\varphi(f) = \|\varphi f\|_\infty.$$

- a) Montrer que N_φ est une norme sur E si et seulement si $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$.
 b) Montrer que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

1.47 Endomorphismes continus tels que $u \circ v - v \circ u = e$

Soit E un evn distinct de $\{0\}$. On note $e = \text{Id}_E$.

On suppose qu'il existe $(u, v) \in (\mathcal{LC}(E))^2$ tel que : $u \circ v - v \circ u = e$.

- a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n$.
 b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\|v^n\| \leq 2\|u\|\|v\|\|v^n\|$.
 c) Conclure.

1.48 Image d'un fermé de $\mathbb{C}$ par une application polynomiale

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que l'image par P de tout fermé de $\mathbb{C}$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

1.49 Image de l'intersection d'une famille décroissante de parties fermées dans un compact, par une application continue

Soient E un evn, K une partie compacte de E , $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de parties fermées de K , et $f : K \longrightarrow K$ une application continue. Montrer :

$$f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n).$$

1.50 Théorème du point fixe

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $F \subset E$, et $f : F \longrightarrow F$ une application.

On suppose que F est complète et que f est contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0; 1[$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.

On se propose de montrer que f admet un point fixe et un seul.

- a) Montrer l'unicité d'un éventuel point fixe de f .
 b) On considère, pour $a \in F$ fixé, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
 Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est un point fixe de f .
 c) Conclure que f admet un point fixe et un seul.

1.51 Théorème de Darboux

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I . Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.52 Théorème de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel complet d'un espace préhilbertien

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sev complet de E .

a) Montrer que, pour tout x de E , il existe un élément z de F et un seul tel que $x - z \in F^\perp$.

On note $p_F : E \longrightarrow E$ l'application ainsi définie.

b) Montrer : 1) $p_F \in \mathcal{LC}(E)$

$$2) p_F \circ p_F = p_F$$

$$3) p_F \text{ admet un adjoint, et } p_F^* = p_F.$$

Ce résultat généralise le théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie, figurant dans le cours.

Du mal à démarrer ?

1.1 Appliquer convenablement, plusieurs fois, l'inégalité triangulaire.

1.2 a) Utiliser, par exemple, la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

b) Séparer en deux inclusions et, par exemple, utiliser la caractérisation d'un point intérieur par l'existence d'ouverts convexes.

1.3 a) Utiliser, par exemple, la caractérisation séquentielle des fermés.

b) Montrer que U n'est pas ouvert, en trouvant $f \in U$ telle que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $B(f; \varepsilon) \not\subseteq U$.

1.4 1) Montrer que v_1 est une norme sur E en revenant à la définition d'une norme.

2) De même pour v_2 .

3) Remarquer que, pour toute $f \in E$:

$$v_1(f) \leq 2v_2(f) \quad \text{et} \quad v_2(f) \leq 2v_1(f).$$

1.5 a) Considérer, par exemple, pour $a \in E$ fixé, la translation de vecteur $-a$:

$$\tau_{-a} : E \longrightarrow E, \quad y \longmapsto y - a.$$

b) Exprimer $A + \Omega$ à l'aide des $\{a\} + \Omega$, $a \in A$.

1.6 1) Si φ est continue sur $A \times B$, exprimer f à l'aide de φ , pour déduire que f est continue sur A .

2) Si f est continue sur A et g est continue sur B , exprimer φ à l'aide de f, g et des projections canoniques, pour déduire que φ est continue sur $A \times B$.

1.7 Évaluer, pour $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)\|_1.$$

1.8 • Voir d'abord la linéarité de ϕ .

• Majorer convenablement $|\phi(f)|$ à l'aide de $\|f\|_1$, pour toute $f \in E$.

• Montrer que la borne supérieure définissant $\|\phi\|$ est atteinte par une fonction simple de E .

1.9 Considérer l'application

$$f : E \times E \longrightarrow E, \quad (x, y) \longmapsto x + y.$$

1.10 1) A n'est pas bornée.

2) B est fermée et bornée.

1.11 Majorer $d(v_p, v_q)$ en intercalant u_p et u_q et utiliser les deux hypothèses : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et $d(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

1.12 Considérer, par exemple :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1}.$$

1.13 a) • Un sens est immédiat.

• Si $B'_1 = B'_2$, pour $x \in E - \{0\}$, considérer $\frac{1}{N_1(x)}x$, qui est dans B'_1 , donc dans B'_2 .

b) • Un sens est immédiat.

• Si $B_1 = B_2$, pour $x \in E - \{0\}$, considérer $\frac{1}{N_1(x)}x$, qui n'est pas dans B_1 , donc pas dans B_2 .

1.14 a) Il existe $a \in E, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B(a; r) \subset F$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq a$. Construire $y \in E$ tel que : $y - a$ est colinéaire à $x - a$ et $y \in B(a; r)$. En déduire $x - a \in F$, puis $x \in F$.

b) Appliquer a).

1.15 a) 1) Une inclusion est immédiate.

2) Réciproquement, soit $x \in B'(a; r)$. Approcher x par une suite d'éléments de $B(a; r)$.

b) 1) Une inclusion est immédiate.

2) Réciproquement, raisonner sur les complémentaires, de manière analogue à la résolution de a)2).

1.16 1) Utiliser, par exemple, la caractérisation séquentielle des fermés.

2) Montrer : $\forall t \in [2; +\infty[, e^t \geq 2 + t$.

En déduire que toute application constante supérieure ou égale à 2 est dans A .

1.17 a) 1) Utiliser, par exemple, la caractérisation séquentielle des fermés.

2) • Montrer : $d(0, A) \geq 1$.

• Considérer $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - 2x$.

b) 1) Comme en a)1).

2) • Montrer : $d(0, B) \geq 1$.

• Considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une application g_n continue, affine par morceaux, constante égale à 1 sauf près de 0, telle que $g_n(0) = 0$. Déduire $d(0, B) = 1$.

• Montrer que $d(0, B)$ n'est pas atteinte, en raisonnant par l'absurde.

1.18 a) Revenir à la définition d'une norme.

b) 1) Remarquer d'abord :

$$\forall f \in E, N_\infty(f) \leq N'_\infty(f) \leq N''_\infty(f),$$

en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

2) Trouver une suite $(f_n)_n$ dans $E - \{0\}$ telle que, par exemple, $\frac{N'_\infty(f_n)}{N_\infty(f_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

1.19 b) 1) Remarquer : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$,
et déduire l'inclusion $f(E) \subset B'\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

2) Réciproquement, pour $y \in B'\left(0; \frac{1}{2}\right)$ fixé, chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $f(\lambda y) = y$.

1.20 Montrer que Δ est linéaire et que $|||\Delta||| \leq 2$.

Considérer, par exemple, la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour déduire $|||\Delta||| = 2$.

1.21 1) Montrer que E est fermée, comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

2) Montrer que E est bornée, en utilisant les coordonnées polaires par exemple.

1.22 Raisonner par l'absurde : supposer que $(u_n)_n$ n'admette qu'une seule valeur d'adhérence a et que $(u_n)_n$ diverge. Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ et d'une extractrice σ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(u_{\sigma(n)}, a) > \varepsilon.$$

Utiliser la compacité de K pour obtenir l'existence de $b \in K$ et d'une extractrice τ tels que : $u_{\sigma(\tau(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$.

Déduire $d(a, b) \geq \varepsilon, a \neq b$, puis une contradiction.

1.23 Construire une suite $(f_n)_n$ d'applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(f_n)_n$ soit de Cauchy pour $||\cdot||_1$ et que $(f_n)_n$ diverge pour $||\cdot||_1$. On pourra prendre f_n affine par morceaux et continue telle que $f_n(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $f_n(x) = 0$ pour $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1$.

1.24 a) Montrer que $(d(a, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, en utilisant l'inégalité triangulaire renversée.

b) 1) Dans la phrase mathématique traduisant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, fixer p et faire tendre q vers l'infini.

2) Se rappeler que : $d(a, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

1.25 Si γ joint continument a_1 et a_2 dans A et δ joint continument b_1 et b_2 dans B , construire $\gamma + \delta$, joignant continument $a_1 + b_1$ et $a_2 + b_2$ dans $A + B$.

1.26 a) Joindre $x \in A$ et $y \in A$ par un chemin formé de deux segments successifs, joignant x et a , puis a et y .

b) Montrer que $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à 0 et appliquer a).

1.27 a) Soit $g \in F^\perp$. Considérer l'application

$$f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xg(x)$$

qui est dans F , et traduire $\langle f, g \rangle = 0$.

1.28 a) • Montrer d'abord, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'existence de $N(x, y)$, en montrant que l'application $t \mapsto \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

• Revenir à la définition d'une norme.

b) Transformer la condition $N(x, y) \leq 1$ en :

$$\forall t \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{x+ty}{1+t+t^2} \leq 1,$$

puis utiliser les résultats sur les trinômes réels.

c) Calculer l'aire comme intégrale double de la constante 1.

1.29 Se rappeler qu'une partie C de E est dite convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0; 1], \forall (x, y) \in C^2, \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

1.30 a) Utiliser, par exemple, la caractérisation séquentielle de l'adhérence d'une partie de E .

b) Envisager, par exemple :

$$E = \mathbb{R}^2, A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2; xy = 1\}, B = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

1.31 a) Une inclusion est immédiate.

• Réciproquement, soit $x \in \overline{A \cap B}$.

Soit V un voisinage de x dans E .

Montrer l'existence d'un y dans $V \cap (A \cap \overline{B})$, puis montrer : $(V \cap A) \cap B \neq \emptyset$.

b) Appliquer l'hypothèse à $\mathcal{C}_E(A)$ à la place de B .

c) Choisir pour A et B des intervalles ou des réunions d'intervalles convenables.

1.32 1) Montrer que N et v sont des normes. Pour montrer l'implication $v(f) = 0 \implies f = 0$, utiliser la résolution d'une équation différentielle.

2) • Montrer : $\forall f \in E, v(f) \leq N(f)$.

• Pour $f \in E$, considérer

$$g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x f(x),$$

exprimer g' , puis déduire des majorations de $|g(x)|$, $|f(x)|$, $|f'(x)|$, à l'aide de $v(f)$.

1.33 Considérer l'application

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto d(x, G) - d(x, F)$$

et les parties $U = \varphi^{-1}(]0; +\infty[)$, $V = \varphi^{-1}(]-\infty; 0])$ de E .

1.34 (i) $\implies$ (ii) : Utiliser, par exemple, la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

(ii) $\implies$ (iii) : Pour $B \in \mathfrak{P}(F)$, appliquer l'hypothèse à $A = f^{-1}(B)$.

(iii) $\implies$ (iv) : Pour $B \in \mathfrak{P}(F)$, appliquer l'hypothèse à B et à $\mathcal{C}_F(B)$.

(iv) $\implies$ (i) : Pour tout ouvert U de F , appliquer l'hypothèse à $B = U$.

1.35 a) • Montrer que, pour toute $(u_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty$, on a : $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1} \in \ell^\infty$.

• Montrer que T est linéaire.

• Montrer : $\forall u \in \ell^\infty, \|T(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$.

• En déduire : $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$ et $\|T\| \leq 1$.

• Considérer la suite constante égale à 1, et déduire : $\|T\| = 1$.

b) • On obtient : $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

• Montrer que $\text{Im}(T)$ est l'ensemble des suites réelles en $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

1.36 • La linéarité de ϕ est immédiate.

• Montrer : $\forall f \in E, |\phi(f)| \leq M\|f\|_\infty$,

en notant $M = \sum_{k=1}^p |\lambda_k|$.

• Considérer une application convenable f de E prenant les valeurs 1 ou -1 en les a_k .

1.37 Utiliser la caractérisation séquentielle des fermés et la définition séquentielle des compacts.

1.38 1) L'unicité est immédiate.

2) Pour l'existence, raisonner par l'absurde.

Considérer l'application

$$\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto d(x, f(x)).$$

1.39 (i) $\implies$ (ii) : Appliquer l'hypothèse au compact $[-A; A]$, pour $A \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

(ii) $\implies$ (iii) : Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

(iii) $\implies$ (i) : Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $K \subset [-A; A]$. Appliquer l'hypothèse pour déduire que $f^{-1}(K)$ est borné, puis est compact.

1.40 Utiliser, par exemple, la caractérisation séquentielle d'un fermé et la définition séquentielle d'un compact.

1.41 1) Montrer que $V \neq \emptyset$, en utilisant la définition séquentielle de la compacité.

2) Montrer que V est bornée.

3) Montrer que V est fermée, en montrant, par exemple, que son complémentaire est ouvert.

1.42 Raisonner par l'absurde : supposer qu'il existe une application $f : [0; 1]^2 \longrightarrow [0; 1]$ continue injective.

Considérer $a, b, c \in [0; 1]^2$ de façon que, par exemple, $f(a) < f(b) < f(c)$, puis considérer un chemin γ joignant continument a et c dans $[0; 1]^2$, sans passer par b , et envisager $f \circ \gamma$.

1.43 Vu l'exposant $\frac{1}{2}$ et le carré dans l'intégrale, on peut conjecturer que N soit une norme associée à un produit scalaire. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $(f, g) \in E \times E$ par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'g' + \frac{1}{2}(f(0)g(1) + f(1)g(0))$$

est un produit scalaire et que N est la norme associée à φ .

1.44 Dans le premier membre de l'inégalité demandée, intercaler, par exemple, $\frac{x}{\|y\|}$, puis utiliser l'inégalité triangulaire et les rôles symétriques de x et y .

1.45 a) Soient U, V des ouverts de E tels que $\overline{U} = \overline{V} = E$. Soient $x \in E$ et Ω un voisinage ouvert de x dans E . Montrer l'existence d'un $y \in \Omega \cap U$, puis montrer $(\Omega \cap U) \cap V \neq \emptyset$.

b) Passer aux complémentaires dans le résultat de a).

1.46 a) Montrer que, pour $\varphi \in E$ fixée, N_φ vérifie une partie de la définition d'une norme.

1) Supposer $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$. Montrer qu'alors :

$$\forall f \in E, (N_\varphi(f) = 0 \implies f = 0).$$

2) Supposer $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ \neq \emptyset$. Construire un élément f de E tel que : $f \neq 0$ et $N_\varphi(f) = 0$.

b) Soit $\varphi \in E$ fixée.

1) Supposer $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Montrer qu'alors N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, en faisant intervenir $\frac{1}{\varphi}$.

2) Supposer $\varphi^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$. Construire alors une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans $E - \{0\}$ telle que : $\frac{\|f_n\|_\infty}{N_\varphi(f_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

1.47 a) Récurrence sur n .

b) Utiliser a) et la sous-multiplicativité de $||| \cdot |||$.

c) • Montrer, en utilisant a), qu'on ne peut pas avoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v^n \neq 0.$$

• Considérer l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; v^n = 0\}$, son plus petit élément, et obtenir une contradiction à l'aide de b).

On conclut qu'il n'existe pas de tel couple (u, v) .

1.48 Soit F un fermé de $\mathbb{C}$. Soient $(Z_n)_n$ une suite dans $P(F)$, $Z \in \mathbb{C}$ tels que $Z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in F$ tel que $P(z_n) = Z_n$. Montrer que $(z_n)_n$ est bornée. En déduire l'existence de $u \in \mathbb{C}$ et d'une extractrice σ tels que : $z_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. Déduire $Z = P(u) \in P(F)$.

1.49 Noter $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

1) L'inclusion $f(F) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n)$ est immédiate.

2) Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n)$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F_n$ tel que $x = f(x_n)$.

Utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité de K .

1.50 b) 1) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u_{n+1} - u_n\| \leq k \|u_n - u_{n-1}\|,$$

$$\text{puis : } \forall (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \|u_{p+r} - u_p\| \leq k^p \frac{\|u_1 - u_0\|}{1 - k}.$$

En déduire que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans F .

1.51 Considérer l'ensemble $E = \{(x, y) \in I^2; x < y\}$ et l'application taux d'accroissement :

$$\tau : E \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Montrer que E est connexe par arcs, que τ est continue, et en déduire que $\tau(E)$ est un intervalle et que l'on a $\tau(E) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(E)}$.

1.52 a) 1) Unicité :

Soit $x \in E$.

Soient $z_1, z_2 \in F$ tels que : $x - z_1 \in F^\perp$ et $x - z_2 \in F^\perp$.

Exprimer $\|z_1\|^2, \langle z_1, z_2 \rangle, \langle z_2, z_1 \rangle, \|z_2\|^2$ et déduire $\|z_1 - z_2\|^2 = 0$, puis $z_1 = z_2$.

2) Existence :

Soit $x \in E$. Considérer l'application

$$\varphi : F \longrightarrow \mathbb{R}, u \longmapsto \|x - u\|$$

et sa borne inférieure α , puis une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans F telle

$$\text{que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq \varphi(u_n) \leq \alpha + \frac{1}{n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans F . En déduire qu'il existe $z \in F$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$. Montrer que z minimise φ . Établir $x - z \in F^\perp$, en considérant, pour $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|x - (z + \lambda y)\|^2$.

b) 1) • La linéarité de p_F est facile.

• Montrer : $\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$, puis : $|||p_F||| = 1$.

2) L'égalité $p_F \circ p_F = p_F$ est immédiate.

3) Montrer, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle p_F(x), y \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle,$$

$$\text{puis : } \langle x, p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), y \rangle.$$

Corrigés des exercices

1.1 On applique l'inégalité triangulaire, de deux façons à chaque fois, pour majorer $\|x - y\|$ et pour majorer $\|z - t\|$:

$$\begin{cases} \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ \|x - y\| \leq \|x - t\| + \|t - y\| \\ \|z - t\| \leq \|z - x\| + \|x - t\| \\ \|z - t\| \leq \|z - y\| + \|y - t\|. \end{cases}$$

Ensuite, on additionne ces quatre inégalités, on simplifie par un coefficient 2, et on obtient l'inégalité voulue :

$$\begin{aligned} \|x - y\| + \|z - t\| \\ \leq \|x - z\| + \|y - t\| + \|x - t\| + \|y - z\|. \end{aligned}$$

1.2 a) Soit $(x, y) \in E \times F$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y) &\in \overline{A \times B} \\ \iff \exists (z_n)_n \in (A \times B)^{\mathbb{N}}, \quad z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (x, y) \\ \iff \exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \exists (y_n)_n \in B^{\mathbb{N}}, \\ &\quad (x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (x, y) \\ \iff \begin{cases} \exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \\ \exists (y_n)_n \in B^{\mathbb{N}}, \quad y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x \in \overline{A} \\ y \in \overline{B} \end{cases} \iff (x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}. \end{aligned}$$

On conclut : $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

b) 1) Soit $(x, y) \in (A \times B)^{\circ}$. Il existe un ouvert W de $E \times F$ tel que : $(x, y) \in W \subset A \times B$. Par définition des ouverts de $E \times F$, il existe alors un ouvert U de E et un ouvert V de F tels que :

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \times V \subset W.$$

On déduit : $x \in U \subset A$ et $y \in V \subset B$,

donc $x \in A^{\circ}$ et $y \in B^{\circ}$, d'où $(x, y) \in A^{\circ} \times B^{\circ}$.

Ceci montre : $(A \times B)^{\circ} \subset A^{\circ} \times B^{\circ}$.

2) Réciproquement, soit $(x, y) \in A^{\circ} \times B^{\circ}$.

Alors : $x \in A^{\circ}$ et $y \in B^{\circ}$.

Il existe donc un ouvert U de E tel que $x \in U \subset A$, et un ouvert V de F tel que $y \in V \subset B$.

Alors, $U \times V$ est un ouvert de $E \times F$ et on a :

$$(x, y) \in U \times V \subset A \times B.$$

Il en résulte : $(x, y) \in (A \times B)^{\circ}$.

Ceci montre : $A^{\circ} \times B^{\circ} \subset (A \times B)^{\circ}$.

On conclut : $(A \times B)^{\circ} = A^{\circ} \times B^{\circ}$.

1.3 a) Nous allons montrer que F est fermé dans E en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F , et $f \in E$ tels que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$.

Comme, par hypothèse :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geq 0,$$

il s'ensuit, par passage à la limite dans une inégalité lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0,$$

et donc : $f \in F$.

On conclut que F est fermé dans E .

b) Nous allons montrer que U n'est pas ouvert dans E , en trouvant $f \in U$ telle que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on ait : $B(f; \varepsilon) \not\subset U$.

Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Il est clair que f est continue et bornée, donc $f \in E$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Considérons l'application $g = f - \frac{\varepsilon}{2}$.

On a : $g \in E, \|f - g\|_{\infty} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$,

donc $g \in B(f; \varepsilon)$.

Mais $g \notin U$ car $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\varepsilon}{2} < 0$, donc g prend des valeurs ≤ 0 .

Ceci montre : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, B(f, \varepsilon) \not\subset U$,

et on conclut que U n'est pas ouvert dans E .

1.4 1) • Il est clair que, pour toute $f \in E, \nu_1(f)$ existe.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute $f \in E$:

$$\begin{aligned} \nu_1(\alpha f) &= |(\alpha f)(0)| + 2 \int_0^1 |(\alpha f)'(t)| dt \\ &= |\alpha| |f(0)| + 2|\alpha| \int_0^1 |f'(t)| dt = |\alpha| \nu_1(f). \end{aligned}$$

- On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{aligned}
 & \nu_1(f+g) \\
 &= |(f+g)(0)| + 2 \int_0^1 |(f+g)'(t)| dt \\
 &= |f(0) + g(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t) + g'(t)| dt \\
 &\leq (|f(0)| + |g(0)|) + 2 \int_0^1 (|f'(t)| + |g'(t)|) dt \\
 &= \left(|f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt \right) \\
 &\quad + \left(|g(0)| + 2 \int_0^1 |g'(t)| dt \right) \\
 &= \nu_1(f) + \nu_1(g).
 \end{aligned}$$

- Soit $f \in E$ telle que $\nu_1(f) = 0$.

$$\text{On a alors : } |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt = 0,$$

$$\text{donc } f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 |f'(t)| dt = 0.$$

Puisque $|f'|$ est continue et ≥ 0 , il en résulte $f' = 0$, donc f est constante, $f = f(0) = 0$.

Ceci montre que ν_1 est une norme sur E .

2) De même, ν_2 est aussi une norme sur E .

De manière plus générale, pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\text{l'application } f \mapsto a|f(0)| + b \int_0^1 |f'(t)| dt$$

est une norme sur E .

- 3) On a, pour toute $f \in E$: $\frac{1}{2}\nu_1(f) \leq \nu_2(f) \leq 2\nu_1(f)$,

donc les normes ν_1 et ν_2 sur E sont équivalentes.

1.5 a) Soit $a \in E$.

Considérons l'application $\tau_{-a} : E \rightarrow E$, $y \mapsto y - a$ qui est la translation de vecteur $-a$.

On a, pour tout $y \in E$: $y \in \{a\} + \Omega \iff y - a \in \Omega$,

$$\text{donc : } \{a\} + \Omega = \{y \in E ; \tau_{-a}(y) \in \Omega\} = \tau_{-a}^{-1}(\Omega).$$

Ainsi, $\{a\} + \Omega$ est l'image réciproque de l'ouvert Ω par l'application continue τ_{-a} , donc $\{a\} + \Omega$ est un ouvert de E .

$$b) \text{ Soit } A \subset E. \text{ On a : } A + \Omega = \bigcup_{a \in A} (\{a\} + \Omega).$$

Ainsi, $A + \Omega$ est une réunion d'ouverts de E , donc est un ouvert de E .

1.6 1) Supposons φ continue sur $A \times B$.

Puisque $B \neq \emptyset$, il existe $b \in B$. On a alors :

$$\forall x \in A, f(x) = \varphi(x, b) - g(b).$$

Comme φ est continue sur $A \times B$, par composition,

l'application $x \mapsto \varphi(x, b)$ est continue sur A , puis, par addition d'une constante, f est continue sur A .

De même, g est continue sur B .

2) Réciproquement, supposons f continue sur A et g continue sur B .

$$\text{Notons : } \text{pr}_1 : E \times F \rightarrow E, (x, y) \mapsto x,$$

$$\text{pr}_2 : E \times F \rightarrow F, (x, y) \mapsto y$$

les deux projections canoniques, qui, d'après le cours, sont continues sur $E \times F$.

$$\text{On a alors : } \varphi = f \circ \text{pr}_1 + g \circ \text{pr}_2,$$

donc, par composition, φ est continue sur $E \times F$.

1.7 Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
 \|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)\|_1 &= \|(ax_2, bx_1) - (ay_2, by_1)\|_1 \\
 &= \|(ax_2 - ay_2, bx_1 - by_1)\|_1 \\
 &= \|(a(x_2 - y_2), b(x_1 - y_1))\|_1 \\
 &= |a(x_2 - y_2)| + |b(x_1 - y_1)| = a|x_2 - y_2| + b|x_1 - y_1|.
 \end{aligned}$$

En notant $k = \text{Max}(a, b) \in \mathbb{R}_+$, on a donc :

$$\begin{aligned}
 \|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)\|_1 &\leq k|x_2 - y_2| + k|x_1 - y_1| \\
 &= k\|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\|_1 = k\|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|_1.
 \end{aligned}$$

On conclut que f est lipschitzienne.

1.8 • La linéarité de ϕ est immédiate, résultant de la linéarité de l'intégration.

- On a :

$$\forall f \in E, |\phi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1,$$

donc ϕ , qui est linéaire, est continue, et $\|\phi\| \leq 1$.

- On a, en notant $f_0 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$ l'application constante égale à 1, $f_0 \neq 0$ et :

$$\|f_0\|_1 = \int_0^1 1 dt = 1, \quad \phi(f_0) = \int_0^1 1 dt = 1,$$

$$\text{donc : } \frac{|\phi(f_0)|}{\|f_0\|_1} = 1.$$

Il en résulte : $\|\phi\| \geq 1$, et finalement : $\|\phi\| = 1$.

1.9 Considérons l'application

$$f : E \times E \longrightarrow E, (x, y) \longmapsto x + y.$$

On a : $K + L = f(K \times L)$.

Puisque K et L sont compacts, d'après le cours, $K \times L$ est compact.

D'autre part, par opération, f est continue.

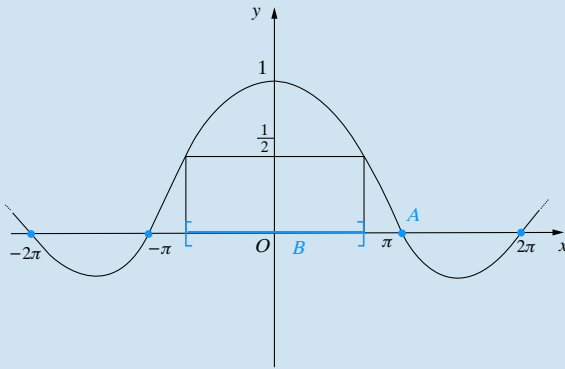
Ainsi, $K + L$ est l'image d'un compact par une application continue, donc $K + L$ est compact.

1.10 Par théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^*$, et,

$$\text{comme } f(x) = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0),$$

f est continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Traçons d'abord l'allure de la courbe représentative de f :



1) On a : $A = \pi\mathbb{Z}^*$, donc A n'est pas bornée, donc n'est pas compacte.

2) • Puisque $B = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]\right)$, que f est continue et que $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$, est fermé dans $\mathbb{R}$, d'après le cours, B est fermée dans $\mathbb{R}$.

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| > 2 \implies |f(x)| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \implies x \notin B,$$

donc : $B \subset [-2; 2]$, donc B est bornée.

Ainsi, B est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, donc B est compacte.

1.11 Supposons, par exemple, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $d(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, d(u_n, v_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq N_2, \forall q \geq N_2, d(u_p, u_q) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notons $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$. On a alors, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geq N$ et $q \geq N$:

$$d(v_p, v_q) \leq d(v_p, u_p) + d(u_p, u_q) + d(u_q, v_q) \leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci montre que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E .

1.12 Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

1) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \right| = \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} |x - y|. \end{aligned}$$

$$\text{Et : } \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \leq \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} < 1,$$

$$\text{car : } 0 \leq |x| < \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad 0 \leq |y| < \sqrt{y^2 + 1}.$$

$$\text{D'où : } |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Ainsi, f diminue strictement les distances.

2) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x$,

$$\text{donc : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x,$$

donc f n'a pas de point fixe.

1.13 a) • L'implication $N_1 = N_2 \implies B'_1 = B'_2$ est évidente.

• Réciproquement, supposons $B'_1 = B'_2$.

Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$.

* Considérons $y = \frac{1}{N_1(x)}x$. On a :

$$N_1(y) = N_1\left(\frac{1}{N_1(x)}x\right) = \frac{1}{N_1(x)}N_1(x) = 1,$$

donc $y \in B'_1 = B'_2$, d'où $N_2(y) \leq 1$.

$$\text{Mais : } N_2(y) = N_2\left(\frac{1}{N_1(x)}x\right) = \frac{1}{N_1(x)}N_2(x).$$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{N_1(x)}N_2(x) \leq 1, \text{ d'où : } N_2(x) \leq N_1(x).$$

* Puisque N_1 et N_2 jouent des rôles symétriques, on a aussi $N_1(x) \leq N_2(x)$, d'où : $N_1(x) = N_2(x)$.

Enfin, pour $x = 0$, l'égalité $N_1(x) = N_2(x)$ est triviale.

On conclut : $N_1 = N_2$.

b) • L'implication $N_1 = N_2 \implies B_1 = B_2$ est évidente.

• Réciproquement, supposons $B_1 = B_2$.

Nous allons adopter la même méthode que dans la solution de a).

Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$.

* Considérons $y = \frac{1}{N_1(x)}x$. On a alors $N_1(y) = 1$, donc $y \notin B_1 = B_2$, d'où $N_2(y) \geq 1$.

Mais $N_2(y) = \frac{1}{N_1(x)}N_2(x)$, d'où $N_2(x) \geq N_1(x)$.

* Puisque N_1 et N_2 jouent des rôles symétriques, on a aussi $N_1(x) \leq N_2(x)$, d'où : $N_1(x) = N_2(x)$.

Enfin, pour $x = 0$, l'égalité $N_1(x) = N_2(x)$ est triviale.

On conclut : $N_1 = N_2$.

1.14 a) Soit F un sev de E tel que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Il existe donc $a \in \overset{\circ}{F}$, puis $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a; r) \subset F$.

Soit $x \in E$ tel que $x \neq a$.

Notons $y = a + \frac{r}{2\|x - a\|}(x - a)$.

On a alors $\|y - a\| = \frac{r}{2} < r$, donc $y \in B(a; r)$,

d'où $y \in F$.

Comme F est un sev et que a et y sont dans F ,

il en résulte que $x - a = \frac{2\|x - a\|}{r}(y - a) \in F$,

puis $x = (x - a) + a \in F$.

Finalement : $F = E$.

b) E_1 et P sont des sev de E , distincts de E , car, par exemple, l'application $[0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans E et non dans E_1 , et l'ap-

plication $[0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans E et non dans P .

Par contre-apposition du résultat de a), on conclut :

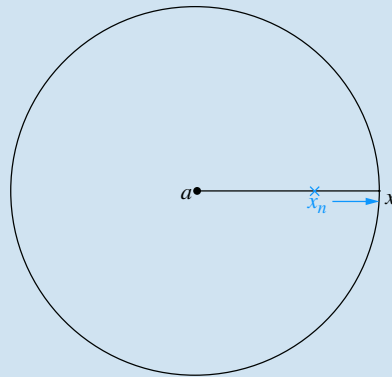
$$\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{P} = \emptyset.$$

1.15 a) 1) On a : $B(a; r) \subset B'(a; r)$, d'où, en passant aux adhérences et puisque $B'(a; r)$ est fermée :

$$\overline{B(a; r)} \subset \overline{B'(a; r)} = B'(a; r).$$

2) Réciproquement, soit $x \in B'(a; r)$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n = \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x$.



On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \|x_n - a\| &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a) \right\| \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - a\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)r < r, \end{aligned}$$

donc : $x_n \in B(a; r)$.

D'autre part :

$$\|x_n - x\| = \left\| \frac{1}{n}(a - x) \right\| = \frac{1}{n}\|x - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Ainsi, x est limite d'une suite d'éléments de $B(a; r)$, donc $x \in \overline{B(a; r)}$.

Ceci montre : $B'(a; r) \subset \overline{B(a; r)}$.

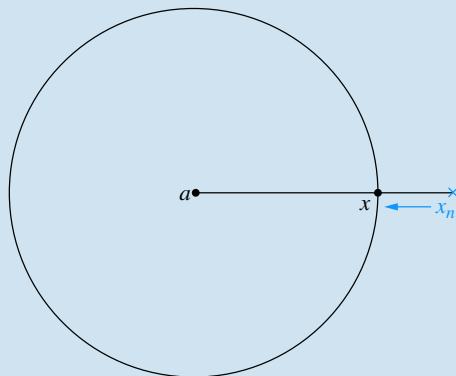
On conclut : $\overline{B(a; r)} = B'(a; r)$.

b) 1) On a : $B(a; r) \subset B'(a; r)$, d'où, en passant aux intérieurs et puisque $B(a; r)$ est ouverte :

$$B(a; r) = (B(a; r))^{\circ} \subset (B'(a; r))^{\circ}.$$

2) Nous allons montrer l'autre inclusion en raisonnant sur les complémentaires, de façon à manipuler des adhérences (au lieu d'intérieurs) et à utiliser des suites.

Soit $x \in \mathcal{C}_E(B(a; r))$, donc $\|x - a\| \geq r$.



Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x'_n = -\frac{1}{n}a + \left(1 + \frac{1}{n}\right)x$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \|x'_n - a\| &= \left\| \left(1 + \frac{1}{n}\right)(x - a) \right\| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\|x - a\| \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)r > r, \end{aligned}$$

donc $x'_n \in \mathcal{C}_E(B'(a; r))$.

D'autre part :

$$\|x'_n - x\| = \left\| \frac{1}{n}(x - a) \right\| = \frac{1}{n}\|x - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc : $x'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Ainsi, x est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}_E(B'(a; r))$, donc $x \in \overline{\mathcal{C}_E(B'(a; r))}$.

Ceci montre :

$$\mathcal{C}_E(B(a; r)) \subset \overline{\mathcal{C}_E(B'(a; r))} = \mathcal{C}_E((B'(a; r))^\circ),$$

d'où, en passant aux complémentaires :

$$B(a; r) \supset (B'(a; r))^\circ.$$

Finalement : $(B'(a; r))^\circ = B(a; r)$.

1.16 1) Nous allons montrer que A est une partie fermée de E en utilisant la caractérisation séquentielle des parties fermées. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A , $f \in E$ tels que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

On a, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

D'autre part :

$$\forall x \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}, e^{f_n(x)} \geq 2 + f_n(x).$$

On déduit, par passage à la limite dans une inégalité lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\forall x \in [0; 1], e^{f(x)} \geq 2 + f(x),$$

et donc : $f \in A$.

Ceci montre que A est une partie fermée de E .

2) • Montrons : $\forall t \in [2; +\infty[, e^t \geq 2 + t$.

L'application

$$\varphi : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(t) = e^t - (2 + t)$$

est dérivable et, pour tout $t \in [2; +\infty[$:

$$\varphi'(t) = e^t - 1 > 0,$$

donc φ est strictement croissante.

De plus : $\varphi(2) = e^2 - 4 > 0$.

On déduit : $\forall t \in [2; +\infty[, \varphi(t) \geq 0$,

d'où l'inégalité voulue.

• Soient $t \in [2; +\infty[$ et $f_t : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto t$ l'application constante égale à t . On a alors :

$$\forall t \in [2; +\infty[, \left(f_t \in A \quad \text{et} \quad \|f_t\| = |t| = t \right),$$

ce qui montre que A n'est pas bornée.

1.17 a) 1) Nous allons montrer que A est une partie fermée de E , en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A , $f \in E$ tels que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

• On a : $|f_n(0) - f(0)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

donc : $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0)$.

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = 1$, d'où : $f(0) = 1$.

• On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \right| &= \left| \int_0^1 (f_n - f) \right| \\ &\leq \int_0^1 |f_n - f| \leq (1 - 0)\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donc : $\int_0^1 f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f$.

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f_n = 0$, donc : $\int_0^1 f = 0$.

On déduit : $f \in A$.

On conclut que A est une partie fermée de E .

2) • Soit $f \in A$.

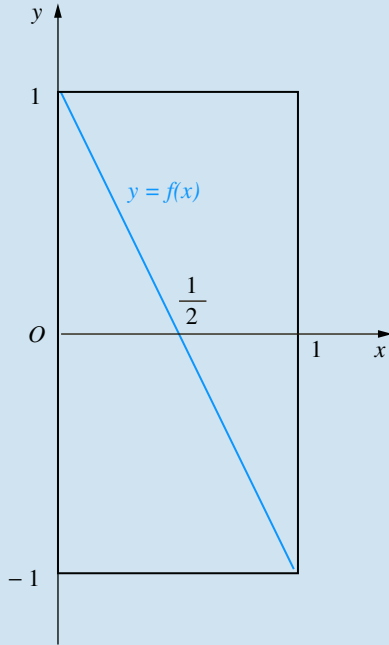
On a : $\|f - 0\|_\infty = \|f\|_\infty \geq |f(0)| = 1$,

donc : $d(0, A) \geq \|f - 0\|_\infty \geq 1$.

• L'application $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - 2x$

est dans A et : $d(0, f) = \|f\|_\infty = 1$.

On conclut : $d(0, A) = 1$, et cette borne est atteinte, par f ci-dessus et représentée graphiquement ci-après.



b) 1) On montre que B est une partie fermée de E par la même méthode qu'en a) 1).

2) • Soit $f \in B$. On a :

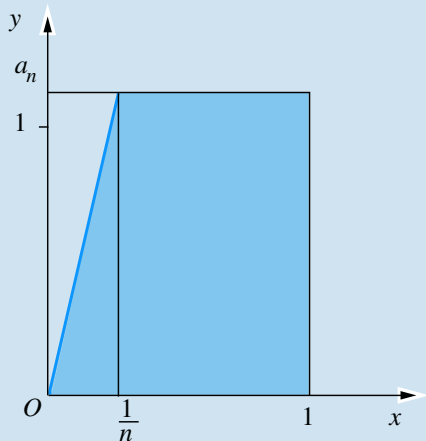
$$1 = \int_0^1 f \leq \int_0^1 |f| \leq (1 - 0) \|f\|_\infty = \|f - 0\|_\infty,$$

donc : $d(0, B) \geq 1$.

• Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0; 1]$, par :

$$g_n(x) = \begin{cases} na_n x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ a_n & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases},$$

où a_n est à calculer pour que $\int_0^1 g_n = 1$.



On a :

$$\int_0^1 g_n = 1 \iff a_n - \frac{a_n}{2n} = 1 \iff a_n = \frac{2n}{2n-1}.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n \in B$ et :

$$\|g_n - 0\|_\infty = a_n = \frac{2n}{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

d'où l'on conclut : $d(0, B) \geq 1$.

• Supposons qu'il existe $f \in B$ telle que $d(0, B) = \|f\|_\infty$.
On a :

$$0 \leq \int_0^1 (\|f\|_\infty - f) = \|f\|_\infty - \int_0^1 f = 1 - 1 = 0,$$

donc, puisque $\|f\|_\infty - f$ est continue et ≥ 0 , on a :
 $\|f\|_\infty - f = 0$, $f = \|f\|_\infty$, f est une constante.

Mais $f(0) = 0$, donc $f = 0$, contradiction avec $\int_0^1 f = 1$.

Ceci montre que $d(0, B)$ n'est pas atteinte.

1.18 a) • D'abord, E est bien un $\mathbb{R}$ -ev, et $N_\infty, N'_\infty, N''_\infty$ sont définies, car, si $f \in E$, alors f, f', f'' sont continues sur le segment $[0; 1]$, donc sont bornées, d'où l'existence de $N_\infty(f), N'_\infty(f), N''_\infty(f)$.

Nous allons montrer que N''_∞ est une norme sur E , les preuves pour N_∞ et N'_∞ étant analogues et plus simples.

• On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{aligned} & N''_\infty(f + g) \\ &= |(f + g)(0)| + |(f + g)'(0)| + \sup_{x \in [0; 1]} |(f + g)''(x)| \\ &\leq (|f(0)| + |g(0)|) + (|f'(0)| + |g'(0)|) \\ &\quad + \sup_{x \in [0; 1]} (|f''(x)| + |g''(x)|) \\ &\leq (|f(0)| + |g(0)|) + (|f'(0)| + |g'(0)|) \\ &\quad + \sup_{x \in [0; 1]} |f''(x)| + \sup_{x \in [0; 1]} |g''(x)| \\ &= (|f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x \in [0; 1]} |f''(x)|) \\ &\quad + (|g(0)| + |g'(0)| + \sup_{x \in [0; 1]} |g''(x)|) \\ &= N''_\infty(f) + N''_\infty(g). \end{aligned}$$

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute $f \in E$:

$$\begin{aligned} N''_{\infty}(\alpha f) &= |(\alpha f)(0)| + |(\alpha f)'(0)| + \sup_{x \in [0;1]} |(\alpha f)''(x)| \\ &= |\alpha| |f(0)| + |\alpha| |f'(0)| + |\alpha| \sup_{x \in [0;1]} |f''(x)| = |\alpha| N''_{\infty}(f). \end{aligned}$$

• Soit $f \in E$ telle que $N''_{\infty}(f) = 0$.

$$\text{On a alors : } \underbrace{|f(0)|}_{\geq 0} + \underbrace{|f'(0)|}_{\geq 0} + \underbrace{\sup_{x \in [0;1]} |f''(x)|}_{\geq 0} = 0,$$

$$\text{donc } f(0) = 0, f'(0) = 0, \sup_{x \in [0;1]} |f''(x)| = 0.$$

Il en résulte $f'' = 0$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = ax + b.$$

$$\text{De plus : } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } f = 0.$$

On conclut : $N_{\infty}, N'_{\infty}, N''_{\infty}$ sont des normes sur E .

b) 1) • Soit $f \in E$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée à f sur $[0; x]$, on a :

$$|f(x) - f(0)| \leq x \sup_{t \in [0; x]} |f'(t)| \leq 1 \sup_{x \in [0; 1]} |f'(t)|,$$

puis :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(0) + (f(x) - f(0))| \\ &\leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \\ &\leq |f(0)| + \sup_{t \in [0; 1]} |f'(t)| = N'_{\infty}(f). \end{aligned}$$

Il en résulte : $N_{\infty}(f) \leq N'_{\infty}(f)$.

• De même : $\forall f \in E, N'_{\infty}(f) \leq N''_{\infty}(f)$.

2) Montrons que les normes $N_{\infty}, N'_{\infty}, N''_{\infty}$ sont deux à deux non équivalentes :

Considérons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'applications de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\forall x \in [0; 1], f_n(x) = \sin(\pi n x).$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_n \in E$ et, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sin(\pi n x), & f'_n(x) &= \pi n \cos(\pi n x), \\ f''_n(x) &= -\pi^2 n^2 \sin(\pi n x), \end{aligned}$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$N_{\infty}(f_n) = 1, \quad N'_{\infty}(f_n) = \pi n, \quad N''_{\infty}(f_n) = \pi n + \pi^2 n^2.$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \frac{N'_{\infty}(f_n)}{N_{\infty}(f_n)} &= \pi n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, & \frac{N''_{\infty}(f_n)}{N'_{\infty}(f_n)} &= 1 + \pi n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \\ \frac{N''_{\infty}(f_n)}{N_{\infty}(f_n)} &= \pi n + \pi^2 n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, les rapports $\frac{N'_{\infty}(f)}{N_{\infty}(f)}, \frac{N''_{\infty}(f)}{N'_{\infty}(f)}, \frac{N''_{\infty}(f)}{N_{\infty}(f)}$ ne sont pas bornés lorsque f décrit $E - \{0\}$, donc les normes $N_{\infty}, N'_{\infty}, N''_{\infty}$ sont deux à deux non équivalentes.

1.19 a) L'application

$$f : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|^2}$$

est continue par opérations sur les applications continues.

$$b) 1) \text{ On a : } \forall x \in E, \|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{car : } \forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{t}{1 + t^2} - \frac{1}{2} = \frac{-(1 - t)^2}{2(1 + t^2)} \leq 0.$$

$$\text{d'où : } f(E) \subset B'\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

$$2) \text{ Réciproquement, soit } y \in B'\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Cherchons $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $f(\lambda y) = y$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda y) = y &\iff \frac{\lambda y}{1 + \|\lambda y\|^2} = y \\ &\iff \|\lambda y\|^2 \lambda^2 - \lambda + 1 = 0. \end{aligned}$$

Si $y = 0$, on peut choisir $\lambda = 0$.

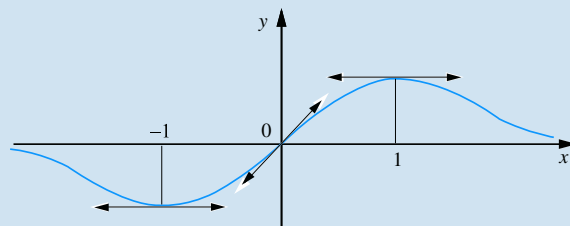
Supposons $y \neq 0$. L'équation du second degré précédente, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$, admet au moins une solution puisque son discriminant $1 - 4\|y\|^2$ est ≥ 0 , car $\|y\| \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ceci montre : } B'\left(0; \frac{1}{2}\right) \subset f(E).$$

$$\text{On conclut : } f(E) = B'\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Remarque :

Le résultat est apparent dans le cas $E = \mathbb{R}$ muni de la norme $|\cdot|$ usuelle :



Représentation graphique de $f : x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$

$$\text{On a ici : } f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] = B'\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

1.20 Remarquons d'abord que, pour toute suite réelle bornée $x = (x_n)_n$, la suite réelle $y = (y_n)_n$ définie dans l'énoncé est bornée ; ainsi, Δ est bien une application de ℓ^∞ dans ℓ^∞ .

- La linéarité de Δ est immédiate.
- Soient $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$, $y = \Delta(x) = (y_n)_n$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n| = |x_{n+1} - x_n| \leq |x_{n+1}| + |x_n| \leq 2\|x\|_\infty,$$

donc : $\|\Delta(x)\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty$.

Ceci montre que Δ , qui déjà est linéaire, est continue, et que : $\|\Delta\| \leq 2$.

- Considérons la suite réelle bornée $x = (x_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (-1)^n.$$

D'une part : $\|x\|_\infty = 1$.

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - x_n| = 2$,

donc : $\|\Delta(x)\|_\infty = 2$.

On a donc : $\|\Delta\| \geq \frac{\|\Delta(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 2$.

Finalement : $\Delta \in \mathcal{LC}(\ell^\infty)$ et $\|\Delta\| = 2$

1.21 1) L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4)$$

est continue et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc $E = f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$, comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

2) Montrons que E est bornée, en utilisant les coordonnées polaires.

Notons, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (x, y) \in E &\iff x^4 - 4x^3 + 3x^2 + y^4 - 4y^2 = 0 \\ &\iff x^4 + y^4 = 4x^3 - 3x^2 + 4y^2, \end{aligned}$$

d'où, pour tout $(x, y) \in E$:

$$\begin{aligned} \rho^4 &= (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \leq 2(x^4 + y^4) \\ &= 2(4x^3 - 3x^2 + 4y^2) \leq 2(4\rho^3 + 4\rho^2) = 8\rho^3 + 8\rho^2. \end{aligned}$$

En supposant $\rho \geq 1$, on a donc, si $(x, y) \in E$:

$$\rho^4 \leq 16\rho^3, \text{ d'où : } \rho \leq 16.$$

Ceci montre : $\forall (x, y) \in E, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 16$,

donc E est bornée.

Ainsi, E est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, qui est un evn de dimension finie, donc E est compacte.

1.22 Raisonnons par l'absurde : supposons que $(u_n)_n$ n'admette qu'une seule valeur d'adhérence a , et que $(u_n)_n$ diverge. Puisque $u_n \not\rightarrow a$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } d(u_n, a) > \varepsilon).$$

Ceci permet de construire une extractrice σ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(u_{\sigma(n)}, a) > \varepsilon.$$

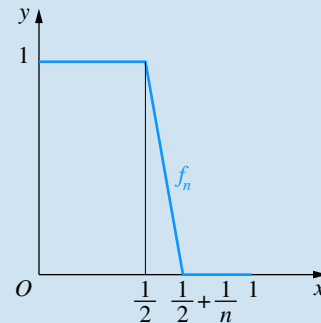
Puisque K est compact, la suite $(u_{\sigma(n)})_n$, à éléments dans K , admet au moins une valeur d'adhérence b dans K ; il existe donc un extractrice τ telle que $u_{\sigma(\tau(n))} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, d(u_{\sigma(\tau(n))}, a) > \varepsilon$, on obtient, en passant à la limite $d(b, a) \geq \varepsilon$, et nécessairement $a \neq b$.

Ainsi, $(u_n)_n$ admet au moins deux valeurs d'adhérence différentes, a et b , contradiction.

1.23 Considérons, pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, l'application $f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -nx + \frac{n+2}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Il est clair que, pour tout $n \geq 2$, f_n est continue sur $[0; 1]$.

1) Montrons que $(f_n)_{n \geq 2}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$.

Soient $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \|f_{p+r} - f_p\|_1 &= \int_0^1 |f_{p+r}(x) - f_p(x)| dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} (f_p(x) - f_{p+r}(x)) dx \\ &\leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} f_p(x) dx = \frac{1}{2p}. \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} - \{0, 1\},$$

$$\forall p \geq N, \forall r \in \mathbb{N}, \|f_{p+r} - f_p\|_1 \leq \varepsilon,$$

et donc $(f_n)_{n \geq 2}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$.

2) Montrons que $(f_n)_{n \geq 2}$ ne converge pas dans $(C([0; 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

• On a :

$$\forall n \geq 2,$$

$$\|f_n - f\|_1 \geq \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |1 - f(x)| dx,$$

$$\text{d'où : } \int_0^{\frac{1}{2}} |1 - f(x)| dx = 0.$$

Puisque $x \mapsto |1 - f(x)|$ est continue et ≥ 0 , il en résulte :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f(x) = 1.$$

• Soit $x_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. On a, pour tout $n \geq 2$ tel que $n \geq \frac{1}{x_0 - \frac{1}{2}}$:

$$\|f_n - f\|_1 \geq \int_{x_0}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{x_0}^1 |f(x)| dx,$$

$$\text{d'où : } \int_{x_0}^1 |f(x)| dx = 0.$$

$$\text{Il en résulte : } \forall x \in [x_0; 1], f(x) = 0,$$

$$\text{ce qui montre : } \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], f(x) = 0.$$

$$\text{On obtient ainsi : } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases},$$

et donc f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, contradiction.

1.24 a) Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall p \geq N, \forall q \geq N, d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$.

On a alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, |d(a, u_p) - d(a, u_q)| \leq d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(d(a, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, il en résulte que cette suite $(d(a, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, vers un élément dépendant de a et noté $f(a)$.

b) 1) Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

Fixons temporairement p tel que $p \geq N$.

On a, en faisant tendre l'entier q vers l'infini, d'après a) :

$$d(u_p, u_q) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} f(u_p),$$

d'où, par passage à la limite dans une inégalité :

$$f(u_p) \leq \varepsilon.$$

Ceci montre, en particulier :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, f(u_N) \leq \varepsilon,$$

$$\text{donc : } \forall \varepsilon > 0, \exists a \in E, f(a) \leq \varepsilon,$$

$$\text{et donc : } \inf_{a \in E} f(a) = 0.$$

2) On a :

$$\exists a \in E, f(a) = 0$$

$$\iff \exists a \in E, d(a, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \exists a \in E, u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Ainsi, la borne inférieure en question est atteinte si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1.25 Soit $(x_1, x_2) \in (A + B)^2$. Il existe $(a_1, a_2) \in A^2$, $(b_1; b_2) \in B^2$ tels que : $x_1 = a_1 + b_1$ et $x_2 = a_2 + b_2$.

Puisque A et B sont connexes par arcs, il existe des applications continues $\gamma, \delta : [0; 1] \rightarrow E$ telles que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0; 1], (\gamma(t) \in A \text{ et } \delta(t) \in B) \\ \gamma(0) = a_1, \gamma(1) = a_2, \delta(0) = b_1, \delta(1) = b_2. \end{cases}$$

L'application $\gamma + \delta : [0; 1] \rightarrow E$ est continue, et on a :

$$\begin{cases} \forall t \in [0; 1], (\gamma + \delta)(t) = \gamma(t) + \delta(t) \in A + B \\ (\gamma + \delta)(0) = \gamma(0) + \delta(0) = a_1 + b_1 = x_1 \\ \text{et } (\gamma + \delta)(1) = x_2. \end{cases}$$

On conclut que $A + B$ est connexe par arcs.

Remarque

On peut aussi montrer que $A \times B$ est connexe par arcs, puis remarquer que $A + B$ est l'image de $A \times B$ par l'application continue $E \times E \xrightarrow{(x,y) \mapsto x+y} E$, si l'on sait que le produit cartésien de deux parties connexes par arcs est connexe par arcs

1.26 a) Soit $(x, y) \in A^2$.

Puisque A est étoilée (par rapport à a), on a :

$$[a; x] \subset A \text{ et } [a; y] \subset A.$$

L'application $\gamma : [0; 1] \longrightarrow E$ définie, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\text{par : } \gamma(t) = \begin{cases} a + (1 - 2t)(x - a) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ a + (2t - 1)(y - a) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

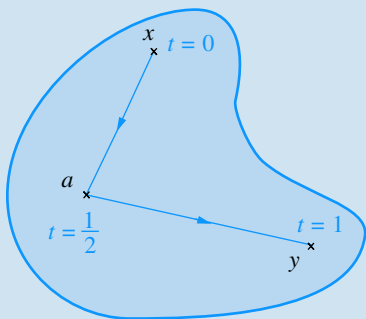
est continue sur $[0; 1]$, car :

$$\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{1}{2}^-]{} a, \quad \gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{1}{2}^+]{} a, \quad \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = a.$$

On a : $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ et, pour tout $t \in [0; 1]$:

$$\gamma(t) = \begin{cases} a + (1 - 2t)(x - a) \in [a; x] \subset A & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ a + (2t - 1)(y - a) \in [a; y] \subset A & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Ainsi, γ est un chemin continu joignant x et y dans A .



On conclut que A est connexe par arcs.

b) L'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est étoilé par rapport à 0.

En effet, soient $X \in \mathcal{D}$ et $t \in [0; 1]$.

Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $X = PDP^{-1}$.

On a alors :

$$(1 - t)0 + tX = tPDP^{-1} = P(tD)P^{-1}.$$

Ceci montre que, si $X \in \mathcal{D}$, alors le segment $[0; X]$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathcal{D}$, donc $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à 0.

D'après a), on conclut que $\mathcal{D}$ est connexe par arcs.

1.27 a) Soit $g \in F^\perp$.

Considérons l'application

$$f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = xg(x).$$

On a $f \in F$, donc :

$$0 = \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 x(g(x))^2 dx.$$

Comme $x \longmapsto x(g(x))^2$ est continue et ≥ 0 , on déduit :

$$\forall x \in [0; 1], \quad x(g(x))^2 = 0,$$

puis : $\forall x \in]0; 1], \quad g(x) = 0.$

Comme g est continue en 0, il en résulte $g = 0$.

On conclut : $F^\perp = \{0\}$.

b) On a donc : $F \oplus F^\perp = F \oplus \{0\} = F$.

Il est clair que $F \neq E$, puisque l'application constante égale à 1 est dans E et n'est pas dans F .

On conclut : $F \oplus F^\perp \neq E$.

1.28 a) • Existence :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Première méthode :

L'application $f_{x,y} : t \longmapsto \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$, est continue sur $\mathbb{R}$, car le trinôme réel $1 + t + t^2$ est de discriminant < 0 , et $f_{x,y}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$. Il existe donc $t_0 \in [0; +\infty[$ tel que :

$$\forall t \in]-\infty; -t_0] \cup [t_0; +\infty[, \quad |f_{x,y}(t)| \leq 1.$$

Ensuite, f étant continue sur le segment $[-t_0; t_0]$, d'après un théorème du cours, f est bornée sur ce segment. Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [-t_0; t_0], \quad |f_{x,y}(t)| \leq A.$$

En notant $M = \max(1, A) \in \mathbb{R}_+$, on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f_{x,y}(t)| \leq M.$$

Ainsi, $f_{x,y}$ est bornée, donc $N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} f_{x,y}(t)$ existe.

Deuxième méthode :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \leq 1$:

$$\frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} \leq \frac{|x| + |t||y|}{1 + t + t^2} \leq \frac{|x| + |y|}{1} = |x| + |y|,$$

et, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} &\leq \frac{|x| + |t||y|}{1 + t + t^2} \leq \frac{(|x| + |y|)|t|}{t^2} \\ &= \frac{|x| + |y|}{|t|} \leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} \leq |x| + |y|.$$

Ainsi, l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$, est bornée, donc $N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} f_{x,y}(t)$, existe.

• On a, pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 N((x, y) + (x', y')) &= N(x + x', y + y') \\
 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|(x + x') + t(y + y')|}{1 + t + t^2} \\
 &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty| + |x' + ty'|}{1 + t + t^2} \\
 &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x' + ty'|}{1 + t + t^2} \\
 &= N(x, y) + N(x', y').
 \end{aligned}$$

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 N(\alpha(x, y)) &= N(\alpha x, \alpha y) \\
 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|\alpha x + t \alpha y|}{1 + t + t^2} = |\alpha| \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} = |\alpha| N(x, y).
 \end{aligned}$$

• On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 N(x, y) = 0 &\iff \left(\forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} = 0 \right) \\
 &\iff (\forall t \in \mathbb{R}, x + ty = 0) \iff (x, y) = (0, 0).
 \end{aligned}$$

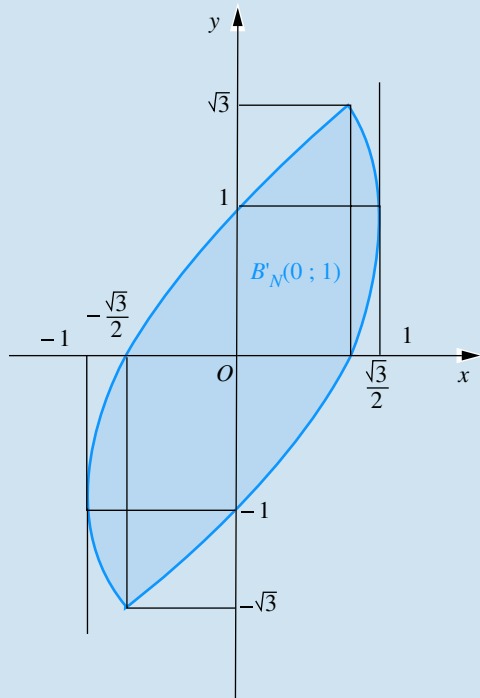
On conclut que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in B'_N(0; 1) &\iff N(x, y) \leq 1 \\
 &\iff \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} \leq 1 \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} \leq 1 \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, -(1 + t + t^2) \leq x + ty \leq 1 + t + t^2 \\
 &\iff \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, t^2 + (1 - y)t + (1 - x) \geq 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, t^2 + (1 + y)t + (1 + x) \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (1 - y)^2 - 4(1 - x) \leq 0 \\ (1 + y)^2 - 4(1 + x) \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $B'_N(0; 1)$ est la partie du plan comprise entre les deux paraboles :

$$P : (y - 1)^2 = -4(x - 1), \quad Q : (y + 1)^2 = 4(x + 1).$$



b) Les points d'intersection des deux paraboles P et Q ont pour ordonnées $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. L'aire S de $B'_N(0; 1)$ est donnée, par exemple, par l'intégrale double :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_{\frac{(1+y)^2}{4}-1}^{1-\frac{(1-y)^2}{4}} dx \right) dy \\
 &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{(1-y)^2}{4} - \frac{(1+y)^2}{4} + 1 \right) dy \\
 &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{3}{2}y - \frac{y^3}{6} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\
 &= 2 \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{6} \right) = 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

1.29 1) Soient $\lambda \in [0; 1]$, $(x, y) \in (\overline{C})^2$.

Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans C telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, et il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans C telle que $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$.

Puisque C est convexe, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n \in C.$$

D'autre part, par opérations sur les suites convergentes :

$$\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda x + (1 - \lambda)y.$$

On déduit : $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \overline{C}$,

et on conclut que $\overline{C}$ est convexe.

2) Soient $\lambda \in [0; 1]$, $(x, y) \in (C^\circ)^2$.

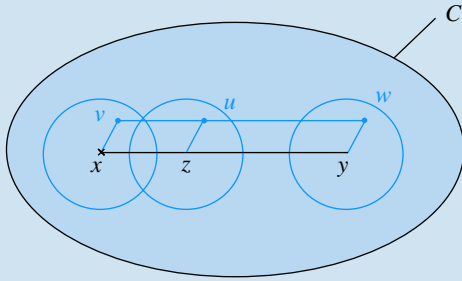
Notons $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Nous allons montrer : $z \in C^\circ$.

Il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x; \alpha) \subset C$ et il existe $\beta > 0$ tel que $B(y; \beta) \subset C$. Notons $r = \min(\alpha, \beta) > 0$.

On a alors :

$$B(x; r) \subset B(x; \alpha) \subset C \quad \text{et} \quad B(y; r) \subset B(y; \beta) \subset C.$$



Soit $u \in B(z; r)$.

Notons $v = u + (x - z)$, $w = u + (y - z)$.

On a : $\lambda v + (1 - \lambda)w = (u - z) + \lambda x + (1 - \lambda)y = u$.

D'autre part :

$$\|v - x\| = \|u - z\| < r \quad \text{et} \quad \|w - y\| = \|u - z\| < r,$$

donc : $v \in B(x; r) \subset C$ et $w \in B(y; r) \subset C$.

Ceci montre $u \in C$ et on obtient : $B(z; r) \subset C$.

Ainsi : $\exists r > 0$, $B(z; r) \subset C$, donc $z \in C^\circ$.

On conclut que C° est convexe.

1.30 a) Soit $x \in \overline{A + B}$.

Il existe $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ tels que : $x = a + b$.

Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A et une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans B telles que : $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n \in A + B$,

et, par addition de suites convergentes :

$$a_n + b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a + b.$$

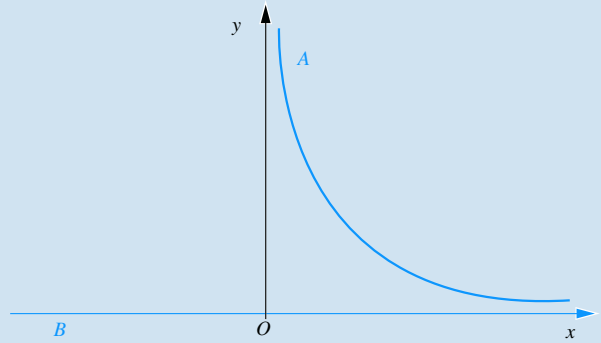
Il en résulte : $x \in \overline{A + B}$.

Ceci montre : $\overline{A + B} \subset \overline{A + B}$.

b) Prenons, dans $E = \mathbb{R}^2$ usuel :

$$A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2; xy = 1\}, \quad B = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

• On a : $A + B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, donc $\overline{A + B} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.



• On a : $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, donc $\overline{A + B} = A + B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, d'où, dans cet exemple :

$$\overline{A + B} \neq \overline{A} + \overline{B}.$$

1.31 a) • On a, d'après les propriétés ensemblistes de l'adhérence, $B \subset \overline{B}$, donc : $A \cap B \subset A \cap \overline{B}$, puis :

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap \overline{B}}.$$

• Réciproquement, soit $x \in \overline{A \cap \overline{B}}$.

Soit V un voisinage ouvert de x dans E . On a :

$$V \cap (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset.$$

Il existe donc $y \in V \cap (A \cap \overline{B}) = (V \cap A) \cap \overline{B} \subset \overline{B}$. Comme V et A sont ouverts et contiennent y , $V \cap A$ est un voisinage ouvert de y , donc : $(V \cap A) \cap B \neq \emptyset$.

Ceci montre que, pour tout voisinage ouvert V de x dans E , on a $V \cap (A \cap B) \neq \emptyset$.

Il en résulte : $x \in \overline{A \cap B}$.

On a montré : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap \overline{B}}$.

Finalement : $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap \overline{B}}$.

b) Appliquons l'hypothèse à $B = \mathcal{C}_E(A)$:

$$A \cap \overline{\mathcal{C}_E(A)} \subset \overline{A \cap \mathcal{C}_E(A)} = \overline{\emptyset} = \emptyset,$$

d'où : $A \subset \mathcal{C}_E(\overline{\mathcal{C}_E(A)}) = \mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E(A)^\circ) = A^\circ$,

ce qui montre que A est un ouvert de E .

c) On peut choisir, dans $\mathbb{R}$ usuel :

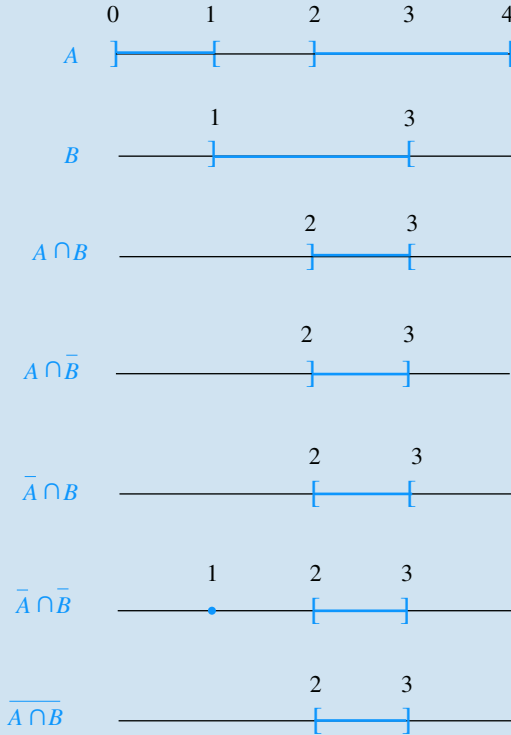
$$A =]0; 1[\cup]2; 4[, \quad B =]1; 3[.$$

On a alors :

$$A \cap B =]2; 3[, \quad A \cap \overline{B} =]2; 3[, \quad \overline{A} \cap B =]2; 3[,$$

$$\overline{A \cap B} = \{1\} \cup]2; 3[, \quad \overline{A \cap \overline{B}} =]2; 3[,$$

qui sont deux à deux distincts.



1.32 I) Montrons d'abord que N et ν sont des normes sur E .

Pour $f \in E$, $N(f)$ et $\nu(f)$ existent dans $\mathbb{R}$ car f et f' sont continues sur le segment $[0; 1]$, donc bornées.

Les propriétés, pour tous α de $\mathbb{R}$, f, g de E :

$$N(\alpha f) = |\alpha|N(f), \quad \nu(\alpha f) = |\alpha|\nu(f)$$

$$N(f + g) \leq N(f) + N(g), \quad \nu(f + g) \leq \nu(f) + \nu(g)$$

sont immédiates.

Soit $f \in E$.

Si $N(f) = 0$, alors $\sup_{x \in [0; 1]} |f(x)| = 0$, donc $f = 0$.

Supposons $\nu(f) = 0$. Alors $f + f' = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = \lambda e^{-x}.$$

Comme $f(0) = 0$, on déduit $\lambda = 0$, puis $f = 0$.

Ainsi, N et ν sont des normes sur E .

2) Soit $f \in E$. On a :

$$\forall x \in [0; 1], \quad |f(x) + f'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq N(f),$$

d'où :

$$\nu(f) \leq N(f).$$

3) Soit $f \in E$.

Considérons l'application $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, qui est de classe C^1 sur $[0; 1]$.

On a, pour tout t de $[0; 1]$:

$$|g'(t)| = |e^t(f(t) + f'(t))| \leq e\nu(f),$$

puis, pour tout x de $[0; 1]$:

$$|g(x)| = \left| \int_0^x g'(t) dt \right| \leq \int_0^x |g'(t)| dt \leq x e\nu(f) \leq e\nu(f),$$

d'où :

$$|f(x)| = e^{-x}|g(x)| \leq |g(x)| \leq e\nu(f).$$

Et :

$$|f'(x)| = |(f(x) + f'(x)) - f(x)|$$

$$\leq |f(x) + f'(x)| + |f(x)| \leq (1 + e)\nu(f).$$

D'où : $\forall x \in [0; 1], \quad |f(x)| + |f'(x)| \leq (1 + 2e)\nu(f)$,

donc :

$$N(f) \leq (1 + 2e)\nu(f).$$

On a montré : $\forall f \in E, \quad \nu(f) \leq N(f) \leq (1 + 2e)\nu(f)$,

donc N et ν sont des normes équivalentes.

1.33 Considérons l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = d(x, G) - d(x, F),$$

et les parties $U = \varphi^{-1}(]0; +\infty[)$, $V = \varphi^{-1}(]-\infty; 0])$ de E .

On sait que, pour toute partie non vide A de E , l'application $x \longmapsto d(x, A)$ est continue (et même : 1-lipschitzienne), donc φ est continue. Comme $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0]$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, il en résulte que U et V sont des ouverts de E .

Soit $x \in F$. D'une part, $d(x, F) = 0$. D'autre part, $x \notin G$ (car $F \cap G = \emptyset$) et G est fermé, donc $d(x, G) > 0$. Il en résulte $\varphi(x) > 0$, c'est-à-dire $x \in U$. Ceci montre : $F \subset U$.

De même : $G \subset V$.

Enfin, il est clair que $U \cap V = \emptyset$.

1.34 (i) $\implies$ (ii) :

Supposons f continue. Soit $A \in \mathfrak{P}(E)$.

Soit $y \in f(\overline{A})$; il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(a_n)_n$ dans A convergeant vers x . Comme f est continue en x , la suite $(f(a_n))_n$ converge vers $f(x)$, donc $y \in \overline{f(A)}$, et ainsi : $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(ii) $\implies$ (iii) :

Supposons : $\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Soit $B \in \mathfrak{P}(F)$.

On a, pour toute partie X de E : $X \subset f^{-1}(f(X))$,

donc :

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})).$$

En appliquant l'hypothèse à $A = f^{-1}(B)$, on obtient d'autre part :

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B},$$

$$\text{d'où : } f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subset f^{-1}(\overline{B}),$$

$$\text{et finalement : } \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

(iii) $\implies$ (iv) :

$$\text{Supposons : } \forall B \in \mathfrak{P}(F), \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

Soit $B \in \mathfrak{P}(F)$.

On a :

$$f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = f^{-1}(\mathcal{C}_F(\overline{\mathcal{C}_F(B)})) = \mathcal{C}_E(f^{-1}(\overline{\mathcal{C}_F(B)})).$$

En appliquant l'hypothèse à $\mathcal{C}_F(B)$, on obtient d'autre part :

$$\overline{f^{-1}(\mathcal{C}_F(B))} \subset f^{-1}(\overline{\mathcal{C}_F(B)}),$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f^{-1}(\overset{\circ}{B}) &\subset \mathcal{C}_E(\overline{f^{-1}(\mathcal{C}_F(B))}) \\ &= (\mathcal{C}_E(f^{-1}(\mathcal{C}_F(B))))^{\circ} = (f^{-1}(B))^{\circ}. \end{aligned}$$

(iv) $\implies$ (i) :

$$\text{Supposons : } \forall B \in \mathfrak{P}(F), f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}.$$

Soit U un ouvert de F . On a alors :

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\overset{\circ}{U}) \subset (f^{-1}(U))^{\circ},$$

$$\text{d'où } f^{-1}(U) = (f^{-1}(U))^{\circ},$$

c'est-à-dire que $f^{-1}(U)$ est ouvert.

Ceci montre que f est continue.

1.35 a) • Soit $u = (u_n)_{n \geq 1} \in \ell^{\infty}$.

$$\text{On a : } \forall n \geq 1, \left| \frac{u_n}{n} \right| = \frac{|u_n|}{n} \leq |u_n| \leq \|u\|_{\infty},$$

donc $\left(\frac{u_n}{n} \right)_{n \geq 1} \in \ell^{\infty}$, ce qui montre que T est correctement définie.

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$, $v = (v_n)_{n \geq 1} \in \ell^{\infty}$:

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= \left(\frac{\alpha u_n + v_n}{n} \right)_{n \geq 1} \\ &= \alpha \left(\frac{u_n}{n} \right)_{n \geq 1} + \left(\frac{v_n}{n} \right)_{n \geq 1} = \alpha T(u) + T(v), \end{aligned}$$

donc T est linéaire.

$$\text{• On a vu : } \forall u \in \ell^{\infty}, \forall n \geq 1, \left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \|u\|_{\infty},$$

$$\text{donc : } \forall u \in \ell^{\infty}, \|T(u)\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty}.$$

Comme T est déjà linéaire, il en résulte que T est continue, donc $T \in \mathcal{L}(\ell^{\infty})$, et que : $\|T\| \leq 1$.

• Pour $u = (1)_{n \geq 1}$, suite constante égale à 1, on a $u \in \ell^{\infty}$ et :

$$\|T(u)\|_{\infty} = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 = \|u\|_{\infty},$$

$$\text{d'où : } \frac{\|T(u)\|_{\infty}}{\|u\|_{\infty}} = 1, \text{ et donc : } \|T\| \geq 1.$$

On conclut : $\|T\| = 1$.

b) • Soit $u = (u_n)_{n \geq 1} \in \ell^{\infty}$. On a :

$$u \in \text{Ker}(T) \iff T(u) = 0 \iff \left(\forall n \geq 1, \frac{u_n}{n} = 0 \right)$$

$$\iff \left(\forall n \geq 1, u_n = 0 \right) \iff u = 0.$$

Ceci montre : $\text{Ker}(T) = \{0\}$, donc T est injective.

• On a :

$$\text{Im}(T)$$

$$= \left\{ v \in \ell^{\infty} ; \exists u \in \ell^{\infty}, T(u) = v \right\}$$

$$= \left\{ v = (v_n)_{n \geq 1} \in \ell^{\infty} ; \right.$$

$$\left. \exists u = (u_n)_{n \geq 1} \in \ell^{\infty}, \forall n \geq 1, v_n = \frac{u_n}{n} \right\}$$

$$= \left\{ v = (v_n)_{n \geq 1} \in \ell^{\infty} ; v_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$= \left\{ v = (v_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} ; v_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

Ainsi, $\text{Im}(T)$ est l'ensemble des suites réelles dont le terme général est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Comme la suite constante égale à 1 est dans ℓ^{∞} mais n'est pas un $O\left(\frac{1}{n}\right)$, donc n'est pas dans $\text{Im}(T)$, on conclut que T n'est pas surjective.

1.36 • L'application ϕ est linéaire, car, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $(f, g) \in E^2$:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha f + g) &= \sum_{k=1}^p \lambda_k (\alpha f + g)(a_k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^p \lambda_k f(a_k) + \sum_{k=1}^p \lambda_k g(a_k) = \alpha \phi(f) + \phi(g). \end{aligned}$$

• On a, pour toute $f \in E$:

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &= \left| \sum_{k=1}^p \lambda_k f(a_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^p |\lambda_k| |f(a_k)| \leq \left(\sum_{k=1}^p |\lambda_k| \right) \|f\|_{\infty}. \end{aligned}$$

En notant $M = \sum_{k=1}^p |\lambda_k| \in \mathbb{R}_+$, on a donc :

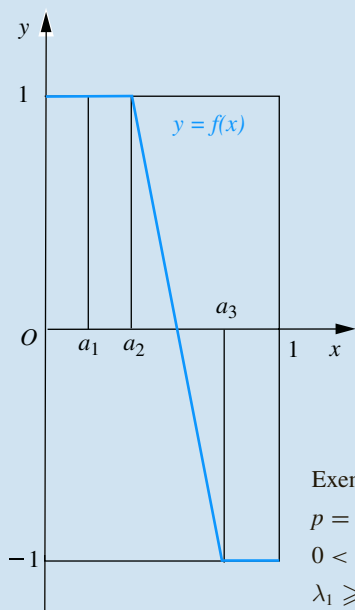
$$\forall f \in E, |\phi(f)| \leq M \|f\|_\infty.$$

Ceci montre que ϕ , qui est déjà linéaire, est continue, donc $\phi \in \mathcal{LC}(E, \mathbb{R})$, et que : $\|\phi\| \leq M$.

• Il existe $f \in E$ telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, p\}, f(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_k \geq 0 \\ -1 & \text{si } \lambda_k < 0 \end{cases} \\ \forall x \in [0; 1], |f(x)| \leq 1. \end{cases}$$

En effet, en supposant, par exemple, $a_1 < \dots < a_p$, il suffit de prendre f valant 1 en les a_k tels que $\lambda_k \geq 0$, valant -1 en les a_k tels que $\lambda_k < 0$, joignant $(a_k, f(a_k))$ et $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$ par un segment, et convenablement complétée entre 0 et a_1 (si $a_1 \neq 0$) et entre a_p et 1 (si $a_p \neq 1$).



Exemple :

$$p = 3$$

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < 1$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 < 0.$$

On a alors $\|f\|_\infty = 1$ et :

$$\phi(f) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(a_k) = \sum_{k=1}^p |\lambda_k| = M,$$

donc $\frac{\phi(f)}{\|f\|_\infty} = M$, d'où : $\|\phi\| \geq M$.

On conclut : $\|\phi\| = \sum_{k=1}^p |\lambda_k|$.

1.37 Nous allons montrer que $F + K$ est fermée dans E en utilisant une caractérisation séquentielle.

Soit $(z_n)_n$ une suite dans $F + K$, convergeant vers un élément z de E .

Pour chaque n de $\mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ et $y_n \in K$ tels que $z_n = x_n + y_n$. La suite $(y_n)_n$, à éléments dans le compact K , admet au moins une valeur d'adhérence y dans K ; il existe donc une extractrice σ telle que $y_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{\sigma(n)} = z_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}$,

on déduit : $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z - y$, et donc : $z - y \in \overline{F} = F$.

On obtient ainsi : $z = (z - y) + y \in F + K$.

1.38 1) Unicité

Soient x, y deux points fixes de f : $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

Si $x \neq y$, on obtient, d'après l'hypothèse, $d(x, y) < d(x, y)$, contradiction ; donc $x = y$.

2) Existence

Raisonnons par l'absurde ; supposons : $\forall x \in K, f(x) \neq x$.

Considérons l'application $\varphi : K \xrightarrow{x \mapsto d(x, f(x))} \mathbb{R}$.

Puisque $f : K \rightarrow K$ et $d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, φ est continue. Ainsi, φ est continue sur le compact K et à valeurs > 0 ; il existe donc $z \in K$ tel que :

$$\varphi(z) = \inf_{x \in K} \varphi(x).$$

Comme $f(z) \neq z$, on a, par l'hypothèse :

$$\varphi(f(z)) = d(f^2(z), f(z)) < d(f(z), z) = \varphi(z),$$

contradiction.

1.39 (i) $\implies$ (ii) :

Supposons que l'image réciproque par f de tout compact de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $[-A; A]$ est un compact de $\mathbb{R}$, $f^{-1}([-A; A])$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc est bornée. Il existe donc $B \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$f^{-1}([-A; A]) \subset [-B; B].$$

On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |x| > B &\implies x \notin [-B; B] \implies x \notin f^{-1}([-A; A]) \\ &\implies f(x) \notin [-A; A] \iff |f(x)| > A. \end{aligned}$$

On a montré :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x < -B \implies |f(x)| > A \\ x > B \implies |f(x)| > A, \end{cases}$$

et on conclut : $\lim_{-\infty} |f| = +\infty$ et $\lim_{+\infty} |f| = +\infty$.

(ii) $\implies$ (iii) :

Supposons : $\lim_{-\infty} |f| = +\infty$ et $\lim_{+\infty} |f| = +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $B \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x < -B, |f(x)| > A,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in]-\infty; -B[, (f(x) < -A \text{ ou } f(x) > A).$$

S'il existe $(x_1, x_2) \in]-\infty; -B]^2$ tel que $f(x_1) < -A$ et $f(x_2) > A$, alors, comme f est continue sur $] -\infty; -B[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait $x_3 \in]-\infty; -b[$ tel que $f(x_3) = 0$, contradiction.

On a donc :

$$(\forall x < -B, f(x) < -A) \text{ ou } (\forall x < -B, f(x) > A),$$

et on conclut : $\lim_{-\infty} f = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

De même : $\lim_{+\infty} f = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

(iii) $\implies$ (i) :

Supposons : $\lim_{-\infty} f = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$

et : $\lim_{+\infty} f = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Il est clair qu'alors : $\lim_{-\infty} |f| = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} |f| = +\infty$,

c'est-à-dire : (iii) $\implies$ (ii).

Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors, K est borné, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $K \subset [-A; A]$.

D'après l'hypothèse, il existe $B \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| > B \implies |f(x)| > A,$$

d'où, par contraposition, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(K) &\implies f(x) \in K \implies |f(x)| \leq A \\ &\implies |x| \leq B \iff x \in [-B; B]. \end{aligned}$$

Ceci montre : $f^{-1}(K) \subset [-B; B]$, donc $f^{-1}(K)$ est borné.

D'autre part, puisque f est continue et que K est fermé (car compact), $f^{-1}(K)$ est fermé.

Ainsi, $f^{-1}(K)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc, d'après le cours, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$.

1.40 Nous allons montrer que F est fermé dans E en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F , $f \in E$ telle que $f_n \xrightarrow[n \infty]{} f$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, puisque $f_n \in F = \bigcup_{x \in K} B'(x; r)$, il existe $x_n \in K$ tel que $f_n \in B'(x_n; r)$.

Puisque K est compact et que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes dans K , il existe une extractrice σ et $x \in K$ tels que : $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} x$.

Comme $f_n \xrightarrow[n \infty]{} f$, par suite extraite : $f_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} f$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_{\sigma(n)}, f) &\leq d(x_{\sigma(n)}, f_{\sigma(n)}) + d(f_{\sigma(n)}, f) \\ &\leq r + d(f_{\sigma(n)}, f), \end{aligned}$$

d'où, en passant à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini : $d(x, f) \leq r$, et donc $f \in B'(x; r) \subset F$.

On conclut que F est fermé dans E .

1.41 Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M.$$

1) Montrons que V n'est pas vide.

Puisque la boule fermée $B'(0; M)$ est une partie fermée bornée de l'evn E de dimension finie, $B'(0; M)$ est compact. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet donc au moins une valeur d'adhérence, donc $V \neq \emptyset$.

2) Montrons que V est bornée.

Soit $v \in V$.

Il existe une extractrice σ telle que $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \infty]{} v$.

En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\|u_{\sigma(N)} - v\| \leq 1$.

On a donc, par l'inégalité triangulaire :

$$\|v\| \leq \|v - u_{\sigma(N)}\| + \|u_{\sigma(N)}\| \leq 1 + M.$$

Ceci montre que V est bornée.

3) Montrons que V est fermée, en montrant que son complémentaire dans E est ouvert.

Soit $x \in \complement_E(V)$.

Puisque x n'est pas valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; u_n \in B(x; \varepsilon)\}$ soit fini. Il est clair alors que, pour tout $y \in B(x; \varepsilon)$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; u_n \in B(y, \varepsilon - d(x, y))\}$, est fini, car cet ensemble est inclus dans le précédent, donc y n'est pas valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où $y \in \complement_E(V)$.

Ceci montre : $B(y; \varepsilon) \subset \complement_E(V)$, et donc $\complement_E(V)$ est ouvert dans E , V est fermé dans E .

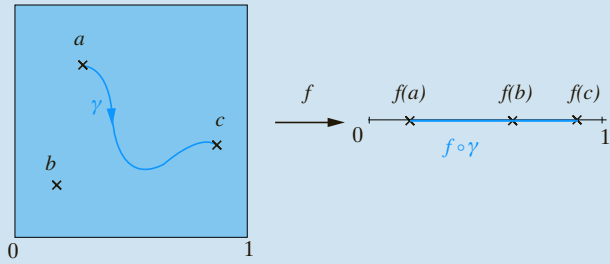
Ainsi, V est une partie non vide, fermée et bornée de l'evn E de dimension finie, donc V est une partie compacte non vide de E .

1.42 Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une application $f : [0; 1]^2 \longrightarrow [0; 1]$ continue bijective.

Il est clair qu'il existe alors $a, b, c \in [0; 1]^2$ tels que, par exemple : $f(a) < f(b) < f(c)$.

Il est clair qu'il existe au moins un chemin continu γ joignant a et c , dans $[0; 1]^2$, sans passer par b . C'est-à-dire qu'il existe une application $\gamma : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]^2$ continue telle que :

$$\begin{cases} \gamma(0) = a, & \gamma(1) = c \\ \forall t \in [0; 1], & \gamma(t) \neq b. \end{cases}$$



Par composition, $f \circ \gamma : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ est continue, et $[0; 1]$ est connexe par arcs, donc (théorème du cours), $(f \circ \gamma)([0; 1])$ est connexe par arcs.

Mais :
$$\begin{cases} (f \circ \gamma)(0) = f(\gamma(0)) = f(a) \\ (f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1)) = f(c), \end{cases}$$

donc : $(f \circ \gamma)([0; 1]) \supset [f(a); f(c)] \ni f(b).$

Il existe donc $u \in [0; 1]$ tel que : $(f \circ \gamma)(u) = f(b).$

On a ainsi $f(\gamma(u)) = f(b)$ d'où, puisque f est injective, $\gamma(u) = b$, contradiction avec $b \notin \gamma([0; 1])$.

On conclut qu'il n'existe pas d'application continue injective de $[0; 1]^2$ dans $[0; 1]$.

1.43 Nous allons montrer que N est la norme associée à un produit scalaire.

Considérons l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $(f, g) \in E \times E$, par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'g' + \frac{1}{2}(f(0)g(1) + f(1)g(0)),$$

obtenue à partir de N en « dédoublant » le rôle de f dans $(N(f))^2$.

• Il est clair que φ est symétrique et est linéaire par rapport à la deuxième place.

• Soit $f \in E$. On a : $\varphi(f, f) = \int_0^1 f'^2 + f(0)f(1).$

En utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz pour des intégrales, on a :

$$\begin{aligned} (f(1) - f(0))^2 &= \left(\int_0^1 f' \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 1^2 \right) \left(\int_0^1 f'^2 \right) = \int_0^1 f'^2. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(f, f) &= \int_0^1 f'^2 + f(0)f(1) \\ &\geq (f(1) - f(0))^2 + f(0)f(1) \\ &= (f(1))^2 - f(0)f(1) + (f(0))^2 \\ &= \left(f(1) - \frac{f(0)}{2} \right)^2 + \frac{3(f(0))^2}{4} \geq 0. \end{aligned}$$

En particulier, ceci montre que, pour toute $f \in E$, la racine carrée proposée dans l'énoncé existe.

• Avec les mêmes notations, supposons $\varphi(f, f) = 0$. On a alors :

$$\underbrace{\left(f(1) - \frac{f(0)}{2} \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3(f(0))^2}{4}}_{\geq 0} = 0,$$

donc : $f(1) - \frac{f(0)}{2} = 0$ et $f(0) = 0,$

d'où : $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,$

puis : $\int_0^1 f'^2 = \varphi(f, f) - f(0)f(1) = 0 - 0 = 0.$

Comme f'^2 est continue et ≥ 0 , on déduit $f'^2 = 0$, puis $f' = 0$, donc f est constante, puis $f = f(0) = 0$.

Ceci montre que φ est un produit scalaire sur E , et N est la norme associée à φ , donc N est une norme sur E .

1.44 On a, par l'inégalité triangulaire, en intercalant par exemple $\frac{x}{\|y\|}$, entre $\frac{x}{\|x\|}$, et $\frac{y}{\|y\|}$:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|y\|} \right\| + \left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \|x\| + \frac{1}{\|y\|} \|x - y\| \\ &= \frac{|\|y\| - \|x\||}{\|y\|} + \frac{1}{\|y\|} \|x - y\| \\ &\leq \frac{\|y - x\|}{\|y\|} + \frac{1}{\|y\|} \|x - y\| = \frac{2\|x - y\|}{\|y\|}. \end{aligned}$$

Par rôles symétriques, on a aussi :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x - y\|}{\|x\|}.$$

On conclut : $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x - y\|}{\max(\|x\|, \|y\|)}.$

1.45 a) Soient $x \in E$ et Ω un voisinage ouvert de x dans E .

Puisque $\overline{U} = E$, on a : $\Omega \cap U \neq \emptyset$.

Il existe donc au moins un élément y dans $\Omega \cap U$. Comme $\Omega \cap U$ est ouvert et contient y , $\Omega \cap U$ est un voisinage de y dans E . Puisque $\overline{V} = E$, on a alors $(\Omega \cap U) \cap V \neq \emptyset$, c'est-à-dire $\Omega \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. Ceci montre que, pour tout voisinage ouvert de x dans E , $\Omega \cap (U \cap V) \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{U \cap V}$.

Finalement : $\overline{U \cap V} = E$.

b) Passer aux complémentaires dans le résultat de a) :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{G} = \emptyset &\iff \overline{\mathcal{C}_E(F)} = \overline{\mathcal{C}_E(G)} = E \\ &\implies \overline{\mathcal{C}_E(F) \cap \mathcal{C}_E(G)} = E \\ &\iff \overline{\mathcal{C}_E(F \cup G)} = E \iff (F \cup G)^\circ = \emptyset. \end{aligned}$$

1.46

a) Soit $\varphi \in E$.

Puisque $f\varphi$ est continue sur le segment $[0; 1]$, $f\varphi$ est bornée, et donc $N_\varphi(f)$ existe dans $\mathbb{R}$.

On a, pour tous α de $\mathbb{R}$ et f, g de E :

$$\begin{aligned} N_\varphi(\alpha f) &= \|\alpha f\varphi\|_\infty = |\alpha| \|f\varphi\|_\infty = |\alpha| N_\varphi(f) \\ N_\varphi(f + g) &= \|(f + g)\varphi\|_\infty = \|f\varphi + g\varphi\|_\infty \\ &\leq \|f\varphi\|_\infty + \|g\varphi\|_\infty = N_\varphi(f) + N_\varphi(g). \end{aligned}$$

1) Supposons $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$.

Soit $f \in E$ telle que $N_\varphi(f) = 0$; on a donc $f\varphi = 0$.

Supposons $f \neq 0$. Il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Puisque f est continue en x_0 , il existe un intervalle I , inclus dans $[0; 1]$ et de longueur > 0 , tel que : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

On a alors : $\forall x \in I, \varphi(x) = 0$,

ce qui contredit $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$.

Ceci montre $f = 0$,

donc : $\forall f \in E, (N_\varphi(f) = 0 \implies f = 0)$,

et finalement, N_φ est une norme sur E .

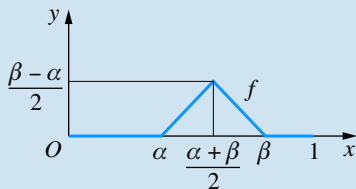
2) Supposons $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ \neq \emptyset$.

Alors $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ$, étant un ouvert non vide de $[0; 1]$, contient au moins un intervalle $[\alpha; \beta]$ tel que $\alpha < \beta$. On a ainsi :

$$\forall x \in [\alpha; \beta], \varphi(x) = 0.$$

Considérons l'application $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \text{ ou } \beta \leq x \leq 1 \\ x - \alpha & \text{si } \alpha \leq x \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \beta - x & \text{si } \frac{\alpha + \beta}{2} \leq x \leq \beta. \end{cases}$$



On a alors $f \in E, f \neq 0$, et $f\varphi = 0$ donc $N_\varphi(f) = 0$.

Ceci montre que N_φ n'est pas une norme sur E .

Finalement, N_φ est une norme sur E si et seulement si $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$.

b) Soit $\varphi \in E$.

b) 1) Supposons $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0; 1], \varphi(x) \neq 0.$$

Alors, $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$, donc, d'après a), N_φ est une norme sur E .

On a : $\forall f \in E, N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty$.

D'autre part, puisque $\varphi \in E$ et que φ ne s'annule en aucun point, $\frac{1}{\varphi}$ existe dans E , d'où :

$$\begin{aligned} \forall f \in E, \|f\|_\infty &= \left\| \frac{1}{\varphi} f\varphi \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \frac{1}{\varphi} \right\|_\infty \|f\varphi\|_\infty = \left\| \frac{1}{\varphi} \right\|_\infty N_\varphi(f). \end{aligned}$$

On a montré :

$$\forall f \in E, \left(\left\| \frac{1}{\varphi} \right\|_\infty \right)^{-1} \|f\|_\infty \leq N_\varphi(f) \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_\infty,$$

et donc N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur E .

2) Réciproquement, supposons que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ soient des normes sur E équivalentes.

D'après a), on a déjà $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$.

Supposons $\varphi^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$. Il existe donc $x_0 \in \varphi^{-1}(\{0\})$, c'est-à-dire tel que $\varphi(x_0) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque φ est continue en x_0 et que $\varphi(x_0) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap [0; 1], |\varphi(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Considérons l'application $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

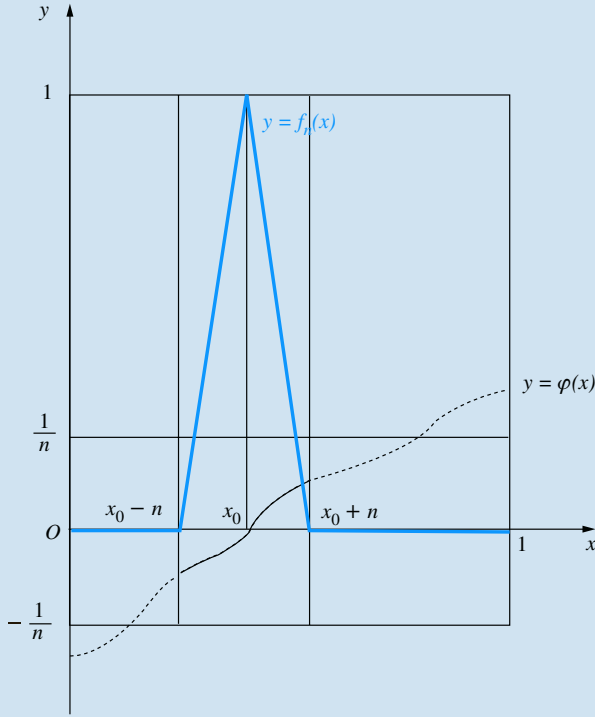
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq x_0 - \eta \\ & \text{ou } x_0 + \eta \leq x \leq 1 \\ \frac{x - x_0 + \eta}{\eta} & \text{si } x_0 - \eta \leq x \leq x_0 \\ \frac{x_0 + \eta - x}{\eta} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_0 + \eta. \end{cases}$$

On a alors $f_n \in E, \|f_n\|_\infty = 1$, et, pour tout x de $[0; 1]$:

$$\begin{cases} |f_n(x)\varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \leq \frac{1}{n} & \text{si } |x - x_0| \leq \eta \\ f_n(x)\varphi(x) = 0 & \text{si } |x - x_0| \geq \eta, \end{cases}$$

donc : $N_\varphi(f_n) = \|f_n \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{n}$.

Ainsi, $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et $N_\varphi(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc $\|\cdot\|_\infty$ et N_φ ne sont pas équivalentes.



Finalement, N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

1.47 a) Récurrence sur n .

- La propriété est vraie pour $n = 0$, par hypothèse :

$$u \circ v - v \circ u = v = 1v^0.$$

- Supposons que la propriété soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & u \circ v^{n+2} - v^{n+2} \circ u \\ &= (u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u) \circ v + v^{n+1} \circ u \circ v - v^{n+2} \circ u \\ &= (u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u) \circ v + v^{n+1} \circ (u \circ v - v \circ u) \\ &= (n+1)v^n \circ v + v^{n+1} \circ e = (n+2)v^{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété pour $n+1$.

On conclut, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n.$$

b) Rappelons que $\mathcal{LC}(E)$ est un espace vectoriel normé, pour la norme $\|f\|$ définie, pour tout $f \in \mathcal{LC}(E)$, par :

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|,$$

et que cette norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall f, g \in \mathcal{LC}(E), \|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & (n+1)\|v^n\| \\ &= \|(n+1)v^n\| = \|u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u\| \\ &\leq \|u \circ v^{n+1}\| + \|v^{n+1} \circ u\| \\ &\leq \|u\| \|v^n\| \|v\| + \|v^n\| \|v\| \|u\| \\ &= 2\|u\| \|v\| \|v^n\|. \end{aligned}$$

c) • Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v^n \neq 0$, alors on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \leq 2\|u\| \|v\|,$$

contradiction.

- Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $v^n = 0$.

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; v^n = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément, noté n_0 .

Comme $v^0 = e \neq 0$, car $E \neq \{0\}$, on a : $n_0 \geq 1$.

Appliquons la formule de a) à $n_0 - 1$ à la place de n :

$$u \circ v^{n_0} - v^{n_0} \circ u = n_0 v^{n_0-1}.$$

Comme $v^{n_0} = 0$ et $n_0 \neq 0$, on déduit $v^{n_0-1} = 0$, contradiction avec la définition de n_0 .

On déduit une contradiction et on conclut qu'il n'existe pas (u, v) convenant.

Autrement dit :

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{LC}(E))^2, u \circ v - v \circ u \neq e.$$

1.48 Soit F un fermé de $\mathbb{C}$. Nous allons montrer que $P(F)$ est un fermé de $\mathbb{C}$ en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés.

Soient $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $P(F)$, $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z$. Par définition de $P(F)$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe alors $z_n \in F$ tel que : $Z_n = P(z_n)$.

Puisque $Z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z$, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |Z_n| \leq M$.

- Montrons que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Si P est un polynôme constant, égal à un complexe α , alors $P(F) = \{\alpha\}$, qui est un fermé de $\mathbb{C}$.

On peut donc supposer que P n'est pas constant, c'est-à-dire : $\deg(P) \geq 1$. On a alors : $|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|z| \geq A \implies |P(z)| > M).$$

On a donc, par contraposition : $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq A$, ce qui montre que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

• Puisque $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et à termes dans $\mathbb{C}$ qui est un espace vectoriel normé de dimension finie, il existe une extractrice σ et un élément u de $\mathbb{C}$ tels que : $z_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \infty} u$. De plus, comme $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes dans F et que F est fermé, on a : $u \in F$.

Comme P est continue sur $\mathbb{C}$, il en résulte :

$$P(z_{\sigma(n)}) \xrightarrow{n \infty} P(u).$$

Mais, puisque $P(z_n) = Z_n \xrightarrow{n \infty} Z$, par suite extraite :

$$P(z_{\sigma(n)}) \xrightarrow{n \infty} Z.$$

On déduit, par unicité de la limite : $Z = P(u) \in P(F)$.

On conclut, par la caractérisation séquentielle des fermés, que $P(F)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

1.49 Notons $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

1) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, F \subset F_n$,

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, f(F) \subset f(F_n)$,

puis : $f(F) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n)$.

2) Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n)$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F_n$ tel que $x = f(x_n)$. Puisque K est compacte et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes dans K (car $x_n \in F_n \subset K$), il existe une extractrice σ et $y \in K$ tels que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \infty} y$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a : $\forall n \geq N, x_{\sigma(n)} \in F_{\sigma(n)} \subset F_{\sigma(N)}$.

Comme $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \infty} y$ et que $F_{\sigma(N)}$ est fermé, il en résulte : $y \in F_{\sigma(N)}$. De plus, comme σ est strictement croissante et que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (pour l'inclusion), on a alors : $y \in F_N$.

Ceci montre : $\forall N \in \mathbb{N}, y \in F_N$,

donc : $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$.

Enfin, comme $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \infty} y$ et que f est continue, on a $x = f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow{n \infty} f(y)$, donc $x = f(y)$.

Ainsi : $x \in f(F)$, et on obtient : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n) \subset f(F)$.

On conclut : $f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n)$.

1.50 a) Soient x, y des points fixes de f . On a alors :

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

d'où : $\underbrace{(1 - k)}_{>0} \|x - y\| \leq 0$.

On déduit $\|x - y\| \leq 0$, puis $\|x - y\| = 0$ et donc $x = y$.

Ceci montre l'unicité d'un (éventuel) point fixe de f .

On en déduit : f admet au plus un point fixe.

b) 1) Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F .

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|f(u_n) - f(u_{n-1})\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\|,$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|.$$

On en déduit, pour tout $(p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} & \|u_{p+r} - u_p\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{r-1} (u_{p+i+1} - u_{p+i}) \right\| \leq \sum_{i=0}^{r-1} \|u_{p+i+1} - u_{p+i}\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{r-1} k^{p+i} \|u_1 - u_0\| = k^p \|u_1 - u_0\| \sum_{i=0}^{r-1} k^i \\ &= k^p \|u_1 - u_0\| \frac{1 - k^r}{1 - k} \leq k^p \frac{\|u_1 - u_0\|}{1 - k}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Comme $k \in [0; 1[$, on a $k^p \xrightarrow{n \infty} 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel

que : $\forall p \geq N, k^p \frac{\|u_1 - u_0\|}{1 - k} \leq \varepsilon$.

On a montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \|u_{p+r} - u_p\| \leq \varepsilon,$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F .

2) Comme F est complet et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de F .

Puisque f est continue sur F (car lipschitzienne), on a alors : $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow{n \infty} f(\ell)$.

Mais d'autre part, comme $u_n \xrightarrow{n \infty} \ell$, par suite extraite :

$$f(u_n) = u_{n+1} \xrightarrow{n \infty} \ell.$$

Par unicité de la limite, on déduit $f(\ell) = \ell$.

On conclut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est un point fixe de f .

c) D'après a) et b), on conclut que f admet un point fixe et un seul.

1.51 Considérons $E = \{(x, y) \in I^2; x < y\}$ et l'application

$$\tau : E \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

1) Il est clair que E , qui est un triangle (certains bords exclus) est convexe, donc connexe par arcs.

Puisque f est continue sur I , par opérations, τ est continue sur E .

Il en résulte, d'après le cours, que $\tau(E)$ est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, donc $\tau(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) Nous allons montrer : $\tau(E) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(E)}$.

• Soit $(x, y) \in E$.

D'après le théorème des accroissements finis, puisque f est dérivable sur I , il existe $c \in]x; y[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

On a donc : $\tau(x, y) = f'(c) \in f'(I)$.

Ceci montre : $\tau(E) \subset f'(I)$.

• Soit $x \in I$.

Il est clair qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans I telle que : $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq x$.

Puisque f est dérivable en x , on a alors :

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f'(x).$$

$$\text{Mais : } \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \begin{cases} \tau(x_n, x) & \text{si } x_n < x \\ \tau(x, x_n) & \text{si } x < x_n. \end{cases}$$

Ainsi, $f'(x)$ est limite d'une suite d'éléments de $\tau(E)$, donc, par caractérisation séquentielle de l'adhérence d'une partie : $f'(x) \in \overline{\tau(E)}$.

Ceci montre : $f'(I) \subset \overline{\tau(E)}$,

et on conclut : $\tau(E) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(E)}$.

3) Puisque $\tau(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que l'on a $\tau(E) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(E)}$, on conclut que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.52 a) 1) **Unicité**

Soit $x \in E$.

Soient $z_1, z_2 \in F$ tels que : $x - z_1 \in F^\perp$ et $x - z_2 \in F^\perp$.

On a alors en particulier :

$$\langle z_1, x - z_1 \rangle = 0, \langle z_2, x - z_1 \rangle = 0,$$

$$\langle z_1, x - z_2 \rangle = 0, \langle z_2, x - z_2 \rangle = 0,$$

d'où :

$$\|z_1\|^2 = \langle x, z_1 \rangle, \langle z_2, z_1 \rangle = \langle z_2, x \rangle,$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle z_1, x \rangle, \|z_2\|^2 = \langle z_2, x \rangle,$$

puis :

$$\|z_1 - z_2\|^2 = \|z_1\|^2 - \langle z_1, z_2 \rangle - \langle z_2, z_1 \rangle + \|z_2\|^2 = 0,$$

et ainsi :

$$z_1 = z_2.$$

2) Existence

Soit $x \in E$.

L'application $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \|x - u\|$, étant à valeurs ≥ 0 , admet

une borne inférieure α , et $\alpha \geq 0$.

Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in F$ tel que :

$$\alpha \leq \varphi(u_n) \leq \alpha + \frac{1}{n}.$$

• Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans F .

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que, par exemple, $p < q$.

D'après l'égalité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \|(u_p - x) - (u_q - x)\|^2 + \|(u_p - x) + (u_q - x)\|^2 \\ = 2(\|u_p - x\|^2 + \|u_q - x\|^2), \end{aligned}$$

d'où : $\|u_p - u_q\|^2$

$$= 2(\|u_p - x\|^2 + \|u_q - x\|^2) - 4 \left\| \frac{u_p + u_q}{2} - x \right\|^2.$$

Comme u_p, u_q et $\frac{u_p + u_q}{2}$ sont dans F , on a :

$$\|u_p - x\| \leq \alpha + \frac{1}{p}, \|u_q - x\| \leq \alpha + \frac{1}{q},$$

$$\left\| \frac{u_p + u_q}{2} - x \right\| \geq \alpha,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|u_p - u_q\|^2 &\leq 2 \left(\left(\alpha + \frac{1}{p} \right)^2 + \left(\alpha + \frac{1}{q} \right)^2 \right) - 4\alpha^2 \\ &= 4\alpha \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + 2 \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \leq \frac{8\alpha}{p} + \frac{4}{p^2}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$, il s'ensuit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans F .

• Puisque F est complet, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un élément z de F .

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq \|x - u_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n},$

d'où, en faisant tendre n vers l'infini : $\|x - z\| = \alpha.$

Ainsi, l'application $F \longrightarrow \mathbb{R}$
 $u \longmapsto d(x, u)$ admet un minimum atteint en $z.$

• Montrons enfin : $x - z \in F^\perp.$

Soit $y \in F.$

Puisque : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad z + \lambda y \in F,$

on a : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|x - (z + \lambda y)\| \geq \|x - z\|.$

On en déduit, en élevant au carré et en développant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda|^2 \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle x - z, y \rangle) \geq 0.$$

En particulier, en remplaçant λ par $\rho \overline{\langle x - z, y \rangle}$, on obtient :
 $\forall \rho \in \mathbb{R},$

$$\rho^2 |\langle x - z, y \rangle|^2 \|y\|^2 - 2\rho |\langle x - z, y \rangle|^2 \geq 0.$$

Il est clair qu'on peut supposer $y \neq 0.$

En remplaçant ρ par $\frac{1}{\|y\|^2}$, on déduit :

$$-\frac{1}{\|y\|^2} |\langle x - z, y \rangle|^2 \geq 0, \quad \text{d'où : } \langle x - z, y \rangle = 0.$$

Ainsi : $\forall y \in F, \quad \langle x - z, y \rangle = 0,$

c'est-à-dire : $x - z \in F^\perp.$

b) 1) • Soient $\alpha \in \mathbb{C}, x, x' \in E.$ On a, pour tout u de F :

$$\begin{cases} \langle x - p_F(x), u \rangle = 0 \\ \langle x' - p_F(x'), u \rangle = 0 \\ \langle \alpha x + x' - p_F(\alpha x + x'), u \rangle = 0. \end{cases}$$

d'où, par combinaison linéaire :

$$\langle \alpha p_F(x) + p_F(x') - p_F(\alpha x + x'), u \rangle = 0.$$

Comme F est un sev et que $p_F(x), p_F(x'), p_F(\alpha x + x')$ sont dans F , $\alpha p_F(x) + p_F(x') - p_F(\alpha x + x')$ est dans F , et donc :
 $\alpha p_F(x) + p_F(x') - p_F(\alpha x + x') = 0.$

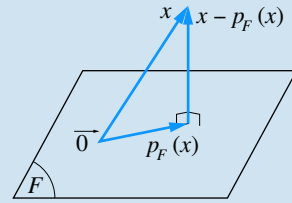
Ainsi, p_F est linéaire.

• Soit $x \in E.$ Puisque $p_F(x) \in F$, on a, en particulier :

$$\langle x - p_F(x), p_F(x) \rangle = 0,$$

d'où, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$



En particulier : $\|p_F(x)\| \leq \|x\|.$

Ceci montre que p_F , qui déjà est linéaire, est continue, et que $\|p_F\| \leq 1.$

De plus, si $F \neq \{0\}$, il existe $x \in F$ tel que $x \neq 0$, et on a $p_F(x) = x$, donc $\frac{\|p_F(x)\|}{\|x\|} = 1$, ce qui montre : $\|p_F\| = 1.$

2) Il est clair que : $\forall y \in F, \quad p_F(y) = y,$

d'où : $\forall x \in E, \quad p_F(p_F(x)) = p_F(x),$

c'est-à-dire : $p_F \circ p_F = p_F.$

3) Soit $(x, y) \in E^2.$

Puisque $y - p_F(y) \in F$, on a : $\langle p_F(x), y - p_F(y) \rangle = 0,$

d'où : $\langle p_F(x), y \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle.$

Par rôles symétriques de x et y , on a aussi :

$$\langle x, p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle.$$

Ceci montre que p_F admet un adjoint et que $p_F^* = p_F.$

Autrement dit, p_F est autoadjoint.

On a ainsi prouvé que p_F est un orthoprojecteur.

De plus, $\operatorname{Im}(p_F) = F$ et $\operatorname{Ker}(p_F) = F^\perp$, d'où la relation :

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Plan

Les méthodes à retenir	44
Énoncés des exercices	48
Du mal à démarrer ?	55
Corrigés	59

Thèmes abordés dans les exercices

- Résolution d'équations fonctionnelles
- Existence et calcul éventuel d'une dérivée première, d'une dérivée n -ème
- Séparation des zéros d'une équation
- Obtention d'inégalités à une ou plusieurs variables réelles
- Obtention d'inégalités portant sur des intégrales
- Calculs d'intégrales
- Détermination de limites de suites liées à des intégrales
- Recherche de limites d'intégrales
- Étude et représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale, le paramètre aux bornes
- Calculs de limites, d'équivalents, de développements limités, de développements asymptotiques
- Développement limité, développement asymptotique d'une fonction réciproque
- Limite, équivalent, développement asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre
- Limite, équivalent, développement asymptotique des solutions d'une équation à paramètre.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Propriétés des fonctions ayant des limites finies ou des limites infinies, pour les opérations algébriques et pour l'ordre usuel
- Propriétés générales des fonctions continues
- Propriétés générales des fonctions monotones
- Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection monotone, théorème de continuité sur un compact
- Définition de la continuité uniforme, de la lipschitzianité ; liens avec la continuité
- Définition et propriétés algébriques de la dérivabilité, de la dérivée, de la dérivée n -ème, formule de Leibniz

- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis
- Propriétés algébriques et propriétés relatives à l'ordre, pour les intégrales
- Les méthodes usuelles pour transformer l'écriture d'une intégrale : intégration par parties, changement de variable, relation de Chasles
- Les propriétés de l'application $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor et Lagrange, formule de Taylor et Young
- Propriétés des fonctions ou des suites ayant une limite finie ou une limite infinie, pour les opérations algébriques et pour l'ordre usuel
- Équivalents et développements limités usuels, à savoir par cœur
- Notion de développement asymptotique.

Les méthodes à retenir

Pour montrer qu'une fonction est paire, est impaire, est périodique

Revenir aux définitions.

➡ Exercices 2.16, 2.31.

Pour résoudre une équation fonctionnelle, sans hypothèse de régularité sur la fonction inconnue

- Raisonner par condition nécessaire, puis condition suffisante : si une fonction f convient, essayer d'obtenir l'expression de $f(x)$ pour tout x , puis étudier la réciproque.
Pour obtenir des conditions nécessaires sur f , appliquer l'hypothèse à des cas particuliers. Si, par exemple, l'hypothèse est vraie pour tout (x, y) , appliquer l'hypothèse à $(x, 0)$, à $(0, y)$, à (x, x) , etc.

➡ Exercices 2.2, 2.3, 2.17

- Essayer de faire apparaître, dans l'équation fonctionnelle, une fonction auxiliaire φ telle que, par exemple, $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$, et appliquer l'hypothèse à x , à $\varphi(x)$.

➡ Exercice 2.30.

Pour résoudre une équation fonctionnelle avec hypothèse de continuité

On peut essayer, par changement de variables ou changement de fonction inconnue, de se ramener à la recherche des applications $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) = g(x) + g(y)$$

qui sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les applications $g : x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

**Pour montrer
qu'une application est continue**

- Voir les méthodes à retenir dans le volume Exercices MPSI.
- Se rappeler :
(lipschitzienne) $\implies$ (uniformément continue) $\implies$ (continue).

 **Exercice 2.42.**

**Pour obtenir une inégalité plus
renforcée qu'une inégalité initiale**

Essayer d'appliquer le théorème du cours : toute application continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

 **Exercice 2.41.**

**Pour calculer
la dérivée n -ème d'une fonction f
en tout point d'un intervalle I**

S'assurer d'abord (souvent par un théorème sur les opérations) que f est n fois dérivable sur I .

- Si f est une fraction rationnelle, utiliser une décomposition en éléments simples, éventuellement en passant par les nombres complexes.

 **Exercice 2.4**

- Appliquer les formules sur les dérivées n -èmes d'une combinaison linéaire ou d'un produit de deux fonctions (formule de Leibniz)

**Pour établir une inégalité
portant sur une variable réelle**

- Voir les méthodes à retenir dans le volume Exercices MPSI.
- Étudier les variations d'une fonction, après avoir éventuellement remplacé l'inégalité voulue, par équivalence logique, par une inégalité plus commode.

 **Exercice 2.5.**

**Pour montrer l'existence de zéros
pour une dérivée
ou pour des dérivées successives
d'une fonction à valeurs réelles.**

Utiliser le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis.

 **Exercice 2.18.**

**Pour établir une inégalité
portant sur deux variables réelles**

- Fixer une des deux variables et étudier une fonction de l'autre variable.

 **Exercice 2.19**

- Essayer de ramener la question à la monotonie d'une fonction d'une variable réelle.

 **Exercice 2.20 a).**

Pour établir l'existence d'une constante réalisant une inégalité, sans pouvoir calculer une telle constante

- Essayer d'appliquer le théorème : toute application continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

➡ **Exercice 2.41**

- Faire apparaître deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie, et utiliser le théorème affirmant que ces deux normes sont alors équivalentes.

➡ **Exercice 2.21.**

Pour étudier $\text{Sup}(f, g)$, $\text{Inf}(f, g)$, où $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications à valeurs réelles

Essayer d'utiliser :

- la définition : $\forall x \in X$,

$$(\text{Sup}(f, g))(x) = \text{Max}(f(x), g(x)),$$

$$(\text{Inf}(f, g))(x) = \text{Min}(f(x), g(x))$$

- les formules :

$$\text{Sup}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

$$\text{Inf}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

➡ **Exercice 2.32 a).**

Pour étudier ou résoudre une inéquation différentielle ou une inéquation intégrale

Essayer d'utiliser une fonction auxiliaire, de manière à se ramener à une inéquation différentielle du type : $\forall x \in X, g'(x) \geq 0$, qui traduit que g est croissante.

➡ **Exercice 2.33.**

Pour étudier l'intégrale d'un produit

Essayer d'utiliser une intégration par parties.

➡ **Exercice 2.7.**

Pour obtenir une inégalité portant sur des intégrales

Essayer d'appliquer les propriétés sur les intégrales, relatives à l'ordre :

- si $a \leq b$ et si $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et vérifient $f \leq g$, alors : $\int_a^b f \leq \int_a^b g$
- si $a \leq b$ et si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a; b]$, alors : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
- si $a \leq b$ et si $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues par morceaux sur $[a; b]$, alors (inégalité de Cauchy et Schwarz) :

$$\left| \int_a^b \overline{f}g \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right) \left(\int_a^b |g|^2 \right).$$

➡ **Exercices 2.9, 2.34.**

Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, dans un exemple

Se reporter aux méthodes à retenir pour le calcul des intégrales et des primitives, volume Exercices MPSI.

➡ **Exercices 2.25, 2.26.**

Pour changer la forme de l'écriture d'une intégrale, ou pour calculer ou évaluer une intégrale

Appliquer les méthodes de calcul d'intégrales et de primitives :

- primitives usuelles
- linéarité de l'intégration
- relation de Chasles
- changement de variable
- intégration par parties.

On se ramène alors à la formule fondamentale de l'analyse :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

où f est continue sur $[a; b]$ et F est une primitive de f .

On peut quelquefois exploiter un changement de variable qui échange les bornes.

Pour amener une intégrale ayant des bornes différentes de celles qui interviennent dans l'énoncé

Essayer d'appliquer la relation de Chasles, ou d'effectuer un changement de variable.

Pour trouver la limite, lorsque l'entier n tend vers l'infini, d'une sommation indexée par un entier k , portant sur un terme dépendant de k et n

Essayer de se ramener à une somme de Riemann, et utiliser le théorème du cours : si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors les sommes de Riemann de f tendent vers l'intégrale de f , c'est-à-dire :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f.$$

À cet effet :

- si une somme de Riemann v_n ressemble à u_n proposé, former $u_n - v_n$ et essayer de montrer que $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

➡ **Exercice 2.39**

- s'il s'agit d'un produit, se ramener à une somme en prenant le logarithme.

➡ **Exercice 2.10.**

Pour étudier ou dériver une intégrale dépendant d'un paramètre, le paramètre étant aux bornes

Utiliser le résultat du cours : si $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur un intervalle I et si $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$, alors l'application

$$G : I \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

est de classe C^1 sur I et :

$$\forall x \in I, G'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

➡ Exercice 2.27.

**Pour trouver
une limite d'intégrale**

- On peut conjecturer la limite, qui est souvent, dans les exemples simples, l'intégrale de la limite, et montrer que la différence entre l'intégrale de l'énoncé et la limite conjecturée tend vers 0.
- Si l'essentiel de l'intégrale est concentré en un point, essayer de faire intervenir une continuité en ce point.

➡ Exercice 2.43.

**Pour obtenir
un développement limité**

- Voir aussi l'utilisation du théorème de convergence dominée dans le chapitre 5.
- Utiliser les $DL(0)$ usuels et les opérations sur ces $DL(0)$: troncature, dérivation, primitivation, addition, loi externe, multiplication, composition, inverse. Se ramener, si nécessaire, au voisinage de 0 par transformation de l'écriture.
- Essayer d'anticiper l'ordre auquel développer certaines parties de l'écriture, afin d'arriver au bon ordre pour le développement limité demandé.

➡ Exercices 2.12, 2.24, 2.28.

**Pour obtenir la limite ou
un développement asymptotique
d'une racine d'une équation
dépendant d'un paramètre**

- Commencer par montrer l'existence et l'unicité de la racine à étudier, dans un certain intervalle.
- Utiliser l'équation elle-même pour essayer d'obtenir la limite (si elle existe) de la racine.
- Étudier la différence entre la racine et sa limite, et réitérer si nécessaire.

➡ Exercices 2.14, 2.15, 2.35, 2.45.

Énoncés des exercices

2.1 Inégalités sur des bornes inférieures et des bornes supérieures de f , g , $f + g$, et de leurs moyennes

Soient X un ensemble non vide, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications bornées. On note :

$$m(f) = \inf_{x \in X} f(x), \quad M(f) = \sup_{x \in X} f(x), \quad \mu(f) = \frac{1}{2}(m(f) + M(f)),$$

et de même pour g .

a) Montrer :
$$\begin{cases} m(f+g) \leq m(f) + M(g) \leq M(f+g) \\ m(f+g) \leq M(f) + m(g) \leq M(f+g). \end{cases}$$

b) En déduire : $m(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g) \leq M(f+g).$

2.2 Exemple d'équation fonctionnelle

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + e^y) = x + e^{f(y)}.$$

2.3 Exemple d'équation fonctionnelle

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(3x).$$

2.4 Dérivées successives de Arctan, détermination de leurs zéros

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \text{Arctan } x$.

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. On fera intervenir les nombres complexes.

b) Résoudre, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ l'équation $f^{(n)}(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$.

2.5 Inégalité à une variable par étude des variations d'une fonction

Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad e^x \geq \left(\frac{e^x}{2}\right)^2.$

2.6 Recherche d'une fonction proche de deux fonctions données

Trouver une application $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\int_0^1 (f(x) - x)^2 dx \leq 10^{-2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 (f(x) - x^2)^2 dx \leq 10^{-2}.$$

2.7 Lemme de Lebesgue pour une fonction de classe C^1 sur un segment

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b, f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 sur $[a; b]$.

Montrer :
$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

2.8 Équivalents simples de sommations

a) Montrer :
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

b) En déduire un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

2.9 Inégalité sur des intégrales

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b, f, g, h : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues.

Montrer : $\left(\int_a^b fgh \right)^4 \leq \left(\int_a^b f^4 \right) \left(\int_a^b g^2 \right)^2 \left(\int_a^b h^4 \right).$

2.10 Limite d'un produit

Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{2n+k}{3n+k} \right)^{\frac{1}{n}}.$

2.11 Étude de dérivabilité en un point, pour une fonction définie par une intégrale

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \int_0^{x^2} (\sin t) \operatorname{Arctan} \frac{t}{1+x^2} dt.$

Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0).$

2.12 Exemple de calcul de développement limité

Former le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{\tan x}{x}}.$

2.13 Exemple de calcul de limite

Trouver $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x)^{\tan 3x}.$

2.14 Développement asymptotique d'une racine d'une équation dépendant d'un paramètre entier

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $1 + x + \frac{e^x}{n} = 0$, d'inconnue $x \in]-\infty; 0]$, admet une solution et une seule, notée $x_n.$

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

c) Former un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

2.15 Limite, équivalent, développement asymptotique d'une racine d'une équation dépendant d'un paramètre entier

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$, admet, dans $[0; 1]$, une solution et une seule, notée $x_n.$

b) Montrer $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, puis $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$

c) Trouver un équivalent simple de $x_n - \frac{1}{n}$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

2.16 Condition pour une périodicité

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application non injective, telle qu'il existe une application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = g(f(x), y).$

Montrer que f est périodique.

2.17 Exemple d'équation fonctionnelle sur deux fonctions

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + g(y)) = 2x + y + 5.$$

Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x + f(y))$.

2.18 Étude d'une fonction C^∞ ayant une infinité de zéros s'accumulant en 0

Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $]0; +\infty[$ telle que : $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 0)$. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0$.

2.19 Minimum d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $f : [0; +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 1 + x^2y + xy^2 - 3xy$.

Montrer : $\forall (x, y) \in [0; +\infty[^2, f(x, y) \geq 0$, et étudier le cas d'égalité.

2.20 Inégalités à une, deux, trois variables, faisant intervenir des logarithmes

a) Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$: $\frac{x}{y} < \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+y)}$.

b) En déduire, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 < x < y < z$:

$$\frac{x^2}{yz} < \frac{(\ln(1+x))^2}{\ln(1+y) \ln(1+z)}.$$

c) Déduire, pour tout $t \in]1; +\infty[$: $(t-1)^2 \ln(t+1) \ln(t+2) < t(t+1)(\ln t)^2$.

2.21 Inégalité issue d'une comparaison qualitative

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$:

$$(P(-1))^2 + (P'(0))^2 + (P''(1))^2 \leq C \int_{-1}^1 (P(x))^2 dx.$$

2.22 Limite d'une intégrale pour une fonction périodique

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $T \in \mathbb{R}_+^*, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T -périodique et continue par morceaux.

Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(nx) dx$.

2.23 Calcul de la distance d'une fonction à une partie

On note E le $\mathbb{R}$ -ev des applications $[0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux, muni de $\|\cdot\|_\infty$,

$$\varphi : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x \text{ et } F = \left\{ f \in E; \int_0^{1/2} f = \int_{1/2}^1 f \right\}.$$

Calculer $d(\varphi, F)$, distance de φ à F .

2.24 Exemple de calcul de développement limité

Former le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \longmapsto \frac{1}{\ln \cos x} + \frac{2}{\sin^2 x}$.

2.25 Exemple de calcul d'une intégrale d'intégrale

Soit $a \in]0; +\infty[$. Calculer $I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \left(\int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2} dx \right) dy$.

2.26 Exemple de calcul d'une intégrale

Calculer $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} dx$.

2.27 Étude d'une fonction définie par une intégrale avec le paramètre aux bornes

On considère l'application $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$.

Étudier f : définition, classe, dérivée, variations, étude en 0, étude en $+\infty$, tracé de la courbe représentative.

Montrer : $f(x) = 3(\ln x)^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2.28 Développement limité d'une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes

Former le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

2.29 Exemple de calcul de limite

Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(\sin x \operatorname{sh} x)^2} - \frac{1}{(\tan x \operatorname{th} x)^2} \right)$.

2.30 Exemple d'équation fonctionnelle

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x.$$

2.31 Condition pour une périodicité

a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+a+b) + f(x) = f(x+a) + f(x+b).$$

Montrer que f est a -périodique et b -périodique.

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right).$$

Montrer que f est $\frac{1}{42}$ -périodique.

2.32 Condition pour que $|u|$ soit dérivable, pour que $\operatorname{Sup}(f, g)$ soit dérivable

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

a) Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Montrer que $|u|$ est dérivable sur I si et seulement si :

$$\forall x \in I, \quad (u(x) = 0 \implies u'(x) = 0).$$

b) Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur I .

On note $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = \max(f(x), g(x))$.

Trouver une CNS sur f, g, f', g' pour que φ soit dérivable sur I .

2.33 Résolution d'une inéquation différentielle

Soient $a \in \mathbb{R}, f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = 0$.

On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a; +\infty[, |f'(x)| \leq \lambda |f(x)|$.

Montrer : $f = 0$.

2.34 Calcul de bornes inférieures de fonctionnelles quadratiques

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On note $E = \{f \in C^1([0; 1]; \mathbb{R}); f(0) = 0, f(1) = \lambda\}$.

Trouver les bornes inférieures de $\left\{ \int_0^1 f'^2; f \in E \right\}$ et de $\left\{ \int_0^1 f^2; f \in E \right\}$.

2.35 Limite d'une racine d'une équation à paramètre entier

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{x}{k}} = 2n$, d'inconnue $x \in [0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n .

b) Montrer : $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

2.36 Limite d'une sommation

Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^n$.

2.37 Étude d'une inéquation intégrale

Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et à valeurs ≥ 0 , $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

On suppose : $\forall x \in [0; 1], (f(x))^2 \leq a + b \int_0^x f(t) dt$.

Montrer : $\forall x \in [0; 1], \int_0^x f(t) dt \leq \sqrt{a}x + \frac{b}{4}x^2$.

2.38 Développement limité d'une fonction réciproque

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

a) Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts U, V de $\mathbb{R}$, contenant 0, tels que f réalise une bijection de U sur V .

On note encore $f : U \rightarrow V, x \mapsto f(x)$.

b) On suppose que f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, de la forme :

$$f(x) = x + ax^2 + bx^3 + o(x^3),$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est fixé.

Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, et préciser celui-ci.

2.39 Équivalent simple d'une sommation

Trouver un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

2.40 Étude de fonctions vérifiant une équation faisant intervenir la loi ◦

- a) Existe-t-il une bijection $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch}(f(x))$?
 b) Existe-t-il une bijection continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(\sin x) = \cos(f(x))$?

2.41 Décollement d'une fonction de deux variables

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

On suppose qu'il existe $a \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, (|x - y| \geq a \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|).$$

Montrer qu'il existe $C \in [0; 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, (|x - y| \geq a \implies |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|).$$

2.42 Étude de continuité pour une fonction définie comme borne supérieure

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b, n \in \mathbb{N}^*, f_0, \dots, f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ bornées.

On note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \sup_{t \in [a; b]} \left| \sum_{k=0}^n x^k f_k(t) \right|$.

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2.43 Limite d'une suite d'intégrales

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^2 (x^n - x^{n+1}) f(x) dx$.

2.44 Développement asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre entier

Former un développement asymptotique, lorsque l'entier n tend vers l'infini, de

$$I_n = \int_0^1 (x^n + x^{n-2}) \ln(1 + x^n) dx, \text{ à la précision } O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

2.45 Étude asymptotique de la racine d'une équation dépendant d'un paramètre entier

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in]0; 1[$ unique tel que $P'_n(u_n) = 0$.

b) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k - u_n} = 0$.

c) En déduire : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

d) Trouver un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

2.46 Développement asymptotique du terme général d'une suite définie par une relation de récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}$.

a) Montrer : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

b) Former un développement asymptotique de u_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Du mal à démarrer ?

2.1 a) Écrire des inégalités convenables pour tout $x \in X$, puis passer à une borne inférieure ou à une borne supérieure.

2.2 1) Soit f convenant. En appliquant l'hypothèse convenablement, déduire que f est de la forme $x \mapsto x + a$, où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Déduire ensuite $a = 0$.

2) Réciproquement, tester $f : x \mapsto x$.

2.3 1) Soit f convenant.

Déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(3x)$,

puis : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$,

et conclure que f est constante.

2) Ne pas oublier d'étudier la réciproque.

2.4 a) Pour calculer $f^{(n)}(x)$, calculer d'abord $f'(x)$ et utiliser une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$. On obtient, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{1}{(x+i)^n} - \frac{1}{(x-i)^n} \right).$$

b) L'équation se ramène à : $\left(\frac{x-i}{x+i} \right)^n = 1$.

Faire intervenir les racines n -èmes de 1 dans $\mathbb{C}$.

On obtient : $-\cotan \frac{k\pi}{n}, k \in \{1, \dots, n-1\}$.

2.5 Étudier les variations d'une fonction, après avoir éventuellement transformé l'inégalité demandée en une autre inégalité logiquement équivalente et plus commode.

2.6 Il s'agit de trouver f de façon que les carrés des distances de f à $x \mapsto x$ et à $x \mapsto x^2$ soient petites. On peut essayer une

fonction proche de ces deux-là, par exemple leur moyenne arithmétique, $f : x \mapsto \frac{x+x^2}{2}$.

2.7 Puisque f est supposée de classe C^1 , faire une i.p.p.

2.8 a) Utiliser une comparaison somme/intégrale, à l'aide de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

b) Décomposer $\frac{1}{k(n-k)}$ en éléments simples.

2.9 Appliquer convenablement l'inégalité de Cauchy et Schwarz, plusieurs fois éventuellement.

2.10 En prenant le logarithme, amener une somme de Riemann.

2.11 Former le taux d'accroissement de f entre 0 et x , pour $x \in \mathbb{R}^*$, puis en chercher la limite.

2.12 Former d'abord le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\frac{\tan x}{x}}$, en partant du

$DL_3(0)$ de $\tan x$.

Considérer $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \operatorname{Arctan}(1+u)$ et former le $DL_2(0)$ de g à partir du $DL_2(0)$ de g' par primitivation.

Composer enfin les $DL_2(0)$.

2.13 Repérer la forme indéterminée.

Prendre le logarithme et effectuer le changement de variable

$$t = x - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} 0.$$

2.14 a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, étudier les variations de

$$f_n :]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 + x + \frac{e^x}{n}.$$

b) Montrer : $1 + x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

c) Étudier $x_n + 1$.

2.15 a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, étudier les variations de

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos x - nx.$$

b) Partir de : $\cos x_n = nx_n$.

c) Noter $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ et reporter dans $\cos x_n = nx_n$.

2.16 Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$a < b \quad \text{et} \quad f(a) = f(b),$$

puis montrer : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(a+y) = f(b+y)$.

2.17 Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = 2t + \lambda$$

puis déduire $g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Calculer enfin $g(x + f(y))$.

2.18 Montrer d'abord $f(0) = 0$.

Montrer qu'on peut remplacer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une suite vérifiant les mêmes conditions et qui soit, de plus, strictement décroissante. Appliquer convenablement le théorème de Rolle et en déduire $f'(0) = 0$.

Réitérer.

2.19 Pour $x \in [0; +\infty[$ fixé, étudier les variations de

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto f(x, y).$$

Distinguer les cas : $x \geq 3$, $x < 3$.

2.20 a) Étudier les variations de :

$$f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

b) Appliquer a) à (x, y) et à (x, z) .

c) Appliquer b) à $(t-1, t, t+1)$.

2.21 Montrer que l'application

$$N : \mathbb{R}_n[\mathbf{X}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto \left(\int_{-1}^1 (P(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme, et que les applications de $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$P \longmapsto P(-1), \quad P \longmapsto P'(0), \quad P \longmapsto P''(1)$$

sont linéaires continues.

2.22 Effectuer le changement de variable $u = nx$, puis découper l'intervalle $[na; nb]$ en sous-intervalles consécutifs de longueur T (sauf le dernier, par exemple), pour utiliser la T -périodicité de f .

2.23 1) Pour $f \in E$, majorer $\int_0^{1/2} f$, et minorer $\int_{1/2}^1 f$, à l'aide de $\|f\|_\infty$. Déduire : $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{4}$.

2) Chercher $f \in E$, si elle existe, de façon que l'on ait $\|f - \varphi\|_\infty = \frac{1}{4}$.

2.24 Remarquer d'abord :

$$\frac{1}{\ln \cos x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\sin^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

Déterminer l'ordre auquel développer $\ln \cos x$ et $\sin^2 x$ pour obtenir le $DL_2(0)$ de f .

2.25 • Pour $y \in]0; +\infty[$ fixé, calculer $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}$.

• Pour exploiter ensuite la présence de $\frac{1}{a}$ et de a aux bornes d'une intégrale, utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{y}$, qui échange les bornes, ce qui fournit une deuxième évaluation de $I(a)$.

• Combiner ces deux expressions de $I(a)$ et se rappeler :

$$\forall u \in]0; +\infty[, \quad \text{Arctan } u + \text{Arctan } \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}.$$

2.26 Transformer l'expression sous l'intégrale, par exemple en utilisant une expression conjuguée (quitte à supposer temporairement $x \neq 0$). Utiliser ensuite le changement de variable $y = \sqrt{1-x^2}$.

2.27 • Montrer d'abord que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x)$ existe.

• Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, en utilisant le théorème du cours sur la dérivée d'une intégrale avec paramètre aux bornes. En déduire le tableau de variation de f . On fera intervenir un réel α solution d'une équation polynomiale. Calculer (à la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel de calcul) une valeur approchée de α et une valeur approchée de $f(\alpha)$.

• Montrer que f admet une limite finie en 0 et déterminer cette limite. Montrer ensuite que l'application f (prolongée en 0 par continuité) est alors de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et calculer $f'(0)$.

• Pour l'étude en $+\infty$, en décomposant $\ln(1+t^2)$ par mise en facteur de t^2 , obtenir $f(x) = 3(\ln x)^2 + B(x)$, où $B(x)$ est une intégrale dépendant de x et pour laquelle on montrera $B(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

• Terminer par le tracé de la courbe représentative de f .

2.28 Faire un changement de variable par translation pour se ramener au voisinage de 0, c'est-à-dire considérer :

$$g :]-\infty; 0] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto f(1+u).$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $] -1; +\infty[$, former le $DL_2(0)$ de g' , puis le $DL_3(0)$ de g .

2.29 Transformer l'écriture de façon à se ramener à la recherche d'un équivalent simple de $1 - \cos x \operatorname{ch} x$ lorsque $x \rightarrow 0$. Pour obtenir cet équivalent, utiliser des $DL_4(0)$ de $\cos x$ et de $\operatorname{ch} x$.

2.30 Considérer l'application

$$\varphi : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x-3}{x+1}.$$

Montrer que φ envoie $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ dans lui-même.

Remarquer que $\frac{3+x}{1-x} = \varphi \circ \varphi(x)$, et calculer $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(x)$.

2.31 a) Considérer l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x+a) - f(x).$$

Montrer que g est b -périodique.

Calculer $f(x+a) - f(x)$, $f(x+a+b) - f(x+a)$, ...

$f(x+a+nb) - f(x+a+(n-1)b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Sommer et utiliser le fait que g est bornée.

En déduire que f est a -périodique.

b) Remarquer : $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42}$.

2.32 a) 1) Supposer $|u|$ dérivable sur I .

Soit $x \in I$ tel que $u(x) = 0$.

En étudiant le taux d'accroissement de $|u|$ entre x et $x+h$, pour $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in I$, déduire $u'(x) = 0$.

2) Réciproquement, supposer :

$$\forall x \in I, \quad (u(x) = 0 \implies u'(x) = 0).$$

Soit $x \in I$. Montrer que u est dérivable en x , en séparant en trois cas : $u(x) > 0$, $u(x) < 0$, $u(x) = 0$.

b) Se rappeler que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{Max}(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

2.33 Considérer l'application

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{-2\lambda x} (f(x))^2$$

et étudier les variations de g .

2.34 1) • Pour toute $f \in E$, minorer $\int_0^1 f^2$, en utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

• Chercher $f_0 \in E$, si elle existe, de façon que l'inégalité obtenue ci-dessus soit une égalité.

2) Trouver une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans E telle que :

$$\int_0^1 f_n^2 \xrightarrow{n \infty} 0.$$

2.35 a) Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, les variations de

$$f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{x}{k}} \right) - 2n.$$

b) Utiliser l'inégalité classique

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

puis un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, à l'aide d'une comparaison somme/intégrale.

2.36 Faire intervenir une exponentielle. Montrer, par exemple à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{-\frac{1}{2n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}}.$$

Pour terminer, calculer $\sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}}$, qui est une sommation géométrique.

2.37 Considérer l'application

$$g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto a + b \int_0^x f(t) dt$$

et montrer : $\forall x \in [0; 1], \quad \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \leq \frac{b}{2}.$

Intégrer de 0 à x .

2.38 a) Montrer que f est strictement croissante au voisinage de 0.

b) Raisonner par condition nécessaire et condition suffisante.

• Supposer que f^{-1} admet un $DL_3(0)$, nécessairement de la forme : $f^{-1}(y) = y + \gamma y^2 + \delta y^3 + o(y^3)$ et reporter dans $x = f^{-1}(f(x))$, plutôt que dans $y = f(f^{-1}(y))$, pour obtenir γ et δ en fonction de (a, b) .

• Réciproquement, montrer, avec les valeurs de γ et δ obtenues ci-dessus en fonction de (a, b) , que $f^{-1}(y) = (y + \beta y^2 + \gamma y^3)$ est un $o(y^3)$.

2.39 Considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

• En utilisant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \infty}{\sim} \ln n$, qui s'obtient, par exemple, par une comparaison somme/intégrale, obtenir un équivalent simple de v_n :

$$v_n \underset{n \infty}{\sim} n \ln n.$$

• Montrer que l'application

$$\varphi :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

admet une limite finie en 0, et en déduire que φ est bornée.

Majorer alors convenablement $|u_n - v_n|$.

2.40 a) Supposer qu'il existe f convenant.

Déduire $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$, contradiction.

b) Supposer qu'il existe f convenant.

Déduire $f([-1; 1]) = [-1; 1]$,

puis $(f(-1), f(1)) \in \{(-1, 1), (1, -1)\}$.

Évaluer alors $f(\sin 1)$ et $f(-\sin 1)$ pour obtenir une contradiction.

2.41 Noter $E = \{(x, y) \in [0; 1]^2 : |x - y| \geq a\}$ et

$$F : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

Montrer que E est compact et que F est continue sur E .

2.42 • Montrer d'abord, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [a; b]$:

$$|g(x) - g(y)| \leq \sum_{i=1}^n |x^i - y^i| \|f_i\|_{\infty}.$$

• En déduire que g est lipchitzienne sur tout segment $[-A; A]$, $A \in \mathbb{R}_+$, et conclure.

2.43 On peut conjecturer, à cause de la présence de x^n , que la partie essentielle de la fonction sous l'intégrale est concentrée près de 1, donc que l'intégrale proposée J_n se comporte de façon analogue à l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 n^2 (x^n - x^{n+1}) f(1) dx.$$

Calculer J_n .

Former $|I_n - J_n|$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, décomposer l'intervalle $[0; 1]$ en $[0; 1 - \eta]$ et $[1 - \eta; 1]$, où η vient de la continuité de f en 1, de façon à majorer l'intégrale de 0 à $1 - \eta$ (en utilisant le fait que f est bornée) et l'intégrale de $1 - \eta$ à 1 (en utilisant la continuité de f en 1).

2.44 Considérer $J_n = \int_0^1 2x^{n-1} \ln(1+x^n) dx$, qui ressemble à I_n .

D'une part, calculer J_n .

D'autre part, évaluer $I_n - J_n$.

2.45 a) Utiliser le théorème de Rolle et compter les zéros du polynôme P'_n .

b) Utiliser la formule du cours relative à $\frac{P'}{P}$, lorsque $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

c) Dans $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k - u_n}$, isoler le terme d'indice $k = 0$.

d) Dans $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k - u_n}$, isoler le terme d'indice $k = 1$.

2.46 a) • S'assurer d'abord que, pour tout $n \geq 1$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

• Montrer : $u_n \leq u_{n-1} + 1$ et déduire, par sommation, $u_n \leq u_1 + (n-1)$, puis déduire, successivement, que $(u_n)_n$ est bornée, que $u_n \leq \frac{C}{n}$, où C est une constante, que $u_n \leq \frac{D}{n^2}$, où

D est une constante, et enfin que $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$, par un raisonnement correct sur les équivalents.

b) Remplacer u_n par $\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, dans l'expression de u_{n+1} , puis décaler l'indice.

Corrigés des exercices

2.1 a) 1) • On a :

$\forall x \in X, m(f+g) \leq f(x) + g(x) \leq f(x) + M(g)$,
d'où, en passant à la borne inférieure lorsque x décrit X :

$$m(f+g) \leq m(f) + M(g).$$

• Puisque $-f$ et $-g$ sont bornées, on a, en appliquant le résultat précédent à $(-f, -g)$ à la place de (f, g) :

$$m(-f-g) \leq m(-f) + M(-g).$$

Mais :

$$m(-f-g) = \inf_x (-f-g) = -\sup_x (f+g) = -M(f+g)$$

$$\text{et } m(-f) = -M(f), M(-g) = -m(g),$$

$$\text{d'où : } -M(f+g) \leq -M(f) - m(g),$$

$$\text{c'est-à-dire : } M(f) + m(g) \leq M(f+g).$$

2) Puisque f et g ont des rôles symétriques, on a aussi, en échangeant f et g dans les résultats précédents :

$$m(f+g) \leq m(g) + M(f)$$

$$\text{et } M(g) + m(f) \leq M(f+g),$$

d'où les encadrements demandés :

$$\begin{cases} m(f+g) \leq m(f) + M(g) \leq M(f+g) \\ m(f+g) \leq M(f) + m(g) \leq M(f+g). \end{cases}$$

b) En additionnant, puis en divisant par 2, on obtient :

$$m(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g) \leq M(f+g).$$

2.2 1) Soit f convenant.

• On a alors, en appliquant l'hypothèse à $(x - e^y, y)$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f((x - e^y) + e^y) = (x - e^y) + e^{f(y)}.$$

En particulier, en remplaçant y par 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 1 + e^{f(0)}.$$

Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + a$.

• On a, alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, en appliquant l'hypothèse à $(0, y) : f(0 + e^y) = 0 + e^{f(y)}$, c'est-à-dire : $e^y + a = e^{y+a}$,

$$\text{d'où : } e^y (e^a - 1) = a.$$

En appliquant ceci à deux valeurs de y , différentes entre elles, par exemple $y = 0, y = 1$, on déduit $a = 0$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x.$$

2) Réciproquement, il est évident que l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x \text{ convient.}$$

On conclut qu'il y a une solution et une seule, $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

2.3 1) Soit f convenant.

En appliquant l'hypothèse à (x, x) , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(3x).$$

En reportant dans l'hypothèse, on a alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

En appliquant ceci à $(2t, 0)$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(0) = f(t),$$

donc f est constante.

2) Réciproquement, il est évident que toute application constante convient.

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des applications cherchées est :

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto C ; C \in \mathbb{R}\}.$$

2.4 a) D'après le cours, $f : x \longmapsto \text{Arctan } x$ est de classe C^∞

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et on a : } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

En utilisant une décomposition en éléments simples, on obtient, en passant par les nombres complexes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right).$$

D'où, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{1}{(x+i)^n} - \frac{1}{(x-i)^n} \right).$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $n \geq 2$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = 0 \iff \frac{1}{(x+i)^n} - \frac{1}{(x-i)^n} = 0$$

$$\iff \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^n = 1.$$

En notant, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$, et $\omega_k = e^{i\theta_k}$,

on a :

$$\left(\frac{x-i}{x+i} \right)^n = 1$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \frac{x-i}{x+i} = \omega_k$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad x - i = \omega_k x + i \omega_k \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (1 - \omega_k)x = i(1 + \omega_k) \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad x = i \frac{1 + \omega_k}{1 - \omega_k}. \end{aligned}$$

Et :

$$i \frac{1 + \omega_k}{1 - \omega_k} = i \frac{1 + e^{i\theta_k}}{1 - e^{i\theta_k}} = i \frac{e^{i\frac{\theta_k}{2}} 2 \cos \frac{\theta_k}{2}}{-e^{i\frac{\theta_k}{2}} 2i \sin \frac{\theta_k}{2}} = -\cotan \frac{\theta_k}{2}.$$

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des solutions de l'équation $f^{(n)}(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est :

$$\mathcal{S}_n = \left\{ -\cotan \frac{k\pi}{n}; k \in \{1, \dots, n-1\} \right\}.$$

2.5 Commençons par transformer l'équation proposée en une inéquation équivalente et plus commode :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad e^x \geq \left(\frac{e^x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [0; +\infty[, \quad 4e^{x-2} \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[, \quad 2 \ln 2 + (x-2) \geq 2 \ln x,$$

le cas $x = 0$ étant d'étude immédiate.

Considérons l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = 2 \ln 2 + x - 2 - 2 \ln x.$$

Il est clair que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}.$$

On en déduit les variations de f :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Comme $f(2) = 0$, on obtient :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) \geq 0,$$

ce qui établit l'inégalité demandée.

2.6 Puisqu'il s'agit de trouver une application « proche » de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto x^2$, on peut essayer leur moyenne arithmétique, $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + x^2)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) - x)^2 dx &= \int_0^1 \left(\frac{x + x^2}{2} - x\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x - x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{120} \leq 10^{-2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) - x^2)^2 dx &= \int_0^1 \left(\frac{x + x^2}{2} - x^2\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x - x^2}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{120} \leq 10^{-2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x + x^2}{2}$, convient.

2.7 Soit $\lambda \in]0; +\infty[$ fixé.

Effectuons une intégration par parties, pour des applications de classe C^1 sur $[a; b]$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &= \left| \left[f(x) \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} \right]_a^b - \int_a^b f'(x) \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} dx \right| \\ &= \left| \frac{f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(x) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &\leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(x)| dx \\ &= \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right) \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{On conclut : } \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

2.8 a) Il s'agit d'une étude classique.

On va effectuer une comparaison somme/intégrale.

L'application $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$, est continue et décroissante sur $]0; +\infty[$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [n; n+1], \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

Il s'ensuit, en intégrant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n},$$

puis, en sommant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

D'où, en notant $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n,$$

ou encore : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

Comme

$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln + o_{n \rightarrow \infty}(1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$$

et $1 + \ln n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$,

on déduit, par encadrement : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On a, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, par exemple à l'aide d'une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right).$$

D'où, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) \underset{k \leftarrow n-k}{=} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de a), on déduit :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n} \ln(n-1) = \frac{2}{n} \left(\ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n} \ln n.$$

2.9 Appliquons deux fois l'inégalité de Cauchy et Schwarz, en faisant intervenir $\sqrt{g}$, qui est continue, puisque g est continue et à valeurs ≥ 0 :

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b fgh \right)^4 &= \left(\int_a^b (f\sqrt{g})^2 (\sqrt{g}h)^2 \right)^4 \\ &\leq \left(\int_a^b (f\sqrt{g})^2 \right)^2 \left(\int_a^b (\sqrt{g}h)^2 \right)^2 \\ &= \left(\int_a^b f^2 g \right)^2 \left(\int_a^b gh^2 \right)^2 \\ &\leq \left(\left(\int_a^b f^4 \right) \left(\int_a^b g^2 \right) \right) \left(\left(\int_a^b g^2 \right) \left(\int_a^b h^4 \right) \right) \\ &= \left(\int_a^b f^4 \right) \left(\int_a^b g^2 \right)^2 \left(\int_a^b h^4 \right). \end{aligned}$$

2.10 Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2n+k}{3n+k} \right)^{\frac{1}{n}} > 0.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{2n+k}{3n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{2 + \frac{k}{n}}{3 + \frac{k}{n}}.$$

L'application $[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln \frac{2+x}{3+x}$, est continue sur le segment $[0; 1]$, donc, d'après le cours sur les sommes de

Riemann : $\ln u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \ln \frac{2+x}{3+x} dx$.

On calcule cette intégrale, notée I :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \ln(2+x) dx - \int_0^1 \ln(3+x) dx \\ &= [(2+x) \ln(2+x) - (2+x)]_0^1 \\ &\quad - [(3+x) \ln(3+x) - (3+x)]_0^1 \\ &= (3 \ln 3 - 3) - (2 \ln 2 - 2) \\ &\quad - ((4 \ln 4 - 4) - (3 \ln 3 - 3)) \\ &= 6 \ln 3 - 10 \ln 2. \end{aligned}$$

Comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^I = e^{6 \ln 3 - 10 \ln 2} = \frac{3^6}{2^{10}}.$$

2.11 D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe comme intégrale d'une application continue sur un segment.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^{x^2} (\sin t) \operatorname{Arctan} \frac{t}{1+x^2} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^{x^2} |\sin t| \left| \operatorname{Arctan} \frac{t}{1+x^2} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^{x^2} 1 \cdot \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{2} x. \end{aligned}$$

Il en résulte, par encadrement : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$,

ce qui montre que f est dérivable en 0 et que : $f'(0) = 0$.

2.12 D'abord, $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{\tan x}{x}}$, est définie, au moins, sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[- \{0\}$.

Comme $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$, donc f admet un prolongement continu en 0, en notant $f(0) = \frac{\pi}{4}$.

De plus, il est clair que f est paire.

On calcule des développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2), \\ \sqrt{\frac{\tan x}{x}} &= \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{3} + o(x^2) = 1 + \frac{1}{6} x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } f(x) = \operatorname{Arctan} \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right).$$

Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto g(u) = \operatorname{Arctan}(1 + u).$$

Il est clair que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}g'(u) &= \frac{1}{1 + (1 + u)^2} = \frac{1}{2 + 2u + u^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + u + \frac{u^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (1 - u + o(u)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} u + o(u).\end{aligned}$$

Il en résulte, par primitivation pour une application de classe C^1 dont la dérivée admet un $DL_1(0)$:

$$\begin{aligned}g(u) &= g(0) + \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} u^2 + o(u^2).\end{aligned}$$

On déduit, par composition, le $DL_2(0)$ de f :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{6} + o(x^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{12} x^2 + o(x^2).$$

2.13 Il s'agit d'une forme indéterminée 1^∞ .

Notons, pour x au voisinage de $\frac{\pi}{6}$: $f(x) = (2 \sin x)^{\tan x}$.

On a, par le changement de variable $t = x - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} 0$:

$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &= (\tan 3x) \ln(2 \sin x) \\ &= \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} + 3t\right)\right) \ln\left(2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\tan 3t} \ln\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cos t + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{\tan 3t} \ln(\cos t + \sqrt{3} \sin t) \\ &= -\frac{1}{3t + o(t)} \ln(1 + \sqrt{3}t + o(t))\end{aligned}$$

$$\underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{3t} \sqrt{3}t = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{donc : } \ln(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On conclut, par continuité de l'exponentielle :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

2.14 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Considérons l'application

$$f_n :]-\infty; 0] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = 1 + x + \frac{e^x}{n}.$$

L'application f_n est dérivable sur $]-\infty; 0]$ et :

$$\forall x \in]-\infty; 0], \quad f_n'(x) = 1 + \frac{e^x}{n} > 0.$$

On dresse le tableau de variation de f_n :

x	$-\infty$	x_n	0
$f_n'(x)$		+	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ $1 + \frac{1}{n}$

Puisque f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et que l'on a

$\lim_{-\infty} f_n = -\infty < 0$ et $f_n(0) = 1 + \frac{1}{n} > 0$, d'après le théorème de la bijection monotone, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]-\infty; 0]$, admet une solution et une seule, notée x_n .

De plus, comme $f_n(0) \neq 0$, on a : $x_n \neq 0$.

$$b) \text{ On a, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : |1 + x_n| = \frac{e^{x_n}}{n} \leq \frac{1}{n},$$

$$\text{donc : } 1 + x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{d'où : } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1.$$

$$c) \text{ On a : } n(x_n + 1) = -e^{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -e^{-1},$$

$$\text{donc : } x_n + 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{e^{-1}}{n}.$$

On conclut au développement asymptotique suivant, à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$: $x_n = -1 - \frac{1}{e n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2.15 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Considérons l'application

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos x - nx.$$

L'application f_n est dérivable sur $[0; 1]$ et :

$$\forall x \in [0; 1], f'_n(x) = -\sin x - n \leq -n < 0.$$

On dresse le tableau de variation de f_n :

x	0	1
$f'_n(x)$		—
$f_n(x)$	1	$\searrow$ $\cos 1 - n$

Puisque f_n est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et que :

$$f_n(0) = 1 > 0 \text{ et } f_n(1) = \cos 1 - n < 0,$$

d'après le théorème de la bijection monotone, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [0; 1]$, admet une solution et une seule, notée x_n .

$$b) \bullet \text{ On a : } |x_n| = \left| \frac{\cos x_n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{donc : } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\bullet \text{ Ensuite : } x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

$$c) \text{ Notons, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : y_n = x_n - \frac{1}{n}.$$

$$\text{Puisque } x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}, \text{ on a déjà : } y_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a :

$$\cos\left(\frac{1}{n} + y_n\right) = \cos x_n = nx_n = n\left(\frac{1}{n} + y_n\right) = 1 + ny_n,$$

d'où :

$$ny_n = \underbrace{\cos\left(\frac{1}{n} + y_n\right)}_{\rightarrow 0} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{n} + y_n}_{=o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2},$$

$$\text{donc : } y_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}.$$

$$\text{On conclut : } x_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}.$$

2.16 Puisque f n'est pas injective, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. On a alors :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(a + y) = g(f(a), y) = g(f(b), y) = f(b + y).$$

En notant $c = a - b > 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R}, f(c + z) &= f((a - b) + z) = f(a + (-b + z)) \\ &= f(b + (-b + z)) = f(z). \end{aligned}$$

On conclut que f est c -périodique.

2.17 En remplaçant y par 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + g(0)) = 2x + 5,$$

puis :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= f((t - g(0)) + g(0)) \\ &= 2(t - g(0)) + 5 = 2t + (5 - 2g(0)). \end{aligned}$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 2t + \lambda$.

• On a donc, en remplaçant, dans l'hypothèse, f par son expression obtenue ci-dessus :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y + 5 &= f(x + g(y)) \\ &= 2(x + g(y)) + \lambda = 2x + 2g(y) + \lambda, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \forall y \in \mathbb{R}, g(y) = \frac{1}{2}y + \frac{5 - \lambda}{2}.$$

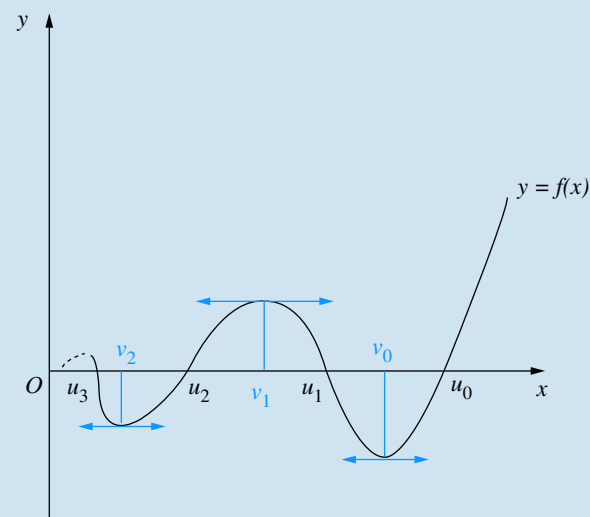
On déduit :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + f(y)) &= \frac{1}{2}(x + f(y)) + \frac{5 - \lambda}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x + 2y + \lambda) + \frac{5 - \lambda}{2} = \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

2.18 Puisque : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in]0; +\infty[)$,

on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante et de limite 0.

Il existe donc une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, strictement décroissante, de limite 0, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = 0$.



Puisque f est continue en 0, on déduit : $f(0) = 0$.

D'autre part, d'après le théorème de Rolle, puisque f est dérivable sur $]0; +\infty[$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in]u_{n+1}; u_n[$ tel que : $f'(v_n) = 0$. On construit ainsi une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, strictement décroissante, de limite 0, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'(v_n) = 0.$$

D'après l'étude précédente, appliquée à f' à la place de f , on déduit : $f'(0) = 0$.

En réitérant le raisonnement, ou par une récurrence, on conclut : $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0$.

2.19 1) Inégalité :

Soit $x \in [0; +\infty[$.

Notons $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $y \in [0; +\infty[$, par : $g(y) = f(x, y) = 1 + x^2y + xy^2 - 3xy$.

L'application g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall y \in [0; +\infty[, g'(y) = x^2 + 2xy - 3x = x(x + 2y - 3).$$

1^{er} cas : $x \geq 3$

On a alors : $\forall y \in [0; +\infty[, g'(y) \geq 0$,

donc g est croissante.

Comme $g(0) = 1$, on déduit :

$$\forall y \in [0; +\infty[, g(y) \geq g(0) = 1 > 0.$$

2^e cas : $0 \leq x < 3$

On dresse le tableau de variations de g :

y	0	$\frac{3-x}{2}$	$+\infty$
$g'(y)$	-	0	+
$g(y)$		$\searrow$	$\nearrow$

On calcule le minimum de g , obtenu en $\frac{3-x}{2}$:

$$\begin{aligned} & g\left(\frac{3-x}{2}\right) \\ &= 1 + x^2y + xy^2 - 3xy \\ &= 1 + xy(x + y - 3) \\ &= 1 + x \frac{3-x}{2} \left(x + \frac{3-x}{2} - 3\right) \\ &= 1 + \frac{3x - x^2}{2} \left(\frac{x-3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} (4 - x(x-3)^2) \\ &= \frac{1}{4} (-x^3 + 6x^2 - 9x + 4) \\ &= \frac{1}{4} (-x+1)(x^2 - 5x + 4) \\ &= \frac{1}{4} (-x+1)(x-1)(x-4) \\ &= \frac{1}{4} (x-1)^2 \underbrace{(4-x)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Finalement : $\forall (x, y) \in [0; +\infty[^2, f(x, y) \geq 0$.

2) Étude du cas d'égalité

• Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité de l'énoncé. D'après 1), on a alors nécessairement :

$$x \geq 3, y = \frac{3-x}{2}, g(y) = 0,$$

d'où, comme $4-x > 0$: $x = 1$, puis $y = 1$.

• Réciproquement : $f(1, 1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$.

On conclut qu'il y a égalité si et seulement si :

$$(x, y) = (1, 1).$$

2.20 a) Considérons l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

L'application f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right).$$

Considérons l'application

$$g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

L'application g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} \\ &= -\frac{x}{(1+x)^2} \begin{cases} \leq 0 \\ < 0 \text{ si } x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il en résulte que g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Comme $g(0) = 0$, on en déduit :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0,$$

donc : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0$.

Il en résulte que f est strictement décroissante.

On a donc, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$:

$$\begin{aligned} x < y &\implies f(y) < f(x) \\ &\iff \frac{\ln(1+y)}{y} < \frac{\ln(1+x)}{x} \iff \frac{x}{y} < \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+y)}. \end{aligned}$$

b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 < x < y < z$.

Appliquons le résultat de a) à (x, y) et à (x, z) :

$$\frac{x}{y} < \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+y)} \quad \text{et} \quad \frac{x}{z} < \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+z)},$$

d'où, par multiplication (pour des nombres tous > 0) :

$$\frac{x^2}{yz} < \frac{(\ln(1+x))^2}{\ln(1+y) \ln(1+z)}.$$

c) Soit $t \in]0; +\infty[$. Appliquons le résultat de b) à $x = t - 1 \in]0; +\infty[, y = t, z = t + 1$:

$$\frac{(t-1)^2}{t(t+1)} < \frac{(\ln t)^2}{\ln(t+1)\ln(t+2)},$$

d'où, les dénominateurs étant > 0 :

$$(t-1)^2 \ln(t+1) \ln(t+2) < t(t+1)(\ln t)^2.$$

2.21 Notons, pour abrégé, $E = \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ et confondons polynôme et application polynomiale sur $[-1; 1]$.

D'après le cours, l'application

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto \left(\int_{-1}^1 (P(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur E .

Considérons les applications $u, v, w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $P \in E$, par :

$$u(P) = P(-1), \quad v(P) = P'(0), \quad w(P) = P''(1).$$

Il est clair que u, v, w sont linéaires.

Puisque E est de dimension finie, u, v, w sont donc continues et il existe $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $P \in E$:

$$|u(P)| \leq aN(P), \quad |v(P)| \leq bN(P), \quad |w(P)| \leq cN(P).$$

On a alors, pour tout $P \in E$:

$$\begin{aligned} (P(-1))^2 + (P'(0))^2 + (P''(1))^2 \\ = (u(P))^2 + (v(P))^2 + (w(P))^2 \\ \leq (a^2 + b^2 + c^2)(N(P))^2. \end{aligned}$$

En notant $C = a^2 + b^2 + c^2$, on a donc, pour tout $P \in E$:

$$(P(-1))^2 + (P'(0))^2 + (P''(1))^2 \leq C \int_{-1}^1 (P(x))^2 dx.$$

2.22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a, par le changement de variable $u = nx$:

$$I_n = \int_a^b f(nx) dx = \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} f(u) du.$$

Notons $N = E\left(\frac{n(b-a)}{T}\right) \in \mathbb{N}$, (qui dépend de n) de sorte que : $na + NT \leq nb < na + (N+1)T$.

On a, par la relation de Chasles :

$$I_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{na+kT}^{na+(k+1)T} f(u) du + \int_{na+NT}^{nb} f(u) du \right).$$

Puisque f est T -périodique, on déduit :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T f(u) du + \int_{na+NT}^{nb} f(u) du \right) \\ &= \frac{N}{n} \int_0^T f(u) du + \frac{1}{n} \int_{na+NT}^{nb} f(u) du. \end{aligned}$$

D'une part, d'après la définition de N :

$$\frac{b-a}{T} - \frac{1}{n} < \frac{N}{n} \leq \frac{b-a}{T},$$

donc, par théorème d'encadrement :

$$\frac{N}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{b-a}{T}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \int_{na+NT}^{nb} f(u) du \right| &\leq \frac{1}{n} \int_{na+NT}^{nb} |f(u)| du \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{na+NT}^{na+(N+1)T} |f(u)| du = \frac{1}{n} \int_0^T |f(u)| du \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } \int_a^b f(nx) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{b-a}{T} \int_a^b f(u) du.$$

2.23 1) Soit $f \in E$.

On va essayer de minorer $\|f - \varphi\|_\infty$ par une constante convenable.

• On a :

$$\int_0^{1/2} f = \int_0^{1/2} (\varphi + (f - \varphi)) = \int_0^{1/2} \varphi + \int_0^{1/2} (f - \varphi).$$

$$\text{D'une part : } \int_0^{1/2} (f - \varphi) \leq \int_0^{1/2} |f - \varphi| \leq \frac{1}{2} \|f - \varphi\|_\infty.$$

$$\text{D'autre part : } \int_0^{1/2} \varphi = \int_0^{1/2} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{On a donc : } \int_0^{1/2} f \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \|f - \varphi\|_\infty.$$

• On a :

$$\int_{1/2}^1 f = \int_{1/2}^1 (\varphi + (f - \varphi)) = \int_{1/2}^1 \varphi + \int_{1/2}^1 (f - \varphi).$$

D'une part :

$$\int_{1/2}^1 (f - \varphi) \geq - \int_{1/2}^1 |f - \varphi| \geq - \frac{1}{2} \|f - \varphi\|_\infty.$$

D'autre part :

$$\int_{1/2}^1 \varphi = \int_{1/2}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{On a donc : } \int_{1/2}^1 f \geq \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \|f - \varphi\|_\infty.$$

On déduit, puisque $f \in E$:

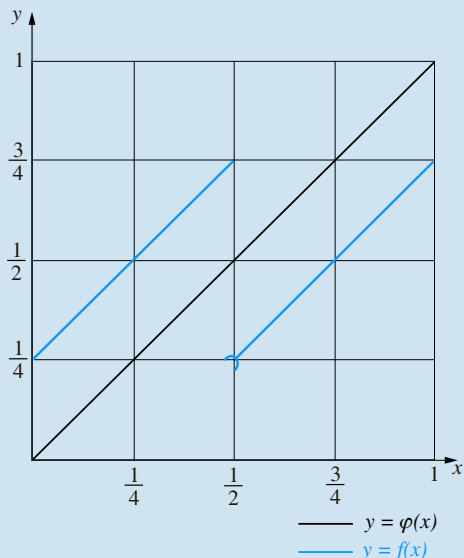
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \|f - \varphi\|_\infty \geq \int_0^{1/2} f = \int_{1/2}^1 f \geq \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \|f - \varphi\|_\infty,$$

$$\text{D'où : } \|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Il en résulte : } d(\varphi, F) = \inf_{f \in E} \|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{4}.$$

2) Considérons l'application $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0; 1]$, par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$



Il est clair que : $f \in E$, $\int_0^{1/2} f = \int_{1/2}^1 f$, $\|f - \varphi\|_\infty = \frac{1}{4}$.

On conclut : $d(\varphi, F) = \frac{1}{4}$.

2.24 Si on effectue un $DL_n(0)$ ($n \geq 2$) de $\ln \cos x$, comme

$$\ln \underbrace{\cos x}_{\rightarrow 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2},$$

ce $DL_n(0)$ sera de la forme :

$$\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} + \dots + a_n x^n + o(x^n),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln \cos x} &= -\frac{2}{x^2} (1 + \dots - 2a_n x^{n-2} + o(x^{n-2}))^{-1} \\ &= -\frac{2}{x^2} (1 + \dots + b_n x^{n-2} + o(x^{n-2})) \\ &= -\frac{2}{x^2} + \dots - 2b_n x^{n-4} + o(x^{n-4}). \end{aligned}$$

Comme on veut un $DL_2(0)$ de f , il faut prendre n de façon que $n - 4 = 2$, c'est-à-dire $n = 6$.

On a :

$\ln \cos x$

$$\begin{aligned} &= \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^6}{8} \right) + o(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) x^4 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24} \right) x^6 + o(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6), \end{aligned}$$

et :

$\sin^2 x$

$$\begin{aligned} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{60} \right) x^6 + o(x^6) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)} + \frac{2}{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6)} \\ &= \frac{2}{x^2} \left(-\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o(x^6) \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4) \right)^{-1} \right) \\ &= \frac{2}{x^2} \left(-\left(1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + \frac{x^4}{36} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{45} + \frac{x^4}{9} \right) + o(x^4) \right) \right) \\ &= \frac{2}{x^2} \left(\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) x^2 + \left(\frac{2}{45} - \frac{1}{36} - \frac{2}{45} + \frac{1}{9} \right) + o(x^4) \right) \\ &= \frac{2}{x^2} \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{12} x^4 + o(x^4) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{6} x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

2.25 • On a, pour tout $y \in]0; +\infty[$ fixé, par le changement de variable $z = \frac{x}{y}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} &= \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{y dz}{y^2 z^2 + y^2} = \frac{1}{y} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{1}{1 + z^2} dz \\ &= \frac{1}{y} [\operatorname{Arctan} z]_0^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{y} \operatorname{Arctan} \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

• On déduit :

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} \right) dy = \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{1}{y} \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} dy.$$

Mais, par le changement de variable $u = \frac{1}{y}$, qui échange les bornes, on a :

$$I(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} u \operatorname{Arctan} u \left(-\frac{du}{u^2} \right) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{1}{u} \operatorname{Arctan} u du.$$

D'où, par addition :

$$\begin{aligned}2I(a) &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{y} \operatorname{Arctan} y dy + \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{1}{y} \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} dy \\ &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{y} \left(\operatorname{Arctan} y + \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} \right) dy \\ &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{y} \frac{\pi}{2} dy = \frac{\pi}{2} [\ln y]_{\frac{1}{a}}^a \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\ln a - \ln \frac{1}{a} \right) = \pi \ln a.\end{aligned}$$

On conclut :
$$I(a) = \frac{\pi \ln a}{2}.$$

2.26 L'application $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$, est continue sur le segment $[0; 1]$, donc son intégrale I existe.

On a, pour tout $x \in]0; 1[$, par utilisation d'une expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} &= \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{(1+x) - (1-x)} \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{1-x^2}}{2x} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \\ &= \frac{1 - (1-x^2)}{x(1 + \sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}},\end{aligned}$$

et cette dernière expression est aussi valable pour $x = 0$.

On a donc :
$$I = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx.$$

Effectuons le changement de variable $y = \sqrt{1-x^2}$.

On a alors $x^2 = 1 - y^2$, $x dx = -y dy$, d'où :

$$\begin{aligned}I &= \int_1^0 \frac{-y dy}{1+y} = \int_0^1 \frac{y}{1+y} dy = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+y} \right) dy \\ &= [y - \ln(1+y)]_0^1 = 1 - \ln 2.\end{aligned}$$

2.27 • L'application

$$g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto g(t) = \frac{\ln(1+t^2)}{t}$$

est continue sur $]0; +\infty[$, donc, pour tout $x \in]0; +\infty[$, g est continue sur le segment joignant x et x^2 , ce qui montre que l'intégrale $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$ existe.

• Puisque les applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$ et que g est continue sur $]0; +\infty[$, d'après le cours, f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\ln(1+x^4)}{x^2} 2x - \frac{\ln(1+x^2)}{x} 1 \\ &= \frac{1}{x} (2 \ln(1+x^4) - \ln(1+x^2)).\end{aligned}$$

D'après les théorèmes généraux, cette dernière fonction est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$, donc f est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$.

On a, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = 0$$

$$\iff 2 \ln(1+x^4) - \ln(1+x^2) = 0$$

$$\iff (1+x^4)^2 = 1+x^2$$

$$\iff x^8 + 2x^4 - x^2 = 0$$

$$\iff x^6 + 2x^2 - 1 = 0.$$

Notons

$$P : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto P(x) = x^6 + 2x^2 - 1.$$

L'application P est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad P'(x) = 6x^5 + 4x \quad \begin{cases} \geq 0 \\ > 0 \end{cases} \quad \text{si } x > 0.$$

On dresse le tableau de variation de P :

x	0	$+\infty$
$P'(x)$		+
$P(x)$	-1	$\nearrow +\infty$

Puisque P est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et que l'on a $P(0) = -1 < 0$ et $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, d'après le théorème de la bijection réciproque,

il existe $\alpha \in [0; +\infty[$ unique tel que l'on ait $P(\alpha) = 0$, et on dispose du signe de $P(x)$ selon la position de x par rapport à α .

La calculatrice fournit une valeur approchée de α :

$$\alpha \simeq 0,673 \dots$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

La calculatrice fournit une valeur approchée de $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) \simeq -0,107 \dots$$

• *Étude en 0 :*

Comme : $\forall u \in [0; +\infty[, 0 \leq \ln(1+u) \leq u$,

on a, pour tout $x \in]0; 1]$:

$$0 \leq -f(x) = \int_{x^2}^x \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt \leq \int_{x^2}^x t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{x^2}^x = \frac{x^2 - x^4}{2}.$$

Il s'ensuit, par le théorème d'encadrement : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

On peut donc prolonger f en 0 par continuité en posant $f(0) = 0$.

De plus :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} (2 \ln(1+x^4) - \ln(1+x^2)) \\ &= \frac{1}{x} (-x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)) = -x + o_{x \rightarrow 0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[0; +\infty[$, que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, d'après le théorème limite de la dérivée, f est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et $f'(0) = 0$.

• *Étude en $+\infty$:*

On a, pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln \left(t^2 \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \left(2 \ln t + \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \right) dt \\ &= \underbrace{2 \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t} dt}_{\text{notée } A(x)} + \underbrace{\int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt}_{\text{notée } B(x)}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} A(x) &= [(\ln t)^2]_x^{x^2} = (\ln(x^2))^2 - (\ln x)^2 \\ &= 4(\ln x)^2 - (\ln x)^2 = 3(\ln x)^2. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} 0 \leq B(x) &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \frac{1}{t^2} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{t^3} dt \\ &= \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_x^{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) \leq \frac{1}{2x^2}, \end{aligned}$$

donc :
$$B(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Ainsi :
$$f(x) = 3(\ln x)^2 + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

En particulier : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$,

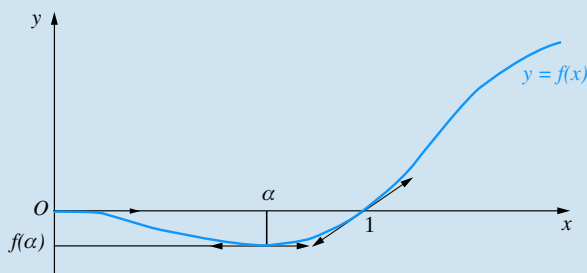
et
$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3(\ln x)^2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ceci montre que la courbe représentative de f admet, lorsque $x \rightarrow +\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique $x'x$.

• *Valeurs remarquables :*

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = \ln 2 \simeq 0,693 \dots$$

• *Tracé de la courbe représentative de f :*



2.28 Considérons l'application $g :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $u \in]-1; +\infty[$, par :

$$g(u) = f(1+u) = \int_1^{1+u} \frac{e^t}{t} dt,$$

obtenue en notant $u = x - 1$ dans l'expression de $f(x)$, de façon que la variable (u) tende vers 0 lorsque x tend vers 1.

Puisque $t \mapsto \frac{e^t}{t}$, est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$, d'après le cours, g est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$ et :

$$\forall u \in]-1; +\infty[, \quad g'(u) = \frac{e^{1+u}}{1+u}.$$

On va former le $DL_2(0)$ de g' , puis primitiver pour obtenir le $DL_3(0)$ de g . On a :

$$\begin{aligned} g'(u) &= e^u \frac{1}{1+u} \\ &= e \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \right) (1 - u + u^2 + o(u^2)) \\ &= e \left(1 + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \right) = e + \frac{e}{2} u^2 + o(u^2). \end{aligned}$$

On déduit, par primitivation, pour une fonction de classe C^1 dont la dérivée admet un $DL_2(0)$:

$$g(u) = g(0) + e u + \frac{e}{2} \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Et :
$$g(0) = \int_1^1 \frac{e^y t}{t} dt = 0.$$

On conclut :

$$f(x) = e u + \frac{e}{6} u^3 + o(u^3), \quad u = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$

2.29 On a, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[- \{0\}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(\sin x \operatorname{sh} x)^2} - \frac{1}{(\tan x \operatorname{th} x)^2} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x} (1 - \cos^2 x \operatorname{ch}^2 x). \end{aligned}$$

Pour le dénominateur : $\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^4$.

On va chercher un équivalent simple du numérateur.

On remarque :

$$1 - \cos^2 x \operatorname{ch}^2 x = (1 - \cos x \operatorname{ch} x)(1 + \cos x \operatorname{ch} x)$$

et : $1 + \cos x \operatorname{ch} x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \neq 0$.

On va chercher un $DL_4(0)$ de $1 - \cos x \operatorname{ch} x$, pour en avoir un équivalent simple :

$$\begin{aligned} &1 - \cos x \operatorname{ch} x \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{6} x^4 + o(x^4)\right) = \frac{1}{6} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

On a donc :
$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^4} \frac{1}{6} x^4 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

et on conclut :
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}.$$

2.30 • Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \varphi(x) = \frac{x-3}{x+1}.$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

$$\varphi(x) = 1 \iff \frac{x-3}{x+1} = 1 \iff 4 = 0,$$

impossible, et, d'autre part :

$$\varphi(x) = -1 \iff \frac{x-3}{x+1} = -1$$

$$\iff x-3 = -x-1 \iff x=1,$$

impossible.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \varphi(x) \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

On peut donc considérer l'application, encore notée φ , de $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ dans lui-même, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad \varphi(x) = \frac{x-3}{x+1}.$$

Calculons, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, les itérées de φ en x , pour la loi de composition, notées $\varphi^{[2]}(x), \varphi^{[3]}(x), \dots$:

$$\varphi^{[2]}(x) = \varphi(\varphi(x))$$

$$= \frac{\varphi(x)-3}{\varphi(x)+1} = \frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1} = \frac{-2x-6}{2x-2} = \frac{3+x}{1-x},$$

$$\varphi^{[3]}(x) = \varphi(\varphi^{[2]}(x))$$

$$= \frac{\varphi^{[2]}(x)-3}{\varphi^{[2]}(x)+1} = \frac{\frac{3+x}{1-x}-3}{\frac{3+x}{1-x}+1} = \frac{4x}{4} = x.$$

• 1) Soit f convenant.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad f(\varphi(x)) + f(\varphi^{[2]}(x)) = x.$$

Appliquons ceci à $x, \varphi(x),$ à $\varphi^{[2]}(x)$:

$$\begin{cases} f(\varphi(x)) + f(\varphi^{[2]}(x)) = x & E_1 \\ f(\varphi^{[2]}(x)) + f(x) = \varphi(x) & E_2 \\ f(x) + f(\varphi(x)) = \varphi^{[2]}(x) & E_3. \end{cases}$$

En effectuant $E_2 + E_3 - E_1$, on élimine $f(\varphi(x))$ et $f(\varphi^{[2]}(x))$, et on obtient $f(x)$, d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} (\varphi(x) + \varphi^{[2]}(x) - x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x-3}{x+1} + \frac{3+x}{1-x} - x \right) = \frac{1}{2} \frac{x^3 + 7x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

2) Réciproquement, un calcul direct (un peu long sans logiciel de calcul formel) montre que l'application f trouvée en 1) convient.

On conclut qu'il y a une application f et une seule convenant :

$$f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3 + 7x}{1-x^2}.$$

2.31 a) Considérons

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x+a) - f(x).$$

On a, d'après l'hypothèse de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x+b) &= f(x+a+b) - f(x+b) \\ &= f(x+a) - f(x) = g(x), \end{aligned}$$

donc g est b -périodique.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x+a) - f(x) = g(x) \\ f(x+a+b) - f(x+b) = g(x+b) = g(x) \\ \vdots \\ f(x+a+nb) - f(x+a+(n-1)b) = g(x) \end{cases}$$

d'où, par sommation et télescopage :

$$f(x+a+nb) - f(x) = ng(x).$$

On déduit, puisque f est bornée, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|g(x)| = \frac{|f(x+a+nb) - f(x)|}{n} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$,

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = f(x)$.

Ceci montre que f est a -périodique.

Par rôles symétriques dans les hypothèses, on conclut que f est aussi b -périodique.

b) L'application f vérifie les hypothèses de a), puisqu'elle est bornée, avec $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{7}$, $a+b = \frac{13}{42}$.

D'après a), on déduit que f est $\frac{1}{6}$ -périodique et que f est $\frac{1}{7}$ -périodique. Comme $\frac{1}{42} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$, il en résulte que f est $\frac{1}{42}$ -périodique, l'ensemble des périodes de f formant, d'après le cours, un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

2.32 a) 1) Supposons $|u|$ dérivable sur I .

Soit $x \in I$ tel que $u(x) = 0$.

On a : $\frac{|u|(x+h) - |u|(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} |u'(x)|$,

et :

$$\begin{aligned} \frac{|u|(x+h) - |u|(x)}{h} &= \frac{|u(x+h)|}{h} = \frac{|u(x+h) - u(x)|}{h} \\ &= \operatorname{sgn}(h) \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right| \begin{cases} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} |u'(x)| \\ \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} -|u'(x)|. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc $|u'(x)| = -|u'(x)|$, d'où $u'(x) = 0$.

Ceci montre : $\forall x \in I, (u(x) = 0 \implies u'(x) = 0)$.

2) Réciproquement, supposons :

$$\forall x \in I, (u(x) = 0 \implies u'(x) = 0).$$

Soit $x \in I$.

* Si $u(x) > 0$, alors, comme u est continue en x (car dérivable en x), au voisinage de x , $|u|$ coïncide avec u , donc $|u|$ est dérivable en x .

* Si $u(x) < 0$, alors de même, au voisinage de x , $|u|$ coïncide avec $-u$, donc $|u|$ est dérivable en x .

* Si $u(x) = 0$, alors, par hypothèse, $u'(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{|u|(x+h) - |u|(x)}{h} \right| &= \frac{|u(x+h)|}{|h|} \\ &= \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} |u'(x)| = 0, \end{aligned}$$

donc : $\frac{|u|(x+h) - |u|(x)}{h} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

ce qui montre que $|u|$ est dérivable en x , et que de plus $|u'(x)| = 0$.

On conclut que $|u|$ est dérivable en x , pour tout $x \in I$, donc $|u|$ est dérivable sur I .

b) On a, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \operatorname{Max}(f(x), g(x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|). \end{aligned}$$

Comme f et g sont dérivables sur I , il s'ensuit que φ est dérivable sur I si et seulement si $|f - g|$ l'est.

En appliquant le résultat de a) à $f - g$ à la place de u , on conclut que φ est dérivable sur I si et seulement si :

$$\forall x \in I, (f(x) = g(x) \implies f'(x) = g'(x)).$$

2.33 D'après l'hypothèse, on a, pour tout $x \in [a; +\infty[$:

$$f'(x)f(x) \leq |f'(x)||f(x)| \leq \lambda|f(x)|^2 = \lambda(f(x))^2.$$

Considérons l'application

$$g : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x) = e^{-2\lambda x} (f(x))^2.$$

Puisque f est dérivable sur $[a; +\infty[$, g l'est aussi, et, pour tout $x \in [a; +\infty[$:

$$g'(x) = 2e^{-2\lambda x} (f'(x)f(x) - \lambda(f(x))^2) \leq 0.$$

Il en résulte que g est décroissante sur $[a; +\infty[$.

Mais il est clair, par sa définition, que $g \geq 0$, et on a $g(a) = e^{-2\lambda a} (f(a))^2 = 0$.

Il en résulte $g = 0$, puis $f^2 = 0$ et donc $f = 0$.

2.34 a) • Soit $f \in E$.

On a, d'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\left(\int_0^1 f' \right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2 \right) \left(\int_0^1 f'^2 \right).$$

Mais : $\int_0^1 f' = f(1) - f(0) = \lambda$.

On a donc : $\int_0^1 f'^2 \geq \lambda^2$.

- Considérons l'application particulière :

$$f_0 : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \lambda t.$$

$$\text{On a } f_0 \in E \text{ et : } \int_0^1 f_0'^2 = \int_0^1 \lambda^2 = \lambda^2.$$

$$\text{On conclut : } \inf_{f \in E} \int_0^1 f'^2 = \lambda^2,$$

et cette borne inférieure est atteinte (au moins) pour l'application f_0 définie plus haut.

- b) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \lambda x^n.$$

Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in E$.

Et on a :

$$\int_0^1 f_n'^2 = \int_0^1 \lambda^2 x^{2n} dx = \lambda^2 \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{\lambda^2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{On conclut : } \inf_{f \in E} \int_0^1 f'^2 = 0.$$

2.35 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'application

$$f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{x}{k}} \right) - 2n.$$

L'application f_n est dérivable (donc continue) sur $[0; +\infty[$

$$\text{et : } \forall x \in [0; +\infty[, \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{k}}{2\sqrt{1 + \frac{x}{k}}} > 0,$$

donc f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$$\text{De plus : } f_n(0) = n - 2n = -n < 0 \text{ et } f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, il existe donc $x_n \in [0; +\infty[$ unique tel que $f_n(x_n) = 0$.

$$b) \text{ On sait : } \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

(ce que l'on peut redémontrer en développant les carrés).

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{x_n}{k}} \leq \sum_{k=1}^n \left(1 + \sqrt{\frac{x_n}{k}} \right) = n + \sqrt{x_n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Évaluons $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, par comparaison d'une somme à une intégrale.

L'application $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, est continue et décroissante sur

$[1; +\infty[$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} &\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= 1 + [2\sqrt{t}]_1^n = 1 + 2(\sqrt{n} - 1) = 2\sqrt{n} - 1 \leq 2\sqrt{n}. \end{aligned}$$

$$\text{On déduit : } 2n \leq n + \sqrt{x_n} 2\sqrt{n},$$

$$\text{donc } \sqrt{x_n} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}, \text{ puis } x_n \geq \frac{n}{4}.$$

$$\text{On conclut : } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

2.36 Remarquons d'abord que, dans les conditions de

$$\text{l'énoncé : } 0 \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{et que, d'autre part : } \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)^n = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right).$$

$$\bullet \text{ Montrons : } \forall x \in [0; +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Soit $x \in [0; +\infty[$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à $\varphi : t \longmapsto \ln(1+t)$ sur $[0; x]$, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \int_0^x \frac{(x-t)}{1!} \varphi''(t) dt,$$

$$\text{c'est-à-dire : } \ln(1+x) = x - \int_0^x (x-t) \frac{1}{(1+t)^2} dt.$$

Mais :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} dt &\leq \int_0^x (x-t) dt \\ &= \left[-\frac{(x-t)^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Appliquons le résultat précédent à $\frac{k}{n^2}$ à la place de x , pour tout

$k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2},$$

$$\text{d'où : } \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2},$$

donc, en multipliant par n

$$\frac{k}{n} - \frac{1}{2n} \leq n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n},$$

puis, en passant aux exponentielles :

$$e^{\frac{k}{n} - \frac{1}{2n}} \leq \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)^n \leq e^{\frac{k}{n}}.$$

On déduit, en sommant pour k allant de 1 à n , puis en divisant par n :

$$e^{-\frac{1}{2n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)^n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}}.$$

On a, par sommation géométrique :

$$\sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = e^{\frac{1}{n}} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e^{\frac{1}{n}} \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1},$$

puis, comme $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n}} (e - 1) \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e - 1.$$

On conclut, par le théorème d'encadrement :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e - 1.$$

2.37 Considérons

$$g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = a + b \int_0^x f(t) dt.$$

Puisque f est continue sur $[0; 1]$, g est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et :

$$\forall x \in [0; 1], \quad g'(x) = bf(x).$$

De plus, d'après l'hypothèse de l'énoncé :

$$\forall x \in [0; 1], \quad g(x) \geq a > 0.$$

On déduit : $\forall x \in [0; 1], \quad g'(x) \leq b\sqrt{g(x)},$

$$\text{puis : } \forall x \in [0; 1], \quad \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \leq \frac{b}{2}.$$

En intégrant sur $[0; x]$, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{g'(t)}{2\sqrt{g(t)}} dt &= \left[\sqrt{g(t)}\right]_0^x \\ &= \sqrt{g(x)} - \sqrt{g(0)} = \sqrt{g(x)} - \sqrt{a}. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \sqrt{g(x)} - \sqrt{a} \leq \int_0^x \frac{b}{2} dt = \frac{bx}{2},$$

$$\text{d'où : } g(x) \leq \left(\sqrt{a} + \frac{bx}{2}\right)^2,$$

c'est-à-dire :

$$a + b \int_0^x f(t) dt = g(x) \leq a + \sqrt{a}bx + \frac{b^2}{4}x^2,$$

$$\text{et on conclut : } \int_0^x f(t) dt \leq \sqrt{a}x + \frac{b}{4}x^2.$$

2.38 a) Puisque $f'(0) = 1 > 0$ et que f' est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in]-\eta; \eta[, \quad f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $] -\eta; \eta[$.

Notons $U =]-\eta; \eta[$ et $V = f(U) =]-f(\eta); f(\eta)[$. Puisque $f(0) = 0$, on a alors $f(-\eta) < 0 < f(\eta)$.

Enfin, puisque f est continue et strictement croissante sur l'intervalle U , d'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de U sur V .

b) 1) Supposons que f^{-1} admette un $DL_3(0)$:

$$f^{-1}(y) = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + o_{y \rightarrow 0}(y^3).$$

On a alors $\alpha = f^{-1}(0)$, et, puisque f^{-1} est dérivable en 0, d'après le cours, $\beta = (f^{-1})'(0)$. Mais $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc $f^{-1}(0) = 0$ et

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Le $DL_3(0)$ de f^{-1} est donc de la forme :

$$f^{-1}(y) = y + \gamma y^2 + \delta y^3 + o(y^3).$$

On a, pour $x \in U$:

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(f(x)) \\ &= f^{-1}(x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)) \\ &= (x + ax^2 + bx^3) + \gamma(x + ax^2 + bx^3)^2 \\ &\quad + \delta(x + ax^2 + bx^3)^3 + o(x^3) \\ &= (x + ax^2 + bx^3) + \gamma(x^2 + 2ax^3) + \delta x^3 + o(x^3) \\ &= x + (a + \gamma)x^2 + (b + 2\gamma a + \delta)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du $DL_3(0)$ de $x \longmapsto x$, on déduit :

$$\begin{cases} a + \gamma = 0 \\ b + 2\gamma a + \delta = 0 \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} \gamma = -a \\ \delta = 2a^2 - b. \end{cases}$$

2) Réciproquement, montrons que la valeur obtenue ci-dessus pour (γ, δ) convient, c'est-à-dire montrons :

$$f^{-1}(y) = y - ay^2 + (2a^2 - b)y^3 + o(y^3).$$

Notons $x = f^{-1}(y)$, de sorte que $y = f(x)$ et $x \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$.

On a :

$$\begin{aligned} &f^{-1}(y) - (y - ay^2 + (2a^2 - b)y^3) \\ &= x - ((x + ax^2 + bx^3) - a(x + ax^2 + bx^3)^2 \\ &\quad + (2a^2 - b)(x + ax^2 + bx^3)^3 + o(x^3)) \\ &= x - ((x + ax^2 + bx^3) - a(x^2 + 2ax^3) \\ &\quad + (2a^2 - b)x^3 + o(x^3)) \\ &= o(x^3) = o(y^3), \text{ car } x \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y. \end{aligned}$$

On conclut que f^{-1} admet un $DL_3(0)$ et que :

$$f^{-1}(y) = y - ay^2 + (2a^2 - b)y^3 + o_{y \rightarrow 0}(y^3).$$

2.39

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

• On sait, par comparaison somme/intégrale (cf, par exemple, exercice 2.8) : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$,

donc : $v_n \sim n \ln n$.

• Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n = u_n - v_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)} - \frac{1}{n} \right).$$

Considérons l'application

$$\varphi :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \varphi(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

On a, au voisinage de 0 pour la variable x :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x \ln(1+x)} \\ &= \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On peut donc compléter φ par continuité en 0, en posant $\varphi(0) = \frac{1}{2}$. L'application $\varphi : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi construite est continue sur le segment $[0; 1]$, donc, d'après un théorème du cours, φ est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad |\varphi(x)| \leq M.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \left| \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M$,

d'où, en sommant pour k allant de 1 à n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |w_n| = \left| \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq Mn.$$

Ceci montre : $u_n - v_n = o(n)$.

On obtient : $u_n = v_n + o(n)$ et $v_n \sim n \ln n$, donc :

$$u_n \sim n \ln n.$$

2.40

a) Supposons qu'il existe f convenant.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x)) = \operatorname{ch}(f(\operatorname{Argsh} x)) \in \mathbb{R}_+,$$

contradiction, puisque, par exemple, f n'atteint pas -1 .

On conclut qu'il n'existe pas de f convenant.

b) Supposons qu'il existe f convenant.

• * Soit $t \in [-1; 1]$. Notons $x = \operatorname{Arcsin} t$. On a :

$$f(t) = f(\sin x) = \cos(f(x)) \in [-1; 1].$$

* Réciproquement, soit $u \in [-1; 1]$. Notons $y = \operatorname{Arccos} u$. Puisque f est bijective, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. On a alors : $u = \cos y = \cos(f(x)) = f(\sin x)$.

Comme $\sin x \in [-1; 1]$, ceci montre :

$$\forall u \in [-1; 1], \exists v \in [-1; 1], \quad u = f(v).$$

Ceci établit que f réalise une bijection de $[-1; 1]$ sur $[-1; 1]$. Comme f est continue, d'après un exercice classique, f est strictement monotone.

$$\text{En particulier : } \begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(1) = -1. \end{cases}$$

Il existe donc $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$f(-1) = -\varepsilon \quad \text{et} \quad f(1) = \varepsilon.$$

• On a : $f(\sin 1) = \cos(f(1)) = \cos \varepsilon$ et :

$$\begin{aligned} f(-\sin 1) &= f(\sin(-1)) = \cos(f(-1)) \\ &= \cos(-\varepsilon) = \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

donc : $f(\sin 1) = f(-\sin 1)$.

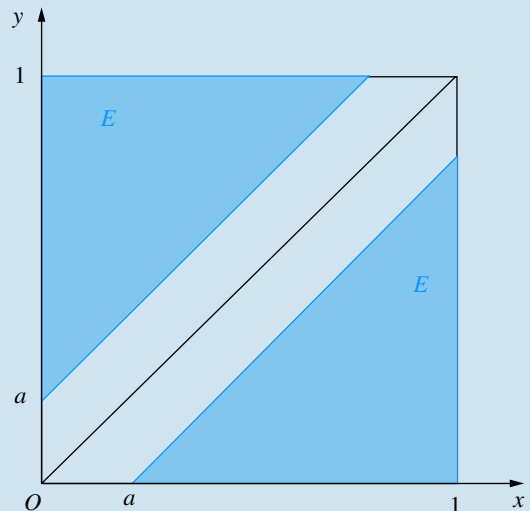
Comme f est injective, il s'ensuit $\sin 1 = -\sin 1$, d'où $\sin 1 = 0$, contradiction.

On conclut qu'il n'existe pas de f convenant.

2.41

Notons $E = \{(x, y) \in [0; 1]^2; |x - y| \geq a\}$.

• Montrons que E est compact.



Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto |x - y|.$$

On a donc : $E = \varphi^{-1}([a; +\infty[)$.

Ainsi, E est l'image réciproque du fermé $[a; +\infty[$ par l'application continue φ , donc E est fermé dans $\mathbb{R}^2$, ce qui se voit aussi sur le schéma.

D'autre part, E est borné, puisque $E \subset [0; 1]^2$.

Ainsi, E est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, donc E est compact.

• Considérons d'autre part l'application

$$F : E \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto F(x, y) = \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

L'application F est définie et continue sur E , puisque le dénominateur $x - y$ ne s'annule pas.

Puisque F est continue sur le compact E et est à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'après le cours, F est bornée et atteint ses bornes.

Notons $C = \sup_{(x, y) \in E} F(x, y) \in \mathbb{R}_+$.

Il existe $(x_0, y_0) \in E$ tel que : $C = F(x_0, y_0) < 1$.

On conclut :

$$\exists C \in [0; 1[, \forall (x, y) \in [0; 1]^2, (|x - y| \geq a \implies |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|).$$

2.42 • Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a, pour tout $t \in [a; b]$, en utilisant l'inégalité triangulaire renversée, puis l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^n x^i f_i(t) \right| - \left| \sum_{i=0}^n y^i f_i(t) \right| & \leq \left| \sum_{i=1}^n x^i f_i(t) - \sum_{i=1}^n y^i f_i(t) \right| = \left| \sum_{i=1}^n (x^i - y^i) f_i(t) \right| \\ & = \left| \sum_{i=1}^n (x^i - y^i) f_i(t) \right| \leq \sum_{i=1}^n |x^i - y^i| |f_i(t)| \\ & \leq \sum_{i=1}^n |x^i - y^i| \|f_i\|_\infty. \end{aligned}$$

• Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

On a, pour tout $(x, y) \in [-A; A]^2$:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, |x^i - y^i| & = \left| (x - y) \sum_{k=0}^{i-1} x^k y^{i-1-k} \right| \\ & \leq |x - y| \sum_{k=0}^{i-1} |x|^k |y|^{i-1-k} \leq |x - y| i A^{i-1}, \end{aligned}$$

d'où, en sommant :

$$\sum_{i=1}^n |x^i - y^i| \|f_i\|_\infty \leq |x - y| \underbrace{\sum_{i=1}^n \|f_i\|_\infty i A^{i-1}}_{\text{noté } M}.$$

On obtient, pour tout $(x, y) \in [-A; A]^2$:

$$\left| \sum_{i=0}^n x^i f_i(t) \right| - \left| \sum_{i=0}^n y^i f_i(t) \right| \leq M|x - y|,$$

$$\text{et donc : } \left| \sum_{i=0}^n x^i f_i(t) \right| \leq \left| \sum_{i=0}^n y^i f_i(t) \right| + M|x - y|.$$

En passant aux bornes supérieures lorsque t décrit $[a; b]$,

on déduit : $g(x) \leq g(y) + M|x - y|$,

d'où : $g(x) - g(y) \leq M|x - y|$.

En appliquant ceci à (y, x) à la place de (x, y) , on a aussi :

$$g(y) - g(x) \leq M|x - y|,$$

et donc : $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$.

On a montré :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in [-A; A]^2, |g(x) - g(y)| \leq M|x - y|.$$

Ainsi, g est M -lipschitzienne sur $[-A; A]$, donc g est continue sur $[-A; A]$.

Puisque g est continue sur $[-A; A]$ pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, on conclut que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2.43 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$I_n = \int_0^1 n^2(x^n - x^{n+1})f(x) dx$$

$$\text{et considérons : } J_n = \int_0^1 n^2(x^n - x^{n+1})f(1) dx.$$

1) On calcule J_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} J_n & = n^2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 f(1) \\ & = n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) f(1) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} f(1). \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(1).$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |I_n - J_n| & = \left| \int_0^1 n^2(x^n - x^{n+1})(f(x) - f(1)) dx \right| \\ & \leq \int_0^1 n^2(x^n - x^{n+1})|f(x) - f(1)| dx. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

• Puisque f est continue en 1, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [1 - \eta; 1], |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_{1-\eta}^1 n^2(x^n - x^{n+1})|f(x) - f(1)| dx \\ \leq \varepsilon \int_{1-\eta}^1 n^2(x^n - x^{n+1}) dx \leq \varepsilon \int_0^1 n^2(x^n - x^{n+1}) dx \\ = \varepsilon \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

• D'autre part, puisque f est continue sur le segment $[0; 1]$, d'après le théorème fondamental, f est bornée, d'où, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1-\eta} n^2(x^n - x^{n+1})|f(x) - f(1)| dx \\
& \leq \int_0^{1-\eta} n^2(x^n - x^{n+1})2\|f\|_\infty dx \\
& \leq \int_0^{1-\eta} n^2 x^n 2\|f\|_\infty dx \\
& = 2n^2\|f\|_\infty \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{1-\eta} \\
& = \frac{2n^2\|f\|_\infty(1-\eta)^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

par prépondérance classique.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \int_0^{1-\eta} n^2(x^n - x^{n+1})|f(x) - f(1)| dx \leq \varepsilon.$$

On a donc, par addition :

$$\forall n \geq N, \int_0^1 n^2(x^n - x^{n+1})|f(x) - f(1)| dx \leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre : $I_n - J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Enfin : $I_n = (I_n - J_n) + J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + f(1) = f(1).$

2.44 Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$J_n = \int_0^1 2x^{n-1} \ln(1+x^n) dx,$$

qui ressemble à I_n et semble plus accessible à un calcul.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
& |I_n - J_n| \\
& = \left| \int_0^1 (x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2}) \ln(1+x^n) dx \right| \\
& = \left| \int_0^1 x^{n-2}(x-1)^2 \ln(1+x^n) dx \right| \\
& = \int_0^1 x^{n-2}(x-1)^2 \ln(1+x^n) dx \\
& \leq \int_0^1 x^{n-2}(x-1)^2 \ln 2 dx \\
& = \ln 2 \int_0^1 (x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2}) dx \\
& = \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - 2\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} \right]_0^1 \\
& = \ln 2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} \right) \\
& = \frac{2 \ln 2}{(n-1)n(n+1)},
\end{aligned}$$

donc : $I_n - J_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$

• D'autre part, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
J_n & = \int_0^1 2x^{n-1} \ln(1+x^n) dx \\
& \stackrel{u=x^n}{=} \int_0^1 \frac{2}{n} u \ln(1+u) du \\
& \stackrel{\text{ipp}}{=} \frac{1}{n} \left([u^2 \ln(1+u)]_0^1 - \int_0^1 u^2 \frac{1}{1+u} du \right) \\
& = \frac{1}{n} \left(\ln 2 - \int_0^1 \left(u - 1 + \frac{1}{1+u} \right) du \right) \\
& = \frac{1}{n} \left(\ln 2 - \left[\frac{u^2}{2} - u + \ln(1+u) \right]_0^1 \right) \\
& = \frac{1}{n} \left(\ln 2 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) \right) = \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

On conclut : $I_n = J_n + (I_n - J_n) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$

2.45 a) Le polynôme P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $0, 1, \dots, n$, donc, d'après le théorème de Rolle, P'_n s'annule en au moins n points $x_1, \dots, x_n$ tels que :

$$0 < x_1 < 1 < \dots < x_n < n.$$

Comme $\deg(P'_n) = n$, on a là tous les zéros de P'_n .

En particulier, il existe $u_n \in]0; 1[$ unique (c'est le x_1 dans les notations précédentes) tel que $P'_n(u_n) = 0$.

b) On a, d'après le cours, puisque $P_n = \prod_{k=0}^n (\mathbf{X} - k)$:

$$\frac{P'_n}{P_n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\mathbf{X} - k},$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=0}^n \frac{1}{k - u_n} = -\left(\frac{P'_n}{P_n}\right)(u_n) = -\frac{P'_n(u_n)}{P_n(u_n)} = 0.$$

c) Isolons, dans le résultat précédent, le terme d'indice 0 :

$$\frac{1}{u_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - u_n} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

D'autre part, par comparaison somme/intégrale, puisque l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$, est décroissante et continue, on montre

(cf. aussi l'exercice 2.8) : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n.$

D'où : $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, et donc : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

d) Reprenons l'étude précédente, en isolant aussi le terme d'indice 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\leq \frac{1}{u_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - u_n} = \frac{1}{1 - u_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k - u_n} \\ &\leq \frac{1}{1 - u_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} = \frac{1}{1 - u_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

On a : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \ln(n-1) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim \ln n.$

Enfin : $\frac{1}{1 - u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, car $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On obtient, par encadrement : $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$,

et on conclut : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$.

2.46 a) • Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq u_n + 1$,

ou encore, par décalage d'indice, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n \leq u_{n-1} + 1.$$

On a, en réitérant :

$$u_n \leq u_{n-1} + 1$$

$$u_{n-1} \leq u_{n-2} + 1$$

$$\vdots$$

$$u_2 \leq u_1 + 1,$$

d'où, en sommant et en simplifiant :

$$u_n \leq u_1 + (n-1).$$

On reporte alors cette inégalité dans la définition de la suite :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, 0 \leq u_{n+1} &= \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{u_1 + (n-1)}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq u_1 + 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq u_1 + 1.\end{aligned}$$

Il en résulte que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

• Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \geq 1, u_n \leq M$.

D'où, en reportant dans la définition de la suite :

$$0 \leq u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{M}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{M}{n} + \frac{1}{n} = \frac{M+1}{n},$$

et donc, par décalage : $\forall n \geq 2, u_n \leq \frac{M+1}{n-1}$.

On déduit, en reportant encore :

$$0 \leq u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{M+1}{n(n-1)} + \frac{1}{n^2},$$

ce qui montre : $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Alors : $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$

puis, par décalage d'indice : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(n-1)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$

b) On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

d'où, par décalage d'indice :

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^3} + o\left(\frac{1}{(n-1)^3}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2} + \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Intégration sur un intervalle quelconque

CHAPITRE 3

Plan

Les méthodes à retenir	78
Énoncés des exercices	81
Du mal à démarrer ?	89
Corrigés	95

Thèmes abordés dans les exercices

- Intégrabilité ou non-intégrabilité d'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle quelconque
- Existence et calcul d'intégrales sur un intervalle quelconque
- Pour une intégrale dépendant d'un paramètre, détermination de la limite, d'un équivalent simple, d'un développement asymptotique
- Détermination de la nature d'une intégrale impropre
- Étude de la continuité et de la classe pour une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre
- Calcul de certaines intégrales dépendant d'un paramètre
- Étude et représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre
- Existence ou non-existence d'une intégrale double sur le produit de deux intervalles quelconques
- Existence et calcul d'une intégrale double sur le produit de deux intervalles quelconques

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de l'intégrabilité sur un intervalle quelconque, pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. En particulier, le théorème de majoration, le théorème d'équivalence, les exemples de Riemann en $+\infty$, en 0, en a , $a \in \mathbb{R}$, les règles $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$ et en 0, les exemples du cours sur le logarithme et l'exponentielle
- Les inégalités sur les intégrales de fonctions intégrables
- La relation de Chasles
- Le changement de variable pour des intégrales sur un intervalle quelconque
- La définition de la convergence et de la divergence pour les intégrales impropres, et l'exemple classique $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
- Les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe intégrale, avec hypothèse de domination ou hypothèse de domination locale

- L'étude de la fonction Γ d'Euler
- La notion d'intégrabilité sur le produit de deux intervalles quelconques
- Le théorème de Fubini pour les intégrales doubles sur le produit de deux intervalles quelconques.

Les méthodes à retenir

Pour étudier l'intégrabilité d'une application $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle semi-ouvert, par exemple fermé à gauche et ouvert à droite,
 $I = [a ; b[, -\infty < a \leq b \leq +\infty$

S'assurer d'abord que f est continue par morceaux sur I .

- Le plus souvent, procéder pour $|f|$ à une étude locale en b , par utilisation du théorème de majoration ou de minoration, du théorème d'équivalence, de la règle $x^\alpha f(x)$ ou d'une règle analogue, par comparaison à l'exemple de Riemann ou à un exemple du cours.

➡ **Exercices 3.1 a) à f), 3.7, 3.9, 3.10 a), 3.11 a), 3.13, 3.14 a), 3.21 a), 3.29, 3.43, 3.50 a)**

- S'il existe $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur I , telle que $|f| \leq g$, alors f est intégrable sur I , sans que l'on ait besoin d'effectuer une étude locale en une extrémité de I .

➡ **Exercices 3.2, 3.40, 3.41.**

Pour étudier l'intégrabilité d'une application $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle ouvert,
 $I =]a ; b[, -\infty \leq a \leq b \leq +\infty$

S'assurer que f est continue par morceaux sur I .

- Le plus souvent, procéder pour $|f|$ à une étude locale en a et à une étude locale en b . Par définition, f est intégrable sur $]a ; b[$ si et seulement s'il existe $c \in]a ; b[$ tel que f soit intégrable sur $]a ; c[$ et sur $]c ; b[$.

➡ **Exercices 3.1 g) à i), 3.14 b) à d), 3.15, 3.17 b, f)**

- S'il existe $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur I , telle que $|f| \leq g$, alors f est intégrable sur I , sans que l'on ait besoin d'effectuer des études locales en les extrémités de I .

➡ **Exercices 3.5, 3.6, 3.17 a), 3.22 a).**

Pour étudier l'existence d'une intégrale et calculer cette intégrale, dans un exemple

En règle générale, séparer l'existence et le calcul.

- Pour l'existence, voir les méthodes ci-dessus. Le plus souvent, un argument qualitatif (comparaison avec des fonctions usuelles) permet de montrer l'intégrabilité.
- Pour le calcul, dans les cas simples, passer par un calcul de primitives.

Un changement de variable peut être fait directement.

Mais, pour une intégration par parties, on procèdera d'abord sur un segment, puis on fera tendre une borne vers la valeur indiquée.

➡ **Exercices 3.3 a) à e), 3.4, 3.8, 3.14, 3.17 c) à f), 3.18, 3.27, 3.36**

- Dans certains exemples, un changement de variable qui échange les bornes permet de calculer l'intégrale ou de se ramener à une autre intégrale.

➡ Exercices 3.15, 3.16, 3.17 a), b), 3.36, 3.38, 3.39.

**Pour trouver
la limite d'une intégrale
dépendant d'un paramètre**

Essayer de :

- conjecturer la limite, qui est souvent, dans les exemples simples, l'intégrale de la limite, et montrer que la différence entre l'intégrale de l'énoncé et la limite conjecturée tend vers 0

➡ Exercices 3.10 b), 3.21 b), 3.22 b), 3.30 c), 3.43

- former une intégrale qui ressemble à l'intégrale de l'énoncé et est plus simple que celle-ci, puis montrer que leur différence tend vers 0

➡ Exercice 3.19

- se ramener à une étude de continuité, et utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale

➡ Exercices 3.20, 3.28.

**Pour trouver
un équivalent simple
d'une intégrale
dépendant d'un paramètre**

En général, on aura d'abord trouvé la limite de cette intégrale, cette limite étant presque toujours 0 ou $+\infty$.

Essayer de :

- se ramener à une recherche de limite d'intégrale, par changement de variable ou intégration par parties

➡ Exercices 3.10 c), 3.23

- former une intégrale ressemblant à l'intégrale de l'énoncé et qui est plus simple que celle-ci, puis montrer que leur différence est négligeable devant l'une des deux, ce qui établira que ces deux intégrales sont équivalentes, et calculer l'intégrale simple

➡ Exercice 3.54

- utiliser une intégration par parties et montrer que la nouvelle intégrale est négligeable devant le crochet

➡ Exercices 3.11 b), 3.44 a).

**Pour trouver
un développement asymptotique
d'une intégrale
dépendant d'un paramètre**

- Si le paramètre est aux bornes, se ramener à une recherche de développement limité (éventuellement par changement de variable) et utiliser le théorème sur la dérivation pour les développements limités.

➡ Exercice 3.24

- Si le paramètre est à l'intérieur de l'intégrale, on peut essayer de transformer l'écriture de l'intégrale.

➡ Exercice 3.45.

**Pour étudier la nature
d'une intégrale impropre**

On peut souvent se ramener à l'étude de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$, par développement asymptotique, ou par changement de variable, ou par intégration par parties.

➡ Exercices 3.25, 3.26.

**Pour montrer
qu'une application définie
par une intégrale à paramètre
est continue,
est de classe C^1 ,
est de classe C^∞**

Essayer d'appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale, ou le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

➡ Exercices 3.30 b), 3.31 à 3.34.

**Pour calculer
certaines intégrales à paramètre,**

$$f(x) = \int_I F(x, t) dt$$

Essayer d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale, qui donne, sous certaines hypothèses, $f'(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt$.

- Il se peut que cette dernière intégrale soit calculable, d'où l'on déduira l'expression de $f'(x)$ par un calcul de primitive.

➡ Exercice 3.49

- Il se peut que $f'(x)$ ressemble à $f(x)$ et que f satisfasse une équation différentielle linéaire du premier ordre, que l'on essaiera de résoudre.

➡ Exercices 3.51, 3.52.

- Il se peut aussi que f satisfasse une équation différentielle linéaire du second ordre.

**Pour étudier l'existence
d'une intégrale double
sur le produit
de deux intervalles quelconques**

$$\iint_{I \times I'} f$$

S'assurer d'abord que f est continue sur $I \times I'$.

Essayer de :

- utiliser un théorème de comparaison.

Si $g : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, ≥ 0 , intégrable sur $I \times I'$ et si $|f| \leq g$, alors f est intégrable sur $I \times I'$

➡ Exercice 3.12

- utiliser le théorème de Fubini

➡ Exercice 3.50 b).

**Pour l'existence et le calcul d'une
intégrale double sur le produit de
deux intervalles quelconques**

$$\iint_{I \times I'} f$$

Montrer d'abord l'existence de $\iint_{I \times I'} f$.

Pour le calcul, essayer d'utiliser le théorème de Fubini.

➡ Exercices 3.12, 3.35.

Énoncés des exercices

3.1 Exemples faciles d'études d'intégrabilité

Étudier l'intégrabilité des applications suivantes :

$$a) f : x \mapsto \frac{1}{x} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}) \quad \text{sur } [1; +\infty[$$

$$b) f : x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}} \quad \text{sur } [0; +\infty[$$

$$c) f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 + 1}} \quad \text{sur } [1; +\infty[$$

$$d) f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + x}} \quad \text{sur }]0; 1]$$

$$e) f : x \mapsto \frac{1 + x}{\sqrt{x} + x^2} \quad \text{sur }]0; 1]$$

$$f) f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^3 + x^2} \quad \text{sur }]0; 1]$$

$$g) f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^6}} \quad \text{sur }]-1; 1[$$

$$h) f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^4}} \quad \text{sur }]0; +\infty[$$

$$i) f : x \mapsto \frac{1 + x^2 e^{-x}}{x^2 + e^{-2x}} \quad \text{sur }]-\infty; +\infty[.$$

3.2 Exemple facile d'étude d'intégrabilité

Étudier l'existence de $\int_0^1 \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{x}} dx$.

3.3 Exemples faciles d'existence et calcul d'intégrales sur un intervalle quelconque

Existence et calcul des intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10} + 1} dx$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x} dx \quad d) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad e) \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-3x+2x^2) dx.$$

3.4 Exemple de calculs d'intégrales liées à l'intégrale de Gauss

Existence et calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$.

3.5 Lien entre les intégrabilités de f et de f^2 , lorsque f est bornée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et bornée. Montrer que, si f^2 est intégrable sur I , alors f l'est aussi (où f^2 désigne $f \cdot f$). Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas que f est bornée ?

3.6 Intégrabilité par encadrement

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux. On suppose que f et h sont intégrables sur I et que $f \leq g \leq h$. Montrer que g est intégrable sur I .

3.7 Une norme sur $\mathbb{R}^2$ définie à partir d'une intégrale sur un intervalle quelconque

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \int_0^{+\infty} |x + ty| e^{-t} dt$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

3.8 Calcul direct d'une intégrale sur un intervalle, avec paramètre

a) Existence et calcul, pour tout $a \in \mathbb{R}$, de $I(a) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} \right) dx$.

b) Déterminer $\inf_{a \in \mathbb{R}} I(a)$, et $\inf_{a \in \mathbb{Z}} I(a)$.

3.9 Intégrabilité par majoration

Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (a, x) \in [1; +\infty[^2, 0 \leq f(x) \leq \frac{a}{x^2} + \frac{1}{a^2}$.

Montrer que f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

3.10 Équivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre entier

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sous réserve d'existence : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx$.

a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n .

b) Établir : $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. c) Montrer : $I_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$.

3.11 Équivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre entier

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sous réserve d'existence : $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)} dx$.

a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de I_n .

b) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

3.12 Existence et calcul d'une intégrale double sur le produit de deux intervalles quelconques

Existence et calcul de $I = \iint_{[0;1]^2} \frac{\text{Min}(x,y)}{\text{Max}(x,y)} dx dy$.

3.13 Exemple d'étude d'intégrabilité

Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que l'application $f : x \mapsto \sqrt{P(x)} - (x^2 + x + 1)$ soit intégrable sur $[0; +\infty[$.

3.14 Exemples d'existence et calcul d'intégrales sur un intervalle quelconque

Existence et calcul des intégrales suivantes :

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx \quad b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{x - \text{Arctan } x}{x^3} dx \quad d) \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

3.15 Exemples d'existence et calcul d'intégrales sur un intervalle quelconque, par changement de variable qui échange les bornes

Existence et calcul des intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx, a \in \mathbb{R}^* \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^2} dx.$$

3.16 Exemple de calcul d'une intégrale de fonction à valeurs complexes

Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{i + \cos x}$.

3.17 Exemples de calcul direct d'intégrales à paramètre

Existence et calcul éventuel des intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)} dx, \quad a \in \mathbb{R}$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}, \quad a \in]0; +\infty[$

c) $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{(a - \cos x)(b - \cos x)} dx, \quad (a, b) \in]1; +\infty[^2$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x \cos a + 1} dx, \quad a \in \mathbb{R}$ e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a}{\cosh x - \cos a} dx, \quad a \in \mathbb{R}$

f) $\int_0^1 \frac{1}{(1+ax)\sqrt{x(1-x)}} dx, \quad a \in]0; 1[.$

3.18 Exemple de calcul d'une intégrale de fonction à valeurs complexes

Existence et calcul, pour $z \in \mathbb{C}$, de $I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt} e^{-|t|} dt$.

3.19 Limite d'une intégrale à paramètre, le paramètre étant aux bornes

Trouver $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{\sin t}{\sinh^2 t} dt$.

3.20 Limite d'une intégrale à paramètre

Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}} dt$.

3.21 Limites d'une intégrale à paramètre

a) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt$ existe.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

3.22 Équivalent d'une intégrale à paramètre

Soient $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$, $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue, ≥ 0 .

On note, pour tout $\lambda \in]0; +\infty[$, sous réserve d'existence : $\phi(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{f}{\lambda + g}$.

a) Montrer que, pour tout $\lambda \in]0; +\infty[$, $\phi(\lambda)$ existe.

b) Établir que, si de plus g est bornée, alors : $\phi(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f$.

3.23 Équivalent d'une intégrale à paramètre

Trouver un équivalent simple de $\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt$, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3.24 Développement asymptotique d'une intégrale à paramètre, le paramètre étant aux bornes

Former un développement asymptotique de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$, à la précision $o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)$, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3.25 Exemple de nature d'une intégrale impropre

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} (\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}) dx$.

3.26 Exemple de nature d'une intégrale impropre

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} \sin x} dx$.

3.27 Calcul d'intégrales liées à l'intégrale de Gauss

Soient $a \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'existence de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P(x+a) dx$, et exprimer I à l'aide des dérivées successives de P en a .

3.28 Limite d'une intégrale à paramètre

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$.

3.29 Étude d'intégrabilité pour une fonction définie par une intégrale à paramètre

Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé.

a) Montrer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'existence de $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^a}{e^t - 1} dt$.

b) Est-ce que f est intégrable sur $]0; +\infty[$?

3.30 Étude d'une intégrale à paramètre

On note, sous réserve d'existence, pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{\sin t} dt$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

3.31 Utilisation de la continuité pour une intégrale à paramètre

On note, pour tout $x \in [0; +\infty[$: $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x \cos t dt$.

Montrer qu'il existe $c \in [0; +\infty[$ tel que : $f(c) = \frac{3}{4}$.

3.32 Étude complète d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Arctan}(x \tan t) \, dt.$$

3.33 Étude complète d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

On note, sous réserve d'existence, pour $x \in \mathbb{R} : f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1 + \ln t)} \, dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Étudier le sens de variation de f et la convexité de f .
- Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.
- Tracer la courbe représentative de f .
- Montrer : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

3.34 Étude de log-convexité pour certaines transformées de Laplace

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, ≥ 0 , telle que, pour tout $p \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t) e^{-pt}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

- Montrer que l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} \, dt$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall p \in \mathbb{R}, (F'(p))^2 \leq F(p)F''(p)$.

- En déduire que, si de plus $f \neq 0$, alors l'application $\ln \circ F$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

3.35 Existence et calcul d'une intégrale double sur le produit de deux intervalles quelconques

Existence et calcul, pour $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, de $F(p, q) = \iint_{[0; +\infty[^2} e^{-px - qy} \sin(x + y) \, dx \, dy$.

3.36 Existence et calcul d'intégrales sur un intervalle quelconque

Existence et calcul de : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$,

puis de : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} \, dx$, $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \, dx$, $M = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x(1 + x^2)} \, dx$.

3.37 Utilisation d'intégrales à propos de polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. On note $n = \deg(P)$ et $Q = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$.

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$.

3.38 Existence et calcul d'une intégrale à paramètre entier

Existence et calcul, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}} \, dx$.

3.39 Calcul d'une intégrale à paramètre

Existence et calcul, pour $x \in [0; +\infty[$, de $f(x) = \int_0^{+\infty} \text{Min}\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) dt$.

3.40 Liens entre les intégrabilités de trois fonctions

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, ≥ 0 , décroissante.

On note $g, h : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$g(x) = f(x)|\sin x|, \quad h(x) = f(x)|\cos x|.$$

Montrer que les intégrabilités de f, g, h sont deux à deux équivalentes.

3.41 Limite pour une fonction vérifiant des conditions d'intégrabilité

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer que, si f^2 et f'^2 sont intégrables sur $[0; +\infty[$, alors $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

3.42 Sommes de Riemann pour une fonction intégrable et monotone, exemple

a) Soit $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante, intégrable sur $]0; 1]$.

$$\text{Montrer : } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f.$$

b) Application : Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k+n)\sqrt{k(k+2n)}}$.

3.43 Limite d'une intégrale à paramètre

Trouver $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x-t}{e^x - e^t} dt$.

3.44 Équivalent d'une intégrale à paramètre

a) Montrer : $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

b) En déduire, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$, la limite de $\left(\int_a^b e^{-nt^2} dt\right)^{\frac{1}{n}}$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

3.45 Développement asymptotique d'une intégrale à paramètre

Montrer : $\int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt = -\ln x + I + o_{x \rightarrow 0}(1)$, où on a noté $I = \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u} du$.

3.46 Nature d'intégrales impropres

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer :

- Les intégrales impropres $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ convergent si et seulement si $\alpha > 0$
- Les applications $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$ et $x \mapsto \frac{\cos x}{x^\alpha}$ sont intégrables sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Ainsi :

- $\alpha \leq 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ divergent
- $0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ sont semi-convergentes
- $1 < \alpha \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ sont absolument convergentes.

3.47 Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

a) α) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2kx = \frac{\sin(2n+1)x}{2 \sin x}.$$

β) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$

b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer :

$$\int_a^b \varphi(x) \sin nx \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

c) α) Vérifier que l'application $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

β) En déduire : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$

d) En déduire que $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge et que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

3.48 Calcul d'intégrales déduites de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

On admet (cf. exercice 3.47) : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

a) Existence et calcul de : $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$

b) Existence et calcul, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, de : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda x}{x^2} dx.$

c) Existence et calcul, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax \cos bx}{x^2} dx.$$

d) Existence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(\pi - x)} dx.$

3.49 Calcul d'une intégrale à paramètre, utilisation du théorème de dérivation sous le signe intégrale

Existence et calcul éventuel, pour $x \in \mathbb{R}$, de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} dt$.

3.50 Intégrale d'une fonction elle-même définie par une intégrale à paramètre

a) Montrer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'existence de $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

b) Montrer que f est continue et intégrable sur $]0; +\infty[$, et calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

3.51 Calcul d'intégrales à paramètre

Établir, pour tout (a, x) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos xt \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}} \\ \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \sin xt \, dt = \frac{1}{2a} e^{-\frac{x^2}{4a}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4a}} dt. \end{cases}$$

3.52 Calcul d'une intégrale de fonction à valeurs complexes

Existence et calcul, pour $x \in]0; +\infty[$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) < 0$, de $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{zt} dt$.

Le résultat fera intervenir la fonction Γ d'Euler.

3.53 Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$, exemples

I. Soient $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, converge, et $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

a) Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0; +\infty[$, l'intégrale impropre $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ converge et que :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\varepsilon x)}{x} dx.$$

b) En déduire que l'intégrale impropre $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

II. Exemples :

a) Existence et calcul, pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} ax - \operatorname{th} bx}{x} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \left((\operatorname{Arctan}(ax))^2 - (\operatorname{Arctan}(bx))^2 \right) dx.$$

b) Existence et calcul, pour $x \in]-1; 1[$, de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} xt}{t} e^{-t} dt$.

c) Existence et calcul, pour $(a, b) \in]-1; +\infty[^2$, de $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$.

d) Existence et calcul, pour $(a, b) \in]0; +\infty[^2$, de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x} \frac{1 - e^{-bx}}{x} dx$.

3.54 Équivalent d'une intégrale à paramètre

On note, pour tout $x \in [0; 1[$: $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x \cos^2 t}}$.

a) Montrer : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

b) Trouver un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

3.55 Valeur moyenne et carré intégrable

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue. On note :

$$g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur $[0; +\infty[$.

b) On suppose de plus que f^2 est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Démontrer que g^2 est intégrable sur $[0; +\infty[$ et que : $\int_0^{+\infty} |g|^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} |f|^2$.

À cet effet, on pourra commencer par étudier le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Du mal à démarrer ?

3.1 Dans chaque exemple, préciser l'intervalle de continuité de la fonction f sous l'intégrale et effectuer une étude à chaque borne ouverte de cet intervalle, par majoration, minoration, équivalent, règle $x^\alpha f(x)$, pour des fonctions à valeurs ≥ 0 .

a) En $+\infty$: $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

b) On a : $|f(x)| \leq \frac{2}{x^{3/2}}$.

c) En $+\infty$: $x^{5/4} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

d) En 0 : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$.

e) En 0 : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$.

f) En 0 : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$.

g) En 1 : $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{6} \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$.

En -1 : parité.

h) On a : $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^2 e^x$, notée $g(x)$,

et $x^2 g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

En $+\infty$: $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

3.2 L'application $x \mapsto \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{x}}$, est continue et bornée sur l'intervalle borné $]0; 1]$.

3.3 Dans chaque exemple, montrer d'abord l'existence, puis effectuer le calcul.

Pour l'existence, on pourra souvent utiliser les théorèmes de majoration, d'équivalence, la règle $x^\alpha f(x)$ pour les fonctions ≥ 0 .

Pour le calcul, passer par des primitives.

a) Décomposer en éléments simples.

b) Changement de variable $t = x^5$.

c) Changement de variable $t = \operatorname{sh} x$.

d) Changement de variable $t = \operatorname{Arcsin} x$.

e) Décomposer le logarithme. Une primitive de $t \mapsto \ln t$ sur $]0; +\infty[$, est $t \mapsto t \ln t - t$.

3.4 Effectuer le changement de variable $t = x^2$ et exprimer I_n à l'aide de la fonction Γ d'Euler.

Se rappeler $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, et :

$$\forall s \in]0; +\infty[, \Gamma(s+1) = s \Gamma(s).$$

3.5 1) Remarquer : $|f^2| \leq \|f\|_\infty |f|$.

2) Considérer, par exemple : $f : x \in]0; 1] \rightarrow x^{-3/4}$.

3.6 Considérer $g = f$ et $h = f$.

3.7 Vérifier d'abord l'existence de $N(x, y)$, par exemple par la règle $t^\alpha f(t)$ en $+\infty$.

Revenir à la définition d'une norme.

3.8 a) 1) Existence : $f_a(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

2) Calcul : Réponse : $I(a) = 1 - a + \frac{a^2}{3}$.

b) Mettre $I(a)$ sous forme canonique.

3.9 1^{re} méthode : Remplacer a par x^λ et choisir λ .

2^e méthode : Déterminer, pour $x \in [1; +\infty[$ fixé, la borne inférieure de $\frac{a}{x^2} + \frac{1}{a^2}$, par étude de variation d'une fonction de a .

3.10 a) On a : $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$.

b) Majorer convenablement.

c) Puisque I_n ressemble à $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n} dx$, étudier $I_n - J_n$ et calculer J_n .

3.11 a) En $+\infty$: $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}$.

b) On obtient, par intégration par parties sur $[1; X]$, puis en faisant tendre X vers $+\infty$:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{2}{n-1} J_n,$$

$$\text{où : } J_n = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-n+2}}{(1+x^2)^2} dx. \text{ Montrer } J_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

3.12 1) Montrer que $f : (x, y) \mapsto \frac{\operatorname{Min}(x, y)}{\operatorname{Max}(x, y)}$, est continue et bornée sur $]0; 1]^2$.

2) Emboîter les intégrales simples et utiliser le théorème de Fubini.

3.13 Montrer que, si f est intégrable sur $[1; +\infty[$, alors P est de degré 4 et de coefficient dominant égal à 1, puis montrer, par exemple en utilisant une expression conjuguée, que P est de la forme :

$$P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Chercher alors un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3.14 Dans chaque exemple, montrer d'abord l'existence, puis effectuer le calcul.

Pour l'existence, on pourra souvent utiliser les théorèmes de majoration, d'équivalence, la règle $x^\alpha f(x)$ pour les fonctions ≥ 0 .

a) Changement de variable $t = \frac{1}{x}$, mise sous forme canonique du trinôme $t^2 + t + 1$, puis changement de variable $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$.

b) Mise de $x^2 + x + 1$ sous forme canonique, puis changement de variable $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

Pour calculer $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$, utiliser une IPP.

c) Utiliser une intégration par parties et se ramener au calcul de $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$, puis décomposition en éléments simples.

d) Mise de $x(1-x)$ sous forme canonique, puis changement de variable $t = 2x - 1$.

3.15 Montrer d'abord l'existence.

Pour le calcul, utiliser un changement de variable qui échange les bornes.

3.16 Changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. On se ramène à calculer

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt, \text{ et } B = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

Montrer $A = B$ par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Former $A + B$ et utiliser la factorisation de $1 + X^4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3.17 Montrer d'abord l'existence, puis effectuer le calcul.

Pour l'existence, on pourra souvent utiliser les théorèmes de majoration, d'équivalence, la règle $x^\alpha f(x)$ pour des fonctions ≥ 0 .

Pour le calcul, utiliser des primitives ou un changement de variable qui échange les bornes.

a) Changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

b) Changement de variable $t = \frac{1}{x}$, puis remarquer :

$$d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

c) Décomposer $\frac{1 - X^2}{(a - X)(b - X)}$ en éléments simples et se

ramener au calcul de $J(c) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{c - \cos x}$, $c \in]1; +\infty[$.

Changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

d) Réponse :

• L'intégrale existe si et seulement si $a \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$

• $I(a) = \frac{\pi}{\sin a}$, si $a \in]0; \pi[$, I est paire, 2π -périodique.

e) Réponse :

• L'intégrale existe si et seulement si $a \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$

• $I(a) = 2\pi - 2a$ si $a \in]0; \pi[$, I est impaire et I est 2π -périodique.

f) Mise sous forme canonique de $x(1-x)$, changements de variable $t = 2x - 1$, $u = \operatorname{Arccos} t$, $v = \tan \frac{u}{2}$.

3.18 1) Noter $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et calculer $|e^{zt} e^{-|t|}|$.

Se rappeler : $\forall u \in \mathbb{C}$, $|e^u| = e^{\operatorname{Re}(u)}$.

2) Utiliser la relation de Chasles.

3.19 Comme $\frac{\sin t}{\operatorname{sh}^2 t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$, considérer les intégrales

$$f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{\sin t}{\operatorname{sh}^2 t} dt \text{ et } g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{1}{t} dt, \text{ calculer } g(x) \text{ et montrer } f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

3.20 Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale.**3.21** a) Règle $t^\alpha f(t)$ en $+\infty$.

b) 1) En 0 : minorer $f(x)$.

2) En $+\infty$: majorer $f(x)$.

3.22 a) Théorème de majoration.

b) Montrer : $\left| \phi(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f \right| = o_{\lambda \rightarrow +\infty}(\phi(\lambda))$
par une majoration convenable.

3.23 L'intégrale $I(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt$

ressemble à $J(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \cos t dt$.

Montrer $I(x) - J(x) = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, en utilisant :

$$\forall u \in [0; \pi/2], \quad \frac{2}{\pi} u \leq \sin u \leq u.$$

D'autre part, calculer $J(x)$.

3.24 Utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, et se ramener à la recherche d'un $DL(0)$ en notant $y = \frac{1}{x}$.**3.25** En 0 : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

En $+\infty$: utiliser un développement asymptotique.

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge, cf. exercice 3.46 ou 3.47.

3.26 En $+\infty$: utiliser un développement asymptotique.

On sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge et que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \text{ diverge, cf. exercice 3.46.}$$

3.27 Pour l'existence, utiliser la règle $x^\alpha f(x)$ en $\pm\infty$.

Pour le calcul, utiliser la formule de Taylor pour les polynômes et

la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3.28 Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale.**3.29** a) Utiliser la règle $t^\alpha f(t)$ en $+\infty$.

b) • Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$ (et même de classe C^1).

• En 0 : montrer que f a une limite finie en 0.

• En $+\infty$: utiliser une majoration convenable.

3.30 a) $\frac{\sin xt}{\sin t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$.

b) Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

c) Majorer convenablement.

3.31 1) Vérifier : $f(0) < \frac{3}{4} < f(1)$.

2) Montrer que f est continue, en utilisant le théorème de continuité sous le signe intégrale, et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

3.32 1) Obtenir $\text{Déf}(f) = \mathbb{R}$.

2) f est impaire.

3) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$, par le théorème de continuité sous le signe intégrale.

4) En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, exprimer $f'(x)$ comme intégrale, et en déduire le sens de variation de f .

5) Concavité, à l'aide de $f''(x)$, comme en 4).

6) En 0, montrer, par une minoration convenable :

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

7) $f(1) = \frac{\pi^2}{8}, \quad f'(1) = \frac{1}{2}.$

8) En $+\infty$, utiliser le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, pour

obtenir : $f(x) = \frac{\pi^2}{4} - f\left(\frac{1}{x}\right).$

9) Tracer la courbe représentative de f .

3.33 a) Étude en $+\infty$, en redémontrant l'exemple de Bertrand, dans le cas en question.

Réponse : $\text{Déf}(f) =]1; +\infty[$.

b) Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

c) 1) Étude en 1 : minorer convenablement $f(x)$.

2) Étude en $+\infty$: majorer convenablement $f(x)$.

e) Changement de variable $u = t^x$, puis utilisation du théorème de continuité (en 0) sous le signe intégrale.

3.34 a) 1) Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale, deux fois.

2) Utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

b) Calculer $(\ln \circ F)''$.

3.35 1) Existence : Majorer la valeur absolue de la fonction par $g(x, y) = e^{-px} e^{-qy}$.

L'application g est continue, ≥ 0 .

Obtenir : $\forall (a, b) \in [0; +\infty]^2, \quad \iint_{[0; a] \times [0; b]} g \leq \frac{1}{pq}$

et déduire que g est intégrable sur $[0; +\infty]^2$, puis f aussi.

2) Calcul : Utiliser une formule de trigonométrie et le théorème de Fubini.

Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t \, dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t \, dt$

en passant par les nombres complexes.

Il s'agit d'ailleurs de transformées de Laplace classiques.

3.36 a) Étude de I et J :

1) Existence :

Montrer $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$ et déduire l'existence de I .

Par le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, l'existence de J se ramène à celle de I , et $I = J$.

2) Calcul :

Considérer $2I = I + J$, puis changement de variable $u = 2x$.

Réponse : $I = J = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

b) Étude de K :

1) Existence :

Montrer que $\frac{x}{\tan x}$ a une limite finie en 0 et une limite finie en $\frac{\pi}{2}$.

2) Calcul :

Utiliser une intégration par parties, pour se ramener à I .

Réponse : $K = -I = \frac{\pi}{2} \ln 2.$

c) Étude de L :

Utiliser des formules de trigonométrie pour se ramener à K .

Réponse : $L = 4K = 2\pi \ln 2.$

d) Étude de M :

Partir de K et faire le changement de variable $u = \tan t$.

Réponse : $K = \frac{\pi}{2} \ln 2.$

3.37 Remarquer : $\frac{d}{dx}(e^{-x} Q(x)) = -e^{-x} P(x),$

et déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) \, dt.$

3.38 1) Existence : $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$

2) Calcul :

1^{re} méthode :

En utilisant une intégration par parties, obtenir une relation entre I_n et I_{n-1} .

2^e méthode :

Changement de variable $t = x + 1$, développement par la formule du binôme de Newton, et calcul d'intégrales.

3.39 Il s'agit, pour $x \in [0; +\infty[$ fixé et t décrivant $]0; +\infty[$, de déterminer le plus petit des trois réels $x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}$.

Séparer en cas selon $x : x = 0, 0 < x \leq 1, 1 \leq x$.

Dans chaque cas, calculer le minimum en question, puis calculer $f(x)$.

$$\text{Réponse : } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3.40 1) Majorer g et h à l'aide de f .

2) Si g est intégrable sur $[0; +\infty[$, utiliser l'inégalité $\sin^2 x \leq |\sin x|$ et la décroissance de f pour déduire que $x \mapsto f(x) \sin^2 x$ et $x \mapsto f(x) \cos^2 x$ sont intégrables sur $[0; +\infty[$.

3.41 Montrer que ff' est intégrable sur $[0; +\infty[$ et en déduire que f^2 admet une limite finie L en $+\infty$, puis montrer que cette limite L est nécessairement nulle, et conclure.

3.42 a) Comparer somme et intégrale pour déduire :

$$\forall n \geq 2, \int_{\frac{1}{n}}^1 f \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} f.$$

b) Appliquer a) à $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)\sqrt{x(x+2)}}$.

3.43 1) Montrer d'abord que, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, l'intégrale proposée existe.

2) Utiliser le changement de variable $u = t - x$, puis minorer convenablement.

Réponse : $+\infty$.

3.44 a) En utilisant une intégration par parties, obtenir, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt.$$

b) Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{n} t$.

3.45 Pour $x \in]0; 1[$ fixé, à l'aide du changement de variable $u = t + x$, obtenir :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u - 1}{u} du + e^{-x} (\ln(x+1) - \ln x).$$

Montrer que $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$, est intégrable sur $]0; 2[$.

3.46 Séparer en cas : $\alpha > 1, 0 < \alpha \leq 1, \alpha \leq 0$.

1) Traiter d'abord le cas $\alpha > 1$.

2) Pour le cas $0 < \alpha \leq 1$, utiliser une intégration par parties et l'étude du cas précédent.

3) Dans le cas $\alpha \leq 0$, montrer que les intégrales proposées divergent grossièrement.

3.47 a) α) Passer, par exemple, par les nombres complexes et une sommation géométrique.

β) Montrer d'abord que l'intégrale proposée existe.

Utiliser α).

b) Utiliser une intégration par parties.

c) α) f est C^1 sur $]0; \pi/2[$.

• Montrer $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ par utilisation de $DL(0)$ ou d'équivalents.

• Montrer que f' a une limite finie en 0, par utilisation de $DL(0)$.

Conclure à l'aide du théorème limite de la dérivée.

β) Utiliser a) α) et b).

d) Par le changement de variable $x = \frac{u}{2n+1}$, montrer :

$$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part (cf. exercice 3.46), montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, converge.

3.48 a) α) Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.

Pour le calcul, utiliser une intégration par parties.

β) Pour $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$, se ramener à la précédente par le changement de variable $t = 2x$.

b) Attention : λ n'est pas nécessairement ≥ 0 .

Si $\lambda > 0$, utiliser le changement de variable $x = \frac{t}{\lambda}$.

L'étude du cas $\lambda = 0$ est immédiate.

Pour $\lambda < 0$, utiliser un argument de parité.

c) Utiliser des formules de trigonométrie circulaire pour se ramener à des intégrales précédentes.

d) 1) Montrer l'existence, par des études en $-\infty, 0, \pi, +\infty$.

2) Utiliser une décomposition en éléments simples.

3.49 1) Existence :

Montrer que $f(x)$ existe si et seulement si $x \geq 0$.

2) Calcul :

α) Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale, pour montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)(1+t^2)}.$$

β) Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale pour montrer que f est continue en 0.

γ) Calculer l'intégrale donnant $f'(x)$ et obtenir :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}.$$

δ) Réponse : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad f(x) = \pi \ln(1 + \sqrt{x})$.

3.50 a) Règle $t^a f(t)$ en $+\infty$.

b) 1) Montrer que f est continue, et même C^1 , comme primitive d'une application continue.

2) Majorer convenablement $f(x)$, pour $x \in [1; +\infty[$, et déduire que f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

3) Utiliser le théorème de Fubini sur les intégrales doubles.

3.51 Grouper les deux études, en passant par les nombres complexes.

Pour $a \in]0; +\infty[$ fixé, appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour déduire que

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-at^2} e^{ixt} dt$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at^2} i t e^{ixt} dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que f satisfait une EDL1. Résoudre celle-ci en utilisant la méthode de variation de la constante.

Séparer enfin partie réelle et partie imaginaire.

3.52 1) Existence :

Procéder à une étude en 0 et à une étude en $+\infty$.

Ne pas oublier que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

2) Calcul :

Noter $u = -\operatorname{Re}(z) > 0$, $v = \operatorname{Im}(z)$, de sorte que :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{zt} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-ut} e^{ivt} dt.$$

Appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale

pour montrer que $g : v \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-ut} e^{ivt} dt$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(v)$ par une intégrale.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que g satisfait une EDL1. Résoudre celle-ci et déduire g .

3.53 I. a) Pour $0 < \varepsilon \leq X$ fixés obtenir, par des changements de variable et la relation de Chasles :

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt - \int_{aX}^{bX} \frac{f(u)}{u} du.$$

Faire tendre X vers $+\infty$.

b) Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale pour

montrer : $\int_a^b \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{f(0)}{t} dt$.

II. a) • Montrer que les intégrales impropres

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1 - \operatorname{th} x}{x} dx$$

convergent, et appliquer le résultat de I. b).

• Considérer $f : x \mapsto \frac{\pi^2}{4} - (\operatorname{Arctan} x)^2$.

b) Remplacer $\operatorname{sh}(xt)$ par son expression à l'aide d'exponentielles, et se ramener à la deuxième intégrale de a).

c) Par le changement de variable $t = e^{-x}$, se ramener à la deuxième intégrale de a).

d) À l'aide d'une intégration par parties, se ramener à la deuxième intégrale de a).

3.54 a) Utiliser le changement de variable $u = \tan t$, puis minorer convenablement.

$$b) \text{ En notant } g(x) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1-x+u^2}},$$

montrer : $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x)$,

$$\text{puis, en considérant } h(x) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-x+u^2}},$$

montrer : $g(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} h(x)$. Calculer $h(x)$.

$$\text{Réponse : } f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1-x).$$

3.55 a) Étudier la continuité en 0, en faisant apparaître un taux d'accroissement, à l'aide d'une primitive de f .

b) 1) Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, utiliser une intégration par parties et obtenir, pour $0 < \varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X g^2(x) dx \leq \frac{F^2(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2 \int_{\varepsilon}^X g(x) f(x) dx,$$

où F est la primitive de f qui s'annule en 0, puis utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

2) Dans le cas général, faire intervenir $u = |f|$ et v associée à u comme g l'est à f .

Corrigés des exercices

3.1 a) • L'application

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$$

est continue sur $[1; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• *Étude en $+\infty$:*

On a, en utilisant une expression conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \frac{(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , on conclut :

f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

b) • L'application $f : x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

• *Étude en $+\infty$:*

On a, pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$|f(x)| = \frac{|\sin x + \cos x|}{\sqrt{x^3 + 1}} \leq \frac{2}{\sqrt{x^3 + 1}} \leq \frac{2}{x^{3/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($3/2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , on déduit que $|f|$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, donc sur $[0; +\infty[$, puis, par définition, on conclut : f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

c) • L'application $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 + 1}}$ est continue sur $[1; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• *Étude en $+\infty$:*

$$\text{On a : } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{\ln x}{x^{3/2}}}_{\text{notée } g(x)}.$$

$$\text{Et : } x^{5/4} g(x) = \frac{\ln x}{x^{1/4}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

par prépondérance classique.

D'où, au voisinage de $+\infty$: $x^{5/4} g(x) \leq 1$,

$$\text{puis : } 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x^{5/4}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($5/4 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , g est intégrable

sur $[1; +\infty[$, puis, par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , on conclut : f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

d) • L'application $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + x}}$ est continue sur $]0; 1]$, et $f \geq 0$.

• *Étude en 0 :*

$$\text{On a : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , on conclut : f est intégrable sur $]0; 1]$.

e) • L'application $f : x \mapsto \frac{1+x}{\sqrt{x+x^2}}$ est continue sur $]0; 1]$, et $f \geq 0$.

• *Étude en 0 :*

$$\text{On a : } f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , on conclut : f est intégrable sur $]0; 1]$.

f) • L'application $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^3 + x^2}$ est continue sur $]0; 1]$, et $f \leq 0$. Considérons $g = -f \geq 0$.

• *Étude en 0 :*

$$\text{On a : } g(x) = \frac{-\ln x}{x^3 + x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \underbrace{\frac{-\ln x}{x^2}}_{\text{notée } h(x)}.$$

On a, pour tout $x \in]0; 1/e]$: $-\ln x \geq 1$,

$$\text{donc : } h(x) \geq \frac{1}{x^2} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($2 \geq 1$) l'application $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, n'est pas intégrable sur $]0; 1]$. D'après le théorème de minoration pour des fonctions ≥ 0 , il s'ensuit que h n'est pas intégrable sur $]0; 1]$, puis, par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , g n'est pas intégrable sur $]0; 1]$. Enfin, comme $f = -g$, on conclut que f n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

g) • L'application $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}$ est continue sur $] -1; 1[$, et $f \geq 0$.

• *Étude en 1 :*

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2+x^4)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2+x^4)}} \\ &\underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(1-x) \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{(1-x)^{1/2}}. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , on déduit que f est intégrable sur $[0; 1[$.

• *Étude en -1 :*

Comme f est paire et que f est intégrable sur $[0; 1[$, il s'ensuit que f est intégrable sur $] -1; 0]$.

Puisque f est intégrable sur $] -1; 0]$ et sur $[0; 1[$, on conclut : f est intégrable sur $] -1; 1[$.

h) • L'application $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^4}}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

• *Étude en 0 :*

$$\text{On a : } |f(x)| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x^3 + x^4}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{|x|}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , $|f|$ est intégrable sur $]0; 1]$, donc, par définition, f est intégrable sur $]0; 1]$.

• *Étude en $+\infty$:*

$$\text{On a : } |f(x)| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x^3 + x^4}} \leq \frac{1}{x^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , $|f|$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, donc, par définition, f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, on conclut : f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

i) • L'application $x \mapsto \frac{1+x^2 e^{-x}}{x^2 + e^{-2x}}$ est continue sur $] -\infty; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• *Étude en $-\infty$:*

On a :

$$f(x) = \frac{1+x^2 e^{-x}}{x^2 + e^{-2x}} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{x^2 e^{-x}}{e^{-2x}} = \underbrace{x^2 e^x}_{\text{notée } g(x)}.$$

$$\text{et : } x^2 g(x) = x^4 e^x \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, au voisinage de $-\infty$: $x^2 g(x) \leq 1$,

$$\text{puis : } 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $-\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , g est intégrable sur $] -\infty; -1]$, puis sur $] -\infty; 0]$. Par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , il s'ensuit que f est intégrable sur $] -\infty; 0]$.

• *Étude en $+\infty$:*

$$\text{On a : } f(x) = \frac{1+x^2 e^{-x}}{x^2 + e^{-2x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2},$$

car $x^2 e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, par prépondérance classique.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , il s'ensuit que f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $] -\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$, on conclut : f est intégrable sur $] -\infty; +\infty[$.

3.2 L'application $f : x \mapsto \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{x}}$, est continue sur $]0; 1]$

et : $\forall x \in]0; 1], |f(x)| \leq 1$.

Ainsi, f est continue et bornée sur l'intervalle borné $]0; 1]$, donc, d'après le cours, f est intégrable sur $]0; 1]$, et on conclut que l'intégrale proposée existe.

3.3 a) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ est continue sur $]0; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• *Étude en $+\infty$:*

$$\text{On a : } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , il s'ensuit que f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$ existe.

2) Calcul :

On a, à l'aide d'une décomposition en éléments simples immédiate, pour $X \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx &= \int_0^X \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_0^X \\ &= \ln(X+1) - \ln(X+2) + \ln 2 \\ &= \ln \frac{X+1}{X+2} + \ln 2 \underset{X \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \ln 2.$$

b) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{x^4}{x^{10} + 1}$, est continue sur $[0; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• Étude en $+\infty$:

$$\text{On a : } f(x) = \frac{x^4}{x^{10} + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^6}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($6 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale proposée existe.

2) Calcul :

On a, par le changement de variable $t = x^5$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10} + 1} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{5} \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \frac{1}{5} [\text{Arctan } u]_0^{+\infty} = \frac{1}{5} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

c) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{\text{ch } x}{\text{ch } 2x}$ est continue sur $] -\infty; +\infty[$, paire, et $f \geq 0$.

• Étude en $+\infty$:

On a :

$$f(x) = \frac{\text{ch } x}{\text{ch } 2x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}.$$

D'après le cours, l'application $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, donc, par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

• Étude en $-\infty$:

Comme f est paire et intégrable sur $[0; +\infty[$, f est aussi intégrable sur $] -\infty; 0]$.

Puisque f est intégrable sur $] -\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$, f est intégrable sur $] -\infty; +\infty[$.

2) Calcul :

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ch } x}{\text{ch } 2x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ch } x}{1 + 2 \text{sh}^2 x} dx \\ t = \text{sh } x \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + 2t^2} \quad u = \sqrt{2} t \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{Arctan } u]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

d) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ est continue sur $[0; 1[$, et $f \geq 0$.

• Étude en 1 :

On a :

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1-x)^{1/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en 1 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $]0; 1]$, donc l'intégrale proposée existe.

2) Calcul :

On a, par le changement de variable

$$t = \text{Arcsin } x, \quad x = \sin t, \quad dx = \cos t \, dt :$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

e) 1) Existence :

• L'application

$$f : x \mapsto \ln(1 - 3x + 2x^2) = \ln((1-x)(1-2x))$$

est continue sur $[0; 1/2[$.

• Par le changement de variable $t = \frac{1}{2} - x$, l'existence et le calcul de $I = \int_0^{1/2} \ln(1 - 3x + 2x^2) dx$ se ramènent à l'exis-

tence et au calcul de $J = \int_{1/2}^0 \underbrace{\ln(t + 2t^2)}_{\text{notée } g(t)} dt$.

On a : $g(t) = \ln t + \ln(1 + 2t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln t < 0$.

D'après le cours, l'application $t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0; 1]$. Par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , $-g$ est donc intégrable sur $]0; 1]$, puis g l'est aussi, et enfin, par changement de variable, f est intégrable sur $[0; 1/2[$.

2) Calcul :

On a, en calculant des primitives sur $[0; 1/2[$:

$$\begin{aligned} \int \ln(1 - 3x + 2x^2) dx &= \int (\ln(1-x) + \ln(1-2x)) dx \\ &= \int \ln(1-x) dx + \int \ln(1-2x) dx \\ &= -((1-x)\ln(1-x) - (1-x)) \\ &\quad - \frac{1}{2}((1-2x)\ln(1-2x) - (1-2x)) \\ &= -(1-x)\ln(1-x) - \frac{1}{2}(1-2x)\ln(1-2x) + \frac{3}{2} - 2x, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} \ln(1-3x+2x^2) dx \\ &= \left[-(1-x) \ln(1-x) - \frac{1}{2}(1-2x) \ln(1-2x) + \frac{3}{2} - 2x \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

3.4 Par le changement de variable

$$t = x^2, \quad x = \sqrt{t}, \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt,$$

l'existence et le calcul de I_n se ramènent à l'existence et au calcul de

$$J_n = \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt.$$

D'après le cours sur la fonction Γ d'Euler, puisque $\frac{n-1}{2} \geq -\frac{1}{2} > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et :

$$J_n = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Si n est impair, $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, alors :

$$I_n = \frac{1}{2} \Gamma(p+1) = \frac{1}{2} p!.$$

Si n est pair, $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, alors :

$$I_n = \frac{1}{2} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right).$$

En utilisant la formule du cours :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

on déduit :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{2}\right) \left(p - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{2^p} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!) 2^p} \sqrt{\pi} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1} p!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

3.5 1) Puisque f est bornée, on a :

$$\forall x \in I, \quad |f^2(x)| = |f(x)|^2 \leq \|f\|_{\infty} |f(x)|,$$

ou encore : $|f^2| \leq \|f\|_{\infty} |f|$.

Comme f est intégrable sur I , par définition, $|f|$ l'est aussi, puis $\|f\|_{\infty} |f|$ l'est aussi.

Il en résulte, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , que $|f^2|$ est intégrable sur I , et enfin, par définition, on conclut que f^2 est intégrable sur I .

2) Le résultat ne subsiste pas si on ne suppose pas f bornée. Par exemple, pour $I =]0; 1]$ et $f : x \mapsto x^{-3/4}$, d'après l'exemple de Riemann en 0, f est intégrable sur $]0; 1]$ (car $3/4 < 1$), mais $f^2 : x \mapsto x^{-3/2}$ n'est pas intégrable sur $]0; 1]$ (car $3/2 \geq 1$).

3.6 Puisque $f \leq g \leq h$, on a : $0 \leq g - f \leq h - f$. Comme f et h sont intégrables sur I , par différence, $h - f$ est intégrable sur I . Par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , il en résulte que $g - f$ est intégrable sur I . Enfin, comme $g = (g - f) + f$ et que $g - f$ et f sont intégrables sur I , par addition, on conclut que g est intégrable sur I .

3.7 1) Existence :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

• L'application $f_{x,y} : t \mapsto |x + ty| e^{-t}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et $f_{x,y} \geq 0$.

• Étude en $+\infty$:

$$\text{On a : } t^2 f_{x,y}(t) = t^2 |x + ty| e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

par prépondérance classique.

D'où, pour t assez grand : $t^2 f_{x,y}(t) \leq 1$,

$$\text{et donc : } 0 \leq f_{x,y}(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , l'application $f_{x,y}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale

$$N(x, y) = \int_0^{+\infty} |x + ty| e^{-t} dt \text{ existe.}$$

2) Inégalité triangulaire :

On a, pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & N((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= \int_0^{+\infty} |(x_1 + x_2) + t(y_1 + y_2)| e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} |(x_1 + ty_1) + (x_2 + ty_2)| e^{-t} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} (|x_1 + ty_1| + |x_2 + ty_2|) e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} |x_1 + ty_1| e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} |x_2 + ty_2| e^{-t} dt \\
&= N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2).
\end{aligned}$$

3) Positive homogénéité :

On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
N(\alpha(x, y)) &= N(\alpha x, \alpha y) = \int_0^{+\infty} |\alpha x + t\alpha y| e^{-t} dt \\
&= |\alpha| \int_0^{+\infty} |x + ty| e^{-t} dt = |\alpha| N(x, y).
\end{aligned}$$

4) Non-dégénérescence :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
N(x, y) &= 0 \\
\iff \int_0^{+\infty} \underbrace{|x + ty| e^{-t}}_{\text{continue et } \geq 0} dt &= 0 \\
\iff \forall t \in [0; +\infty[, |x + ty| e^{-t} &= 0 \\
\iff \forall t \in [0; +\infty[, x + ty &= 0 \\
\iff (x, y) &= (0, 0).
\end{aligned}$$

On conclut que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

3.8 a) 1) Existence :

- L'application $f_a : x \mapsto \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}\right)^2$, est continue sur $[1; +\infty[$, et $f_a \geq 0$.
- On a : $f_a(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f_a est intégrable sur $[1; +\infty[$, et donc $I(a)$ existe.

2) Calcul :

On a :

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}\right)^2 dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2a}{x^3} + \frac{a^2}{x^4}\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} - \frac{a^2}{3x^3}\right]_1^{+\infty} = 1 - a + \frac{a^2}{3}.
\end{aligned}$$

b) D'après a), $I(a)$ est un trinôme du second degré en a . Mettons-le sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
I(a) &= 1 - a + \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}(a^2 - 3a + 3) \\
&= \frac{1}{3}\left(\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

On déduit :

1) $\inf_{a \in \mathbb{R}} I(a) = I\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$, atteint en $a = \frac{3}{2}$, (et en ce point seulement)

2) $\inf_{a \in \mathbb{Z}} I(a) = I(1) = I(2) = \frac{1}{3}$, atteint en $a = 1$ et en $a = 2$ (et en ces deux points seulement).

3.9 1^{re} méthode :

En remplaçant a par x^λ , où $\lambda \in]0; +\infty[$ est à choisir ultérieurement, on a :

$$\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{2-\lambda}} + \frac{1}{x^{2\lambda}}.$$

Essayons de trouver λ de façon que : $2 - \lambda > 1$ et $2\lambda > 1$. Pour $\lambda = \frac{3}{4}$, par exemple, on a :

$$\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{5/4}} + \frac{1}{x^{3/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($5/4 > 1$ et $3/2 > 1$), par addition, et d'après le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , on conclut que f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

2^e méthode :

Soit $x \in [1; +\infty[$ fixé.

Essayons de choisir le meilleur $a \in [1; +\infty[$ réalisant l'inégalité de l'énoncé.

Considérons l'application

$$\varphi : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \varphi(a) = \frac{a}{x^2} + \frac{1}{a^2}.$$

L'application φ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et :

$$\forall a \in [1; +\infty[, \varphi'(a) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{a^3}.$$

On dresse le tableau de variations de φ :

a	1	$(2x^2)^{1/3}$	$+\infty$
$\varphi'(a)$	-	0	+
$\varphi(a)$		$\searrow$	$\nearrow$

Et :

$$\begin{aligned}
\varphi((2x^2)^{1/3}) &= \frac{(2x^2)^{1/3}}{x^2} + \frac{1}{((2x^2)^{1/3})^2} \\
&= \frac{2^{1/3}}{x^{4/3}} + \frac{1}{2^{2/3}x^{4/3}} = 3 \cdot 2^{-2/3} \frac{1}{x^{4/3}}.
\end{aligned}$$

On a donc : $\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq 3 \cdot 2^{-2/3} \frac{1}{x^{4/3}}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($4/3 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , on conclut que f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

3.10 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• L'application $f_n : x \mapsto \frac{e^{-x}}{n+x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

• On a : $0 \leq f_n(x) = \frac{e^{-x}}{n+x} \leq e^{-x}$.

D'après le cours, l'application $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$. Par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , il en résulte que f_n est intégrable sur $[0; +\infty[$, donc

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx \text{ existe.}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx &\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n} dx \\ &= \frac{1}{n} [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

d'où, par théorème d'encadrement : $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

c) Comme $\frac{e^{-x}}{n+x}$ ressemble, pour n grand et x fixé, à $\frac{e^{-x}}{n}$, formons :

$$\begin{aligned} \left| I_n - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n} dx \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{n+x} - \frac{e^{-x}}{n} \right) dx \right| \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{n(n+x)} dx \leq \frac{1}{n^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx}_{\text{notée } J}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\left| I_n - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{J}{n^2}$, donc : $I_n - \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis :

$I_n = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, que l'on peut affaiblir en :

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

3.11 a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

L'application $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n(1+x^2)}$ est continue sur

$[1; +\infty[$, ≥ 0 , et : $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}$, donc, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($n+2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_n est intégrable sur $[1; +\infty[$, et on conclut que I_n existe.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On a, par une intégration par parties pour des applications de classe C^1 , pour tout $X \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{1}{x^n(1+x^2)} dx &= \int_1^X x^{-n} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \frac{1}{1+x^2} \right]_1^X - \int_1^X \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{X^{-n+1}}{-n+1} \frac{1}{1+X^2} + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{2}{n-1} \int_1^X \frac{x^{-n+2}}{(1+x^2)^2} dx.$$

On déduit, en faisant tendre X vers $+\infty$:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{2}{n-1} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x^{-n+2}}{(1+x^2)^2} dx}_{\text{notée } J_n}.$$

On a, pour $n \geq 4$:

$$0 \leq J_n \leq \int_1^{+\infty} x^{-n+2} dx = \left[\frac{x^{-n+3}}{-n+3} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n-3},$$

donc : $J_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, puis :

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2(n-1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

3.12 1) Existence :

D'après les formules, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{Min}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$\text{Max}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),$$

les applications Min et Max sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc, par opération, l'application

$$f : (x, y) \mapsto \frac{\text{Min}(x, y)}{\text{Max}(x, y)}$$

est continue sur $]0; 1]^2$.

De plus : $\forall (x, y) \in]0; 1]^2$, $0 \leq f(x, y) \leq 1$.

Ainsi, f est continue et bornée sur $]0; 1]^2$, et $]0; 1]$ est un intervalle borné, donc, d'après le cours, f est intégrable sur $]0; 1]^2$.

2) Calcul :

On a, en utilisant le théorème de Fubini et la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{]0; 1]^2} \frac{\text{Min}(x, y)}{\text{Max}(x, y)} dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\text{Min}(x, y)}{\text{Max}(x, y)} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{y}{x} dy + \int_x^1 \frac{x}{y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x + x [\ln y]_x^1 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - x \ln x \right) dx \\ &= \frac{1}{4} - \int_0^1 x \ln x dx. \end{aligned}$$

On calcule cette dernière intégrale en utilisant une intégration par parties. On a, pour tout $\varepsilon \in]0; 1]$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 x \ln x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon - \left[\frac{x^2}{4} \right]_{\varepsilon}^1 = -\frac{\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

D'où, en passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et par prépondérance classique : $\int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}$.

On obtient : $I = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$.

3.13 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Si $\deg(P) \leq 3$, alors

$$f(x) = \sqrt{P(x)} - (x^2 + x + 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty,$$

donc f n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.

Si $\deg(P) \geq 5$, alors, pour que f soit définie au voisinage de $+\infty$, le coefficient dominant de P doit être > 0 , et on a $f(x) = \sqrt{P(x)} - (x^2 + x + 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc f n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.

Supposons dorénavant $\deg(P) = 4$, $P = \sum_{k=0}^4 a_k X^k$, $a_4 \in \mathbb{R}^*$, $a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{R}$.

Si $a_4 < 0$, alors f n'est pas définie au voisinage de $+\infty$. Nous supposons donc $a_4 > 0$.

Si $a_4 \neq 1$, alors $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{a_4} - 1)x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty$, donc f n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.

Nous supposons dorénavant $a_4 = 1$.

On a alors, en utilisant une expression conjuguée :

$$f(x) = \sqrt{P(x)} - (x^2 + x + 1) = \frac{P(x) - (x^2 + x + 1)^2}{\sqrt{P(x)} + (x^2 + x + 1)}.$$

D'une part, $\sqrt{P(x)} + (x^2 + x + 1) \sim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2$.

D'autre part, $g : x \mapsto P(x) - (x^2 + x + 1)^2$ est un polynôme de degré ≤ 3 . Si ce polynôme g est de degré ≥ 1 , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ tels que $g(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x^\alpha$, d'où

$f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2} \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $2 - \alpha \leq 1$, donc, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , $|f|$ n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$, et donc f n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.

Nous supposons donc que g est de degré ≤ 0 , c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad P(x) - (x^2 + x + 1)^2 = c.$$

Si $c = 0$, alors $f = 0$, donc f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Si $c \neq 0$, alors $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{2x^2}$, donc, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , $|f|$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, et donc f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Enfin :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad P(x) \geq 0$$

$$\iff \forall x \in [0; +\infty[, \quad (x^2 + x + 1)^2 + c \geq 0$$

$$\iff 1 + c \geq 0.$$

On conclut que l'ensemble des P convenant est

$$\{P = (X^2 + X + 1)^2 + c; \quad c \in [-1; +\infty[\},$$

ou encore, en développant :

$$\{P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + d; \quad d \in [0; +\infty[\}.$$

3.14 a) 1) Existence :

- L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$ est continue sur $[1; +\infty[$, et $f \geq 0$.
- Étude en $+\infty$:

On a : $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$ existe.

2) Calcul :

Commençons par éliminer le facteur x du dénominateur, à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$:

$$I = \int_1^0 \frac{1}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}} \left(-\frac{dt}{t^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t + t^2}} \, dt.$$

Effectuons une mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} t^2 + t + 1 &= \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left(1 + \frac{4}{3} \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Par le changement de variable $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}(1+u^2)}} \frac{\sqrt{3}}{2} du \\ &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du \\ &= [\operatorname{Argsh} u]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= [\ln(u + \sqrt{1+u^2})]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \ln(\sqrt{3}+2) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \ln(\sqrt{3}+2) - \ln \sqrt{3} \\ &= \ln \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

b) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ est continue sur $] -\infty ; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• Étude en $\pm\infty$:

On a : $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$. D'après l'exemple de Riemann en $\pm\infty$ ($4 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $] -\infty ; -1]$ et sur $[1 ; +\infty[$, donc f est intégrable sur $] -\infty ; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$ existe.

2) Calcul :

Par mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left(1 + \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{\left(\frac{3}{4}(t^2+1)\right)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt}_{\text{notée } J}. \end{aligned}$$

Par parité : $J = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$.

Par primitivation par parties :

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2+1} &= t \frac{1}{t^2+1} - \int t \frac{-2t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2 \left(\int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \right), \end{aligned}$$

d'où :

$$2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} + \operatorname{Arctan} t.$$

On déduit : $J = \left[\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{Arctan} t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$,

et on conclut : $I = \frac{8\sqrt{3}}{9} J = \frac{8\sqrt{3}}{9} \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$.

c) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• Étude en 0 :

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{x^3} \\ &= \frac{1}{3} + o(1) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

donc f est intégrable sur $]0 ; 1]$ (faux problème).

• Étude en $+\infty$:

$$\text{On a : } f(x) = \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[1 ; +\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]0 ; 1]$ et sur $[1 ; +\infty[$, f est intégrable sur $]0 ; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} dx$ existe.

2) Calcul :

Calculons des primitives, en utilisant une primitivation par parties :

$$\begin{aligned} &\int \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} dx \\ &= -\frac{x - \operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \frac{1}{2x^2} dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{x - \operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx}_{\text{notée } J(x)}.$$

On a, par calcul élémentaire ou par décomposition en éléments simples :

$$J(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan} x + \text{Cte}.$$

D'où :

$$\int \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x} + \underbrace{\frac{\operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x}_{\text{notée } F(x)} + \text{Cte}.$$

$$\text{On a : } F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}.$$

Pour déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, groupons les termes de façon à résoudre la forme indéterminée :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\operatorname{Arctan} x - x}{2x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x \\ &= \frac{1}{2x^2} \left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - x \right) + \frac{1}{2} o(1) = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } I = [F(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

d) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0; 1[$, et $f \geq 0$.

• Étude en 0 :

$$\text{On a : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $]0; 1/2[$.

• Étude en 1 :

$$\text{On a : } f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{2}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{(1-x)^{1/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en 1 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[1/2; 1[$.

Puisque f est intégrable sur $]0; 1/2[$ et sur $[1/2; 1[$, f est intégrable sur $]0; 1[$.

$$\text{On conclut que l'intégrale } I = \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}} dx \text{ existe.}$$

2) Calcul :

On a, par une mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x(1-x) &= -x^2 + x = -(x^2 - x) \\ &= -\left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{4} (1 - (2x - 1)^2).$$

Effectuons le changement de variable $t = 2x - 1$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1 + \frac{1+t}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}(1-t^2)}} \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{3+t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \\ &= \left[\frac{3}{2} \operatorname{Arcsin} t - \frac{1}{2} \sqrt{1-t^2} \right]_{-1}^1 = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

3.15 a) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• Étude en $+\infty$:

$$\text{On a : } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($4 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ existe.

2) Calcul :

On a, par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, qui échange les bornes :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1 \right)} \left(-\frac{dt}{t^2} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(1+t+t^2)} dt. \end{aligned}$$

d'où, en additionnant :

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Par mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left(1 + \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

D'où, par le changement de variable $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{\frac{3}{4}(1+t^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\text{Arctan } t]_{1/\sqrt{3}}^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

et on conclut : $I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

b) 1) Existence :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

• L'application $f_a : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + a^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$,

et $f_a(x) \leq 0$ au voisinage de 0^+ , $f_a(x) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$.

• Étude en 0 :

On a : $f_a(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln x}{a^2}$.

Comme $x \mapsto -\ln x$ est ≥ 0 et intégrable sur $]0; 1]$, par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , $-f_a$ est intégrable sur $]0; 1]$, donc f_a est intégrable sur $]0; 1]$.

• Étude en $+\infty$:

On a : $x^{3/2} f(x) = \frac{x^{3/2} \ln x}{x^2 + a^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{1/2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$,

d'où, pour x assez grand : $x^{3/2} f_a(x) \leq 1$,

puis : $0 \leq f_a(x) \leq \frac{1}{x^{3/2}}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($3/2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f_a est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Puisque f_a est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, f_a est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$ existe.

2) Calcul :

On a, par le changement de variable $t = \frac{x}{a}$:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(at)}{t^2 a^2 + a^2} a dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln t}{1 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Il est clair que $t \mapsto \frac{\ln a}{1 + t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, donc sur $]0; +\infty[$.

D'autre part, d'après 1) (pour $a = 1$), $t \mapsto \frac{\ln t}{1 + t^2}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On peut donc séparer en deux intégrales de fonctions intégrables :

$$I(a) = \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt + \frac{1}{a} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt}_{\text{notée } J}.$$

Par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, qui échange les bornes :

$$J = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln u}{1 + \frac{1}{u^2}} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du = -J,$$

d'où : $J = 0$, puis :

$$I(a) = \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\ln a}{a} [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{\ln a}{a}.$$

c) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1 + x)^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$,

et $f(x) \leq 0$ pour $x \in]0; 1]$, $f(x) \geq 0$ pour $x \in [1; +\infty[$.

• Étude en 0 :

On a : $f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1 + x)^2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$,

donc f est intégrable sur $]0; 1]$ (faux problème).

• Étude en $+\infty$:

On a : $f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1 + x)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{\ln x}{x^{3/2}}}_{\text{notée } g(x)}$.

Et : $x^{5/4} g(x) = \frac{\ln x}{x^{1/4}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$,

donc, au voisinage de $+\infty$: $x^{5/4} g(x) \leq 1$,

d'où : $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x^{5/4}}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($5/4 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions positives, g est intégrable sur $[1; +\infty[$, puis, par le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1 + x)^2} dx$ existe.

2) Calcul :

Éliminons l'intervention de $\sqrt{x}$, par le changement de variable

$$t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2t dt :$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2} 2t dt \\ = 2 \int_0^{+\infty} t \ln t \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt.$$

On a, par primitivation par parties pour des applications de classe C^1 :

$$\int t \ln t \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt = t \ln t \frac{-1}{t^2+1} - \int (1 + \ln t) \frac{-1}{1+t^2} dt \\ = -\frac{t \ln t}{1+t^2} + \text{Arctan } t + \int \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

$$\text{D'une part : } -\frac{t \ln t}{1+t^2} + \text{Arctan } t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

$$-\frac{t \ln t}{1+t^2} + \text{Arctan } t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, l'application $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, par la même démarche (par exemple) que plus haut.

On déduit, en passant aux limites :

$$I = \pi - 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt}_{\text{notée } J}.$$

Par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, qui échange les bornes :

$$J = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln u}{1 + \frac{1}{u^2}} \left(-\frac{du}{u^2} \right) = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1 + u^2} du = -J,$$

donc $J = 0$, et on conclut : $I = \pi$.

3.16

1) Existence :

L'application $x \mapsto \frac{1}{i + \cos x}$ est continue sur le segment $[0; 2\pi]$, donc l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{i + \cos x} dx$ existe.

2) Calcul :

$$\text{On a, par } 2\pi\text{-périodicité : } I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{i + \cos x} dx,$$

puis, par le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, qui amène une intégrale de fonction intégrable :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{i + \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(i+1) + (i-1)t^2} \\ = \frac{2}{i+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + \frac{i-1}{i+1} t^2} \\ = (1-i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + i t^2} \\ = (1-i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-i t^2}{1+t^4} dt \\ \stackrel{\text{parité}}{=} 2(1-i) \int_0^{+\infty} \frac{1-i t^2}{1+t^4} dt.$$

Puisque les applications

$$t \mapsto \frac{1}{1+t^4} \text{ et } t \mapsto \frac{t^2}{1+t^4}$$

sont intégrables sur $[0; +\infty[$, on peut séparer en deux intégrales :

$$I = 2(1-i) \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt}_{\text{notée } A} - i \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt}_{\text{notée } B} \right).$$

• Par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, qui échange les bornes, on a :

$$A = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1 + \frac{1}{u^4}} \left(-\frac{du}{u^2} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4 + 1} du = B.$$

• D'autre part :

$$A + B = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt \stackrel{\text{parité}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt.$$

Factorisons $t^4 + 1$ dans les réels :

$$t^4 + 1 = (t^2 + 1)^2 - 2t^2 = (t^2 - \sqrt{2}t + 1)(t^2 + \sqrt{2}t + 1).$$

Comme l'application $t \mapsto \frac{t\sqrt{2}}{1+t^4}$ est intégrable sur $] -\infty; +\infty[$ et est impaire, on a :

$$A + B = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^4 + 1} dt \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt.$$

Par mise sous forme canonique :

$$t^2 + \sqrt{2}t + 1 = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} \left[1 + 2 \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} [1 + (t\sqrt{2} + 1)^2].$$

D'où, par le changement de variable $u = t\sqrt{2} + 1$:

$$A + B = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(1+u^2)} \frac{1}{\sqrt{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{Arctan } u]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

On a donc : $A = B$ et $A + B = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$,

d'où : $A = B = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Enfin : $I = 2(1-i)(A-iB) = 2(1-i)^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -i\pi\sqrt{2}$.

3.17 a) Soit $a \in \mathbb{R}$.

1) Existence :

L'application $f_a : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)}$ est continue sur $]0; +\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq f_a(x) \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, donc sur $]0; +\infty[$, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f_a est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On conclut que $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)} dx$ existe.

2) Calcul :

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

On a, par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, qui échange les bornes :

$$I(a) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^a}\right)} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(t^2+1)(t^a+1)} dt,$$

d'où, par addition :

$$2I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^a}{(1+x^2)(1+x^a)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Arctan } x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

On conclut : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)} dx = \frac{\pi}{4}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Existence :

• L'application $f_a : x \mapsto \frac{1}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$ est continue sur

$]0; +\infty[$, et $f_a \geq 0$.

• Étude en 0 :

On a : $f_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc f_a est intégrable sur $]0; 1]$ (faux problème).

• Étude en $+\infty$:

On a : $f_a(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$. D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_a est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Puisque f_a est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, f_a est intégrable sur $]0; +\infty[$. On conclut que l'intégrale

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} dx \text{ existe.}$$

2) Calcul :

On a, par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, qui échange les bornes :

$$I(a) = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{a^2 + \left(\frac{1}{t} - t\right)^2} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{t^2}}{a^2 + \left(t - \frac{1}{t}\right)^2} dt,$$

puis, par addition : $2I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} dx$.

On remarque : $d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

L'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ est de

classe C^1 et : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$,

donc φ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

On a alors, en effectuant le changement de variable $u = x - \frac{1}{x}$:

$$2I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + u^2} du.$$

Par le changement de variable $v = \frac{u}{a}$:

$$2I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + a^2 v^2} dv = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + v^2} dv = \frac{1}{a} [\text{Arctan } v]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

On conclut :

$$\forall a \in]0; +\infty[, \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} dx = \frac{\pi}{2a}.$$

c) Soit $(a, b) \in]1; +\infty[^2$.

1) Existence :

L'application $f_{a,b} : x \mapsto \frac{\sin^2 x}{(a - \cos x)(b - \cos x)}$ est continue sur le segment $[0; \pi]$, donc l'intégrale proposée $I(a, b) = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{(a - \cos x)(b - \cos x)} dx$ existe.

2) Calcul :

On a : $\forall x \in [0; \pi], f_{a,b}(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{(a - \cos x)(b - \cos x)}$.

Effectuons la décomposition en éléments simples de $\frac{1 - X^2}{(a - X)(b - X)}$ dans $\mathbb{R}[X]$. Par division euclidienne du numérateur par le dénominateur, la partie entière est égale à -1 . Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{1 - X^2}{(a - X)(b - X)} = -1 + \frac{\alpha}{a - X} + \frac{\beta}{b - X}.$$

Pour calculer α , on multiplie par $a - X$ puis on remplace X par a , et on obtient : $\alpha = \frac{1 - a^2}{b - a}$.

De même : $\beta = \frac{1 - b^2}{a - b}$.

D'où :

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^\pi \left(-1 + \frac{1 - a^2}{b - a} \frac{1}{a - \cos x} + \frac{1 - b^2}{a - b} \frac{1}{b - \cos x} \right) dx \\ &= -\pi + \frac{1 - a^2}{b - a} \int_0^\pi \frac{1}{a - \cos x} dx + \frac{1 - b^2}{a - b} \int_0^\pi \frac{1}{b - \cos x} dx. \end{aligned}$$

Considérons, pour $c \in]1; +\infty[$: $J(c) = \int_0^\pi \frac{dx}{c - \cos x}$.

On a, par le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, qui amène des intégrales de fonctions intégrables :

$$\begin{aligned} J(c) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{c - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \frac{2dt}{1 + t^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{(c - 1) + (c + 1)t^2} dt \\ &= \frac{2}{c - 1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{c - 1}{c + 1}t^2} dt \\ &= \frac{2}{c - 1} \sqrt{\frac{c - 1}{c + 1}} \left[\operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{c + 1}{c - 1}} t \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I(a, b) &= -\pi + \frac{1 - a^2}{b - a} \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1 - b^2}{a - b} \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - 1}} \\ &= -\pi + \frac{\pi}{b - a} (\sqrt{b^2 - 1} - \sqrt{a^2 - 1}) \\ &= -\pi + \frac{\pi(b^2 - a^2)}{(b - a)(\sqrt{b^2 - 1} + \sqrt{a^2 - 1})} \\ &= -\pi + \frac{\pi(b + a)}{\sqrt{b^2 - 1} + \sqrt{a^2 - 1}} \\ &= \pi \frac{a + b - \sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1}}. \end{aligned}$$

d) Notons, pour $a \in \mathbb{R}$, f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = \frac{1}{x^2 - 2x \cos a + 1}.$$

1) Existence :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

• Le discriminant du trinôme réel $x^2 - 2x \cos a + 1$ est $\Delta = 4 \cos^2 a - 4 = -4 \sin^2 a$.

Si $a \equiv 0 [2\pi]$, alors $f_a(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{(x - 1)^2}$, donc, d'après l'exemple de Riemann en 1 ($2 \geq 1$), f_a n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, donc ne l'est pas non plus sur $] -\infty; +\infty[$.

Si $a \equiv \pi [2\pi]$, alors $f_a(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{(x + 1)^2}$, donc, comme plus haut, f_a n'est pas intégrable sur $] -\infty; +\infty[$.

Supposons dorénavant $a \not\equiv 0 [\pi]$, c'est-à-dire $\Delta < 0$. L'application f_a est alors continue sur $] -\infty; +\infty[$.

• Étude en $\pm\infty$:

On a : $f_a(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \geq 0$. D'après l'exemple de Riemann en $\pm\infty$ ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_a est intégrable sur $] -\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, puis sur $] -\infty; +\infty[$.

On conclut : l'intégrale $I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x \cos a + 1} dx$ existe si et seulement si $a \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.

2) Calcul :

Il est clair que l'application $I : a \mapsto I(a)$ est 2π -périodique et paire.

On peut donc supposer : $a \in]0; \pi[$.

On a, par mise sous forme canonique :

$$x^2 - 2x \cos a + 1 = (x - \cos a)^2 + \sin^2 a \\ = \sin^2 a \left[1 + \left(\frac{x - \cos a}{\sin a} \right)^2 \right].$$

Effectuons le changement de variable $t = \frac{x - \cos a}{\sin a}$:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a}{\sin^2 a (1 + t^2)} dt \\ = \frac{1}{\sin a} [\operatorname{Arctan} t]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sin a}.$$

Finalement : $I(a) = \frac{\pi}{\sin a}$, si $a \in]0; \pi[$,

complétée par parité et 2π -périodicité.

e) 1) Existence :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $f_a : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x - \cos a}$.

• Si $\cos a = 1$, c'est-à-dire si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors :

$$f_a(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($2 \geq 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_a n'est pas intégrable sur $]0; 1]$, donc ne l'est pas non plus sur $] - \infty; +\infty[$.

• Supposons $\cos a \neq 1$, c'est-à-dire $a \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Alors, l'application f_a est continue sur $\mathbb{R}$, paire, ≥ 0 et :

$$f_a(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x - \cos a} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\operatorname{ch} x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-x}.$$

Comme l'application $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_a est intégrable sur $[0; +\infty[$, puis, par parité, f_a est intégrable sur $] - \infty; 0]$, et enfin f_a est intégrable sur $] - \infty; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a}{\operatorname{ch} x - \cos a} dx$ existe si et seulement si $a \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

2) Calcul :

Soit $a \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

Il est clair que l'application $I : a \mapsto I(a)$ est 2π -périodique et impaire.

On peut donc supposer $a \in]0; \pi[$.

Si $a = \pi$, alors $I(a) = 0$.

Supposons $a \neq \pi$.

On a alors :

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a}{\operatorname{ch} x - \cos a} dx \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos a} dx \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^x \sin a}{e^{2x} + 1 - 2e^x \cos a} dx.$$

Effectuons le changement de variable

$$t = e^x, \quad x = \ln t, \quad dx = \frac{dt}{t} :$$

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin a}{t^2 - 2t \cos a + 1} dt.$$

On a, par mise sous forme canonique :

$$t^2 - 2t \cos a + 1 = (t - \cos a)^2 + \sin^2 a \\ = \sin^2 a \left[1 + \left(\frac{t - \cos a}{\sin a} \right)^2 \right].$$

D'où, par le changement de variable $u = \frac{t - \cos a}{\sin a}$:

$$I(a) = \int_{-\cotan a}^{+\infty} \frac{2 \sin^2 a du}{\sin^2 a (1 + u^2)} \\ = 2[\operatorname{Arctan} u]_{-\cotan a}^{+\infty} \\ = 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(-\cotan a)\right) \\ = \pi + 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{\tan a} \\ = \pi + 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(\tan a)\right) \\ = \pi + 2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\pi - 2a,$$

et cette dernière expression est aussi valable pour $a = \pi$.

On conclut : $I(a) = 2\pi - 2a$, complétée par imparité et par 2π -périodicité.

f) 1) Existence :

Soit $a \in]0; 1[$ fixé.

• L'application $f_a : x \mapsto \frac{1}{(1 + ax)\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0; 1[$, et $f_a \geq 0$.

• Étude en 0 :

On a : $f_a(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$. D'après l'exemple de Riemann en 0 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_a est intégrable sur $]0; 1/2]$.

• Étude en 1 :

$$\text{On a : } f_a(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1+a} \frac{1}{(1-x)^{1/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en 1 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_a est intégrable sur $[1/2; 1[$.

Puisque f_a est intégrable sur $]0; 1/2]$ et sur $[1/2; 1[$, f_a est intégrable sur $]0; 1[$.

On conclut que l'intégrale $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{(1+ax)\sqrt{x(1-x)}} dx$ existe, pour tout $a \in]0; 1[$.

2) Calcul :

On a, par mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x(1-x) &= -x^2 + x = -(x^2 - x) \\ &= -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

d'où, par le changement de variable $t = 2x - 1$:

$$I(a) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(1 + a \frac{t+1}{2}\right) \frac{1}{2} \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{2} dt.$$

Puis, par le changement de variable

$$u = \arccos t, \quad t = \cos u, \quad dt = -\sin u \, du :$$

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{\pi}^0 \frac{-\sin u}{\left(1 + a \frac{\cos u + 1}{2}\right) \sin u} du \\ &= \int_0^{\pi} \frac{2}{2 + a + a \cos u} du. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $v = \tan \frac{u}{2}$, qui amène une intégrale de fonction intégrable :

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{2 + a + a \frac{1-v^2}{1+v^2}} dv \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+a) + v^2} dv \\ &= \frac{2}{1+a} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{v^2}{1+a}} dv \\ &= \frac{2}{1+a} \left[\sqrt{1+a} \operatorname{Arctan} \left(\frac{v}{\sqrt{1+a}} \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+a}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a}}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } \forall a \in]0; 1[, \quad I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1+a}}.$$

3.18 1) Existence :

Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

L'application $f_z : t \mapsto e^{zt} e^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f_z(t)| = e^{xt} e^{-|t|} = \begin{cases} e^{(x-1)t} & \text{si } t \geq 0 \\ e^{(x+1)t} & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

D'après le cours, l'application $t \mapsto e^{(x-1)t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $x - 1 < 0$, et l'application $t \mapsto e^{(x+1)t}$ est intégrable sur $] -\infty; 0]$ si et seulement si $x + 1 > 0$.

Il en résulte que f_z est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x - 1 < 0$ et $x + 1 > 0$, c'est-à-dire : $-1 < x < 1$.

2) Calcul :

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-1 < x < 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt} e^{-|t|} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{zt} e^t dt + \int_0^{+\infty} e^{zt} e^{-t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(z+1)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{(z-1)t} dt \\ &= \left[\frac{e^{(z+1)t}}{z+1} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{(z-1)t}}{z-1} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{2}{1-z^2}. \end{aligned}$$

3.19 Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{\sin t}{\operatorname{sh}^2 t} dt$ existe

comme intégrale d'une application continue sur un segment.

Comme $\frac{\sin t}{\operatorname{sh}^2 t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$, considérons $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{1}{t} dt$.

• On a : $g(x) = [\ln t]_{2x}^{3x} = \ln \frac{3x}{2x} = \ln \frac{3}{2}$.

• D'autre part : $f(x) - g(x) = \int_{2x}^{3x} \left(\frac{\sin t}{\operatorname{sh}^2 t} - \frac{1}{t} \right) dt$.

L'application $\varphi : t \mapsto \frac{\sin t}{\operatorname{sh}^2 t} - \frac{1}{t}$ est continue sur $]0; 1]$ et, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{t + o(t^2)}{(t + o(t^2))^2} - \frac{1}{t} = \frac{t + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1 + o(t)}{t(1 + o(t))} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} (1 + o(t)) - \frac{1}{t} = \frac{o(t)}{t} = o(1), \end{aligned}$$

donc : $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

Puisque φ admet une limite finie en 0, φ est intégrable sur $]0; 1]$ donc :

$$\int_{2x}^{3x} \varphi(t) dt = \int_0^{3x} \varphi(t) dt - \int_0^{2x} \varphi(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi : $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

ou encore : $f(x) - g(x) = o(1)$.

On obtient :

$$f(x) = (f(x) - g(x)) + g(x) = o(1) + \ln \frac{3}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln \frac{3}{2}.$$

On conclut : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{\sin t}{\operatorname{sh}^2 t} dt = \ln \frac{3}{2}$.

3.20 Considérons l'application

$$F : [-1; 1] \times [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}}.$$

• L'application F est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• On a, pour tout $(x, t) \in [-1; 1] \times [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} |F(x, t)| &= \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}} \\ &= \left(\frac{t+2}{t+1} \right)^{x-1} \frac{1}{(t+1)^2} \leq \frac{1}{(t+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

et l'application $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, F vérifie HD.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, avec HD, il s'ensuit que, pour tout $x \in [-1; 1]$, l'application $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, et que l'application

$f : x \mapsto \int_1^{+\infty} F(x, t) dt$ est continue sur $[-1; 1]$.

En particulier : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$. Et :

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{-1}}{t+1} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \left[\ln(t+1) - \ln(t+2) \right]_1^{+\infty} \\ &= \left[\ln \frac{t+1}{t+2} \right]_1^{+\infty} = -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

On conclut : $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}} dt = \ln \frac{3}{2}$.

3.21 a) Soit $x \in]0; +\infty[$.

• L'application $g_x : t \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et $g_x \geq 0$.

• Étude en $+\infty$:

On a :

$$t^2 g_x(t) = \frac{t^5}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^3 e^{-xt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, au voisinage de $+\infty$: $t^2 g_x(t) \leq 1$,

d'où : $0 \leq g_x(t) \leq \frac{1}{t^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , g_x est intégrable sur $[0; +\infty[$, et on conclut que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt \text{ existe.}$$

b) 1) Étude en 0 :

Soit $x \in]0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt \\ &\geq \int_1^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{2t^4}} e^{-xt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} t e^{-xt} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} e^{-xt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x\sqrt{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty, \end{aligned}$$

donc : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

2) Étude en $+\infty$:

Soit $x \in]0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} dt = \int_{u=xt}^{+\infty} \left(\frac{u}{x} \right)^3 e^{-u} \frac{du}{x} \\ &= \frac{1}{x^4} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3.22 a) Soit $\lambda \in]0; +\infty[$.

L'application $\frac{f}{\lambda + g}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

On a : $0 \leq \frac{f}{\lambda+g} \leq \frac{1}{\lambda} f$. Puisque f est intégrable sur $[0; +\infty[$, d'après le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , $\frac{f}{\lambda+g}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On conclut que, pour tout $\lambda \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\phi(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{f}{\lambda+g}$ existe.

b) On suppose, de plus, que g est bornée.

On a, pour tout $\lambda \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left| \phi(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{f}{\lambda+g} - \frac{f}{\lambda} \right) \right| \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{fg}{\lambda(\lambda+g)} \leq \frac{\|g\|_\infty}{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{f}{\lambda+g} \\ &= \frac{\|g\|_\infty}{\lambda} \phi(\lambda) = o_{\lambda \rightarrow +\infty}(\phi(\lambda)). \end{aligned}$$

On conclut : $\phi(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f$.

3.23 Soit $x \in [1; +\infty[$.

L'intégrale $I(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt$ existe comme intégrale de fonction continue sur un segment.

Considérons $J(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \cos t dt$, qui ressemble à $I(x)$.

• On a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq I(x) - J(x) \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} (1 - \cos t) dt = \underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} 2 \sin^2 \frac{t}{2} dt}_{\text{notée } K(x)}. \end{aligned}$$

On sait : $\forall x \in [0; \pi/2]$, $\frac{2}{\pi} u \leq \sin u \leq u$.

D'une part :

$$K(x) \leq \int_0^{\pi/2} e^{-x \frac{2t}{\pi}} 2 \left(\frac{t}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2x}{\pi} t} t^2 dt.$$

Par le changement de variable $u = \frac{2x}{\pi} t$:

$$K(x) \leq \frac{1}{2} \int_0^x e^{-u} \left(\frac{\pi u}{2x} \right)^2 \frac{\pi}{2x} du = \frac{\pi^3}{16x^3} \int_0^x u^2 e^{-u} du.$$

D'après le cours sur la fonction Γ d'Euler par exemple, l'application $u \mapsto u^2 e^{-u}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, et :

$$0 \leq \int_0^x u^2 e^{-u} du \leq \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \Gamma(3) = 2! = 2.$$

Il en résulte : $K(x) \leq \frac{\pi^3}{8x^3}$,

donc : $I(x) - J(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right)$.

• On calcule $J(x)$, par le changement de variable $v = \sin t$:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \cos t dt = \int_0^1 e^{-xv} dv \\ &= \left[\frac{e^{-xv}}{-x} \right]_0^1 = \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \frac{1 - e^{-x}}{x}, \end{aligned}$$

d'où : $J(x) = \frac{1}{x} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$.

Enfin :

$$\begin{aligned} I(x) &= (I(x) - J(x)) + J(x) \\ &= \left(\frac{1}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \right) + O \left(\frac{1}{x^3} \right) = \frac{1}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

On conclut : $\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

3.24 Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$ existe

comme intégrale d'une application continue sur un segment.

On va se ramener au voisinage de 0, par un changement de variable, de façon à pouvoir utiliser les $DL(0)$ usuels.

Soit $x \in [1; +\infty[$.

On a, par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$:

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}} = \int_{\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{x}} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\sqrt{\frac{1}{u^4} + 1}} = \int_{\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^4}}.$$

Considérons les applications

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1 + u^4}},$$

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto F(y) = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{1 + u^4}}.$$

Puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$ et que F est une primitive de φ sur $\mathbb{R}$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F' = \varphi$.

Par opérations, φ admet un $DL_{11}(0)$:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^4}} = (1 + u^4)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) u^4 + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) u^8 + o(u^{11}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} u^4 + \frac{3}{8} u^8 + o(u^{11}). \end{aligned}$$

Par primitivation, F admet donc un $DL_{12}(0)$:

$$\begin{aligned} F(y) &= F(0) + y - \frac{1}{2} \frac{y^5}{5} + \frac{3}{8} \frac{y^9}{9} + o(y^{12}) \\ &= y - \frac{1}{10} y^5 + \frac{1}{24} y^9 + o(y^{12}). \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} f(x) &= F\left(\frac{1}{x}\right) - F\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{10} \frac{1}{x^5} + \frac{1}{24} \frac{1}{x^9} + o\left(\frac{1}{x^{12}}\right) \right] - \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{10} \frac{1}{x^{10}} + o\left(\frac{1}{x^{12}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{10x^5} + \frac{1}{24x^9} + \frac{1}{10x^{10}} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^{12}}\right). \end{aligned}$$

3.25

• On a :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; \pi/2], & x + \cos x \geq x \geq 0 \\ \forall x \in [\pi/2; +\infty[, & x + \cos x \geq x - 1 > 0, \end{cases}$$

donc l'application $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}} (\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x})$,
est continue sur $]0; +\infty[$.

• Étude en 0 :

$$\text{On a : } \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{et } \sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \text{ donc : } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Il en résulte que f est intégrable sur $]0; 1]$ (faux problème).

• Étude en $+\infty$:

En utilisant une expression conjuguée et des développements asymptotiques :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} (\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{\cos x}{\sqrt{x + \cos x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sin x \cos x}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos x}{x}} + 1} \\ &= \frac{\sin x \cos x}{x} \frac{1}{2 + O\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{\sin x \cos x}{2x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{\sin x \cos x}{2x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin x \cos x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

D'après un exemple du cours, l'application $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est d'intégrale convergente sur $[1; +\infty[$, donc, par le changement de variable $t = 2x$, l'application $x \mapsto \frac{\sin 2x}{2x}$ est d'intégrale convergente sur $[1/2; +\infty[$.

D'autre part, il existe $a > 0$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \geq a, \quad \left| O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq \frac{C}{x^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , $x \mapsto \left| O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right|$, est intégrable sur $[a; +\infty[$, donc $x \mapsto O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ l'est aussi.

Il en résulte que $x \mapsto O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est d'intégrale convergente sur $[1; +\infty[$.

Par combinaison linéaire, on conclut que f est d'intégrale convergente sur $[1; +\infty[$.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} (\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}) dx$ converge.

3.26

• Considérons l'application

$$u : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \sqrt{x} \sin x.$$

Si $x \in]0; \pi]$, alors $\sin x \geq 0$, donc $u(x) \geq x > 0$.

Si $x \in [\pi; +\infty[$, alors :

$$u(x) \geq x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) > 0.$$

Ceci montre : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad u(x) > 0$,

donc l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x + \sqrt{x} \sin x}}$$

est continue sur $]0; +\infty[$.

• Étude en $+\infty$:

On a, en utilisant des développements asymptotiques :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x + \sqrt{x} \sin x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{x} + o \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right).$$

* D'après un exemple du cours (cf. aussi exercice 3.46), $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

* Comme $\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$, que

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge et que, d'après un exemple classique,

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ converge, par opération (raisonnement par

l'absurde, par exemple), $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ diverge.

* Il existe $a \in [1; +\infty[$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in [a; +\infty[, \left| o \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right) \right| \leq \frac{C}{x^{3/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($3/2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 ,

$x \mapsto \left| o \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right) \right|$ est intégrable sur $[a; +\infty[$, donc

$\int_1^{+\infty} o \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right) dx$ converge absolument, donc converge.

Par addition de deux convergentes et d'une divergente, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Il n'est pas alors utile d'étudier $\int_{\rightarrow 0}^1 f(x) dx$.

On conclut que l'intégrale $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sqrt{x} \sin x} dx$ diverge.

3.27 1) Existence :

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

• L'application $f : x \mapsto e^{-x^2} Q(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• On a : $x^2 f(x) = (x^2 Q(x)) e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$,

par prépondérance de l'exponentielle sur les polynômes.

On a donc, pour $|x|$ assez grand : $|x^2 f(x)| \leq 1$, d'où :

$0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$. D'après l'exemple de Riemann en $\pm\infty$

($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , $|f|$ est intégrable sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ceci montre que, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} Q(x) dx \text{ existe.}$$

En particulier, l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P(x+a) dx$ existe.

2) Expression de I :

En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes et en notant $N = \deg(P)$, on a :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left(\sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k \right) dx$$

$$= \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k dx}_{\text{notée } I_k}$$

où les intégrales I_k , existent, d'après 1).

Si k est impair, comme $x \mapsto e^{-x^2} x^k$ est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, on a $I_k = 0$.

Supposons k pair, $k = 2p$, $p \in \mathbb{N}$.

Alors, comme $x \mapsto e^{-x^2} x^k$ est paire et intégrable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$I_k = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2p} dx.$$

Cette dernière intégrale a été calculée dans l'exercice 3.4 (par intégration par parties et relation de récurrence), donc :

$$I_k = \frac{(2p+1)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Finalement : } I = \sqrt{\pi} \sum_{p=0}^{E(\frac{N}{2})} \frac{2p+1}{2^{2p} p!} P^{(2p)}(a),$$

où $N = \deg(P)$.

3.28 Nous allons essayer d'appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

Considérons l'application :

$$F : [0; +\infty[\times]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{1-t^x}{1-t}.$$

• F est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t

• On a, pour tout $(x, t) \in [0; 1/2] \times]0; 1[$:

$$|F(x, t)| = \frac{1-t^x}{1-t} \leq \frac{1-t^{1/2}}{1-t} = \frac{1}{1+t^{1/2}} \leq 1,$$

et l'application constante 1 est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur l'intervalle borné $]0; 1[$.

Ainsi, F vérifie HD sur $[0; 1/2] \times]0; 1[$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, avec HD, l'application

$$f : [0; 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$$

est continue sur $[0; 1/2]$.

En particulier : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) = 0$.

On conclut : $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt = 0$.

3.29 a) Soit $x \in]0; +\infty[$.

• L'application $g : t \mapsto \frac{t^a}{e^t - 1}$ est continue sur $[x; +\infty[$, ≥ 0 .

• Étude en $+\infty$:

On a : $t^2 g(t) = \frac{t^{a+2}}{e^t - 1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$,

donc, pour t assez grand : $t^2 g(t) \leq 1$,

puis : $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{t^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , g est intégrable sur $[x; +\infty[$.

On conclut que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^a}{e^t - 1} dt$ existe.

b) • Puisque $g : t \mapsto \frac{t^a}{e^t - 1}$ est continue sur $]0; +\infty[$, l'application $G : x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, donc a fortiori G est continue sur $]0; +\infty[$.

Enfin, comme, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f(x) = \int_x^1 g(t) dt + \int_1^{+\infty} g(t) dt = -G(x) + \int_1^{+\infty} g(t) dt,$$

f est continue sur $]0; +\infty[$.

• Étude en 0 :

On a : $g(t) = \frac{t^a}{e^t - 1} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t^a}{t} = t^{a-1}$.

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($a - 1 > -1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , g est intégrable sur $]0; 1]$.

Il en résulte : $\int_x^1 g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 g(t) dt$,

puis : $f(x) = \int_x^{+\infty} g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} g(t) dt$.

Ainsi, f admet une limite finie en 0, donc f est intégrable sur $]0; 1]$ (faux problème).

• Étude en $+\infty$:

On a : $e^{t/2} \frac{t^a}{e^t - 1} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^a}{e^{t/2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$,

donc, pour t assez grand : $e^{t/2} \frac{t^a}{e^t - 1} \leq 1$,

puis : $\frac{t^a}{e^t - 1} \leq e^{-t/2}$.

On déduit, pour x assez grand :

$$0 \leq f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^a}{e^t - 1} dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t/2} dt = \left[-2e^{-t/2} \right]_x^{+\infty} = 2e^{-x/2}.$$

Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

3.30 a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

• L'application $g_x : t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\sin t}$ est continue sur $]0; \pi/2]$.

• On a : $g_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{xt}{t} = x$, d'où : $g_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$,

donc g_x est intégrable sur $]0; \pi/2]$ (faux problème).

On conclut que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Nous allons essayer d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Notons $F : \mathbb{R} \times]0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{\sin t}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; \pi/2]$ d'après a).

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{t \cos(xt)}{\sin t}$ existe sur $\mathbb{R} \times]0; \pi/2]$, est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• Rappelons : $\begin{cases} \forall u \in \mathbb{R}, & |\sin u| \leq |u| \\ \forall u \in [0; \pi/2], & \sin u \geq \frac{2u}{\pi}. \end{cases}$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ fixé.

On a donc, pour tout $(x, t) \in [-a; a] \times]0; \pi/2]$:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{|\sin(xt)|}{\sin t} \leq \frac{|xt|}{\frac{2t}{\pi}} = \frac{\pi}{2} |x| \leq \frac{\pi}{2} a$$

et l'application constante $\frac{\pi}{2} a$ est intégrable sur l'intervalle borné $]0; \pi/2]$.

Ainsi, $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HDL.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{t \cos(xt)}{\sin t} dt.$$

c) Comme plus haut, on a :

$$|f(x)| = \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(xt)}{\sin t} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(xt)|}{\sin t} dt \\ \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|xt|}{\frac{2t}{\pi}} dt = \frac{\pi|x|}{2} \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi^2|x|}{4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

donc : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

3.31 Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \int_0^{\pi/2} t^x \cos t \, dt$ existe

comme intégrale d'une application continue (continue par morceaux si $x = 0$) sur un segment.

$$1) \text{ On a : } f(0) = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1 > \frac{3}{4}$$

et

$$f(1) = \int_0^{\pi/2} t \cos t \, dt \underset{\text{ipp}}{=} [t \sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt \\ = \frac{\pi}{2} + [\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 < \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $\frac{3}{4}$, est compris entre deux valeurs de f .

2) Montrons que f est continue sur $[0; +\infty[$, en essayant d'utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale.

Notons $F : [0; +\infty[\times [0; \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \longmapsto t^x \cos t$.

• F est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• Soit $a \in [0; +\infty[$.

On a, pour tout $(x, t) \in [0; a] \times [0; \pi/2]$:

$$|F(x, t)| = |t^x \cos t| = t^x \cos t \leq t^x \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^a$$

et l'application constante $\left(\frac{\pi}{2}\right)^a$ est intégrable sur le segment $[0; \pi/2]$.

Ainsi, F vérifie HDL.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, on déduit que f est continue sur $[0; +\infty[$.

3) Puisque f est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $f(0) > \frac{3}{4} > f(1)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0; 1[$ tel que : $f(c) = \frac{3}{4}$.

3.32 1) Ensemble de définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

L'application $g_x : t \longmapsto \text{Arctan}(x \tan t)$ est continue sur $[0; \pi/2[$.

• Étude en $\pi/2$:

$$\text{On a : } g_x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pi/2]{} \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donc g_x est intégrable sur $[0; \pi/2[$ (faux problème).

On conclut : $\text{Déf}(f) = \mathbb{R}$.

2) Parité :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire.

On peut donc se limiter, dans la suite de l'étude, à $x \geq 0$.

3) Continuité :

Notons

$$F : [0; +\infty[\times [0; \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}, (x, t) \longmapsto \text{Arctan}(x \tan t).$$

• F est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• On a, pour tout $(x, t) \in [0; +\infty[\times [0; \pi/2[$:

$$|F(x, t)| = |\text{Arctan}(x \tan t)| \leq \frac{\pi}{2},$$

et l'application constante $\pi/2$ est intégrable sur l'intervalle borné $[0; \pi/2[$.

Ainsi, F vérifie HD.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, f est continue sur $[0; +\infty[$.

4) Classe C^1 , variations :

Gardons les notations de 3).

• Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; \pi/2[$ d'après 1).

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \longmapsto \frac{\tan t}{1 + x^2 \tan^2 t}$ existe sur $[0; +\infty[\times [0; \pi/2[$, est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

On a, pour tout $(x, t) \in [a; b] \times [0; \pi/2[$:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{\tan t}{1 + x^2 \tan^2 t} \leq \underbrace{\frac{\tan t}{1 + a^2 \tan^2 t}}_{\text{notée } \varphi_a(t)}.$$

L'application φ_a est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[0; \pi/2[$ car

$$\varphi_a(t) \underset{t \rightarrow \pi/2}{\sim} \frac{\tan t}{a^2 \tan^2 t} = \frac{1}{a^2 \tan t} \xrightarrow[t \rightarrow \pi/2]{} 0$$

(faux problème).

Ainsi, $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HDL sur $]0; +\infty[\times [0; \pi/2[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, avec HDL, f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan t}{1+x^2 \tan^2 t} dt.$$

Puisque l'application $\frac{\tan t}{1+x^2 \tan^2 t}$ est continue sur $[0; \pi/2[$, ≥ 0 , et n'est pas l'application nulle, on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0.$$

Comme, de plus, f est continue en 0, on conclut que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

5) Classe C^2 , convexité :

Par la même démarche qu'en 4), on montre que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{2x \tan^3 t}{(1+x^2 \tan^2 t)^2} dt \leq 0,$$

donc f est concave sur $]0; +\infty[$.

6) Étude en 0 :

1^{re} méthode :

On a, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan t}{1+x^2 \tan^2 t} dt \geq \int_0^{\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}} \frac{\tan t}{1+x^2 \tan^2 t} dt \\ &\geq \int_0^{\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}} \frac{\tan t}{2} dt = -\frac{1}{2} [\ln \cos t]_0^{\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \cos \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty, \end{aligned}$$

donc : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

• 2^e méthode :

Nous allons exprimer $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$, sans symbole d'intégrale, ce qui permettra d'étudier $f'(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Soit $x \in]0; +\infty[$.

On a, par le changement de variable $u = \tan t$:

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan t}{1+x^2 \tan^2 t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+x^2 u^2} \frac{du}{1+u^2},$$

puis, par le changement de variable $v = u^2$, $dv = 2u du$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+x^2 v)(1+v)}.$$

Pour $x \neq 1$, on effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+x^2 \mathbf{X})(1+\mathbf{X})} = \frac{a}{1+x^2 \mathbf{X}} + \frac{b}{1+\mathbf{X}}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

En multipliant par $1+x^2 \mathbf{X}$, puis en remplaçant $\mathbf{X}$ par $-\frac{1}{x^2}$,

$$\text{on obtient : } a = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

En multipliant par $1+\mathbf{X}$, puis en remplaçant $\mathbf{X}$ par -1 , on obtient : $b = \frac{1}{1-x^2}$.

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2(x^2-1)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2 v} - \frac{1}{1+v} \right) dv \\ &= \frac{1}{2(x^2-1)} \left[\ln \frac{1+x^2 v}{1+v} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2(x^2-1)} \ln x^2 = \frac{\ln x}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

La courbe représentative de f admet Oy pour demi-tangente en O .

7) Valeurs remarquables :

On a :

$$f(1) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Arctan}(\tan t) dt = \int_0^{\pi/2} t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan t}{1+\tan^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

8) Étude en $+\infty$:

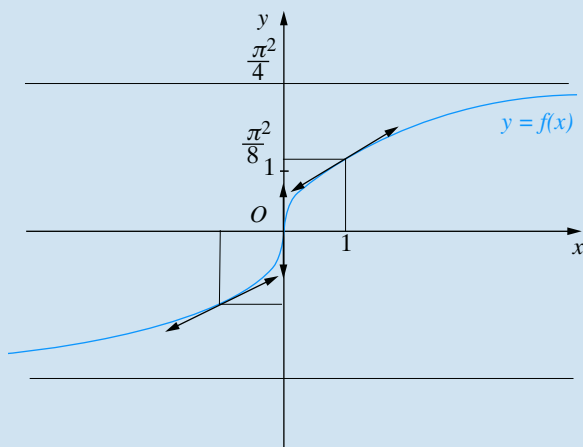
Transformons l'écriture de $f(x)$, pour $x \in]0; +\infty[$ fixé, par le changement de variable $u = \pi/2 - t$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{Arctan}(x \tan t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\tan u} du \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{\tan u}{x} \right) du \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \tan u \right) du = \frac{\pi^2}{4} - f\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Comme $f(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0$, on déduit : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{4}$.

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y = \frac{\pi^2}{4}$.

9) Tracé de la courbe représentative de f :



3.33 a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

• L'application $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x(1 + \ln t)}$ est continue sur $]1; +\infty[$, et $g_x \geq 0$.

• On a : $g_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^x \ln t}$.

D'après l'exemple de Bertrand en $+\infty$, l'application $h_x : t \mapsto \frac{1}{t^x \ln t}$ est intégrable sur $[2; +\infty[$ si et seulement si $x > 1$. Redémontrons-le.

* Si $x > 1$, alors, comme

$$t^{\frac{x+1}{2}} h_x(t) = \frac{1}{t^{\frac{x-1}{2}} \ln t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

on a, pour t assez grand, $t^{\frac{x+1}{2}} h_x(t) \leq 1$,

$$\text{donc : } 0 \leq h_x(t) \leq \frac{1}{t^{\frac{x+1}{2}}}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($\frac{x+1}{2} > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , h_x est intégrable sur $[2; +\infty[$.

* Si $x < 1$, alors, comme $t h_x(t) = \frac{t^{1-x}}{\ln t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$,

on a, pour t assez grand, $t h_x(t) \geq 1$, donc $h_x(t) \geq \frac{1}{t} \geq 0$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème de minoration pour des fonctions ≥ 0 , h_x n'est pas intégrable sur $[2; +\infty[$.

* Si $x = 1$, comme

$$\int_2^X \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln \ln t]_2^X = \ln \ln X - \ln \ln 2 \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty,$$

h_x n'est pas intégrable sur $[2; +\infty[$.

On déduit que h_x est intégrable sur $[2; +\infty[$ si et seulement si $x > 1$. Par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , g_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $x > 1$.

On conclut que $f(x)$ existe si et seulement si $x \in]1; +\infty[$, ou encore : $\text{Déf}(f) =]1; +\infty[$.

b) Nous allons essayer d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Notons

$$F :]1; +\infty[\times]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{1}{t^x(1 + \ln t)}.$$

• Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, d'après a).

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{(-\ln t)t^{-x}}{1 + \ln t}$ existe sur $]1; +\infty[\times]1; +\infty[$, est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• Soit $a \in]1; +\infty[$. On a :

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]1; +\infty[,$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{\ln t}{1 + \ln t} t^{-x} \leq t^{-x} \leq t^{-a}$$

et $t \mapsto t^{-a}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[1; +\infty[$, car $a > 1$.

Ainsi, $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HDL.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, f est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$ et, pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$f'(x) = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + \ln t} t^{-x} dt.$$

Puisque l'application $t \mapsto \frac{\ln t}{1 + \ln t} t^{-x}$ est continue sur $[1; +\infty[$, ≥ 0 , et n'est pas l'application nulle, on a :

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0,$$

donc f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

De même, on montre, par le même raisonnement, que f est de classe C^2 sur $]1; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]1; +\infty[, f''(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1 + \ln t} t^{-x} dt.$$

De plus : $\forall x \in]1; +\infty[, f''(x) \geq 0$,

donc f est convexe.

c) • Étude en 1 :

On a, pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1 + \ln t)} dt \geq \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^x(1 + \ln t)} dt$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^x 2 \ln t} dt \stackrel{u=\ln t}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{xu} 2u} e^u du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-1)u}}{u} du \stackrel{v=(x-1)u}{=} \frac{1}{2} \int_{x-1}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv. \end{aligned}$$

L'application $h : v \mapsto \frac{e^{-v}}{v}$ est continue sur $]0; +\infty[$, ≥ 0 , intégrable sur $[1; +\infty[$, car $0 \leq h(v) \leq e^{-v}$, et non intégrable sur $]0; 1]$, car $h(v) \sim \frac{1}{v}$.

Il en résulte : $\int_{x-1}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$,

puis : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$.

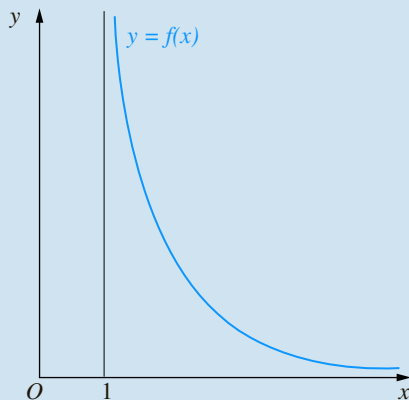
• *Étude en $+\infty$:*

On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x (1 + \ln t)} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \\ &= \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

d'où : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

d)



e) Essayons de nous ramener à la recherche d'une limite.

Soit $x \in]1; +\infty[$. On a, par le changement de variable

$$u = t^x, \quad t = u^{\frac{1}{x}}, \quad dt = \frac{1}{x} u^{\frac{1}{x}-1} du :$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x (1 + \ln t)} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{x} u^{\frac{1}{x}-1}}{u \left(1 + \frac{1}{x} \ln u\right)} du = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{x}-2}}{1 + \frac{1}{x} \ln u} du. \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$H : [0; 1] \times [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, u) \mapsto \frac{u^{X-2}}{1 + X \ln u}.$$

• H est continue par rapport à X et continue par morceaux (car continue) par rapport à u .

• Soit $a \in [0; 1[$.

On a, pour tout $(X, u) \in [0; a] \times (1; +\infty[$:

$$|H(X, u)| = \frac{u^{X-2}}{1 + X \ln u} \leq u^{X-2} \leq u^{a-2},$$

et $u \mapsto u^{a-2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, H vérifie HDL.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, l'ap-

plication $h : X \mapsto \int_1^{+\infty} H(X, u) du$ est continue sur $[0; 1[$.

En particulier :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{u^{X-2}}{1 + X \ln u} du &= h(X) \\ \xrightarrow{X \rightarrow 0} h(0) &= \int_1^{+\infty} u^{-2} du = [-u^{-1}]_1^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

Il en résulte : $\int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{x}-2}}{1 + \frac{1}{x} \ln u} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$,

et on conclut : $f(x) \sim \frac{1}{x}$.

3.34 a) 1) Nous allons essayer d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Notons

$$G : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, t) \mapsto f(t) e^{-pt}.$$

• Pour tout $p \in \mathbb{R}$, $G(p, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ par hypothèse.

• Pour tout $k \in \{1, 2\}$, $\frac{\partial^k G}{\partial p^k} : (p, t) \mapsto (-t)^k f(t) e^{-pt}$ est définie sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$, continue par rapport à p , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• On a, pour tout $k \in \{1, 2\}$ et tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall (p, t) \in [a; +\infty[\times [0; +\infty[, \quad \left| \frac{\partial^k G}{\partial p^k}(p, t) \right| &= \left| (-t)^k f(t) e^{-pt} \right| = t^k |f(t)| e^{-pt} \leq t^k |f(t)| e^{-at} \\ &= \underbrace{t^k e^{-t} (|f(t)| e^{-(a-1)t})}_{\text{notée } \varphi_{k,a}(t)}. \end{aligned}$$

L'application $h : t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, par prépondérance de l'exponentielle sur les polynômes, donc, classiquement, h est bornée sur $[0; +\infty[$.

D'autre part, par hypothèse, $t \mapsto f(t) e^{-(a-1)t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Il en résulte que $\varphi_{k,a}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, $\frac{\partial^k G}{\partial p^k}$ vérifie HDL.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on conclut que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $p \in \mathbb{R}$:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} -t f(t) e^{-pt} dt,$$

$$F''(p) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt.$$

2) On a donc, pour tout $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (F'(p))^2 &= \left(\int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} t |f(t)| e^{-pt} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \underbrace{(\sqrt{f(t)} e^{-\frac{pt}{2}})}_{\text{notée } u(t)} \underbrace{(t \sqrt{f(t)} e^{-\frac{pt}{2}})}_{\text{notée } v(t)} dt \right)^2. \end{aligned}$$

Les applications u et v sont de carrés intégrables sur $[0; +\infty[$, d'où, d'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\begin{aligned} (F'(p))^2 &\leq \left(\int_0^{+\infty} (u(t))^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} (v(t))^2 dt \right) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt \right) = F(p) F''(p). \end{aligned}$$

b) On suppose, de plus, que $f \neq 0$. Puisque, pour tout $p \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t) e^{-pt}$ est continue, ≥ 0 et n'est pas l'application nulle, on a :

$$\forall p \in \mathbb{R}, F(p) > 0.$$

Alors, $\ln \circ F$, est de classe C^2 et :

$$(\ln \circ F)' = \frac{F'}{F}, \quad (\ln \circ F)'' = \frac{F'' F - F'^2}{F^2} \geq 0,$$

donc $\ln \circ F$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

3.35 1) Existence :

L'application $f : (x, y) \mapsto e^{-px-xy} \sin(x+y)$ est continue sur $[0; +\infty]^2$ et :

$$\forall (x, y) \in [0; +\infty]^2, |f(x, y)| \leq e^{-px} e^{-qy}.$$

L'application $g : (x, y) \mapsto e^{-px} e^{-qy}$ est continue sur $[0; +\infty]^2$ et $g \geq 0$. On a, pour tout $(a, b) \in [0; +\infty]^2$:

$$\begin{aligned} \iint_{[0; a] \times [0; b]} g(x, y) dx dy &= \left(\int_0^a e^{-px} dx \right) \left(\int_0^b e^{-qy} dy \right) \\ &= \left[\frac{e^{-px}}{-p} \right]_0^a \left[\frac{e^{-qy}}{-q} \right]_0^b = \frac{1 - e^{-pa}}{p} \frac{1 - e^{-qb}}{q} \leq \frac{1}{pq}. \end{aligned}$$

Il en résulte, par définition, que g est intégrable sur $[0; +\infty]^2$. Ensuite, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[0; +\infty]^2$.

On conclut que l'intégrale proposée $F(p, q)$ existe.

2) Calcul :

En développant $\sin(x+y)$ et en faisant apparaître des intégrales doubles de fonctions intégrables (pour la même raison qu'en 1), on a :

$$\begin{aligned} F(p, q) &= \iint_{[0; +\infty]^2} e^{-px-xy} (\sin x \cos y + \cos x \sin y) dx dy \\ &= \iint_{[0; +\infty]^2} (e^{-px} \sin x) (e^{-qy} \cos y) dx dy \\ &\quad + \iint_{[0; +\infty]^2} (e^{-px} \cos x) (e^{-qy} \sin y) dx dy \\ &= \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x dx \right)}_{\text{notée } S(p)} \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} e^{-qy} \cos y dy \right)}_{\text{notée } C(q)} \\ &\quad + S(q) C(p). \end{aligned}$$

On a, en passant par les nombres complexes :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-px} e^{ix} dx &= \int_0^{+\infty} e^{(-p+i)x} dx \\ &= \left[\frac{e^{(-p+i)x}}{-p+i} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-i} = \frac{p+i}{p^2+1}. \end{aligned}$$

D'où, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$C(p) = \frac{p}{p^2+1} \quad \text{et} \quad S(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

et de même pour q .

D'où :

$$\begin{aligned} F(p, q) &= \frac{1}{p^2+1} \frac{q}{q^2+1} + \frac{p}{p^2+1} \frac{1}{q^2+1} \\ &= \frac{p+q}{(p^2+1)(q^2+1)}. \end{aligned}$$

Remarque : Les calculs de $C(p)$ et $S(p)$ sont les calculs des transformées de Laplace de $\cos$ et $\sin$.

3.36 a) Étude de I et J :

1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \ln \sin x$ est continue sur $]0; \pi/2]$ et $f \leq 0$. On a, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} -f(x) &= -\ln \sin x = -\ln(x + o(x)) \\ &= -\ln(x(1 + o(1))) = -\ln x + \ln(1 + o(1)) \\ &= -\ln x + o(1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x. \end{aligned}$$

D'après le cours, $x \mapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0; 1]$.
Par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 ,
 $-f$ est intégrable sur $]0; 1]$, donc sur $]0; \pi/2]$, puis f l'est aussi.

Ceci montre que l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ existe.

• Par le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, puisque I existe,
 J existe aussi et :

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx = \int_{\pi/2}^0 \ln \sin t \, (-dt) = I.$$

2) Calcul :

On a :

$$2I = I + J$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} (\ln \sin x + \ln \cos x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln (\sin x \cos x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx}_{\text{notée } I_1}. \end{aligned}$$

On a, par le changement de variable $u = 2x$, puis par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \, du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin u \, du \right) \\ v &= \pi - u \quad \frac{1}{2} \left(I + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \sin v \, (-dv) \right) = \frac{1}{2} (I + I) = I. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $2I = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + I$, d'où :

$$I = J = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

b) Étude de K :

1) Existence :

• L'application $g : x \mapsto \frac{x}{\tan x}$ est continue sur $]0; \pi/2[$, et $g \geq 0$.

• On a $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 0$, donc g est intégrable sur $]0; \pi/2[$ (faux problèmes).

Ceci montre que l'intégrale $K = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \, dx$ existe.

2) Calcul :

Soit $\varepsilon \in]0; \pi/2[$ fixé. On a, par intégration par parties pour des applications de classe C^1 :

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \, dx = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$\begin{aligned} &= [x \ln \sin x]_{\varepsilon}^{\pi/2} - \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln \sin x \, dx \\ &= -\varepsilon \ln \sin \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln \sin x \, dx. \end{aligned}$$

On a : $\varepsilon \ln \sin \varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sin \varepsilon \ln \sin \varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$,

d'où, en passant à la limite :

$$K = - \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = -I = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

c) Étude de L :

On a, pour tout $x \in]0; \pi[$:

$$\frac{x \sin x}{1 - \cos x} = x \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{x}{\tan \frac{x}{2}}.$$

Comme K existe, par le changement de variable $t = \frac{x}{2}$, il en résulte que L existe et que :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \, dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}} \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2t}{\tan t} 2 \, dt = 4K = 2\pi \ln 2. \end{aligned}$$

d) Étude de M :

Partant de K , par le changement de variable $u = \tan x$:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } u}{u} \frac{du}{1+u^2}.$$

Ceci montre que l'intégrale proposée M existe et que :

$$M = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } x}{x(1+x^2)} \, dx = K = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

3.37 L'application $x \mapsto e^{-x} Q(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} (e^{-x} Q(x)) = e^{-x} (-Q(x) + Q'(x)) = -e^{-x} P(x).$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} Q(x) = - \int_0^x e^{-t} P(t) \, dt + C.$$

Comme $t \mapsto e^{-t} P(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$ et que $e^{-t} P(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$, l'application $t \mapsto e^{-t} P(t)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$. On déduit, en faisant tendre x vers $+\infty$

dans le résultat précédent : $C = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) \, dt$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) dt.$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geq 0,$

il est alors clair que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \geq 0.$

3.38 1) Existence :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• L'application $f_n : x \mapsto \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$ est continue sur $[1; +\infty[$, et $f_n \geq 0$.

• On a : $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{n-1}}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^2}$. D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f_n est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}} dx$ existe.

2) Calcul :

• 1^{re} méthode :

Essayons d'obtenir une relation de récurrence, à l'aide d'une intégration par parties.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. Soit $X \in [1; +\infty[$.

On a, par intégration par parties pour des applications de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}} dx &= \int_1^X x^{n-1} (1+x)^{-n-1} dx \\ &= \left[x^{n-1} \frac{(1+x)^{-n}}{-n} \right]_1^X - \int_1^X (n-1) x^{n-2} \frac{(1+x)^{-n}}{-n} dx \\ &= -\frac{X^{n-1}}{n(1+X)^n} + \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} \int_1^X \frac{x^{n-2}}{(1+x)^n} dx. \end{aligned}$$

On obtient, en faisant $X \rightarrow +\infty$:

$$I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1},$$

ou encore : $nI_n = \frac{1}{2^n} + (n-1)I_{n-1}$.

En notant $J_n = nI_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$\forall n \geq 2, \quad J_n = \frac{1}{2^n} + J_{n-1}.$$

d'où, en réitérant :

$$J_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^2} + J_1.$$

$$\text{Et : } J_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$J_n = \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = -1 + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k = -1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= -1 + 2 - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$

• 2^e méthode :

Par le changement de variable $t = x + 1$, puis développement du binôme de Newton, en amenant des intégrales de fonctions intégrables par l'exemple de Riemann en $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}} dx \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{(t-1)^{n-1}}{t^{n+1}} dt \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k (-1)^{n-1-k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} \int_2^{+\infty} t^{k-n-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} \left[\frac{t^{k-n}}{k-n} \right]_2^{+\infty} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} \frac{1}{(n-k)2^{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-k} \\ &= -\frac{1}{n} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right)^n - 1 \right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

3.39 Pour évaluer $\text{Min} \left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2} \right)$, il nous faut comparer

$x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}$, pour x fixé dans $]0; +\infty[$ et t variant ensuite dans $]0; +\infty[$.

Soit $x \in]0; +\infty[$. Notons $g_x : t \mapsto \text{Min} \left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2} \right)$.

• Si $x = 0$, alors : $\forall t \in]0; +\infty[$, $g_x(t) = g_0(t) = 0$, donc g_x est intégrable sur $]0; +\infty[$, et $f(x) = 0$.

• Si $0 < x \leq 1$, alors :
$$g_x(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } \frac{1}{\sqrt{x}} \leq t. \end{cases}$$

L'application g_x est donc continue sur $]0; +\infty[$, et, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$), g_x est intégrable sur $[1; +\infty[$, puis sur $]0; +\infty[$. On a :

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} x \, dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt = x \frac{1}{\sqrt{x}} + \left[-\frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} = 2\sqrt{x}.$$

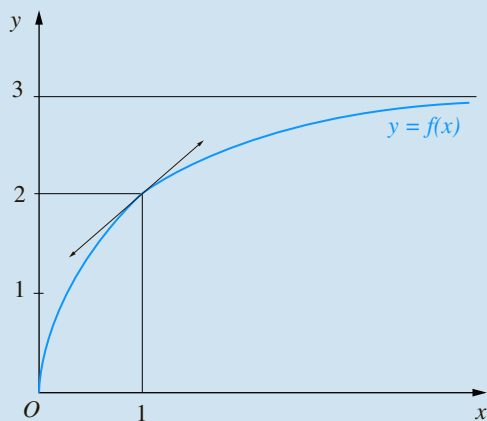
• Si $1 \leq x$, alors :
$$g_x(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } \frac{1}{x^2} \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent, g_x est intégrable sur $]0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{1}{x^2}} x \, dt + \int_{\frac{1}{x^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt \\ &= x \frac{1}{x^2} + [2\sqrt{t}]_{\frac{1}{x^2}}^1 + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{x} + \left(2 - \frac{2}{x} \right) + 1 = 3 - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On conclut :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$



Une étude immédiate de f (études en 0 et en 1) montre que f est de classe C^0 sur $[0; +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.

3.40 1) Si f est intégrable sur $[0; +\infty[$, alors, comme :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad \begin{cases} g(x) = f(x)|\sin x| \leq f(x) \\ h(x) = f(x)|\cos x| \leq f(x), \end{cases}$$

d'après le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , g et h sont intégrables sur $[0; +\infty[$.

2) Supposons g intégrable sur $[0; +\infty[$.

Comme :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \sin^2 x \leq f(x)|\sin x| = g(x),$$

par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , l'application $s : x \mapsto f(x) \sin^2 x$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

D'autre part, puisque f est décroissante :

$$\begin{aligned} \forall x \in [\pi/2; +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \cos^2 x &= f(x) \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \\ &\leq f \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = s \left(x - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Comme s est intégrable sur $[0; +\infty[$, par changement de variable affine, $x \mapsto s \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$ est intégrable sur $[\pi/2; +\infty[$,

puis, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , l'application $c : x \mapsto f(x) \cos^2 x$ est intégrable sur $[\pi/2; +\infty[$, donc sur $[0; +\infty[$.

Puisque s et c sont intégrables sur $[0; +\infty[$, par addition, on déduit que f l'est aussi.

Ceci montre que, si g est intégrable sur $[0; +\infty[$, alors f l'est aussi.

3) Par la même méthode qu'en 2), on montre que, si h est intégrable sur $[0; +\infty[$, alors f l'est aussi.

On conclut que les intégrabilités de f, g, h sont deux à deux équivalentes.

3.41 On a : $|ff'| \leq \frac{1}{2}(f^2 + f'^2)$.

Puisque f^2 et f'^2 sont intégrables sur $[0; +\infty[$, par opérations, $\frac{1}{2}(f^2 + f'^2)$ l'est aussi, puis, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , $|ff'|$ l'est aussi, et donc ff' l'est aussi.

Mais, pour tout $X \in [0; +\infty[$:

$$\int_0^X ff' = \left[\frac{1}{2} f^2 \right]_0^X = \frac{1}{2} (f^2(X) - f^2(0)).$$

On a donc : $\frac{1}{2} (f^2(X) - f^2(0)) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} ff'$

et il en résulte que $f^2(X)$ admet une limite finie en $+\infty$, notée L .

Si $L \neq 0$, alors f^2 n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$, contradiction.

On a donc : $L = 0$.

On déduit : $f^2(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ et on conclut :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

3.42 a) Puisque f est décroissante et intégrable sur $]0; 1]$, on a :

$$\forall n \geq 2, \forall k \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f,$$

d'où, par sommation et relation de Chasles :

$$\forall n \geq 2, \int_{\frac{1}{n}}^1 f \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} f.$$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, et que f est intégrable sur $]0; 1]$, on déduit, par théorème d'encadrement :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f.$$

Enfin, comme $\frac{1}{n} f(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ on peut remplacer l'indice supérieur, $n-1$ par n , et conclure :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f.$$

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k+n)\sqrt{k(k+2n)}}.$$

$$\text{On a : } S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{n} + 1\right) \sqrt{\frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} + 2\right)}}.$$

Considérons l'application

$$f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{(x+1)\sqrt{x(x+2)}}.$$

Il est clair que f est continue par morceaux (car continue), décroissante, ≥ 0 . On a : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}x^{1/2}}$, donc, d'après l'exemple de Riemann en 0 ($1/2 < 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $]0; 1]$.

On peut donc appliquer a) à $f : S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 f}_{\text{notée } I}.$

Il reste à calculer I . Par le changement de variable

$$t = \frac{1}{x+1}, x = \frac{1}{t} - 1, dx = \frac{dt}{t^2} :$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x(x+2)}} dx \\ &= \int_1^{1/2} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} + 2\right)}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \\ &= \int_{1/2}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+2t}} = [\sqrt{1+2t}]_{1/2}^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k+n)\sqrt{k(k+2n)}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

3.43 1) Existence :

Soit $x \in]-\infty; 0[$.

L'application $f_x : t \longmapsto \frac{x-t}{e^x - e^t}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et $f_x \geq 0$.

$$\text{On a : } t^2 f_x(t) = \frac{t^2(x-t)}{e^x - e^t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^3 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, pour t assez grand : $t^2 f_x(t) \leq 1$,

$$\text{puis : } 0 \leq f_x(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f_x est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Ceci montre que, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, l'intégrale proposée $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x-t}{e^x - e^t} dt$ existe.

2) Limite :

Soit $x \in]-\infty; 0[$.

On a, par le changement de variable $u = t - x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{x-t}{e^x - e^t} dt \\ &= \int_{-x}^{+\infty} \frac{-u}{e^x - e^{x+u}} du = e^{-x} \int_{-x}^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du. \end{aligned}$$

Comme $x < 0$, on a $[-x; +\infty[\subset]0; +\infty[$, donc :

$$\begin{aligned} \int_{-x}^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du &\geq \int_{-x}^{+\infty} \frac{u}{e^u} du = \int_{-x}^{+\infty} u e^{-u} du \\ &= [(-u-1)e^{-u}]_{-x}^{+\infty} = (-x+1)e^x. \end{aligned}$$

d'où :

$$I(x) \geq e^{-x}((-x+1)e^x) = -x+1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty.$$

On conclut : $\int_0^{+\infty} \frac{x-t}{e^x - e^t} dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty.$

3.44 a) Soit $x \in]0; +\infty[$.

Soit $X \in [x; +\infty[$. On a, par intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \int_x^X e^{-t^2} dt &= \int_x^X \frac{1}{2t} 2t e^{-t^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2t} (-e^{-t^2}) \right]_x^X - \int_x^X -\frac{1}{2t^2} (-e^{-t^2}) dt \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-X^2}}{2X} - \frac{1}{2} \int_x^X \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Les applications $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2} e^{-t^2}$ sont continues sur $[x; +\infty[$ et négligeables devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, donc ces deux applications sont intégrables sur $[x; +\infty[$, d'où, en faisant $X \rightarrow +\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt.$$

On a : $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$

et $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,

donc : $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right).$

On conclut : $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_a^b e^{-nt^2} dt$ et $u_n = I_n^{\frac{1}{n}}$.

On a, par le changement de variable $u = \sqrt{n} t$:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2} du - \int_{b\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2} du \right). \end{aligned}$$

D'après a) :

$$\int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2} du \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-a^2 n}}{2a\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \int_{b\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2} du \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-b^2 n}}{2b\sqrt{n}}.$$

Comme $0 < a < b$, on a : $\frac{e^{-b^2 n}}{2b\sqrt{n}} = o\left(\frac{e^{-a^2 n}}{2a\sqrt{n}}\right),$

d'où : $I_n = \frac{e^{-a^2 n}}{2an} (1 + o(1)).$

On déduit :

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \frac{1}{n} \ln I_n = \frac{1}{n} \left(-a^2 n - \ln(2an) + \ln(1 + o(1)) \right) \\ &= -a^2 - \frac{\ln(2an)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -a^2, \end{aligned}$$

et on conclut : $\left(\int_a^b e^{-nt^2} dt \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-a^2}.$

3.45 Soit $x \in]0; 1]$ fixé.

On a, par le changement de variable $u = t + x$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt &= \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u} du = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du \\ &= e^{-x} \left(\int_x^{x+1} \frac{e^u - 1}{u} du + \int_x^{x+1} \frac{1}{u} du \right) \\ &= e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u - 1}{u} du + e^{-x} (\ln(x+1) - \ln x). \end{aligned}$$

L'application $f : u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ est continue sur $]0; 2]$, ≥ 0 , et $f(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$, donc f est intégrable sur $]0; 2]$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} f(t) dt &= \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(t) dt = I. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt \\ &= e^{-x} (I + o(1)) + e^{-x} (\ln(x+1) - \ln x) \\ &= (1 + o(1))(I + o(1)) + (1 - x + o(x))(-\ln x + o(1)) \\ &= -\ln x + I + o(1). \end{aligned}$$

3.46 1) Cas $\alpha > 1$

Puisque : $\forall x \in [1; +\infty[, \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ et que $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, l'application $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, et par conséquent, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ est absolument convergente, donc convergente.

De même, $x \mapsto \frac{\cos x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ est absolument convergente.

2) Cas $0 < \alpha \leq 1$

• On obtient, par une intégration par parties, pour tout X de $[1; +\infty[$:

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = -\frac{\cos X}{X^\alpha} + \cos 1 - \alpha \int_1^X \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Comme $\alpha + 1 > 1$, d'après 1), $x \mapsto \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, d'où :

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \cos 1 - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Ceci montre que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ est convergente, et que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \cos 1 - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx.$$

De même, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ est convergente.

• Remarques : $\forall x \in [1; +\infty[$, $|\sin x| \geq \sin^2 x$, d'où :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

D'après l'étude précédente (et l'utilisation du changement de variable défini par $y = 2x$), $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx$ converge.

D'autre part, comme $\alpha \leq 1$, la fonction positive $x \mapsto \frac{1}{2x^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

Il en résulte : $\int_1^X \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc

$x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

De même, $x \mapsto \frac{\cos x}{x^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

3) Cas $\alpha \leq 0$

On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geq \int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

donc : $\int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Il en résulte que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ diverge, et donc $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$

n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. De même, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$

diverge et $x \mapsto \frac{\cos x}{x^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

3.47 α) Soient $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{2ikx} &= \frac{e^{2i(n+1)x} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} (e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x})}{e^{ix} (e^{ix} - e^{-ix})} \\ &= e^{inx} \frac{2i \sin(n+1)x}{2i \sin x} = e^{inx} \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}, \end{aligned}$$

d'où, en prenant la partie réelle :

$$\sum_{k=0}^n \cos 2kx = \cos nx \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2n+1)x + \sin x}{2 \sin x},$$

et donc :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2kx = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n \cos 2kx = \frac{\sin(2n+1)x}{2 \sin x}.$$

β) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et admet une limite finie (qui est $2n+1$) en 0^+ , donc est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.

On a, d'après α) :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2kx \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx dx \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin 2kx}{2k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

b) Il s'agit d'un cas particulier du lemme de Riemann-Lebesgue.

Une intégration par parties fournit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) \sin nx dx &= \left[-\varphi(x) \frac{\cos nx}{n} \right]_a^b + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos nx}{n} dx. \end{aligned}$$

D'une part :

$$\begin{aligned} \left| \left[-\varphi(x) \frac{\cos nx}{n} \right]_a^b \right| &\leq |\varphi(b)| \frac{|\cos nb|}{n} + |\varphi(a)| \frac{|\cos na|}{n} \leq \frac{2\|\varphi\|_\infty}{n}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos nx}{n} dx \right| &\leq \int_a^b |\varphi'(x)| \frac{|\cos nx|}{n} dx \leq \frac{1}{n} \int_a^b |\varphi'(x)| dx. \end{aligned}$$

Il en résulte : $\int_a^b \varphi(x) \sin nx dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

c) α) • D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\bullet f(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x}{6} \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 = f(0),$$

donc f est continue en 0.

$$\bullet f'(x) = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)}{x^2 \sin^2 x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{6},$$

donc, d'après le théorème limite de la dérivée, f est de classe C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\beta) \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}],$$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{x} = f(x) \sin(2n+1)x + \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}.$$

Comme f est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et que $x \mapsto \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$, il en résulte que $x \mapsto \frac{\sin(2n+1)x}{x}$ est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n+1)x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx. \end{aligned}$$

En utilisant a) β) et b), on déduit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

d) On a, pour tout n de $\mathbb{N}$, à l'aide du changement de variable défini par $x = \frac{u}{2n+1}$:

$$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge (cf. exercice 3.46) et en utilisant c) β), on conclut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3.48 a) α) Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$:

1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$, et $f \geq 0$.

• On a : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc f est intégrable sur $]0; 1]$ (faux problème).

• On a : $\forall x \in [1; +\infty[, |f(x)| \leq \frac{2}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Ceci montre que l'intégrale proposée $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ existe.

2) Calcul :

On a, pour tout $(\varepsilon, X) \in]0; +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$, par intégration par parties pour des applications de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^X (1 - \cos x) \frac{1}{x^2} dx &= \left[(1 - \cos x) \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_{\varepsilon}^X - \int_{\varepsilon}^X \sin x \left(-\frac{1}{x} \right) dx \\ &= -\frac{1 - \cos X}{X} + \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^X \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

On a :

$$\bullet \left| \frac{1 - \cos X}{X} \right| \leq \frac{2}{X} \underset{X \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\text{donc } \frac{1 - \cos X}{X} \underset{X \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\bullet \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Il s'ensuit, en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ et $X \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

β) Étude de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$:

On a, en utilisant le changement de variable $t = \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 t}{4t^2} 2dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'intégrale proposée $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ existe (ce que l'on pouvait aussi montrer comme en α) et que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Si $\lambda > 0$, à partir de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, on a, par le changement de variable $x = \frac{t}{\lambda}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} \lambda dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx.$$

Le cas $\lambda < 0$, se ramène au cas $\lambda > 0$ par imparité.

Le cas $\lambda = 0$ est d'étude immédiate.

On conclut : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\lambda)$,

où sgn est la fonction signe, définie par :

$$\operatorname{sgn}(\lambda) = \begin{cases} -1 & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ 1 & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

β) Si $\lambda > 0$, on a, par le changement de variable $x = \frac{t}{\lambda}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2 x^2} \lambda dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda x}{x^2} dx, \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda x}{x^2} dx = \lambda \frac{\pi}{2}.$$

Le cas $\lambda < 0$ se ramène au cas $\lambda > 0$ par parité.

Le cas $\lambda = 0$ est d'étude immédiate.

On conclut : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} |\lambda|$.

c) Les intégrales proposées existent, par exemple par des raisonnements analogues aux précédents.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

α)

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{2x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos(a+b)x}{x^2} dx - \frac{1 - \cos(a-b)x}{x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(a+b)x}{x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(a-b)x}{x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} |a+b| - \frac{\pi}{2} |a-b| \right) = \frac{\pi}{4} (|a+b| - |a-b|). \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax \cos bx}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 - (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)}{2x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(a+b)x}{x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(a-b)x}{x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} |a+b| + \frac{\pi}{2} |a-b| \right) = \frac{\pi}{4} (|a+b| + |a-b|). \end{aligned}$$

d) 1) Existence :

• L'application $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x(\pi-x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et en π .

• Étude en 0 :

$$\text{On a : } f(x) = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\pi-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\pi},$$

donc f est prolongeable par continuité en 0.

• Étude en π :

$$\text{On a : } f(x) = \frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\pi},$$

donc f est prolongeable par continuité en π .

En posant $f(0) = f(\pi) = \frac{1}{\pi}$, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

• Étude en $\pm\infty$:

$$\text{On a : } |f(x)| = \left| \frac{\sin x}{x(\pi-x)} \right| \leq \frac{1}{|x(\pi-x)|} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $\pm\infty$ ($2 > 1$), le théorème d'équivalence et le théorème de majoration pour des fonctions positives, f est intégrable sur $]-\infty; -1]$ et sur $[4; +\infty[$, donc sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On conclut que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(\pi-x)} dx$ existe.

2) Calcul :

On a, par une décomposition en éléments simples immédiate :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(\pi-x)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi-x} \right) dx.$$

On sait (cf. aussi l'exercice 3.46) que l'intégrale impropre

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge.}$$

Par différence, comme I et J convergent, l'intégrale impropre

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi-x} dx \text{ converge, et on a :}$$

$$I = \frac{1}{\pi} (J + K).$$

D'après l'exercice 3.47 et par parité : $J = \pi$.

Par le changement de variable $t = \pi - x$:

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi - x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = J.$$

On obtient : $I = \frac{2}{\pi} \pi = 2$.

3.49 1) Existence :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1^{er} cas : $x > 0$:

- L'application $g_x : t \mapsto \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
- On a :

$$g_x(t) = \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} = \frac{2 \ln t + \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right)}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln t}{t^2},$$

donc : $t^{3/2} g_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln t}{t^{1/2}} \longrightarrow 0$.

On a donc, pour t assez grand : $0 \leq t^{3/2} g_x(t) \leq 1$,

d'où : $0 \leq g_x(t) \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($3/2 > 1$) et les théorèmes de majoration et d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , g_x est intégrable sur $]0; +\infty[$.

2^e cas : $x = 0$:

- L'application $g_0 : t \mapsto \frac{\ln(t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
- Comme dans le premier cas, g_0 est intégrable sur $[1; +\infty[$.
- On a : $g_0(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln t$. D'après le cours, $t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0; 1]$, donc, par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , $-g_0$ l'est aussi, puis g_0 l'est aussi.

Ainsi, g_0 est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $]1; +\infty[$, donc sur $]0; +\infty[$.

3^e cas : $x < 0$:

L'application $g_x : t \mapsto \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}$ n'est pas définie sur $]0; \sqrt{-x}[$, donc $f(x)$ n'existe pas.

On conclut que $f(x)$ existe si et seulement si $x \geq 0$.

On suppose dorénavant $x \geq 0$.

2) Calcul :

Nous allons essayer d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Considérons l'application

$$F : [0; +\infty[\times]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}.$$

α) Expression de $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$

- Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, d'après 1).
- $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)}$ existe

sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

Soit $a \in]0; +\infty[$. On a :

$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times]0; +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)} \leq \underbrace{\frac{1}{a(1+t^2)}}_{\text{notée } \psi_a(t)}$$

et ψ_a est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable

sur $]0; +\infty[$ car $\psi_a(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{at^2}$.

Ainsi, $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie HDL sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)} dt.$$

β) Continuité de f sur $]0; +\infty[$

- F est continue par rapport à x et continue par morceaux (car continue) par rapport à t .
- Soit $b \in [0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \forall (x, t) \in [0; b] \times]0; +\infty[, |F(x, t)| &= \frac{|\ln(x+t^2)|}{1+t^2} \\ &\leq \frac{\text{Max}(|\ln(t^2)|, |\ln(b+t^2)|)}{1+t^2} = \underbrace{|g_0(t)| + |g_b(t)|}_{\text{notée } \varphi_b(t)} \end{aligned}$$

et φ_b est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 . D'après 1), g_0 et g_b sont intégrables sur $]0; +\infty[$, donc φ_b l'est aussi.

Ainsi, F vérifie HDL sur $[0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, f est continue sur $]0; +\infty[$.

En particulier, f est continue en 0.

γ) Calcul de $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$

On a, par une décomposition en éléments simples, si $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{1-x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-x} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} \frac{t}{\sqrt{x}} - \operatorname{Arctan} t \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}.
\end{aligned}$$

Comme les applications f' et $x \mapsto \frac{\pi}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ sont continues sur $]0; +\infty[$ et coïncident sur $]0; +\infty[-\{1\}$, elles coïncident sur $]0; +\infty[$, d'où :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}.$$

δ) Calcul de $f(x)$

Par le changement de variable $u = \sqrt{x}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx &= \int \frac{1}{u(1+u)} 2u du = \int \frac{2}{1+u} du \\
&= 2 \ln(1+u) + \text{Cte} = 2 \ln(1+\sqrt{x}) + \text{Cte}.
\end{aligned}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \pi(\ln(1+\sqrt{x}) + C).$$

Puisque f et le second membre ci-dessus sont continus en 0, l'égalité est aussi vraie pour $x = 0$, d'où :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \pi(\ln(1+\sqrt{x}) + C).$$

En particulier, $C = \frac{f(0)}{\pi}$, et :

$$\begin{aligned}
f(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2)}{1+t^2} dt \underset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{\ln \frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2} \right) du \\
&= - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u^2)}{1+u^2} du = -f(0),
\end{aligned}$$

d'où : $f(0) = 0$.

On conclut : $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \pi \ln(1+\sqrt{x})$.

3.50 a) Soit $x \in]0; +\infty[$.

L'application $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x; +\infty[$, et $g \geq 0$.

On a : $t^2 g(t) = t e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc, pour t assez grand : $t^2 g(t) \leq 1$, d'où : $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{t^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , g est intégrable sur $[x; +\infty[$.

Ceci montre que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ existe.}$$

b) 1) On a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Puisque l'application $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$, d'après le cours sur les primitives, f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, donc a fortiori f est continue sur $]0; +\infty[$.

2) On a, pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned}
0 \leq f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} dt \\
&= [-e^{-t}]_x^{+\infty} = e^{-x},
\end{aligned}$$

et $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, donc, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

3) D'après le théorème de Fubini, on a alors, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t dx \right) \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} t \frac{e^{-t}}{t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.
\end{aligned}$$

3.51 Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé.

Notons $F : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$, $(x, t) \mapsto e^{-at^2} e^{ixt}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, car :

$$|t^2 F(x, t)| = t^2 e^{-at^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

• $\frac{\partial F}{\partial x} : (x, t) \mapsto i t e^{-at^2} e^{ixt}$ existe sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$, est continue par rapport à x , continue par morceaux (car continue) par rapport à t et vérifie HD sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$ car, en notant $\psi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ψ est continue, ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$, et :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; +\infty[, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq (=\psi)(t).$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int_0^{+\infty}$, l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at^2} e^{ixt} dt,$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} i t e^{-at^2} e^{ixt} dt.$$

Une intégration par parties donne, pour tout T de $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_0^T i t e^{-at^2} e^{ixt} dt \\ = \left[-\frac{i}{2a} e^{-at^2} e^{ixt} \right]_0^T + \int_0^T \frac{i}{2a} e^{-at^2} i x e^{ixt} dt, \end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre T vers $+\infty$: $f'(x) = \frac{i}{2a} - \frac{x}{2a} f(x)$.

Considérons l'équation différentielle linéaire :

$$(E) \quad y' + \frac{x}{2a} y = \frac{i}{2a},$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

L'équation sans second membre associée :

$$(E_0) \quad y' + \frac{x}{2a} y = 0$$

admet pour solution générale $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{4a}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution y de (E) sous la forme :

$$x \mapsto y(x) = \lambda(x) e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

Cette application y est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = \frac{i}{2a} e^{\frac{x^2}{4a}},$$

d'où la solution générale de (E) :

$$y : x \mapsto y(x) = \frac{i}{2a} e^{-\frac{x^2}{4a}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4a}} dt + \lambda e^{-\frac{x^2}{4a}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme

$$\lambda = f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \underset{u=x\sqrt{a}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}},$$

on conclut : $\forall (a, x) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2} e^{ixt} dt = \frac{i}{2a} e^{-\frac{x^2}{4a}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4a}} dt + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient, pour tout (a, x) de $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos xt dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}} \quad \text{et} \\ \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \sin xt dt &= \frac{1}{2a} e^{-\frac{x^2}{4a}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4a}} dt. \end{aligned}$$

3.52 1) Existence :

Soient $x \in]0; +\infty[$, $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Ré}(z) < 0$.

• L'application $f : t \mapsto t^{x-1} e^{zt}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

• Étude en 0 :

$$\text{On a : } |f(t)| = t^{x-1} e^{\operatorname{Ré}(z)t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1},$$

donc, d'après l'exemple de Riemann en 0 ($x-1 > -1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $]0; 1]$.

• Étude en $+\infty$:

$$\text{On a : } t^2 |f(t)| = t^{x+1} e^{\operatorname{Ré}(z)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On déduit que f est intégrable sur $]0; +\infty[$, et on conclut que l'intégrale proposée existe.

2) Calcul :

Fixons $x \in]0; +\infty[$ et notons $u = -\operatorname{Ré}(z) > 0$.

En notant $v = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{zt} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-ut} e^{i vt} dt.$$

Notons

$$F : \mathbb{R} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}, \quad (v, t) \mapsto t^{x-1} e^{-ut} e^{i vt}.$$

• Pour tout $v \in \mathbb{R}$, $F(v, \cdot)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, d'après 1).

• $\frac{\partial F}{\partial v} : (v, t) \mapsto t^{x-1} e^{-ut} i t e^{i vt}$ existe sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$, est continue par rapport à v , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• On a : $\forall (v, t) \in \mathbb{R} \times]0; +\infty[$, $\left| \frac{\partial F}{\partial v}(v, t) \right| = t^x e^{-ut}$

et $t \mapsto t^x e^{-ut}$ est indépendant de v , continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, $\frac{\partial F}{\partial v}$ vérifie HD.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

l'application $g : v \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-ut} e^{i vt} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $v \in \mathbb{R}$:

$$g'(v) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-ut} i t e^{i vt} dt = i \int_0^{+\infty} t^x e^{-ut} e^{i vt} dt.$$

Nous allons montrer que g satisfait une EDL1, en utilisant une intégration par parties.

On a, par intégration par parties, pour tout $(\varepsilon, T) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon \leq T$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^T t^x e^{-ut} e^{i vt} dt &= \int_\varepsilon^T t^x e^{(-u+i v)t} dt \\ &= \left[t^x \frac{e^{(-u+i v)t}}{-u+i v} \right]_0^T - \int_\varepsilon^T x t^{x-1} \frac{e^{(-u+i v)t}}{-u+i v} dt \end{aligned}$$

$$= T^x \frac{e^{(-u+iv)T}}{-u+iv} - \varepsilon^x \frac{e^{(-u+iv)\varepsilon}}{-u+iv} + \frac{x}{u-iv} \int_{\varepsilon}^T t^{x-1} e^{(-u+iv)t} dt.$$

En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ et $T \rightarrow +\infty$, on déduit :

$$g'(v) = i \frac{x}{u-iv} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-ut} e^{ivt} dt = \frac{ix}{u-iv} g(v).$$

Pour résoudre cette EDL sans second membre, on calcule une primitive :

$$\begin{aligned} \int \frac{ix}{u-iv} dv &= ix \int \frac{u+iv}{u^2+v^2} dv \\ &= ix \int \frac{u}{u^2+v^2} dv - x \int \frac{v}{u^2+v^2} dv \\ &= i \operatorname{Arctan} \frac{v}{u} - \frac{x}{2} \ln(u^2+v^2) + \text{Cte.} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-ut} dt \stackrel{s=ut}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{u}\right)^{x-1} e^{-s} \frac{ds}{u} \\ &= \frac{1}{u^x} \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-s} ds = \frac{1}{u^x} \Gamma(x). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} g(v) &= g(0) \exp\left(-\int_0^v \frac{ix}{u-iv} dw\right) \\ &= \frac{\Gamma(x)}{u^x} \exp\left(-ix \operatorname{Arctan} \frac{v}{u} + \frac{x}{2} \ln(u^2+v^2)\right) \\ &= \frac{\Gamma(x)}{u^x} e^{-ix \operatorname{Arctan} \frac{v}{u}} (u^2+v^2)^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

En notant $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arctan} \frac{v}{u} \in]-\pi/2; \pi/2[$, on conclut :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{zt} dt = \frac{\Gamma(x)}{u^x} e^{-ix \operatorname{Arg}(z)} |z|^x.$$

3.53 I. a) Soit $\varepsilon \in]0; +\infty[$.

Soit $X \in [0; +\infty[$ tel que $\varepsilon \leq X$.

On a, par linéarité de l'intégration, par des changements de variable, et par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^X \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^X \frac{f(ax)}{x} - \int_{\varepsilon}^X \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{f(u)}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{f(v)}{v} dv \\ &= \int_a^b \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt - \int_{aX}^{bX} \frac{f(u)}{u} du. \end{aligned}$$

Puisque l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge, on a :

$$\begin{aligned} \int_{aX}^{bX} \frac{f(u)}{u} du &= \int_1^{bX} \frac{f(x)}{x} dx - \int_1^{aX} \frac{f(x)}{x} dx \\ &\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ converge et que :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt.$$

b) Pour obtenir la limite de cette dernière intégrale lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, nous allons utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale.

Notons $F : [0; 1] \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\varepsilon, t) \mapsto \frac{f(\varepsilon t)}{t}$.

• F est continue par rapport à ε , continue par morceaux (car continue) par rapport à t .

• On a :

$$\forall (\varepsilon, t) \in [0; 1] \times [a; b], \quad |F(\varepsilon t)| = \left| \frac{f(\varepsilon t)}{t} \right| \leq \frac{\|f\|_{\infty}^{[0; b]}}{a},$$

et l'application constante $\frac{\|f\|_{\infty}^{[0; b]}}{a}$ est intégrable sur le segment $[a; b]$.

Ainsi, F vérifie HD.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, l'ap-

plication $\varepsilon \mapsto \int_a^b \frac{f(\varepsilon t)}{t} t$ est continue sur $[0; 1]$.

En particulier :

$$\int_a^b \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$

converge et que : $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

II. a) I) Puisque $f : x \mapsto \cos x$ est continue sur $[0; +\infty[$ et

que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ converge (cf. exercice 3.46),

d'après I. b), pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'intégrale

$\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}.$$

2) De même, l'intégrale $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Puisque $f : x \mapsto 1 - \operatorname{th} x$ est continue sur $[0; +\infty[$ et que l'intégrale impropre $\int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{1 - \operatorname{th} x}{x} dx$ converge, l'intégrale impropre proposée converge et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} ax - \operatorname{th} bx}{x} dx \\ = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \operatorname{th} bx) - (1 - \operatorname{th} ax)}{x} dx = \ln \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

4) L'application $f : x \mapsto \frac{\pi^2}{4} - (\operatorname{Arctan} x)^2$ est continue sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x \right) \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan} x \right) \\ &= \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan} x \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{x}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi^2}{4} - (\operatorname{Arctan} x)^2}{x} dx \text{ converge.}$$

D'après I. b), pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'intégrale impropre proposée converge et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{Arctan}(ax))^2 - (\operatorname{Arctan}(bx))^2}{x} dx \\ = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \left(\left(\frac{\pi^2}{4} - (\operatorname{Arctan} ax)^2 \right) - \left(\frac{\pi^2}{4} - (\operatorname{Arctan} bx)^2 \right) \right) dx \\ = \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \ln \frac{a}{b} = \frac{\pi^2}{4} \ln \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0; +\infty[$:

$$\frac{\operatorname{sh} xt}{t} e^{-t} = \frac{e^{xt} - e^{-xt}}{2t} e^{-t} = \frac{e^{-(1-x)t} - e^{-(1+x)t}}{2t}.$$

Il s'agit donc de a) 2), en prenant $a = 1 - x$ et $b = 1 + x$, où $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ car $x \in]-1; 1[$. Il en résulte que l'intégrale proposée converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(xt)}{t} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

c) Par le changement de variable $t = e^{-x}$, dans le résultat de a) 2), on a :

$$\begin{aligned} \ln \frac{b}{a} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_1^0 \frac{t^a - t^b}{-\ln t} \left(-\frac{dt}{t} \right) \\ &= - \int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{b-1}}{\ln t} dt. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'intégrale proposée converge et que :

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx = -\ln \frac{b+1}{a+1}.$$

d) Soit $(a, b) \in]0; +\infty[^2$.

L'application $g : x \mapsto \frac{1 - e^{-ax}}{x} \frac{1 - e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$, $g \geq 0$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} ab$, $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc g est intégrable sur $]0; +\infty[$, l'intégrale proposée existe.

On a, pour tout $(\varepsilon, X) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon \leq X$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^X (1 - e^{-ax})(1 - e^{-bx}) \frac{1}{x^2} dx \\ = \left[(1 - e^{-ax})(1 - e^{-bx}) \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_{\varepsilon}^X \\ + \int_{\varepsilon}^X (a e^{-ax} + b e^{-bx} - (a+b) e^{-(a+b)x}) \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

$$\text{On a : } (1 - e^{-aX})(1 - e^{-bX}) \left(-\frac{1}{X} \right) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$\begin{aligned} (1 - e^{-a\varepsilon})(1 - e^{-b\varepsilon}) \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \\ \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} a\varepsilon b\varepsilon \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) = -ab\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Enfin, comme plus haut, la fonction

$$x \mapsto (a e^{-ax} + b e^{-bx} - (a+b) e^{-(a+b)x}) \frac{1}{x}$$

est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On déduit, en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ et $X \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-bx}) \frac{1}{x^2} dx \\ = \int_0^{+\infty} (a e^{-ax} + b e^{-bx} - (a+b) e^{-(a+b)x}) \frac{1}{x} dx \\ = a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-(a+b)x}}{x} dx \\ + b \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-(a+b)x}}{x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \ln \frac{a+b}{a} + b \ln \frac{a+b}{b} \\
&= (a+b) \ln(a+b) - a \ln a - b \ln b.
\end{aligned}$$

3.54 D'abord, pour tout $x \in [0; 1[$, $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-x \cos^2 t}}$ existe comme intégrale d'une application continue sur un segment.

a) On a, par le changement de variable $u = \tan t$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\sqrt{1-x \frac{1}{1+u^2}}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{1+u^2} \sqrt{1+u^2-x}}.
\end{aligned}$$

Notons, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2} \sqrt{1-x+u^2}} \\
h(x) &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-x+u^2}}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a : } f(x) \geq g(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} h(x)$$

et :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+\left(\frac{u}{\sqrt{1-x}}\right)^2}} \\
&= \left[\text{Argsh} \frac{u}{\sqrt{1-x}} \right]_0^1 = \text{Argsh} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.
\end{aligned}$$

On conclut, par minoration : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

b) • On a, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$\begin{aligned}
0 \leq f(x) - g(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{1+u^2} \sqrt{1-x+u^2}} \\
&\leq \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{+\infty} = 1.
\end{aligned}$$

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$, il en résulte :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x).$$

• On a, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$0 \leq h(x) - g(x) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-x+u^2}} du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}(\sqrt{1+u^2}+1)\sqrt{1-x+u^2}} du \\
&\leq \int_0^1 \frac{u^2}{1 \cdot 2 \cdot u} du = \left[\frac{u^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Comme $g(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} +\infty$, il en résulte :

$$g(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} h(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} h(x) &= \text{Argsh} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\
&= \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{1-x}} \right) = \ln \frac{1 + \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-x}} \\
&= \ln(1 + \sqrt{2-x}) - \frac{1}{2} \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1-x).
\end{aligned}$$

3.55 a) Puisque f est continue sur $[0; +\infty[$, f admet des primitives sur $[0; +\infty[$. Notons

$$F : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

la primitive de f qui s'annule en 0.

L'application F est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et $F' = f$.

$$\text{Puisque : } \forall x \in]0; +\infty[, \quad g(x) = \frac{F(x)}{x},$$

g est continue sur $]0; +\infty[$ (et même, g est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$).

$$\text{On a : } g(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0) = g(0),$$

donc g est continue en 0.

On conclut que g est continue sur $[0; +\infty[$.

b) 1) Cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$:

Alors, par sa définition, g est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Effectuons, pour $0 < \varepsilon \leq X$ fixés, une intégration par parties, pour des applications de classe C^1 :

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^X g^2(x) dx \\
&= \int_\varepsilon^X \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x f \right)^2 dx = \int_\varepsilon^X \frac{1}{x^2} (F(x))^2 dx \\
&= \left[-\frac{1}{x} (F(x))^2 \right]_\varepsilon^X - \int_\varepsilon^X -\frac{1}{x} 2F(x) F'(x) dx \\
&= \underbrace{-\frac{(F(X))^2}{X}}_{\leq 0} + \frac{(F(\varepsilon))^2}{\varepsilon} + 2 \int_\varepsilon^X g(x) f(x) dx.
\end{aligned}$$

•

$$\frac{(F(\varepsilon))^2}{\varepsilon} = \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon} F(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(0)F(0) = f'(0) \cdot 0 = 0$$

• D'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^X g(x)f(x) dx &\leq \left(\int_{\varepsilon}^X g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\varepsilon}^X f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^X g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On déduit, en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_0^X g^2 \leq 2 \left(\int_0^X g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\int_0^X g^2 \neq 0$, on obtient :

$$\left(\int_0^X g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et, si $\int_0^X g^2 = 0$, l'inégalité ci-dessus est triviale.

On a donc : $\forall X \in]0; +\infty[, \int_0^X g^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2$.

Comme $g^2 \geq 0$, il en résulte que g^2 est intégrable sur $[0; +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} g^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2.$$

2) Cas général :

Nous supposons maintenant que f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Considérons $u = |f|$ et v associée à u , comme g est associée à f , c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad v(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x u(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ u(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il est clair que u est continue sur $[0; +\infty[$. Puisque f^2 est de carré intégrable sur $[0; +\infty[$ et que $u^2 = |f|^2$, u^2 est aussi de carré intégrable sur $[0; +\infty[$.

D'après 2), v^2 est donc de carré intégrable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} v^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} u^2.$$

Mais, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$|g(x)| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f| = \frac{1}{x} \int_0^x u = v(x)$$

et :

$$|g(0)| = |f(0)| = u(0) = v(0).$$

On a donc : $\forall x \in [0; +\infty[, |g(x)| \leq v(x)$,

d'où : $\forall x \in [0; +\infty[, |g(x)|^2 \leq v^2(x)$.

Comme v^2 est intégrable sur $[0; +\infty[$, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , $|g|^2$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, puis, par définition, g^2 est intégrable sur $[0; +\infty[$. Et on a :

$$\int_0^{+\infty} |g|^2 \leq \int_0^{+\infty} v^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} u^2 = 4 \int_0^{+\infty} |f|^2.$$

Plan

Les méthodes à retenir	136
Énoncés des exercices	140
Du mal à démarrer ?	149
Corrigés	154

Thèmes abordés dans les exercices

- Détermination de la nature d'une série à termes ≥ 0
- Détermination de la nature d'une série à termes réels de signes quelconques ou complexes
- Nature d'une suite par intervention d'une série
- Calcul de la somme d'une série convergente
- Étude d'un produit infini
- Manipulation d'exponentielles dans une algèbre normée complète
- Étude d'intégrabilité d'une fonction, quand celle-ci peut se ramener à une étude de convergence pour une série
- Recherche d'un équivalent ou d'un développement asymptotique, pour une somme partielle de série divergente, pour un reste de série convergente
- Recherche d'un équivalent ou d'un développement asymptotique, pour le terme général d'une suite définie par une relation de récurrence
- Convergence d'une série double et calcul éventuel de la somme
- Obtention de l'égalité des sommes de deux séries par intervention d'une série double.

Points essentiels du cours
pour la résolution des exercices

- Définition, propriétés générales, propriétés relatives aux opérations et à l'ordre, pour la convergence et la divergence des séries
- Le lien suite/série
- Le lemme fondamental pour les séries à termes ≥ 0
- Pour les séries à termes ≥ 0 , l'exemple de Riemann, le théorème de majoration, de minoration, le théorème d'équivalence, la règle $n^\alpha u_n$ par sa méthode, la règle de d'Alembert
- La comparaison somme/intégrale, ou série/intégrale
- La définition de l'absolue convergence et son lien avec la convergence
- Le théorème spécial à certaines séries alternées (TSCSA)

- La constante d'Euler (à la limite extérieure du programme) :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o_{n \rightarrow \infty}(1)$$

- La formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$
- Les théorèmes de sommation des relations de comparaison
- Pour les séries doubles, le théorème d'intervention dans le cas de $\mathbb{R}_+$, théorème de Fubini dans le cas général.

Les méthodes à retenir

Pour étudier la nature
d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$
à termes dans $\mathbb{R}_+$,
sur un exemple

Essayer de :

- majorer u_n par le terme général d'une série convergente, lorsqu'on conjecture que la série de terme général u_n converge

➡ Exercices 4.1 a), c), 4.2 a), 4.10, 4.16

- minorer u_n par le terme général d'une série divergente, lorsqu'on conjecture que la série de terme général u_n diverge

➡ Exercices 4.1 b), 4.2 b), 4.10

- trouver un équivalent simple de u_n , puis appliquer le théorème d'équivalence

➡ Exercices 4.1 d), h), i), 4.11, 4.30, 4.31 b), 4.45 d)

Pour obtenir un équivalent simple de u_n , il pourra être nécessaire d'effectuer, de façon intermédiaire, des développements asymptotiques

➡ Exercices 4.9 a), d), e), f), j), 4.13

- appliquer la règle $n^\alpha u_n$, lorsque u_n n'admet apparemment pas d'équivalent simple

➡ Exercices 4.2 c), d), 4.9 b), c)

- mélanger l'utilisation d'équivalents et de majorants (ou d'équivalents et de minorants)

➡ Exercices 4.1 e), f)

- appliquer la règle de d'Alembert, lorsque l'écriture de u_n fait intervenir des factorielles ou des exponentielles

➡ Exercices 4.1 g), 4.9 g), k), 4.27

- utiliser une comparaison série/intégrale

➡ Exercices 4.2 e), f).

Pour déduire la convergence d'une série $\sum_n u_n$, à termes réels ≥ 0

à partir de la convergence d'une série $\sum_n v_n$, à termes réels ≥ 0

Dans un cadre théorique, essayer de :

- comparer, par inégalité, par équivalence, u_n à v_n

➡ Exercices 4.3, 4.4, 4.14, 4.36

- sinon, comparer, par inégalité, les sommes partielles de la série $\sum_n u_n$, aux sommes partielles de la série $\sum_n v_n$,

➡ Exercice 4.15.

Pour étudier la nature d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$, à termes ≥ 0 , dans un cadre théorique

Essayer d'appliquer le lemme fondamental, ou sa contraposée

➡ Exercices 4.21, 4.55.

Pour montrer qu'une série $\sum_n u_n$ diverge

En plus des méthodes déjà évoquées plus haut, essayer de :

- montrer que la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, c'est-à-dire que la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement

➡ Exercice 4.18

- montrer qu'un paquet de termes ne tend pas vers 0

➡ Exercice 4.60.

Pour étudier la nature d'une suite $(a_n)_n$

On peut, surtout si a_n apparaît comme une sommation, étudier la nature de la série $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$, puis appliquer le lien suite/série

➡ Exercices 4.6, 4.25, 4.27.

Pour étudier la nature d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes de signes quelconques ou complexes, sur un exemple

Essayer de :

- voir si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, est absolument convergente

➡ Exercices 4.5 a), 4.18

- appliquer le TSCSA, si u_n contient $(-1)^n$ en facteur et si l'autre facteur ne contient pas de $(-1)^n$ dans son écriture

➡ Exercices 4.5 b), 4.17, 4.31 b), 4.45 e)

- utiliser un développement asymptotique, en particulier si u_n contient $(-1)^n$ en facteur et si l'autre facteur contient encore $(-1)^n$ dans son écriture

➡ Exercices 4.5 c), d), 4.28, 4.37.

Pour étudier une série dont le terme général u_n a une expression différente selon la parité de n , ou selon une périodicité plus générale

Essayer d'étudier les sommes partielles S_{2p} , S_{2p+1} , d'indice pair, d'indice impair

➡ Exercices 4.22, 4.38, 4.42.

Attention : la somme partielle $S_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} u_k$, est une sommation se terminant par un terme d'indice pair (le terme u_{2p}), mais cette sommation fait intervenir tous les termes, d'indices pairs ou impairs, situés avant u_{2p} .

Pour étudier l'intégrabilité d'une application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x)$ présente une oscillation lorsque $x \rightarrow +\infty$

Essayer, en plus des méthodes vues dans le chapitre 3, de relier la question à la convergence d'une série du genre $\sum_{n \geq 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f$, si f s'annule en chaque $n\pi$, par exemple

➡ Exercice 4.43.

Pour évaluer $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Se rappeler, suivant le contexte :

- $H_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$, obtenu par comparaison série/intégrale

➡ Exercices 4.31 a), 4.52

- $H_n = \ln n + \gamma + o_{n \rightarrow \infty}(1)$, où γ est la constante d'Euler, obtenu par étude de la suite de terme général $H_n - \ln n$ et intervention du lien suite/série

➡ Exercice 4.56.

Pour évaluer $n!$ ou $\ln(n!)$

Essayer d'utiliser :

- la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$,
- le développement asymptotique obtenu en passant au logarithme :

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o_{n \rightarrow \infty}(1).$$

➡ Exercices 4.12, 4.24

En particulier : $\ln(n!) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n$, ce que l'on peut montrer plus simplement par comparaison somme/intégrale

➡ Exercice 4.41.

Pour étudier finement la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, ou des séries s'y ramenant

Essayer d'exploiter : $\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1} dx$

➡ Exercices 4.37, 4.44, 4.57.

Pour montrer la convergence et calculer la somme d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$

Essayer de :

- montrer d'abord la convergence par des arguments qualitatifs (utilisation de majoration, équivalent, règle $n^\alpha u_n, \dots$, en travaillant éventuellement sur $|u_n|$), puis calculer les sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$, et enfin chercher la limite de celles-ci lorsque l'entier n tend vers l'infini

➡ Exercices 4.7, 4.19, 4.20, 4.33, 4.46, 4.47

- ou bien former directement les sommes partielles et déterminer leur limite

➡ Exercices 4.29, 4.32, 4.34.

Pour calculer les sommes partielles, il faudra souvent amener un télescopage, et, à cet effet :

- si u_n est une fraction rationnelle en n , utiliser une décomposition en éléments simples
- si u_n est une fonction Arctan, $\sin$, $\cos$, $\tan, \dots$ essayer de mettre u_n par exemple sous la forme $a_{n+1} - a_n$, où a_n est assez simple et ressemble un peu à u_n , en utilisant des formules de trigonométrie.

D'autre part, on connaît directement certaines sommes de séries, par exemple, celle de l'exponentielle

➡ Exercice 4.8.

Pour obtenir des comparaisons (o , O , $\sim$) sur des sommes partielles de séries divergentes ou sur des restes de séries convergentes

Essayer de faire intervenir :

- une comparaison série/intégrale

➡ Exercices 4.23, 4.26, 4.51

- un télescopage

➡ Exercices 4.49, 4.50

- un théorème de sommation des relations de comparaison

➡ Exercices 4.49 à 4.52, 4.59.

Pour étudier une série double

Essayer de faire intervenir :

- le théorème d'interversion des sommations, dans le cas ≥ 0

➡ **Exercice 4.48**

- le théorème d'interversion dans le cas général, c'est-à-dire le théorème de Fubini

➡ **Exercice 4.58.**

Pour établir qu'une somme de série convergente $\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p$ est égale à une autre somme de série convergente $\sum_{q=0}^{\infty} \beta_q$

Essayer de faire intervenir une suite double $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ de façon

que : $\forall p \in \mathbb{N}, \alpha_p = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et $\forall q \in \mathbb{N}, \beta_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$

et voir si on peut appliquer le théorème de Fubini.

Ainsi, formellement : $\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \beta_q$.

➡ **Exercice 4.58.**

Énoncés des exercices

4.1 Exemples de détermination de la nature d'une série numérique

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\frac{|\sin n|}{n^2}$ b) $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$ d) $\ln \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2n + 2}$
 e) $1 - \cos\left(\frac{\sin n}{n}\right)$ f) $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$ g) $\frac{2^n}{n!}$ h) $\frac{(n+1)^a - n^a}{n^b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4.2 Exemples de séries de Bertrand

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\frac{1}{n^2 \ln n}$ b) $\frac{\ln n}{n}$ c) $\frac{\ln n}{n^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ e) $\frac{1}{n \ln n}$ f) $\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

4.3 Convergence d'une série par encadrement du terme général

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries réelles convergentes et $\sum_{n \geq 0} w_n$ une série réelle telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n \leq v_n$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge.

4.4 Natures de séries déduites d'autres séries

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$, convergente. Déterminer la nature des séries de termes

généraux : $u_n = \frac{a_n}{1 + a_n}, \quad v_n = \frac{\text{ch } a_n - 1}{a_n}, \quad w_n = a_n^2$.

4.5 Exemples de détermination de la nature d'une série alternée

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

$$a) \frac{(-1)^n n}{n^3 + n + 1}, \quad b) \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad c) \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}, \quad d) \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

4.6 Nature d'une suite par étude d'une série

Soit $a \in]-1; +\infty[$ fixé. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a+k} \right) - \ln n$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

4.7 Exemple de calcul de la somme d'une série convergente, utilisation d'une décomposition en éléments simples

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{2(2n^2 + n - 3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

4.8 Exemple de calcul de la somme d'une série convergente, utilisation de la série de l'exponentielle

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n^3 + 6n^2 - 5n - 2}{n!}$.

a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

b) Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et décomposer linéairement $P = X^3 + 6X^2 - 5X - 2$ sur $\mathcal{B}$.

c) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On rappelle que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

4.9 Exemples de détermination de la nature d'une série numérique

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

$$\begin{aligned} a) \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^a}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b) e^{-(\ln n)^\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad c) - \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n}} e^x \ln x \, dx \\ d) \sin \frac{1}{n} + a \tan \frac{1}{n} + b \ln \frac{n+1}{n-1}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad e) \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n - \frac{n}{n+1} e^a, \quad a \in \mathbb{R}, \\ f) \sqrt{n^2 + n + 3} + a \sqrt{n^2 + n + 1} + b \sqrt{n^2 + n + 2}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ g) \frac{(n!)^a}{n^n}, \quad a \in \mathbb{R} \quad h) \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt[3]{1+x^2}} \, dx, \quad a \in \mathbb{R}_+, \quad i) \frac{2\sqrt[n]{n} + a^n}{3\sqrt[n]{n} + b^n}, \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \\ j) \sqrt[n]{a} - 2\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}, \quad (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \quad k) \frac{(\ln n)^n}{n!}. \end{aligned}$$

4.10 Exemples de détermination de la nature d'une série

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \int_0^1 \tan(x^n) \, dx, \quad v_n = \int_0^1 \tan(x^{n^2}) \, dx.$$

4.11 Exemples de détermination de natures de séries

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n k!, \quad v_n = \frac{1}{(n+2)!} \sum_{k=0}^n k!.$$

4.12 Nature d'une série faisant intervenir des factorielles, utilisation de la formule de Stirling

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{n!}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{n}}$.

4.13 Recherche de paramètres pour la convergence d'une série

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général $u_n = (n^4 + 3n^2)^{1/4} - (P(n))^{1/3}$, est convergente.

4.14 Exemple de détermination de la nature d'une série définie à partir d'une autre série

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On suppose que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n u_n^2$ convergent.

a) Montrer que, à partir d'un certain rang, $u_n \neq -1$.

b) Établir que la série $\sum_n \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

4.15 Nature d'une série déduite d'une autre série

Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$, convergente.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

4.16 Nature d'une série faisant intervenir une suite récurrente

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \ln \left(1 + \frac{u_n}{n} \right).$$

Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n^\alpha$.

4.17 Exemple de détermination de la nature d'une série alternée, avec paramètre

Déterminer, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{n^a}{(n+1)^b}$.

4.18 Exemples de détermination de natures de séries à termes complexes

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \left(\frac{(2+3i)n+2-i}{(3+4i)n+3+i} \right)^n, \quad v_n = \left(\frac{(2+3i)n+2-i}{(3+2i)n+3+i} \right)^n.$$

4.19 Existence et calcul de la somme d'une série convergente

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où : $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2} + (n+2)\sqrt{n}}$.

4.20 Exemple de calcul de la somme d'une série convergente

Existence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$.

4.21 Calcul de la somme d'une série convergente déduite d'une autre série

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+$.

On note, pour tout $n \geq 1$: $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1) \cdots (1+u_n)}$.

a) Montrer : $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1) \cdots (1+u_n)}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

4.22 Calcul de la somme d'une série convergente déduite de la série harmonique

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{-2}{n} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

4.23 Exemple de détermination d'un équivalent de la somme d'une série convergente à paramètre

Montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

4.24 Recherche d'un équivalent d'une expression faisant intervenir un reste de série convergente

Trouver un équivalent simple de $u_n = \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{n}}$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.25 Étude d'une série construite à partir d'une suite

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(a_n + \tan u_n).$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que, en notant $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, on a : $\ell \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si : $\ell \neq \frac{\pi}{2}$.

4.26 Exemple de recherche d'un équivalent simple d'une somme double

On note, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$: $S_n = \sum_{1 \leq p < q \leq n} \frac{1}{\sqrt{pq}}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, S_n = \frac{1}{2}(A_n^2 - B_n)$,

où on a noté : $A_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}, B_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

b) En déduire un équivalent simple de S_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.27 Utilisation d'une série pour étudier une suite

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_n + \lambda_n u_{n+1}}{1 + \lambda_n}$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4.28 Étude d'une série dont le terme général fait intervenir une fonction

Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^3 . On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = n \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right) \right) - 2f'(0).$$

Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

4.29 Convergence et somme d'une série définie à partir d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 5$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 8$.

a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{(-1)^n}{u_n - 3} = \frac{(-1)^n}{u_n - 2} - \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} - 2}$.

c) Déterminer la nature et la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{u_n - 3}$.

4.30 Exemple de nature d'une série, le terme général étant défini par récurrence

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)^2 u_{n+1} = (n+1)u_n + n.$$

Quelle est, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, la nature de la série $\sum_n u_n^a$?

4.31 Étude de séries définies à partir de suites récurrentes

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{n}}.$$

a) Déterminer la limite de u_n et un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

b) Déterminer la nature des séries de termes généraux $\frac{1}{u_n}$ et $\frac{(-1)^n}{u_n}$.

4.32 Convergence et somme d'une série définie à partir d'une suite récurrente du type

$u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]1; +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

a) Montrer : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$. b) Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

4.33 Exemple de calcul de la somme d'une série convergente, utilisation d'une décomposition en éléments simples

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-2}{n^3 + 3n^2 + 2n}$.

4.34 Exemple de calcul de la somme d'une série convergente faisant intervenir la suite de Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n \geq 0}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2} = (-1)^n$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(-1)^n}{\phi_n \phi_{n+1}} = \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} - \frac{\phi_{n+2}}{\phi_{n+1}}$.

c) Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\phi_n \phi_{n+1}}$.

4.35 Exemples de détermination de la nature d'une série numérique

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\tan\left(\frac{\pi}{2}(7 + 4\sqrt{3})^n\right)$ b) $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\dots+x^n} dx$ c) $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{(k+n)^2 - k^2}$.

4.36 Nature d'une série déduite de deux autres séries

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, convergentes.

Quelle est la nature de la série de terme général $w_n = \frac{u_n^2 v_n^2}{au_n^3 + bv_n^3}$?

4.37 Exemple de détermination de la nature d'une série dont le terme général fait intervenir les sommes partielles d'une série

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln \left(\exp \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right) - 1 \right)$.

4.38 Exemple de détermination de la nature d'une série dont le terme général u_n est donné selon la parité de n

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \sin \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair, } n \geq 1 \\ -\operatorname{sh} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair, } n \geq 2. \end{cases}$$

4.39 Étude des séries convergentes dont le terme général décroît

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, décroissante, telle que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

a) Montrer : $nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

b) En déduire la nature des séries de termes généraux : $v_n = nu_n^2$, $w_n = \frac{u_n}{1 - nu_n}$.

4.40 Étude de la nature d'une série par comparaison

a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, telle qu'il existe $a \in]1; +\infty[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^a.$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

b) Application : déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

4.41 Exemple de recherche d'une limite de suite à l'aide d'une série

Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right)^{\frac{1}{n \ln n}}$.

4.42 Utilisation de groupements de termes pour étudier la nature d'une série

Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}$.

4.43 Étude d'intégrabilité se ramenant à la nature d'une série

Est-ce que l'application $f : x \mapsto (1 + x^4 \sin^2 x)^{-3}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$?

4.44 Exemple de recherche d'un équivalent du reste d'une série alternée convergente

Trouver un équivalent simple de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.45 Nature de séries définies à partir d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \geq 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

a) Montrer : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

b) Établir que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante à partir d'un certain rang.

c) Trouver un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

d) Quelle est la nature, pour $\alpha \in]0; +\infty[$ fixé, de la série de terme général $\frac{1}{u_n^\alpha}$?

e) Quelle est la nature, pour $\beta \in]0; +\infty[$ fixé, de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{u_n^\beta}$?

4.46 Convergence et somme d'une série, intervention de la formule de Stirling

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.

4.47 Calcul de la somme d'une série convergente, utilisation d'une décomposition en éléments simples

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \frac{1}{n(2n+1)}$.

4.48 Exemple de calcul de la somme d'une série double

Existence et calcul de $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

4.49 Exemple de recherche d'un équivalent du reste d'une série convergente

Trouver un équivalent simple de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sqrt{k} 2^{-k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.50 Exemple de recherche d'un équivalent de la somme partielle d'une série divergente

Trouver un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^k}{k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.51 Exemple de recherche d'un développement asymptotique de la somme partielle d'une série divergente

Former un développement asymptotique de $S_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \sqrt{k}$, à la précision $o(\sqrt{n})$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.52 Exemple de recherche d'un équivalent du terme général d'une suite définie par une relation de récurrence, utilisation d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 \in]0; +\infty[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n}$.

Montrer : a) $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$

b) $u_n \sim \sqrt{2 \ln n}$.

4.53 Détermination d'une limite par utilisation d'un théorème de sommation des relations de comparaison

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $(u_n)_{n \geq 1}, (v_n)_{n \geq 1}$ deux suites à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $u_n \sim a n^\alpha$ et

$$v_n \sim b n^\beta. \text{ Trouver } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n u_k v_k \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n v_k^2 \right)}.$$

4.54 Nature de la série des inverses des nombres premiers

On note p_n le n -ème nombre premier ($p_1 = 2$). Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

4.55 Nature des séries $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}, \sum_n \frac{u_n}{r_n^\alpha}$

a) Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série divergente, à termes réels > 0 . On note, pour tout $n \geq 1$: $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Étudier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

b) Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série convergente, à termes réels > 0 . On note, pour tout $n \geq 1$:

$$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k. \text{ Étudier, pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé, la nature de la série } \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{r_n^\alpha}.$$

4.56 Exemple d'étude de produit infini

$$\text{On note, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right).$$

Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim Cn$, et montrer : $1 \leq C \leq 3$.

On pourra utiliser la constante d'Euler γ , définie par : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

4.57 Étude de séries dont le terme général est défini à partir d'un reste de série convergente

a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, son reste

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ vérifie : } R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, son reste ρ_n vérifie :

$$\rho_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx.$$

c) Quelles sont les natures des séries $\sum_{n \geq 0} \rho_n, \sum_{n \geq 0} (-1)^n \rho_n$? En cas de convergence, quelle est la somme ?

4.58 Égalité de deux sommes de séries par intervention d'une série double

Établir, pour tout $a \in]0; +\infty[$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}((2n+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh}((2n+1)a)}.$$

4.59 Recherche d'un développement asymptotique du terme général d'une suite du type

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in]0; +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Montrer : a) $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ b) $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2n}$ c) $u_n = \sqrt{2n} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \right).$

4.60 Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ injective. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Du mal à démarrer ?

4.1 Il s'agit de séries à termes réels ≥ 0 .

Essayer d'appliquer (dans l'ordre) le théorème de majoration ou de minoration, le théorème d'équivalence, la règle $n^\alpha u_n$, la règle de d'Alembert, une comparaison série/intégrale.

- a) Majoration.
- b) Expression conjuguée, puis minoration.
- c) Majoration.
- d) Équivalent.
- e) Équivalent, puis majoration.
- f) Équivalent, puis règle $n^\alpha u_n$.
- g) Règle de d'Alembert.
- h) Équivalent, si $a \neq 0$.

4.2 Il s'agit d'exemples de séries de Bertrand

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ fixé.}$$

Mais le résultat général sur les séries de Bertrand n'est pas au programme.

Essayer d'appliquer : le théorème de majoration ou le théorème de minoration, la règle $n^\alpha u_n$, une comparaison série/intégrale.

a), b) Majoration, minoration.

c), d) Règle $n^\alpha u_n$.

e), f) Comparaison série/intégrale.

4.3 Faire apparaître des réels ≥ 0 et utiliser le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 .**4.4** Il s'agit de séries à termes ≥ 0 . Remarquer d'abord : $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Utiliser ensuite une majoration ou un équivalent.**4.5** Il s'agit de séries alternées.

a) Convergence absolue.

b) TSCSA.

c), d) Utiliser un développement asymptotique.

4.6 Utiliser le lien suite/série : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (u_{n+1} - u_n)$ converge.**4.7** 1) Existence : Équivalent.

2) Calcul : Décomposition en éléments simples, puis télescopage.

4.8 a) Équivalent et règle de d'Alembert.

b) • Degrés successifs.

• Faire apparaître $X(X-1)(X-2)$ dans P , puis faire apparaître $X(X-1), \dots$

c) Décomposer en somme de séries convergentes.

4.9 Il s'agit de séries à termes réels ≥ 0 .

Essayer d'appliquer (dans l'ordre) le théorème de majoration ou de minoration, le théorème d'équivalence, la règle $n^\alpha u_n$, la règle de d'Alembert, une comparaison série/intégrale.

Si le terme général u_n fait intervenir un ou des paramètres, on pourra être amené à former un développement asymptotique de u_n , qui permettra, selon les valeurs des paramètres, d'obtenir un équivalent de u_n , ou une estimation de u_n .

a) Effectuer un développement asymptotique de $n \sin \frac{1}{n}$, puis de u_n .

b) Traiter d'abord les cas $\lambda < 0$, $\lambda = 0$.

Pour $\lambda > 0$, utiliser la règle $n^\alpha u_n$.

c) Majoration et règle $n^\alpha u_n$.

d), e), f), j) Former un développement asymptotique de u_n à la précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

g), k) Règle de d'Alembert.

h) Séparer en cas selon la position de a par rapport à 1, à cause de la présence de x^n dans l'intégrale. Utiliser ensuite une majoration ou une minoration.

i) Séparer en cas selon la position de a et b par rapport à 1, et utiliser des équivalents.

4.10 Il s'agit de séries à termes ≥ 0 .

Pour obtenir des inégalités sur u_n, v_n , utiliser un encadrement de $\tan t$, en montrant :

$$\forall t \in [0; 1], \quad t \leq \tan t \leq 2t.$$

4.11 Commencer par chercher un équivalent simple de $\sum_{k=0}^n k!$.

Puisque $k!$ croît très vite, on peut conjecturer que $\sum_{k=1}^n k!$, est équivalent à $n!$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.12 Utiliser la formule de Stirling : $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ pour

déduire un développement asymptotique de $\ln u_n$, puis un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.13 • Montrer d'abord que, si la série $\sum_n u_n$ converge, alors nécessairement P est de degré 3 et de coefficient dominant égal 1.

• Pour $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer un développement asymptotique de u_n .

4.14 b) Étudier $\frac{u_n}{1+u_n} - u_n$.

4.15 La présence de racines carrées dans une sommation (ou dans une intégrale) fait penser à l'inégalité de Cauchy et Schwarz. Appliquer celle-ci, dans $\mathbb{R}^N$ usuel, pour N fixé, afin d'obtenir une majoration des sommes partielles.

4.16 Obtenir une majoration convenable de u_n .

4.17 Traiter les cas immédiats $a > b$, $a = b$.

Pour $a < b$, montrer que le TSCSA s'applique.

4.18 • Majorer $|u_n|$ par le terme général d'une série géométrique convergente.

• Évaluer $\ln|v_n|$ et montrer que $\ln|v_n|$ ne tend pas vers 1 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.19 1) Existence : Équivalent.

2) Calcul : En utilisant une expression conjuguée, amener un télescopage dans le calcul des sommes partielles.

4.20 1) Existence : Équivalent.

2) Calcul : Amener un télescopage dans le calcul des sommes partielles.

4.21 a) Récurrence sur n , ou télescopage.

b) D'après a), la suite des sommes partielles de la série de terme général v_n est majorée (par 1).

4.22 Calculer $\sum_{n=1}^{3p} u_n$, puis déterminer sa limite lorsque l'entier p tend vers l'infini, par exemple en utilisant le théorème sur les sommes de Riemann.

Relier avec $\sum_{n=1}^{3p+1} u_n$ et avec $\sum_{n=1}^{3p+2} u_n$.

4.23 Effectuer une comparaison série/intégrale, à l'aide, pour $x \in]0; +\infty[$ fixé, de l'application

$$[1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t(t+x)}.$$

4.24 • Montrer : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}$.

• En utilisant la formule de Stirling $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, en déduire un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.25 a) Étudier, pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: existence, situation, monotonie éventuelle, majoration/minoration.

b) Utiliser le lien suite/série.

4.26 a) Remarquer que p et q jouent des rôles symétriques dans $\frac{1}{\sqrt{pq}}$, d'où $2S_n = \sum_{1 \leq p \neq q \leq n} \frac{1}{\sqrt{pq}}$, puis rajouter et retrancher les termes correspondant à $p = q$.

b) Par comparaison somme/intégrale, obtenir des équivalents pour A_n et pour B_n .

4.27 Utiliser le lien suite/série et la règle de d'Alembert.

4.28 Utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir un développement asymptotique de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

4.29 a) Montrer, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 5$.

Ayant montré que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, pour obtenir $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, raisonner par l'absurde, en supposant

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in \mathbb{R}.$$

c) Faire apparaître un télescopage dans le calcul des sommes partielles de la série, en utilisant b).

4.30 Il s'agit d'abord d'obtenir un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini. À cet effet, obtenir des renseignements de plus en plus précis sur u_n :

$$u_n = O(n), \text{ puis (en réinjectant) } u_n = O(1),$$

$$\text{puis } u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ puis } u_n \sim \frac{1}{n}.$$

4.31 a) Exprimer u_n^2 à l'aide de u_{n-1}^2 , puis sommer pour faire apparaître un télescopage.

$$\text{Rappeler : } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

$$\text{Obtenir : } u_n \sim \sqrt{\ln n}.$$

b) 1) La première série est à termes ≥ 0 : utiliser un équivalent.

2) La deuxième série relève du TSCSA.

4.32 a) Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et ne peut pas avoir de limite finie.

b) Amener un télescopage dans le calcul des sommes partielles, en calculant $\frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n-1}$.

4.33 1) Existence : Équivalent.

2) Calcul : Amener un télescopage dans le calcul des sommes partielles, en utilisant une décomposition en éléments simples.

4.34 a) Récurrence sur n (d'autres méthodes sont possibles).

c) Faire apparaître un télescopage dans le calcul des sommes partielles, en utilisant b).

4.35 a) Noter $a_n = (7 + 4\sqrt{3})^n$ et considérer $b_n = (7 - 4\sqrt{3})^n$.

Évaluer $a_n + b_n$ en utilisant la formule du binôme de Newton, et en déduire : $u_n = -\tan b_n$.

b) Il s'agit d'évaluer $1 + x + \dots + x^n$. Le remplacement par $\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ ne semble pas simplifier la question. Utiliser la comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, pour obtenir :

$$1 + x + \dots + x^n \geq (n+1)x^{\frac{n+1}{2}}.$$

c) Écrire u_n sous une autre forme, avec changement d'indice, pour faire apparaître une somme de Riemann.

4.36 Il s'agit de comparer w_n avec une expression simple formée à partir de u_n et v_n . Obtenir : $w_n^2 \leq \frac{u_n + v_n}{ab}$.

4.37 Exprimer $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ à l'aide d'intégrales, en utilisant :

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt.$$

En déduire : $u_n = 2a_n + o(a_n^2)$,

$$\text{où } a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

4.38 Remarquer d'abord : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Grouper les termes deux par deux.

4.39 a) En notant $R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, et en utilisant la décroissance de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, évaluer $2nu_{2n}$ et $(2n+1)u_{2n+1}$.

b) Remarquer $v_n = (nu_n)u_n$ et $w_n \sim u_n$.

4.40 a) Réitérer l'inégalité de l'énoncé et utiliser le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 .

b) Former un développement asymptotique de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et un développement asymptotique de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^a$. Choisir convenablement a pour pouvoir appliquer le résultat de la question a).

4.41 Chercher un équivalent simple de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, en déduire un développement asymptotique de $\ln u_n$, puis un équivalent de u_n .

4.42 Traiter d'abord le cas $\alpha \leq 0$, d'étude immédiate.

Pour $\alpha > 0$, grouper les termes quatre par quatre, puisque la suite $\left((-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)_{n \geq 0}$ est périodique de période 4.

4.43 En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f$, montrer d'abord que l'intégrabilité de f est équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.
Évaluer u_n par changements de variables et inégalités.

4.44 Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale, en utilisant $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, et en commençant par travailler sur $\sum_{k=n+1}^p \frac{(-1)^k}{k}$ puis en faisant tendre p vers l'infini.

Pour déterminer un équivalent simple de $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$, utiliser une intégration par parties.

4.45 b) Remarquer d'abord que $(u_n)_{n \geq 0}$ ne peut pas être décroissante. Sachant $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$ pour n_0 fixé, déduire que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante.

c) Considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^2 - X - n$ et situer u_{n+1} par rapport aux deux zéros de P_n .

En déduire : $u_n = o(n)$, puis : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n}$.

d) Équivalent.

e) TSCSA.

4.46 1) Existence : Équivalent, par l'intermédiaire d'un développement limité.

2) Écrire une somme partielle, amener un télescopage, et utiliser la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

4.47 1) Existence : Équivalent.

2) Calcul : Utiliser une décomposition en éléments simples et la constante d'Euler :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o_{N \rightarrow \infty}(1).$$

4.48 L'existence et le calcul se montrent simultanément, en utilisant le théorème d'inversion de deux sommations, dans le cas des réels ≥ 0 . Utiliser une décomposition en éléments simples du terme général.

4.49 Montrer d'abord que la série $\sum_k \sqrt{k} 2^{-k}$ converge.

Considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - u_{n+1}$ et utiliser un théorème de sommation des relations de comparaison.

4.50 En notant $u_n = \frac{e^n}{n}$, étudier $u_{n+1} - u_n$ et utiliser un théorème de sommation des relations de comparaison.

4.51 Commencer par transformer l'écriture de S_n de façon que Arctan s'applique à un élément près de 0. Utiliser ensuite un théorème de sommation des relations de comparaison.

4.52 a) Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ et utiliser le lien suite/série.

b) Étudier $u_{n+1}^2 - u_n^2$ et utiliser un théorème de sommation des relations de comparaison.

4.53 Utiliser un théorème de sommation des relations de comparaison, pour obtenir des équivalents des différentes sommations qui apparaissent dans l'énoncé.

4.54 Remarquer : $\frac{1}{p_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$,

et étudier les sommes partielles de la série de terme général $\ln \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$, en développant $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$ en série géométrique et en utilisant la décomposition de tout entier (≥ 2) en produit de nombres premiers.

4.55 a) Séparer en cas selon la position de α par rapport à 1.

Si $\alpha = 1$, supposer que la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n}$ converge et déduire une contradiction, en utilisant

$$\frac{u_n}{S_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\ln \left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right).$$

Si $\alpha \in]0; 1[$, utiliser une minoration et le résultat du cas précédent.

Si $\alpha \in]1; +\infty[$, remarquer : $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

4.56 1) Existence de C :

$$\text{Noter } v_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) \text{ et } w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En utilisant des développements limités, montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k}\right)$ converge.

2) Évaluation de C :

$$\text{Utiliser : } 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \geq 1 + \frac{1}{k},$$

$$\text{et, pour } k \geq 2 : 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{1}{k-1}.$$

4.57 a) Remplacer, dans R_n , $\frac{1}{k}$ par $\int_0^1 x^{k-1} dx$.

b) Se déduit de a).

c) 1) Pour calculer $\sum_{k=0}^n \rho_k$, raisonner comme en b).

2) Ne pas oublier que $(-1)^n \rho_n$ est, en fait, de signe fixe.

4.58 Faire apparaître une série double, en remplaçant $\chi_{(2n+1)a}$ par son expression à l'aide d'exponentielles, et appliquer le théorème de Fubini.

4.59 a) Montrer d'abord que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Raisonner ensuite par l'absurde.

b) Montrer : $u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2$

et utiliser un théorème de sommation des relations de comparaison.

c) Considérer $v_n = u_n^2 - 2n$, former $v_{n+1} - v_n$ et utiliser encore un théorème de sommation des relations de comparaison.

4.60 Minorer convenablement $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\varphi(k)}{k}$ pour déduire que cette somme ne tend pas vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Corrigés des exercices

4.1 a) On a : $0 \leq \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

b) On a, en utilisant une expression conjuguée :

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($1/2 \leq 1$) et le théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

c) On a, pour $n \geq 3$: $0 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Puisque $0 \leq \frac{5}{6} < 1$, la série géométrique $\sum_n \left(\frac{5}{6}\right)^n$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

d) On a :

$$\ln \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2n + 2} = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n + 2} \right) \\ \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{n^2 + 2n + 2} \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

e) Comme $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow[n \infty]{} 0$ et que $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$,

on a : $1 - \cos \left(\frac{\sin n}{n} \right) \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2$.

Et : $0 \leq \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$), la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2$ converge. Par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

f) On a : $n^{\frac{1}{2}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 \underset{n \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$.

Pour étudier la nature de la série $\sum_n \frac{\ln n}{n^2}$, nous allons essayer d'utiliser la règle $n^\alpha u_n$.

On a : $n^{3/2} \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \xrightarrow[n \infty]{} 0$,

par prépondérance classique.

D'où, à partir d'un certain rang : $n^{3/2} \frac{\ln n}{n^2} \leq 1$,

donc : $0 \leq \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.

D'après l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$), la série $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

On conclut, par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , que la série $\sum_n u_n$ converge.

g) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n \infty]{} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

h) On a :

$$u_n = \frac{(n+1)^a - n^a}{n^b} = n^{a-b} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^a - 1 \right) \\ = n^{a-b} \left(\frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

• Si $a \neq 0$, alors : $u_n \underset{n \infty}{\sim} n^{a-b} \frac{a}{n} = an^{a-b-1}$.

Il en résulte, d'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $a - b - 1 < -1$, c'est-à-dire $a < b$.

• Si $a = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la série $\sum_n u_n$ converge.

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si : $a < b$ ou $a = 0$.

4.2 Il s'agit de cas particuliers de la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Comme le résultat

$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge $\iff (\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1))$

est hors-programme, il nous faut ici étudier chaque cas proposé.

a) On a, pour $n \geq 3$: $0 \leq \frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge.

b) On a, pour $n \geq 3$: $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$.

D'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n \frac{\ln n}{n}$ diverge.

c) On a : $n^{3/2} u_n = n^{3/2} \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \xrightarrow{n \infty} 0$,

par prépondérance classique, d'où, à partir d'un certain rang : $n^{3/2} u_n \leq 1$, et donc : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.

D'après l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

d) On a : $nu_n = n \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \xrightarrow{n \infty} +\infty$,

par prépondérance classique, d'où, à partir d'un certain rang : $nu_n \geq 1$, et donc : $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$.

D'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ diverge.

e) Considérons l'application

$$f : [2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x \ln x}.$$

Il est clair que f est continue, décroissante, ≥ 0 . D'après le cours sur la comparaison série/intégrale, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si l'application f est intégrable sur $[2; +\infty[$.

On a, pour tout $X \in [2; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_2^X f(x) dx &= \int_2^X \frac{1}{x \ln x} dx \quad y = \ln x \quad \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{1}{y} dy \\ &= [\ln y]_{\ln 2}^{\ln X} = \ln \ln X - \ln \ln 2 \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, f n'est pas intégrable sur $[2; +\infty[$ et on conclut que la série $\sum_n \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

f) Considérons l'application

$$g : [2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x (\ln x)^2}.$$

Il est clair que g est continue, décroissante, ≥ 0 .

D'après le cours sur la comparaison série/intégrale, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si l'application g est intégrable sur $[2; +\infty[$.

On a, pour tout $X \in [2; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_2^X g(x) dx &= \int_2^X \frac{1}{x (\ln x)^2} dx \quad y = \ln x \quad \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{1}{y^2} dy \\ &= \left[-\frac{1}{y} \right]_{\ln 2}^{\ln X} = -\frac{1}{\ln X} + \frac{1}{\ln 2} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Ainsi, g est intégrable sur $[2; +\infty[$, et on conclut que la série $\sum_n \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge.

4.3 On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq w_n - u_n \leq v_n - u_n$.

Comme les séries de termes généraux u_n et v_n convergent, par opération, la série de terme général $v_n - u_n$ converge, puis, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série de terme général $w_n - u_n$ converge.

Enfin, comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (w_n - u_n) + u_n$

et que les séries de termes généraux $w_n - u_n$ et u_n convergent, par addition, la série de terme général w_n converge.

4.4 • On a, pour tout n : $0 \leq u_n = \frac{a_n}{1 + a_n} \leq a_n$.

Comme la série $\sum_n a_n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

• Puisque la série $\sum_n a_n$ converge, on a : $a_n \xrightarrow{n \infty} 0$, donc :

$$v_n = \frac{ch a_n - 1}{a_n} \underset{n \infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2} a_n^2}{a_n} = \frac{1}{2} a_n \geq 0.$$

Comme la série $\sum_n a_n$ converge, par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n v_n$ converge.

• Puisque la série $\sum_n a_n$ converge, on a : $a_n \xrightarrow{n \infty} 0$, donc, à partir d'un certain rang : $0 \leq a_n \leq 1$, d'où :

$$0 \leq w_n = a_n^2 \leq a_n.$$

Comme la série $\sum_n a_n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n w_n$ converge.

4.5 a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \frac{n}{n^3 + n + 1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n |u_n|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_n u_n$ converge absolument, donc converge.

b) La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est alternée, $u_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$ et la suite $(|u_n|)_{n \geq 1}$ est décroissante, donc, d'après le TSCSA, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

c) Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'après le TSCSA, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Par théorème de comparaison, puisque la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge et est à termes ≥ 0 , la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument, donc converge.

Par addition de deux séries convergentes, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

d) Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

D'après le TSCSA, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Par théorème de comparaison, puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$

converge et est à termes ≥ 0 , la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Par addition d'une série divergente et de deux séries convergentes, on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

4.6 Nous allons utiliser le lien suite/série.

On a, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{a + n + 1} - \ln(n + 1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{a+1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$), la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. Par théorème de comparaison, il en résulte que la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument, donc converge.

Ceci montre que la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge.

D'après le lien suite/série, on conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

4.7 1) Existence :

On a :

$$u_n = \frac{2(2n^2 + n - 3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \underset{n \infty}{\sim} \frac{4n^2}{n^4} = \frac{4}{n^2} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série

$\sum_n u_n$ converge, donc $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ existe.

2) Calcul :

• Effectuons une décomposition en éléments simples.

Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{aligned} F &= \frac{2(2X^2 + X - 3)}{X(X+1)(X+2)(X+3)} \\ &= \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} + \frac{d}{X+3}. \end{aligned}$$

Par multiplication par X , puis remplacement de X par 0, on obtient : $a = \frac{-6}{6} = -1$.

Par multiplication par $X+1$, puis remplacement de X par -1 , on obtient : $b = \frac{-4}{-2} = 2$.

Par multiplication par $X + 2$, puis remplacement de X par -2 , on obtient : $c = \frac{6}{2} = 3$.

Par multiplication par $X + 3$, puis remplacement de X par -3 , on obtient : $d = \frac{24}{-6} = -4$.

On obtient : $F = -\frac{1}{X} + \frac{2}{X+1} + \frac{3}{X+2} - \frac{4}{X+3}$.

• D'où, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ (tel que $N \geq 4$), par télescopage :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N u_n \\ &= -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} + 3 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} - 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+3} \\ &= -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 2 \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + 3 \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} - 4 \sum_{n=4}^{N+3} \frac{1}{n} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=4}^N \frac{1}{n}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=4}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1}\right) \\ &\quad + 3\left(\frac{1}{3} + \sum_{n=4}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &\quad - 4\left(\sum_{n=4}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{2}{N+1} + 3\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &\quad - 4\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

On conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et que sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{5}{6}.$$

4.8 a) On a : $u_n = \frac{n^3 + 6n^2 - 5n - 2}{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^3}{n!}$, noté v_n .

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_n v_n$ converge.

Par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

b) • En notant

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X(X-1), P_3 = X(X-1)(X-2),$$

on a : $\forall i \in \{0, \dots, 3\}$, $\deg(P_i) = i$, donc, d'après le cours, $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

• Exprimons P sur la base $\mathcal{B}$.

On a, en développant :

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - X, P_3 = X^3 - 3X^2 + 2X.$$

D'où, en faisant apparaître successivement P_3, P_2, P_1, P_0 dans P :

$$\begin{aligned} P &= X^3 + 6X^2 - 5X - 2 \\ &= (X^3 - 3X^2 + 2X) + 9X^2 - 7X - 2 \\ &= P_3 + 9(X^2 - X) + 2X - 2 = P_3 + 9P_2 + 2P_1 - 2P_0. \end{aligned}$$

c) On a, en manipulant des sommes de séries toutes convergentes (d'après la règle de d'Alembert, par exemple) :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (P_3(n) + 9P_2(n) + 2P_1(n) - 2P_0(n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_3(n)}{n!} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_2(n)}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_1(n)}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_0(n)}{n!}. \end{aligned}$$

Calculons ces différentes sommes de séries convergentes.

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_0(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e. \\ \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_1(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} = e \\ \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_2(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} = e \\ \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_3(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} = e. \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e + 9e + 2e - 2e = 10e.$$

4.9 a) Effectuons un développement asymptotique :

$$n \sin \frac{1}{n} = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis :

$$\begin{aligned} \ln u_n &= n^a \ln \left(n \sin \frac{1}{n} \right) = n^a \ln \left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= n^a \left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = -\frac{1}{6} n^{a-2} + o(n^{a-2}). \end{aligned}$$

• Si $a < 2$, alors $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, $u_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Si $a = 2$, alors $\ln u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{1}{6}$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\frac{1}{6}}$, $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Supposons $a > 2$. On a alors :

$$n^2 u_n = e^{2 \ln n - \frac{1}{6} n^{a-2} + o(n^{a-2})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

par prépondérance classique.

On a donc, à partir d'un certain rang : $n^2 u_n \leq 1$, d'où : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$. D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si : $a > 2$.

b) • Si $\lambda < 0$, alors $(\ln n)^\lambda \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Si $\lambda = 0$, alors $(\ln n)^\lambda = 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1}$, $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Supposons $\lambda > 0$. Essayons d'utiliser la règle $n^\alpha u_n$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, à choisir ultérieurement. On a :

$$n^\alpha u_n = n^\alpha e^{-(\ln n)^\lambda} = e^{\alpha \ln n - (\ln n)^\lambda}.$$

Pour comparer $\alpha \ln n$ et $(\ln n)^\lambda$, il nous faut connaître la position de λ par rapport à 1.

* Si $\lambda < 1$, alors, en prenant $\alpha = 1$, on a :

$$n u_n = e^{\ln n - (\ln n)^\lambda} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty,$$

donc, à partir d'un certain rang : $n u_n \geq 1$, donc : $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$,

D'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

* Si $\lambda = 1$, alors $u_n = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, donc la série $\sum_n u_n$ diverge.

* Si $\lambda > 1$, alors, en prenant $\alpha = \frac{1+\lambda}{2} > 1$, on a :

$$n^\alpha u_n = e^{\alpha \ln n - (\ln n)^\lambda} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc, à partir d'un certain rang, : $n^\alpha u_n \leq 1$, d'où : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$. D'après l'exemple de Riemann ($\alpha > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si : $\lambda > 1$.

c) On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n &= \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n}} e^x (-\ln x) dx \\ &\leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) e^{\frac{1}{n}} \left(-\ln \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{2}{n(n+2)} e^{\frac{1}{n}} \ln(n+2) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2 \frac{\ln n}{n^2}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \frac{\ln n}{n^2}$, utilisons la règle $n^\alpha v_n$ (cf. aussi l'exercice 4.2).

$$\text{On a : } n^{3/2} v_n = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc, à partir d'un certain rang : $n^{3/2} v_n \leq 1$,

d'où : $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. D'après l'exemple de Riemann

($3/2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n v_n$ converge. D'après le théorème d'équivalence et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

d) On a, en utilisant des développements limités :

$$\begin{aligned} \ln \frac{n+1}{n-1} &= \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin \frac{1}{n} + a \tan \frac{1}{n} + b \ln \frac{n+1}{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + a \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + b \left(\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= (1 + a + 2b) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

• Si $1 + a + 2b \neq 0$, alors $u_n \sim (1 + a + 2b) \frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{1 + a + 2b} u_n \sim \frac{1}{n} \geq 0$. D'après l'exemple de Riemann, par multiplication par un coefficient fixé non nul, et d'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n u_n$ diverge.

• Si $1 + a + 2b = 0$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que, à partir d'un certain rang : $|u_n| \leq \frac{C}{n^2}$. D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de ma-

joration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left| O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$ est convergente. Ainsi, la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :
 $1 + a + 2b = 0$.

e) On a, par développements limités :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= e^a \exp\left(-\frac{a^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= e^a \left(1 - \frac{a^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\text{et : } \frac{n}{n+1} e^a = e^a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = e^a \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{a}{n}\right)^a - \frac{n}{n+1} e^a \\ &= e^a \left(1 - \frac{a^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - e^a \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{e^a(2 - a^2)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

• Si $a^2 \neq 2$, alors $u_n \sim \frac{e^a(2 - a^2)}{2n}$.

D'après l'exemple de Riemann, le produit par un coefficient fixé non nul, et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ est divergente.

• Si $a^2 = 2$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left| O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$ est convergente. La série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement, la série $\sum_n u_n$ est convergente si et seulement si :
 $a^2 = 2$.

f) Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2 + n + 3} + a\sqrt{n^2 + n + 1} + b\sqrt{n^2 + n + 2} \\ &= n \left[\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^{1/2} + a \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} + b \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^{1/2} \right] \\ &= n \left[\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right) - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + a \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + b \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \right] \\ &= n \left[(1 + a + b) + \frac{1}{2} (1 + a + b) \frac{1}{n} + \left(\frac{11}{8} + \frac{3a}{8} + \frac{7b}{8}\right) \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \\ &= (1 + a + b)n + \frac{1}{2} (1 + a + b) + \frac{11 + 3a + 7b}{8} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

• Si $1 + a + b \neq 0$, alors $u_n \sim (1 + a + b)n$, donc $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Si $1 + a + b = 0$ et $11 + 3a + 7b \neq 0$, alors

$u_n \sim \frac{11 + 3a + 7b}{8} \frac{1}{n}$, donc, par l'exemple de Riemann, par la multiplication par un coefficient fixé non nul, et par le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

• Si $1 + a + b = 0$ et $11 + 3a + 7b = 0$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left| O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$

est convergente. La série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

On résout le système linéaire :

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 11 + 3a + 7b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$$

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :

$$a = 1 \text{ et } b = -2.$$

g) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(n!)^a}{n^n} > 0$.

Essayons d'utiliser la règle de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{((n+1)!)^a}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n!)^a} \\ &= \frac{(n+1)^a n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)^{a-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp(-1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.\end{aligned}$$

On a donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-1} (n+1)^{a-1}$.

• Si $a > 1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty > 1$, donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_n u_n$ diverge.

• Si $a = 1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} < 1$, donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_n u_n$ converge.

• Si $a < 1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$, donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_n u_n$ converge.

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :

$$a \leq 1.$$

h) Comme le comportement de x^n dépend de la position de x par rapport à 1, et que x varie entre 0 et a , séparons l'étude en cas selon la position de a par rapport à 1.

• Cas $0 \leq a < 1$:

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}0 \leq u_n &= \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx \leq \int_0^a x^n dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{n+1} \leq a^{n+1}.\end{aligned}$$

Comme $0 \leq a < 1$, la série géométrique $\sum_n a^{n+1}$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

• Cas $a \geq 1$:

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}u_n &= \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx \geq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[3]{2}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{n} \geq 0.\end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann, le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , et le théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

On conclut que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :
 $a < 1$.

i) On veut comparer $2^{\sqrt{n}}$ et a^n , et comparer $3^{\sqrt{n}}$ et b^n . Cette comparaison dépend de la position de a et de b par rapport à 1.

• Cas $a > 1$ et $b > 1$:

Alors : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. La série géométrique $\sum_n \left(\frac{a}{b}\right)^n$

converge si et seulement si : $\frac{a}{b} < 1$. Par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si : $\frac{a}{b} < 1$.

• Cas $a \leq 1$ et $b > 1$:

$$\text{Alors : } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = e^{\sqrt{n} \ln 2 - n \ln b},$$

$$\text{donc : } n^2 u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{2 \ln n + \sqrt{n} \ln 2 - n \ln b} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il en résulte, à partir d'un certain rang : $n^2 u_n \leq 1$, donc : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$. D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

• Cas $a > 1$ et $b \leq 1$:

$$\text{Alors : } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a^n}{3^{\sqrt{n}}} = e^{n \ln a - \sqrt{n} \ln 3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

donc $u_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Cas $a \leq 1$ et $b \leq 1$:

$$\text{Alors : } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^{\sqrt{n}}}{3^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{n}}.$$

$$\text{On a : } n^2 u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{2 \ln n + \sqrt{n} \ln 2/3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

par prépondérance classique. On a donc, à partir d'un certain rang : $n^2 u_n \leq 1$, d'où : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

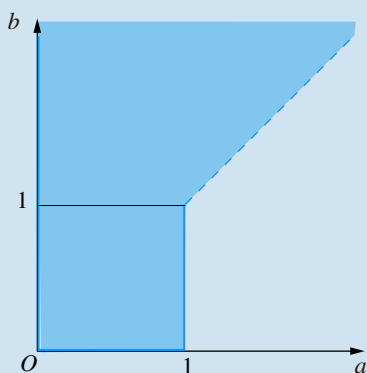
D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :

$$\left(a > 1, b > 1, \frac{a}{b} < 1\right) \quad \text{ou} \quad (a \leq 1, b > 1) \quad \text{ou} \quad (a \leq 1, b \leq 1),$$

ce qui revient à : $a \leq 1$ ou $1 < a < b$.

On peut représenter graphiquement l'ensemble des couples $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que la série $\sum_n u_n$ converge :



j) Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt[n]{a} - 2\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} = e^{\frac{1}{n} \ln a} - 2e^{\frac{1}{n} \ln b} + e^{\frac{1}{n} \ln c} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \ln a + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2\left(1 + \frac{1}{n} \ln b + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{n} \ln c + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \frac{ac}{b^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

• Si $\frac{ac}{b^2} \neq 1$, alors $\ln \frac{ac}{b^2} \neq 0$, $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln \frac{ac}{b^2} \frac{1}{n}$.

Comme la série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, par multiplication par un coefficient fixé non nul, puis par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n u_n$ diverge.

• Si $\frac{ac}{b^2} = 1$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left|O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$

converge. Ainsi, la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

On conclut que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :
 $ac = b^2$.

k) Essayons d'utiliser la règle de d'Alembert.

On a : $\forall n \geq 2$, $u_n > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(\ln(n+1)\right)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(\ln n)^n} \\ &= \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \\ &= \frac{\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) \\ &= \exp\left(n \ln \left[1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(n \left[\frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

D'autre part, par prépondérance classique :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On déduit : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$.

D'après la règle de d'Alembert, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

4.10 1) • On sait (par exemple, par l'étude des variations de $t \mapsto \tan t - t$), que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \tan t \geq t.$$

• D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \tan(x^n) dx \geq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Comme la série $\sum_n \frac{1}{n+1}$ diverge (série décalée de la série harmonique), par théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

2) • Montrons : $\forall t \in [0; 1]$, $\tan t \leq 2t$.

L'application $f : t \mapsto \tan t - 2t$ est dérivable sur $[0; 1]$ et :

$$\forall t \in [0; 1], \quad f'(t) = \tan^2 t - 1,$$

d'où le tableau de variations de f :

t	0	$\pi/4$	1
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	0	$\searrow$	$\nearrow$

Et : $f(1) = \tan 1 - 2 \simeq -0,443 \dots < 0$.

On conclut : $\forall t \in [0; 1], \tan t \leq 2t$.

• D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^1 \tan(x^{n^2}) dx \leq \int_0^1 2x^{n^2} dx \\ &= 2 \left[\frac{x^{n^2+1}}{n^2+1} \right]_0^1 = \frac{2}{n^2+1} \leq \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n v_n$ converge.

4.11 1) Commençons par chercher un équivalent de $\sum_{k=0}^n k!$,

lorsque l'entier n tend vers l'infini.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (tel que $n \geq 2$) :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\sum_{k=0}^n k! \right) - n! = \sum_{k=0}^{n-1} k! = \left(\sum_{k=0}^{n-2} k! \right) + (n-1)! \\ &\leq (n-1)(n-2)! + (n-1)! = 2(n-1)!. \end{aligned}$$

Comme $\frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \infty} 0$, on a : $2(n-1)! = o(n!)$,

et on obtient : $\sum_{k=0}^n k! \underset{n \infty}{\sim} n!$.

2) • On a :

$$u_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n k! \underset{n \infty}{\sim} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

Comme la série $\sum_n \frac{1}{n+1}$ diverge (série décalée de la série harmonique), par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

• On a :

$$v_n = \frac{1}{(n+2)!} \sum_{k=0}^n k! \underset{n \infty}{\sim} \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n v_n$ converge.

4.12 Essayons d'utiliser la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On a donc : $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1)$,

d'où :

$$\begin{aligned} &\ln u_n \\ &= \frac{1}{n} \left(\ln(n!) - \ln((2n)!) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\left[n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[2n \ln(2n) - 2n + \frac{1}{2} \ln(2\pi 2n) + o(1) \right] \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(-n \ln n + (1-2 \ln 2)n - \frac{1}{2} \ln 2 + o(1) \right) \\ &= -\ln n + (1-2 \ln 2) + o(1). \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} u_n &= \exp \left(-\ln n + (1-2 \ln 2) + o(1) \right) \\ &= \frac{1}{n} e^{1-2 \ln 2} e^{o(1)} \underset{n \infty}{\sim} e^{1-2 \ln 2} \frac{1}{n} = \frac{e}{4n} \geq 0. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

4.13 Si la série $\sum_n u_n$ converge, alors nécessairement

$u_n \xrightarrow{n \infty} 0$, donc : $(n^4 + 3n^2)^{1/4} - (P(n))^{1/3} = o(1)$, d'où :

$$(P(n))^{1/3} = (n^4 + 3n^2)^{1/4} + o(1) \underset{n \infty}{\sim} (n^4 + 3n^2)^{1/4} \underset{n \infty}{\sim} n,$$

et donc $P(n) \underset{n \infty}{\sim} n^3$, ce qui montre que P est de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1.

Notons donc $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= (n^4 + 3n^2)^{1/4} - (n^3 + an^2 + bn + c)^{1/3} \\ &= n \left[\left(1 + \frac{3}{n^2} \right)^{1/4} - \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} \right)^{1/3} \right] \\ &= n \left[\left(1 + \frac{3}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^4} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} \right) + \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) a^2}{2!} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \right] \\ &= -\frac{a}{3} + \left(\frac{3}{4} - \frac{b}{3} + \frac{a^2}{9} \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

• Si $a \neq 0$, alors $u_n \xrightarrow{n \infty} -\frac{a}{3} \neq 0$, donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Si $a = 0$ et $\underbrace{\frac{3}{4} - \frac{b}{3} + \frac{a^2}{9}}_{\text{noté } C} \neq 0$, alors $u_n \sim \frac{C}{n}$.

D'après l'exemple de Riemann, par multiplication par une constante non nulle, et par le théorème d'équivalence pour des séries à termes réels ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

• Si $a = 0$ et $C = 0$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left|O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$

converge. Ainsi, la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $a = 0$

et $C = 0$, ce qui revient à : $a = 0$ et $b = \frac{9}{4}$.

On conclut :

l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général $u_n = (n^4 + 3n^2)^{1/4} - (P(n))^{1/3}$ converge est

$$\left\{X^3 + \frac{9}{4}X + c; c \in \mathbb{R}\right\}.$$

On remarque que, pour $c \in \mathbb{R}$, u_n n'est défini qu'à partir d'un certain rang, mais que la série de terme général u_n est convergente, puisque l'énoncé n'impose pas l'indice de départ.

4.14 a) Puisque la série $\sum_n u_n$ converge, on a :

$u_n \xrightarrow{n \infty} 0$, donc, à partir d'un certain rang : $u_n \neq -1$.

b) D'après a), la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang.

On a, pour tout n :

$$|v_n - u_n| = \left| \frac{u_n}{1 + u_n} - u_n \right| = \frac{u_n^2}{|1 + u_n|} \sim u_n^2.$$

Comme la série de terme général u_n^2 converge, d'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série de terme général $|v_n - u_n|$ converge. Ainsi, la série de terme général $v_n - u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Enfin, comme, pour tout n : $v_n = (v_n - u_n) + u_n$,

par addition de deux séries convergentes, on conclut que la série de terme général v_n est convergente.

4.15 Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, dans $\mathbb{R}^N$ usuel, pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\forall (x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N,$$

$$\left| \sum_{n=1}^N x_n y_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^N x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N y_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant ceci à $\sqrt{u_n}$ et $\frac{1}{n}$, à la place respectivement de x_n et y_n , on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^N u_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ sont convergentes et à termes ≥ 0 , on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

D'où :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci montre que les sommes partielles de la série à termes ≥ 0 ,

$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$, sont majorées.

D'après un lemme du cours, on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

4.16 • Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > 0$.

• On a : $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \ln \left(1 + \frac{u_n}{n} \right) \leq \frac{u_n}{n}$,

car on sait : $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

Il en résulte, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \geq 1, 0 < u_n \leq \frac{u_1}{(n-1)!},$$

puis : $\forall n \geq 1, 0 < u_n^\alpha \leq \frac{u_1^\alpha}{((n-1)!)^\alpha}$, noté v_n .

On a : $\forall n \geq 1, v_n > 0$, et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{((n-1)!)^\alpha}{(n!)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \infty} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n^\alpha$ converge, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

4.17 Commençons par étudier le comportement de $|u_n|$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

$$\text{On a : } |u_n| = \frac{n^a}{(n+1)^b} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^a}{n^b} = n^{a-b}.$$

• Si $a > b$, alors $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Si $a = b$, alors $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

• Supposons $a < b$. La série $\sum_n u_n$ est alternée et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Nous allons montrer que la suite $(|u_n|)_{n \geq 1}$ est décroissante. Considérons l'application

$$f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^a}{(x+1)^b} = x^a(x+1)^{-b}.$$

L'application f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et, pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ax^{a-1}(x+1)^{-b} - x^a b(x+1)^{-b-1} \\ &= x^{a-1}(x+1)^{-b-1}((a-b)x + a). \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend de la position de x par rapport à $\frac{a}{b-a}$.

On a :

$$\forall x \in \left[\frac{a}{b-a}; +\infty \right[, \quad f'(x) \leq 0.$$

Il en résulte que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.

D'après le TSCSA, on déduit que la série $\sum_n u_n$ converge.

On conclut que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :

$$a < b.$$

4.18 1) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left| \frac{(2+3i)n+2-i}{(3+4i)n+3+i} \right|^n = \left| \frac{(2n+2)+i(3n-1)}{(3n+3)+i(4n+1)} \right|^n \\ &= \left(\frac{(2n+2)^2 + (3n-1)^2}{(3n+3)^2 + (4n+1)^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{13n^2 + 2n + 5}{25n^2 + 26n + 10} \right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{13 \frac{n^2}{25} + \frac{2}{25}n + \frac{5}{25}}{n^2 + \frac{26}{25}n + \frac{10}{25}} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \left(\frac{13}{25} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\sqrt{\frac{13}{25}} \right)^n.$$

Comme $0 \leq \sqrt{\frac{13}{25}} < 1$, la série géométrique $\sum_n \left(\sqrt{\frac{13}{25}} \right)^n$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_n |u_n|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

2) On a de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left| \frac{(2+3i)n+2-i}{(3+2i)n+3+i} \right|^n = \left| \frac{(2n+2)+i(3n-1)}{(3n+3)+i(2n+1)} \right|^n \\ &= \left(\frac{(2n+2)^2 + (3n-1)^2}{(3n+3)^2 + (2n+1)^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{13n^2 + 2n + 5}{13n^2 + 22n + 10} \right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ln |v_n| &= \frac{n}{2} \ln \frac{13n^2 + 2n + 5}{13n^2 + 22n + 10} \\ &= \frac{n}{2} \ln \left(1 - \frac{20n + 5}{13n^2 + 22n + 10} \right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2} \frac{-(20n + 5)}{13n^2 + 22n + 10} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{20n^2}{26n^2} = -\frac{20}{26} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{20}{26} = -\frac{10}{13}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\ln |v_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$, $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc la série $\sum_n v_n$ diverge grossièrement.

4.19 1) Existence :

$$\text{On a : } u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2} + (n+2)\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n u_n$

converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ existe.

2) Calcul :

Essayons d'amener un télescope.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par utilisation d'une expression conjuguée :

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2} + (n+2)\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n+2} - (n+2)\sqrt{n}}{n^2(n+2) - (n+2)^2n}$$

$$= \frac{n\sqrt{n+2} - (n+2)\sqrt{n}}{-2n^2 - 4n} = \frac{n\sqrt{n+2} - (n+2)\sqrt{n}}{-2n(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+2}}.$$

On en déduit, pour tout $N \geq 3$, par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{N+1}} - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

On conclut : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$

Remarque : la partie 2) (calcul) montre que la série converge, et rend donc alors inutile la partie 1) (existence).

4.20 1) Existence :

On a :

$$u_n = \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$), par multiplication par un coefficient fixé (2), et d'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$

converge.

2) Calcul :

Essayons d'amener un télescopage.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ (tel que $N \geq 5$) :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^N \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) \\ &= \sum_{n=2}^N \ln \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^N \ln \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=2}^N \ln(n-1) + \sum_{n=2}^N \ln(n+2) - \sum_{n=2}^N \ln n - \sum_{n=2}^N \ln(n+1) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \ln n + \sum_{n=4}^{N+2} \ln n - \sum_{n=2}^N \ln n - \sum_{n=3}^{N+1} \ln n \\ &= \left(\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \sum_{n=4}^{N-1} \ln n \right) \\ &\quad + \left(\sum_{n=4}^{N-1} \ln n + \ln N + \ln(N+1) + \ln(N+2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \left(\ln 2 + \ln 3 + \sum_{n=4}^{N-1} \ln n + \ln N \right) \\ &- \left(\ln 3 + \sum_{n=4}^{N-1} \ln n + \ln N + \ln(N+1) \right) \\ &= -\ln 3 + \ln(N+2) - \ln N = -\ln 3 + \ln \left(1 + \frac{2}{N} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\ln 3. \end{aligned}$$

On conclut : $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) = -\ln 3.$

Remarque : la partie 2) (calcul) montre que la série converge, et rend donc alors inutile la partie 1) (existence).

4.21 a) Récurrence sur n .

• Pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^n v_k = v_1 = \frac{u_1}{1+u_1} = 1 - \frac{1}{1+u_1},$

donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

• Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1) \cdots (1+u_n)}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} v_k &= \left(\sum_{k=1}^n v_k \right) + v_{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{(1+u_1) \cdots (1+u_n)} \right) \\ &\quad + \frac{u_{n+1}}{(1+u_1) \cdots (1+u_{n+1})} \\ &= 1 + \frac{-(1+u_{n+1}) + u_{n+1}}{(1+u_1) \cdots (1+u_{n+1})} \\ &= 1 - \frac{1}{(1+u_1) \cdots (1+u_{n+1})}, \end{aligned}$$

ce qui établit la formule pour $n + 1$.

On conclut, par récurrence sur n :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1) \cdots (1+u_n)}.$$

Remarque : On peut aussi obtenir le résultat en écrivant, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1+u_n-1}{(1+u_1) \cdots (1+u_n)} \\ &= \frac{1}{(1+u_1) \cdots (1+u_{n-1})} - \frac{1}{(1+u_1) \cdots (1+u_n)}, \end{aligned}$$

et en réalisant un télescopage.

b) D'après a), on a : $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n v_k \leq 1$.

Ainsi, la série $\sum_n v_n$ est à termes ≥ 0 et ses sommes partielles sont majorées. D'après un lemme du cours, on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

4.22 • Groupons les termes trois par trois.

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{3p} u_n &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{3p-2} + \frac{1}{3p-1} - \frac{2}{3p} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{3p} \frac{1}{n} - 3 \sum_{k=1}^p \frac{1}{3k} = \sum_{n=1}^{3p} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=p+1}^{3p} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{p+i} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{1+\frac{i}{p}}. \end{aligned}$$

En notant $q = 2p$, on a donc :

$$\sum_{n=1}^{3p} u_n = 2 \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{1}{1+\frac{2i}{q}}.$$

On reconnaît une somme de Riemann, pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+\frac{2}{x}}$, qui est continue sur le segment $[0; 1]$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{1}{1+\frac{2i}{q}} &\xrightarrow{q \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+2x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

On a donc, par suite extraite : $\sum_{n=1}^{3p} u_n \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \ln 3$.

• Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a alors aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{3p+1} u_n &= \left(\sum_{n=1}^{3p} u_n \right) + u_{3p+1} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \ln 3, \\ \sum_{n=1}^{3p+2} u_n &= \left(\sum_{n=1}^{3p} u_n \right) + u_{3p+1} + u_{3p+2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \ln 3. \end{aligned}$$

Comme les $3p, 3p+1, 3p+2, p$ décrivant $\mathbb{N}^*$, recouvrent tous les entiers (≥ 3), on déduit :

$$\sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 3.$$

On conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et que sa somme est égale à $\ln 3$.

4.23 • Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé.

Pour évaluer la somme de série proposée, nous allons utiliser une comparaison à une intégrale.

L'application $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t(t+x)}$

est continue, décroissante, intégrable sur $[1; +\infty[$, car $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \geq 0$.

On déduit, par comparaison série/intégrale, que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+x)}$ converge (ce qui était aussi visible en prenant un équivalent) et que :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(t) dt &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+x)} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \frac{1}{x} [\ln t - \ln(t+x)]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{x} \left[\ln \frac{t}{t+x} \right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{x} \ln \frac{1}{1+x} = \frac{\ln(x+1)}{x}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\frac{\ln(x+1)}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

• Comme :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{o(\ln(x+1))}{x+1} = o\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = o\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right),$$

$$\text{On a : } \frac{1}{1+x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

On conclut, par encadrement :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x+1)}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left(\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}. \end{aligned}$$

4.24 • Commençons par chercher un équivalent simple de

$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

D'abord, d'après la règle de d'Alembert ou le cours sur la série de l'exponentielle, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge, donc, pour tout

$$n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \text{ existe.}$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) - \frac{1}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2} = o\left(\frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

On a donc : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right).$

• D'où :

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\ln \frac{1}{n!} + \ln(1 + o(1)) \right) = \frac{1}{n} (-\ln n! + o(1)). \end{aligned}$$

• De la formule de Stirling : $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$

on déduit : $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1),$

d'où :

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \frac{1}{n} \left(-n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + o(1) \right) \\ &= -\ln n + 1 + o(1), \end{aligned}$$

puis : $u_n = e^{-\ln n + 1 + o(1)} = \frac{1}{n} e^{o(1)} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n}.$

On conclut : $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n}.$

4.25 a) • D'abord, une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0; \pi/2[.$

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \text{Arctan} \left(\underbrace{a_n}_{\geq 0} + \tan u_n \right) \geq \text{Arctan}(\tan u_n) = u_n,$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

• Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\pi/2$, on conclut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite ℓ vérifie $\ell \in [0; \pi/2[.$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0,$

on déduit, par passage à la limite : $\ell \geq u_0,$

et donc $\ell > 0$ d'où $\ell \in]0; \pi/2[.$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\tan u_{n+1} = a_n + \tan u_n,$

donc $a_n = \tan u_{n+1} - \tan u_n.$

D'après le lien suite/série, il en résulte que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la suite $(\tan u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

D'après a), si $\ell \neq \pi/2$, alors la suite $(\tan u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tan \ell$, et, si $\ell = \pi/2$, alors la suite $(\tan u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

On déduit que la suite $(\tan u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\ell \neq \pi/2$ et on conclut que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si $\ell \neq \pi/2.$

4.26 a) Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ fixé.

On a, en échangeant les rôles de p et q :

$$S_n = \sum_{1 \leq p < q \leq n} \frac{1}{\sqrt{pq}} = \sum_{1 \leq q < p \leq n} \frac{1}{\sqrt{qp}},$$

d'où, en additionnant :

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{1 \leq p \neq q \leq n} \frac{1}{\sqrt{pq}} = \sum_{1 \leq p, q \leq n} \frac{1}{\sqrt{pq}} - \sum_{1 \leq p=q \leq n} \frac{1}{\sqrt{pq}} \\ &= \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \left(\sum_{q=1}^n \frac{1}{\sqrt{q}} \right) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = A_n^2 - B_n. \end{aligned}$$

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, S_n = \frac{1}{2}(A_n^2 - B_n).$

b) Essayons de trouver d'abord des équivalents simples de A_n et de $B_n.$

• Par comparaison somme/intégrale, puisque l'application $x \in [1; +\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$ est continue et décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq A_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

On calcule l'intégrale :

$$\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^n = 2(\sqrt{n} - 1).$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$2\sqrt{n} - 2 \leq A_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Comme $2\sqrt{n} - 2 \sim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n}$, et $2\sqrt{n} - 1 \sim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n}$,

on déduit, par encadrement : $A_n \sim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n}.$

• De même, on obtient : $B_n \sim_{n \rightarrow \infty} \ln n.$

• On a donc $A_n^2 \sim_{n \rightarrow \infty} 4n$ et $B_n \sim_{n \rightarrow \infty} \ln n.$

Comme $\ln n = o(n)$, on conclut :

$$S_n = \frac{1}{2}(A_n^2 - B_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2n.$$

4.27 On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda_n u_{n+1}}{1 + \lambda_n} - u_{n+1} = \frac{u_n - u_{n+1}}{1 + \lambda_n},$$

$$\text{d'où : } |u_{n+2} - u_{n+1}| = \frac{1}{1 + \lambda_n} |u_{n+1} - u_n|.$$

Ainsi, en décalant l'indice, on a :

$$\forall n \geq 1, |u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{1 + \lambda_{n-1}} |u_n - u_{n-1}|.$$

• Si $u_1 = u_0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est constante, donc convergente.

• Supposons $u_1 - u_0 \neq 0$.

Alors : $\forall n \geq 1, |u_{n+1} - u_n| > 0$.

$$\text{On a : } \frac{|u_{n+1} - u_n|}{|u_n - u_{n-1}|} = \frac{1}{1 + \lambda_{n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_n |u_{n+1} - u_n|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente. D'après le lien suite/série, on conclut que la suite $(u_n)_n$ converge.

Remarque : on peut montrer de la même façon que la même conclusion est valable si on suppose que la suite $(\lambda_n)_n$ converge vers un réel > 0 .

4.28 Rappelons la formule de Taylor-Young pour f de classe C^3 sur $[-1; 1]$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

En remplaçant x par $\frac{1}{n}$, par $-\frac{1}{n}$, on obtient, après simplifications :

$$\begin{aligned} u_n &= n \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right) \right) - 2f'(0) \\ &= \frac{f'''(0)}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left| o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$ converge. Ainsi, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

4.29 a) • Montrons, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 5.$$

C'est vrai pour $n = 0$, puisque $u_0 = 5$.

Si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 8 = u_n(u_n - 5) + 8 \geq 8 \geq 5,$$

donc c'est vrai pour $n + 1$.

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 5$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 6u_n + 8 = (u_n - 3)^2 - 1 \geq 3 \geq 0,$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

• Supposons $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Alors, par passage à la limite dans

la définition de la suite $u_n : \ell = \ell^2 - 5\ell + 8$, d'où facilement $\ell \in \{2, 4\}$. Mais : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 5$, donc, par passage à la limite, $\ell \geq 5$, contradiction.

Ceci montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et divergente, on conclut :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} - 2} &= \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2 - 5u_n + 6} = \frac{(-1)^{n+1}}{(u_n - 2)(u_n - 3)} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 2} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n - 3} + \frac{(-1)^n}{u_n - 2}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \frac{(-1)^n}{u_n - 3} = \frac{(-1)^n}{u_n - 2} - \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} - 2}.$$

c) D'après b), on a, par télescopage, pour tout $N \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{u_n - 3} &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{(-1)^n}{u_n - 2} - \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} - 2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{u_n - 2} - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} - 2} \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{u_n - 2} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^n}{u_n - 2} \\ &= \frac{1}{u_0 - 2} - \frac{(-1)^{N+1}}{u_{N+1} - 2} \\ &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{u_n - 3}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u_n - 2} = \frac{1}{3}.$$

4.30 • Commençons par chercher un équivalent de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini. À cet effet, étudions le comportement de u_n .

1) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &= \frac{1}{(n+2)^2} |(n+1)u_n + n| \\ &\leq \frac{n+1}{(n+2)^2} |u_n| + \frac{n}{(n+2)^2} \leq |u_n| + 1. \end{aligned}$$

On déduit, en réitérant et par addition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq |u_0| + n,$$

d'où : $u_n = O(n)$.

2) On a alors, en reportant :

$$(n+2)^2 u_{n+1} = (n+1)u_n + n = O(n^2),$$

$$\text{donc : } u_{n+1} = \frac{O(n^2)}{(n+2)^2} = O(1),$$

puis, en décalant l'indice : $u_n = O(1)$.

3) En reportant encore :

$$(n+2)^2 u_{n+1} = (n+1)u_n + n = O(n),$$

$$\text{donc : } u_{n+1} = \frac{O(n)}{(n+2)^2} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

En particulier : $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

4) En reportant encore :

$$\begin{aligned} (n+2)^2 u_{n+1} &= (n+1)u_n + n \\ &= n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n + 1 \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } u_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{(n+2)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

$$\text{donc, en décalant : } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

• On a alors : $u_n^a \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^a} \geq 0$.

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n^a$ converge si et seulement si $a > 1$.

4.31 a) • Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \geq 1$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

$$\bullet \text{ On a, pour tout } n \geq 2 : u_n^2 = u_{n-1}^2 + \frac{1}{n-1},$$

d'où, en réitérant et en additionnant :

$$u_n^2 = u_1^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)}_{\text{noté } H_{n-1}},$$

d'où, puisque $u_n > 0$: $u_n = \sqrt{1 + H_{n-1}}$.

Comme $H_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, on déduit : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

De plus, on sait :

$$H_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n-1) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n,$$

donc : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\ln n}$.

$$b) 1) \text{ On a : } \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \geq 0.$$

Comme $n \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, à partir d'un certain rang :

$n \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \geq 1$, donc : $\frac{1}{\sqrt{\ln n}} \geq \frac{1}{n}$. D'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ diverge.

D'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge.

2) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n}$, est alternée, son terme général tend vers 0 (car $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$) et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante, car :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{n}} \geq u_n.$$

D'après le TSCSA, on conclut que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{u_n}$ converge.

4.32 a) • Montrons, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1.$$

La propriété est vraie pour $n = 0$, car $u_0 \in]1; +\infty[$.

Si la propriété est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 = \underbrace{(u_n - 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{u_n}_{> 1} > 1,$$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

On conclut, par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

• On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0,$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

• Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$. Alors, par passage à la limite dans la définition de la suite, on a : $\ell = \ell^2 - \ell + 1$, d'où $\ell = 1$. Mais, d'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$, d'où, par passage à la limite : $\ell \geq u_0 > 1$, contradiction.

Ceci montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et divergente, on conclut :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

b) On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n-1} &= \frac{1}{u_n^2 - u_n} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1 - u_n}{u_n(u_n - 1)} = -\frac{1}{u_n}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{u_n} &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1} \right) \\ &= \frac{1}{u_0-1} - \frac{1}{u_{N+1}-1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{1}{u_0-1}. \end{aligned}$$

On conclut que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0-1}.$$

4.33

Notons, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$.

1) Existence :

On a : $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} \geq 0$. D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2) On va faire apparaître un télescopage, à l'aide d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

• On a :

$$\begin{aligned} F &= \frac{3X-2}{X^3+3X^2+2X} = \frac{3X-2}{X(X+1)(X+2)} \\ &= \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}, \end{aligned}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est à calculer.

On multiplie par X , puis on remplace X par 0 , et on obtient :

$$a = \frac{-2}{2} = -1.$$

On multiplie par $X+1$, puis on remplace X par -1 , et on obtient :

$$b = \frac{-5}{-1} = 5.$$

On multiplie par $X+2$, puis on remplace X par -2 , et on obtient :

$$c = \frac{-8}{2} = -4.$$

D'où la décomposition en éléments simples de F :

$$F = -\frac{1}{X} + \frac{5}{X+1} - \frac{4}{X+2},$$

$$\text{et donc : } \forall n \geq 1, u_n = -\frac{1}{n} + \frac{5}{n+1} - \frac{4}{n+2}.$$

• Formons les sommes partielles.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ (tel que $N \geq 5$), par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N \left(-\frac{1}{n} + \frac{5}{n+1} - \frac{4}{n+2} \right) \\ &= -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 5 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} - 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} \\ &= -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 5 \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} - 4 \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} \right) \\ &\quad + 5 \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} \right) \\ &\quad - 4 \left(\sum_{n=3}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{N+1} - \frac{4}{N+2} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 1. \end{aligned}$$

Ceci montre que la série proposée converge (ce que l'on avait déjà obtenu par une autre méthode, plus directe, en 1)) et que sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n} = 1.$$

4.34

a) Récurrence sur n (d'autres méthodes sont possibles).

La propriété est vraie pour $n = 0$, car :

$$\phi_1^2 - \phi_0 \phi_2 = 1 = (-1)^0.$$

Si la propriété est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+1} \phi_{n+3} &= \phi_{n+2}(\phi_{n+1} + \phi_n) - \phi_{n+1}(\phi_{n+2} + \phi_{n+1}) \\ &= \phi_{n+2} \phi_n - \phi_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie pour $n+1$.

On conclut, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2} = (-1)^n.$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} - \frac{\phi_{n+2}}{\phi_{n+1}} = \frac{\phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2}}{\phi_n \phi_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{\phi_n \phi_{n+1}}.$$

c) On en déduit, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\phi_n \phi_{n+1}} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} - \frac{\phi_{n+2}}{\phi_{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} - \sum_{n=1}^N \frac{\phi_{n+2}}{\phi_{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \frac{\phi_2}{\phi_1} - \frac{\phi_{N+2}}{\phi_{N+1}}. \end{aligned}$$

Et : $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = \phi_1 + \phi_0 = 1$.

Pour obtenir la limite de $\frac{\phi_{N+2}}{\phi_{N+1}}$, lorsque l'entier N tend vers l'infini, calculons ϕ_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre. D'après le cours, nous disposons d'une méthode de calcul du terme général.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

D'après le cours, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

On calcule λ_1, λ_2 à l'aide des données initiales ϕ_0 et ϕ_1 :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \phi_0 = 0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = \phi_1 = 1. \end{cases}$$

On obtient, par résolution de ce système linéaire :

$$\lambda_1 = \frac{-1}{r_2 - r_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \lambda_2 = \frac{-1}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Comme $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$ et $\left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$, on déduit :

$$\phi_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

$$\text{D'où : } \frac{\phi_{N+2}}{\phi_{N+1}} \underset{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{On conclut : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\phi_n \phi_{n+1}} = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

4.35

a) Notons, sous réserve d'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \tan \left(\frac{\pi}{2} (7 + 4\sqrt{3})^n \right),$$

et considérons, sous réserve d'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \tan \left(\frac{\pi}{2} (7 - 4\sqrt{3})^n \right).$$

Notons aussi : $a_n = (7 + 4\sqrt{3})^n$, $b_n = (7 - 4\sqrt{3})^n$.

• On a, par la formule du binôme de Newton :

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} (4\sqrt{3})^k,$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} (-1)^k (4\sqrt{3})^k.$$

En additionnant, les termes d'indices impairs se simplifient, les termes d'indices pairs se doublent, et on obtient :

$$a_n + b_n = 2 \sum_{p=0}^{E(n/2)} \underbrace{\binom{n}{2p}}_{\text{entier}} 7^{n-2p} 4^{2p} 3^p \in 2\mathbb{Z}.$$

On a donc : $\frac{\pi}{2} a_n + \frac{\pi}{2} b_n \in \pi\mathbb{Z}$.

D'autre part, comme $0 \leq 7 - 4\sqrt{3} < 1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\pi}{2} (7 - 4\sqrt{3})^n \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right],$$

donc v_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe aussi et $u_n = -v_n$.

• Puisque $0 \leq 7 - 4\sqrt{3} < 1$, on a : $(7 - 4\sqrt{3})^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

donc : $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2} (7 - 4\sqrt{3})^n \geq 0$.

La série géométrique $\sum_n (7 - 4\sqrt{3})^n$ converge, donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n v_n$ converge.

En passant aux opposés, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

b) Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

Pour obtenir une inégalité portant sur u_n , essayons d'en former une portant sur $1 + x + \dots + x^n$, pour tout $x \in [0; 1]$.

Rappelons la comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n réels ≥ 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+,$$

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k}_{\text{moyenne arithmétique}} \geq \underbrace{\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}}}_{\text{moyenne géométrique}}.$$

Appliquons ceci à $1, \dots, x^n$ (et $n+1$ à la place de n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1],$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}(1+x+\dots+x^n) &\geq (1 \cdot x \cdot \dots \cdot x^n)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= (x^{1+\dots+n})^{\frac{1}{n+1}} = (x^{\frac{n(n+1)}{2}})^{\frac{1}{n+1}} = x^{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n &\leq \int_0^1 \frac{x^n}{(n+1)x^{\frac{n}{2}}} dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{\frac{n}{2}} dx \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right]_0^1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{2}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

c) On a, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{(k+n)^2 - k^2} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2kn + n^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+n} \underset{p=k-n}{=} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{1}{2(p+n)+n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{1}{3n+2p} = \frac{1}{n} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{1}{3+2\frac{p}{n}}}_{\text{noté } v_n}. \end{aligned}$$

On reconnaît en v_n une somme de Riemann.

L'application $x \in [0; 1] \mapsto \frac{1}{3+2x}$ est continue sur le segment $[0; 1]$.

D'après le cours sur les sommes de Riemann :

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{3+2x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(3+2x) \right]_0^1 = \underbrace{\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}}_{\text{noté } C}.$$

On a donc : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C}{n}$, où $C > 0$ est fixé.

D'après l'exemple de Riemann et puisque $C \neq 0$, la série $\sum_n \frac{C}{n}$ diverge. Par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.

4.36 Essayons de comparer w_n avec un terme simple formé à partir de u_n et v_n .

On a, pour tout $n \geq 0$:

$$w_n = \frac{u_n^2 v_n^2}{au_n^3 + bv_n^3} \begin{cases} \leq \frac{u_n^2 v_n^2}{au_n^3} = \frac{v_n^2}{au_n} \\ \leq \frac{u_n^2 v_n^2}{bv_n^3} = \frac{u_n^2}{bv_n}, \end{cases}$$

d'où, par produit : $w_n^2 \leq \frac{u_n^2 v_n^2}{abu_n v_n} = \frac{u_n v_n}{ab}$.

Il est clair, par développement, que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2.$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n^2 \leq \frac{(u_n + v_n)^2}{2ab}$,

puis : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq \frac{u_n + v_n}{\sqrt{2ab}}$.

Par addition de deux séries convergentes, la série de terme général $u_n + v_n$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série de terme général w_n converge.

4.37 • Essayons d'exprimer $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ à l'aide d'une intégrale.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t)^k \right) dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt + \underbrace{(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt}_{\text{notée } a_n} = \ln 2 + a_n. \end{aligned}$$

• D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right) - 1 = e^{\ln 2 + a_n} - 1 = 2e^{a_n} - 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} |a_n| &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt \\ &= \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

d'où : $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On en déduit un développement asymptotique de u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(2e^{a_n} - 1) = \ln(2(1 + a_n + O(a_n^2)) - 1) \\ &= \ln(1 + 2a_n + O(a_n^2)) = 2a_n + O(a_n^2). \end{aligned}$$

Étudions maintenant les séries de termes généraux a_n et $O(a_n^2)$.

- La série $\sum_{n \geq 0} a_n$, est alternée, son terme général a_n tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini, et la suite $(|a_n|)_{n \geq 0}$ décroît, car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_{n+1}| = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t} dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = |a_n|.$$

D'après le TSCSA, la série de terme général a_n converge.

- On a vu plus haut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n}$,

$$\text{donc : } O(a_n^2) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left| O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$

converge. Ainsi, la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Les séries de termes généraux a_n et $O(a_n^2)$ convergent. On conclut, par addition de deux séries convergentes, que la série de terme général u_n converge.

4.38 1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \text{Max} \left(\sin \frac{1}{n}, \text{sh} \frac{1}{n} \right) = \text{sh} \frac{1}{n},$$

$$\text{donc : } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

2) Essayons de grouper les termes deux par deux.

Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}^* : v_p = u_{2p-1} + u_{2p}$.

On a :

$$\begin{aligned} v_p &= \sin \frac{1}{2p-1} - \text{sh} \frac{1}{2p} \\ &= \left(\frac{1}{2p-1} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right) - \left(\frac{1}{2p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2p-1)(2p)} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = O\left(\frac{1}{p^2}\right). \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left| O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right|$

converge. Ainsi, la série $\sum_n O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Ceci montre que la série $\sum_p v_p$ converge.

3) Étudions les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ en liaison avec les sommes partielles de la série $\sum_{p \geq 1} v_p$.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{2N-1} u_n = \sum_{p=1}^{N-1} v_p + u_{2N-1}, \quad \sum_{n=1}^{2N} u_n = \sum_{p=1}^N v_p.$$

Comme $u_{2N-1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$ et que la série $\sum_{p \geq 1} v_p$ converge, il s'en-

suit, en notant $S = \sum_{p=1}^{+\infty} v_p$:

$$\sum_{n=1}^{2N-1} u_n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} S \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{2N} u_n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} S,$$

$$\text{donc : } \sum_{n=1}^N u_n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} S.$$

Ceci montre que la série de terme général u_n converge.

4.39 a) Notons, pour tout $n \geq 1$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, qui existe,

puisque la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Puisque la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ décroît, on a, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{cases} 0 \leq 2nu_{2n} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq 2R_n \\ 0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq 2(n+1)u_{2n+1} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k \leq 2R_n. \end{cases}$$

Comme $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on déduit, par encadrement :

$$2nu_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad (2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Il en résulte : $nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

b) 1) On remarque : $\forall n \geq 1, v_n = nu_n^2 = (nu_n)u_n$.

Puisque $nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on a, à partir d'un certain rang,

$0 \leq nu_n \leq 1$, d'où : $0 \leq v_n \leq u_n$. Comme la série $\sum_n u_n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n v_n$ converge.

2) • Puisque $nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on a, à partir d'un certain rang,

$0 \leq nu_n < 1$, donc $w_n = \frac{u_n}{1 - nu_n}$ est défini à partir d'un certain rang.

• On a : $w_n = \frac{u_n}{1 - nu_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n \geq 0$.

Puisque la série $\sum_n u_n$ converge, par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n w_n$ converge.

4.40 a) On a, en réitérant l'hypothèse, pour tout n :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^a, \quad \dots, \quad \frac{u_2}{u_1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^a,$$

d'où, par produit et télescope multiplicatif :

$$\frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^a \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{1}{n^a}.$$

On a donc : $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq u_1 \frac{1}{n^a}$.

D'après l'exemple de Riemann ($a > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

b) Dans l'exemple, les u_n sont tous > 0 , et on a, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)} \frac{1}{2n+3} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} (2n+1) \\ &= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{2n}\right)} \\ &= \left(1 + \frac{2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\quad \left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $a \in]1; +\infty[$ fixé, on a :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\text{d'où : } \frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^a = \left(a - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En choisissant, par exemple, $a = \frac{5}{4}$, on a $a \in]1; +\infty[$

$$\text{et : } \frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^a \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{4n} < 0,$$

donc, à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^a \leq 0,$$

$$\text{d'où : } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^a.$$

D'après a), on conclut que la série de terme général u_n converge.

4.41 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ existe, puisque la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \text{ converge.}$$

• Essayons d'obtenir un équivalent simple de R_n lorsque l'entier n tend vers l'infini. Puisque $\frac{1}{k!} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ très vite, on peut espérer que R_n soit équivalent à son premier terme, qui est $\frac{1}{n!}$.

On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n - \frac{1}{n!} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n!} = o\left(\frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

On a donc : $R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n!}$, ou encore : $R_n = \frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)$.

• Notons, pour tout $n \geq 2$: $u_n = R_n^{\frac{1}{n \ln n}}$.

On a, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \frac{1}{n \ln n} \ln R_n = \frac{1}{n \ln n} \ln \left(\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n \ln n} \left(-\ln(n!) + \ln(1 + o(1))\right) \\ &= \frac{1}{n \ln n} (-\ln(n!) + o(1)) \\ &= -\frac{\ln(n!)}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right). \end{aligned}$$

Pour évaluer $\ln(n!)$, on peut faire une comparaison somme/intégrale, à l'aide de l'application $x \mapsto \ln x$, qui est croissante sur $[1; +\infty[$. On obtient classiquement : $\ln(n!) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n$.

D'où : $\ln u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$ et donc : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1}$.

4.42 Si $\alpha \leq 0$, alors $u_n \not\rightarrow 0$, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

Supposons $\alpha > 0$; alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Groupons par paquets de quatre termes consécutifs, en notant, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$v_p = u_{4p+1} + u_{4p+2} + u_{4p+3} + u_{4p+4}.$$

On a :

$$\begin{aligned} v_p &= -\frac{1}{(4p+1)^\alpha} - \frac{1}{(4p+2)^\alpha} + \frac{1}{(4p+3)^\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{(4p+4)^\alpha} \\ &= \frac{1}{(4p)^\alpha} \left(-\left(1 + \frac{1}{4p}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{2}{4p}\right)^{-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{3}{4p}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{4}{4p}\right)^{-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{(4p)^\alpha} \left(-\left(1 - \frac{\alpha}{4p}\right) - \left(1 - \frac{2\alpha}{4p}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{3\alpha}{4p}\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right) \right) \\ &= \frac{1}{(4p)^\alpha} \left(-\frac{\alpha}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right) \right) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-\alpha}{4^\alpha p^{\alpha+1}} < 0. \end{aligned}$$

Comme $\alpha + 1 > 1$, $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha+1}}$ converge, et donc $\sum_p v_p$ converge.

Les sommes partielles de la série $\sum_n u_n$ ne diffèrent de celles de $\sum_p v_p$ que par la somme d'au plus trois des u_n . Comme $\sum_p v_p$ converge et que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, il en résulte que $\sum_n u_n$ converge.

4.43 Puisque f est continue et ≥ 0 , l'intégrabilité de f sur $[0; +\infty[$ est équivalente à l'existence d'une limite finie en $+\infty$ pour l'application $X \mapsto \int_0^X f$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f$.

On a alors, puisque $f \geq 0$:

$$\begin{cases} \forall X \in [0; +\infty[, \int_0^X f \leq \sum_{n=0}^{E(X/\pi)+1} u_n \\ \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N u_n \leq (=) \int_0^{(N+1)\pi} f. \end{cases}$$

Il en résulte que f est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (1 + x^4 \sin^2 x)^{-3} dx \\ &= \int_0^\pi (1 + (n\pi + t)^4 \sin^2 t)^{-3} dt. \end{aligned}$$

Afin d'utiliser l'encadrement connu

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t,$$

scindons l'intégrale précédente, à l'aide de la relation de Chasles : $u_n = v_n + w_n$, où :

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + (n\pi + t)^4 \sin^2 t)^{-3} dt, \\ w_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1 + (n\pi + t)^4 \sin^2 t)^{-3} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + (n\pi + \pi - s)^4 \sin^2 s)^{-3} ds. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$,

où on a noté :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + (n\pi + \pi)^4 t^2)^{-3} dt \\ \beta_n &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + (n\pi)^4 \left(\frac{2t}{\pi}\right)^2\right)^{-3} dt. \end{aligned}$$

Par les changements de variable $y = (n\pi + \pi)^2 t$ pour α_n , et $y = (n\pi)^2 \frac{2t}{\pi}$ pour β_n , on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{(n\pi + \pi)^2} \int_0^{(n\pi + \pi)^2 \pi/2} (1 + y^2)^{-3} dy, \\ \beta_n &= \frac{\pi}{(n\pi)^2} \int_0^{(n\pi)^2} (1 + y^2)^{-3} dy. \end{aligned}$$

L'application $g : y \in [0; +\infty[\mapsto (1 + y^2)^{-3}$ est continue, ≥ 0 , et $g(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{y^6}$, donc, d'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($6 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , g est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Il en résulte, en notant $L = \int_0^{+\infty} (1 + y^2)^{-3} dy > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{(n\pi + \pi)^2 \frac{\pi}{2}} (1 + y^2)^{-3} dy &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} L, \\ \int_0^{(n\pi)^2} (1 + y^2)^{-3} dy &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} L. \end{aligned}$$

On déduit : $\alpha_n \sim \frac{2L}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$ et $\beta_n \sim \frac{L}{\pi} \frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \beta_n$ converge,

puis, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n u_n$ converge.

L'intervention de α_n est alors inutile, mais on ne pouvait guère le prévoir.

Finalement, f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

4.44 D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ existe, car

la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

1) Essayons d'obtenir une expression simple de R_n , faisant intervenir une intégrale au lieu d'une série.

• Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ fixés tels que $p > n$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^p \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=n+1}^p (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=n+1}^p (-t)^{k-1} dt = - \int_0^1 (-t)^n \sum_{q=0}^{p-n-1} (-t)^q dt \\ &= - \int_0^1 (-t)^n \frac{1 - (-t)^{p-n}}{1 - (-t)} dt = - \int_0^1 \frac{(-t)^n - (-t)^p}{1+t} dt \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt + (-1)^p \int_0^1 \frac{t^p}{1+t} dt. \end{aligned}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Comme :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \frac{t^p}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^p dt \\ &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

on déduit du résultat précédent, en faisant tendre l'entier p vers

l'infini : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

Il nous reste à trouver un équivalent simple de cette dernière intégrale, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

2) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

Effectuons une intégration par parties, pour des applications de classe C^1 sur le segment $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{1}{1+t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{-1}{(1+t)^2} dt \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Comme

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

on déduit :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} o(1) \\ &= \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

On conclut : $R_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$.

4.45 a) • Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

• On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} \geq \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

d'où : $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$,

puis, par décalage d'indice : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

b) Puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$.

Montrons, par récurrence : $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.

• La propriété est vraie pour n_0 .

• Si la propriété est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, alors :

$$u_{n+2} = \sqrt{(n+1) + u_{n+1}} \geq \sqrt{n+u_n} = u_{n+1},$$

donc la propriété est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence sur n :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n,$$

donc la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante.

c) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$P_n = X^2 - X - n \in \mathbb{R}[X].$$

On a, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} P_n(u_{n+1}) &= u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n \\ &= (n+u_n) - u_{n+1} - n = -(u_{n+1} - u_n) \leq 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que u_{n+1} est compris entre les deux zéros de P_n :

$$\underbrace{\frac{1 - \sqrt{1+4n}}{2}}_{\leq 0} \leq u_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{1+4n}}{2}.$$

Ainsi : $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{1+4n}}{2}$,

donc : $u_{n+1} = O(\sqrt{n}) = o(n)$,

puis, par décalage d'indice : $u_n = o(n-1) = o(n)$.

En reportant dans la formule définissant la suite, on a donc :

$$u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n},$$

puis, par décalage d'indice : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n}$.

d) Pour $\alpha \in]0; +\infty[$ fixé, on a : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes réels ≥ 0 , on conclut :

la série de terme général $\frac{1}{u_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\frac{\alpha}{2} > 1$, c'est-à-dire si et seulement si : $\alpha > 2$.

e) La série de terme général $\frac{(-1)^n}{u_n^\beta}$ est alternée, puisque $u_n^\beta > 0$.

Son terme général tend vers 0, puisque $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $\beta > 0$.

La suite $\left(\frac{1}{u_n^\beta}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang, puisque la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante à partir d'un certain rang. D'après le TSCSA, on conclut que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{u_n^\beta}$ converge, pour tout $\beta \in]0; +\infty[$ fixé.

4.46 1) Existence :

On a, par développements limités :

$$\begin{aligned} u_n &= n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \\ &= n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann 2 > 1) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \left| o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_n o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

On conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

2) Calcul :

Essayons de calculer les sommes partielles, en amenant un télescoping. On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^N n (\ln(n+1) - \ln n) - N + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^N n (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \sum_{n=1}^N n \ln(n+1) - \sum_{n=1}^N n \ln n \\ &= \sum_{n=2}^{N+1} (n-1) \ln n - \sum_{n=1}^N n \ln n \\ &= - \sum_{n=2}^{N+1} \ln n + \sum_{n=2}^{N+1} n \ln n - \sum_{n=1}^N n \ln n \\ &= - \ln((N+1)!) + (N+1) \ln(N+1). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= - \ln((N+1)!) + (N+1) \ln(N+1) \\ &\quad - N + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$,

$$\text{on a : } \frac{(N+1)^{N+1} e^{-N}}{(N+1)!} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{\sqrt{2\pi N}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ln \frac{(N+1)^{N+1} e^{-N}}{(N+1)!} &= \ln \left(\frac{e}{\sqrt{2\pi N}} \left(1 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln N + o(1). \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la constante d'Euler, on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \left(1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln N\right) + \frac{1}{2} (\ln N + \gamma) + o(1) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \gamma + o(1). \end{aligned}$$

On conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (ce qui a déjà été établi en 1) plus directement) et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \gamma \simeq 0,366\,365 \dots$$

4.47

1) Existence :

$$\text{On a : } u_n = \frac{1}{n(2n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2) Calcul :

Essayons de faire apparaître un télescopage dans l'expression des sommes partielles, en utilisant une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

On a facilement la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X(2X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{2}{2X+1}.$$

D'où, pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \left(\sum_{p=2}^{2N+1} \frac{1}{p} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} \right) = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} \\ &= 2 \left(\ln N + \gamma + o_{N \rightarrow \infty}(1) \right) - 2 \left(\ln(2N+1) + \gamma + o(1) \right) + 2 \\ &= 2 \ln \frac{N}{2N+1} + 2 + o(1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 \ln \frac{1}{2} + 2 = 2 - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

On conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (ce qui était déjà acquis d'après 1)), et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2 - 2 \ln 2$.

4.48

Notons, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$u_{p,q} = \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \geq 0.$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a, par une décomposition en éléments simples immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_{p,q} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}.$$

On en déduit, par sommation et télescopage, pour $P \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{p=0}^P u_{p,q} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{P+q^2+1} \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \frac{1}{q^2}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ converge et que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{q^2}.$$

La série $\sum_{q \geq 1} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ converge, d'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$).

D'après le théorème d'interversion de deux sommations, pour le cas des séries doubles à termes ≥ 0 , on déduit :

* pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q \geq 1} u_{p,q}$ converge

* la série $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ converge

$$* \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}.$$

On conclut :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.49

On va essayer d'utiliser un théorème de sommation des relations de comparaison.

• Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{n} 2^{-n}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$,

et : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1$. D'après la règle de d'Alembert, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sqrt{k} 2^{-k}$ existe.

• Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - u_{n+1}$.

On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n} 2^{-n} - \sqrt{n+1} 2^{-(n+1)} \\ &= 2^{-(n+1)} \sqrt{n} \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2^{-(n+1)} \sqrt{n} = \frac{1}{2} u_n. \end{aligned}$$

Ainsi : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2v_n$.

Puisque :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0), u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2v_n, \sum_n u_n \text{ converge,}$$

d'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\text{on a : } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2v_k.$$

Mais, par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\sum_{k=n+1}^N (u_k - u_{k+1}) = u_{n+1} - u_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u_{n+1}.$$

On déduit :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_{n+1},$$

d'où : $R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2u_{n+1} = 2\sqrt{n+1} 2^{-(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n} 2^{-n}.$

4.50 Nous allons essayer d'utiliser un théorème de sommation des relations de comparaison.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{e^n}{n}.$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^n}{n} = \frac{e^n}{n(n+1)} (ne - (n+1)) \\ &= \frac{e^n}{n(n+1)} ((e-1)n - 1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \underbrace{\frac{(e-1)e^n}{n}}_{\text{noté } a_n}. \end{aligned}$$

Puisque :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 0), u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a_n, \sum_n a_n \text{ diverge,}$$

d'après un théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{(e-1)e^k}{k}.$$

On a, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1 = \frac{e^{n+1}}{n+1} - e \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{n}.$$

On conclut : $\sum_{k=1}^n \frac{e^k}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{(e-1)n}.$

4.51 Essayons d'abord de nous ramener à des termes plus petits.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \\ &= \frac{\pi n}{2} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\text{noté } v_n}. \end{aligned}$$

Pour obtenir une évaluation de v_n , essayons d'appliquer un théorème de sommation des relations de comparaison.

On a : $\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 0$

et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge d'après l'exemple de Riemann ($1/2 \leq 1$).

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, on déduit :

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Pour obtenir une évaluation de cette dernière somme, nous allons utiliser une comparaison somme/intégrale.

L'application $t \in [1; +\infty[\rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} \in \mathbb{R}$ est continue et décroissante, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Et : } \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^n = 2\sqrt{n} - 2.$$

$$\text{On a donc : } \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{n+1} - 2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

$$\text{et } 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

$$\text{Par encadrement, on déduit : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n},$$

$$\text{et donc : } v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

$$\text{Autrement dit : } v_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

En reportant dans l'égalité liant S_n et v_n , on conclut :

$$S_n = \frac{\pi}{2}n - 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

4.52 a) • Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > 0$.

$$\bullet \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{nu_n} > 0,$$

donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) croissante.

• Supposons que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, et notons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Comme $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante, on a : $\ell \geq u_0 > 0$, donc $\ell > 0$.

$$\text{D'où : } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{nu_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\ell n} > 0.$$

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ diverge.

D'après le lien suite/série, on conclut que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ diverge, contradiction.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et divergente, donc :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

b) Nous allons essayer d'utiliser un théorème de sommation des relations de comparaison.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{nu_n} \right)^2 = u_n^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2 u_n^2},$$

d'où : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2 u_n^2}$.

Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, on a : $\frac{1}{n^2 u_n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où :

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n} \geq 0.$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n}$ est divergente et à termes ≥ 0 , d'après un théorème de sommation des relations de comparaison :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}.$$

D'une part, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_1^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n^2.$$

D'autre part, par comparaison série/intégrale, puisque l'application $t \in [1; +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n-1) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n.$$

On déduit : $u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2 \ln n$,

puis, comme les u_n sont tous ≥ 0 : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2 \ln n}$.

4.53 On a : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a n^\alpha$, donc : $u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a^2 n^{2\alpha}$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} a^2 n^{2\alpha}$ est divergente et à termes ≥ 0 , d'après un théorème de sommation des relations de comparaison, on a : $\sum_{k=1}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n a^2 k^{2\alpha}$.

Une classique comparaison somme/intégrale montre :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^{2\alpha} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_1^n t^{2\alpha} dt = \left[\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} \right]_1^n \\ &= \frac{n^{2\alpha+1} - 1}{2\alpha+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}. \end{aligned}$$

D'où :
$$\sum_{k=1}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a^2 \frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}.$$

De même :
$$\sum_{k=1}^n v_k^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b^2 \frac{n^{2\beta+1}}{2\beta+1}$$

et
$$\sum_{k=1}^n u_k v_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} ab \frac{n^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\left(\sum_{k=1}^n u_k v_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n v_k^2\right)} &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\left(ab \frac{n^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}\right)^2}{a^2 \frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} b^2 \frac{n^{2\beta+1}}{2\beta+1}} \\ &= \frac{(2\alpha+1)(2\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)^2}. \end{aligned}$$

On conclut :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n u_k v_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n v_k^2\right)} = \frac{(2\alpha+1)(2\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)^2}.$$

4.54 Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ et $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$ sont de même nature, puisque :

$$\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \right) = -\ln \left(1 - \frac{1}{p_n} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p_n} > 0.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a : $\sum_{n=1}^N \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \ln \left(\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \right)$.

Pour chaque n de $\{1, \dots, N\}$, on a, en utilisant une série géométrique :
$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{k_n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^{k_n}}.$$

Tout entier v de $\{2, \dots, p_N\}$ admet une décomposition primaire $v = p_1^{r_1} \dots p_N^{r_N}$, où $r_1, \dots, r_N$ sont des entiers naturels.

De plus, pour tout n de $\{1, \dots, N\}$: $p_N \geq v \geq p_n^{r_n} \geq 2^{r_n}$,

donc :
$$r_n \leq \frac{\ln p_N}{\ln 2}.$$

En notant $\rho_N = E\left(\frac{\ln p_N}{\ln 2}\right) + 1$, on a donc :

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \geq \sum_{k_n=0}^{\rho_N} \frac{1}{p_n^{k_n}},$$

puis :
$$\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \geq \prod_{n=1}^N \left(\sum_{k_n=0}^{\rho_N} \frac{1}{p_n^{k_n}} \right).$$

Comme, tout entier v tel que $2 \leq v \leq p_N$ admet une décomposition primaire dont les facteurs premiers sont tous $\leq p_N$, on a :

$$\prod_{n=1}^N \left(\sum_{k_n=0}^{\rho_N} \frac{1}{p_n^{k_n}} \right) \geq \sum_{v=1}^{p_N} \frac{1}{v}.$$

Puisque la série harmonique $\sum_{v \geq 1} \frac{1}{v}$ est divergente et à termes > 0 , et que $p_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty$, on a :

$$\sum_{v=1}^{p_N} \frac{1}{v} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

Il en résulte $\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty$,

$$\sum_{n=1}^N \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty, \text{ et enfin } \sum_{n=1}^N \frac{1}{p_n} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

Finalement, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Remarque : Le résultat est immédiat si on sait que $p_n \sim n \ln n$ (résultat très difficile à obtenir).

4.55 a) 1^{er} cas : $\alpha = 1$:

Raisonnons par l'absurde : supposons que la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n}$ converge.

Alors, nécessairement $\frac{u_n}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc :

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \sim -\ln \left(1 - \frac{u_n}{S_n} \right) = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

On a, par télescopage, pour tout $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^N \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \sum_{n=2}^N (\ln S_n - \ln S_{n-1}) = \ln S_N - \ln S_1.$$

Comme la série $\sum_n u_n$ diverge et est à termes ≥ 0 , on a :

$$S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty, \text{ d'où : } \sum_{n=2}^N \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ diverge.

Par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n}$ diverge, contradiction.

On conclut que la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

2^e cas : $\alpha \in]0; 1[$:

Comme $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, on a, pour n assez grand :

$S_n^\alpha \leq S_n$, donc $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{u_n}{S_n} \geq 0$. Puisque la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n}$ diverge (cf. 1^{er} cas), on conclut, par théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , que la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

3^e cas : $\alpha \in]1; +\infty[$:

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

D'où, par addition et relation de Chasles, pour tout $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^N \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^N \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_{S_1}^{S_N} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \int_{S_1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Ceci montre que les sommes partielles de la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ sont majorées et donc, puisqu'il s'agit d'une série à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

Finalement : la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

b) Même méthode qu'en a). On obtient :

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{r_n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

4.56 1) Existence de C :

D'abord, il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > 0$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right).$$

$$\text{On a : } \ln \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{k}.$$

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On a, d'après l'étude de la constante d'Euler :

$$w_n = \ln n + \gamma + o_{n \rightarrow \infty}(1).$$

D'autre part :

$$v_n - w_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\ln \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{k} \right)}_{\text{noté } a_k}.$$

Et, en utilisant des développements limités :

$$\begin{aligned} a_k &= \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2k^2} \geq 0. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_k a_k$ converge. Notons

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

On a donc : $v_n - w_n = \sum_{k=1}^n a_k = S + o(1),$

d'où : $v_n = w_n + S + o(1) = \ln n + \gamma + S + o(1),$
puis :

$$u_n = e^{v_n} = e^{\ln n + \gamma + S + o(1)} = n e^{\gamma + S} e^{o(1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{\gamma + S} n.$$

En notant $C = e^{\gamma + S} > 0$, on conclut : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} Cn.$

2) Évaluation de C :

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = n+1 \geq n. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{n} \geq 1.$

Comme $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C$, on déduit : $C \geq 1.$

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$:

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) = 3 \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right).$$

Et, pour tout $k \geq 2$: (1) $1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{1}{k-1}.$

En effet :

$$(1) \iff \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \iff \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k},$$

et cette dernière inégalité est vraie.

On déduit :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 3 \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k-1}\right) = 3 \prod_{k=2}^n \frac{k}{k-1} \\ &= 3 \frac{2 \cdots n}{1 \cdots (n-1)} = 3n. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \geq 2, \frac{u_n}{n} \leq 3.$

Comme $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C$, on déduit : $C \leq 3.$

Finalement : $1 \leq C \leq 3.$

4.57 a) Calculons les sommes partielles de la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ en faisant intervenir des intégrales.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx. \end{aligned}$$

$$\text{On a : } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge (ce que l'on pouvait montrer plus directement par le TSCSA) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, son reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est donné par :

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right) \\ &= (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx. \end{aligned}$$

b) De même qu'en a), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n R_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left(\sum_{k=0}^n (-x)^k \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx. \end{aligned}$$

De la même façon qu'en a), on déduit que la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, son reste $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k$

$$\text{vérifie : } \rho_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx.$$

c) 1) On effectue une troisième fois le même type de calcul. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \rho_k = - \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3} dx,$$

la série $\sum_n \rho_n$ converge, et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n &= - \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3} dx \quad y = 1+x \quad - \int_1^2 \frac{y-1}{y^3} dy \\ &= - \int_1^2 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3} \right) dy = \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} \right]_1^2 = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} -(-1)^n \rho_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2^2} dx = \frac{1}{4(n+2)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4n} \geq 0. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann, le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_n -(-1)^n \rho_n$

diverge. Par passage à l'opposée, on conclut que la série $\sum_n (-1)^n \rho_n$ diverge.

Attention : Malgré les notations, la suite $(\rho_n)_n$ est alternée, et la suite $((-1)^n \rho_n)_n$ est à termes de signe fixe (tous négatifs).

4.58 Nous allons essayer de faire intervenir une série double.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch}(2n+1)a} &= \frac{2}{e^{(2n+1)a} + e^{-(2n+1)a}} \\ &= \frac{2}{e^{(2n+1)a}} \frac{1}{1 + e^{-2(2n+1)a}} \\ &= 2e^{-(2n+1)a} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p e^{-2(2n+1)pa} \\ &= 2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p e^{-(2n+1)(2p+1)a}. \end{aligned}$$

Notons, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$:

$$u_{n,p} = 2(-1)^p e^{-(2n+1)(2p+1)a}.$$

• Par un calcul analogue au précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \geq 0} |u_{n,p}|$ converge et :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \frac{2}{e^{(2n+1)a}} \frac{1}{1 - e^{-2(2n+1)a}} = \frac{1}{\operatorname{sh}(2n+1)a}.$$

• Comme $\frac{1}{\operatorname{sh}(2n+1)a} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{e^{(2n+1)a}} = 2e^{-a}(e^{-2a})^n \geq 0$, et que la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (e^{-2a})^n$ converge (car $a > 0$), par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\operatorname{sh}(2n+1)a}$ converge.

D'après le théorème de Fubini, on en déduit :

* pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ converge (absolument)

* la série $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$ converge (absolument)

$$* \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}.$$

Enfin, pour tout $p \in \mathbb{N}$, comme au début de la solution :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^p e^{-(2n+1)(2p+1)a} \\ &= 2(-1)^p e^{-(2p+1)a} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2(2p+1)a})^n \\ &= 2(-1)^p e^{-(2p+1)a} \frac{1}{1 - e^{-2(2p+1)a}} \\ &= (-1)^p \frac{2}{e^{(2p+1)a} - e^{-(2p+1)a}} = \frac{(-1)^p}{\operatorname{sh}(2p+1)a}. \end{aligned}$$

On conclut, en revenant à un même indice :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(2n+1)a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh}(2n+1)a}.$$

4.59 a) • Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \geq 0$, u_n existe et $u_n > 0$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$,

donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

• Supposons que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\forall n \geq 0, u_n \geq u_0$,

on a, par passage à la limite : $\ell \geq u_0 > 0$, donc : $\ell > 0$.
D'où, en passant à la limite dans l'égalité de définition de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$: $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, contradiction.

Ceci montre que $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

Puisque $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et divergente, on conclut :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

b) On a, pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2},$$

$$\text{d'où : } u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2.$$

$$\text{Ainsi : } u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 0} 2$ est divergente et à termes ≥ 0 , d'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\text{on a : } \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n.$$

Mais, par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n^2.$$

D'où : $u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2n$, puis, comme $u_n \geq 0$, on conclut :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

c) Considérons, pour tout $n \geq 0$: $v_n = u_n^2 - 2n$.

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1}^2 - 2(n+1)) - (u_n^2 - 2n) \\ &= (u_{n+1}^2 - u_n^2) - 2 = \frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ est divergente et à termes ≥ 0 , d'après un théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}.$$

D'une part, par comparaison somme/intégrale, puisque l'application $t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{t} \in \mathbb{R}$ est décroissante et continue, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n-1) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n.$$

D'autre part, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1.$$

$$\text{On a donc : } v_n - v_1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln n.$$

$$\text{Il en résulte } v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty, \text{ puis : } v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln n.$$

$$\text{Ainsi : } v_n = \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n),$$

d'où :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{2n + v_n} = \left(2n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2n} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2n} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt{2n} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

4.60 Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{\varphi(n)}{n^2}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\varphi(k)}{4n^2} = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \varphi(k).$$

Puisque les entiers $\varphi(n+1), \dots, \varphi(2n)$, sont deux à deux distincts et ≥ 1 , on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \varphi(k) \geq \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \frac{n+1}{8n} \geq \frac{1}{8}.$$

Si la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ convergeait, on aurait alors, en notant

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi(k)}{k} :$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \left(\sum_{k=1}^{2n} u_k\right) - \left(\sum_{k=1}^n u_k\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S - S = 0,$$

contradiction.

On conclut que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Plan

Les méthodes à retenir	186
Énoncés des exercices	192
Du mal à démarrer ?	201
Corrigés	205

Thèmes abordés dans les exercices

- Étude des convergences (simple, uniforme) d'une suite d'applications
- Recherche de limites d'intégrales, d'équivalents d'intégrales, de développements asymptotiques d'intégrales
- Approximation uniforme de fonctions par des fonctions d'un type donné
- Étude des convergences (simple, absolue, normale, uniforme) d'une série d'applications
- Étude de la somme d'une série d'applications : ensemble de définition, continuité, limites, classe, variations, tracé de la courbe représentative
- Obtention d'égalités du type intégrale = série.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Pour une suite d'applications : définition des convergences (simple, uniforme), lien logique $C.U. \implies C.S.$, caractérisation de la $C.U.$ de $(f_n)_n$ vers f par : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- Théorèmes du cours pour les suites d'applications : $C.U.$ et limite, $C.U.$ et continuité en un point, $C.U.$ et continuité sur un intervalle, $C.U.$ et intégration sur un segment, $C.U.$ et dérivation
- Théorème de convergence dominée
- Les deux théorèmes de Weierstrass
- Pour une série d'applications : définition des convergences (simple, absolue, normale, uniforme), liens logiques $C.N. \implies C.U. \implies C.S.$, $C.N. \implies C.A. \implies C.S.$, lien logique $C.U. \implies (\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$, caractérisation de la $C.U.$ par : $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- Théorèmes du cours sur les séries d'applications : $C.U.$ et limite, $C.U.$ et continuité en un point, $C.U.$ et continuité sur un intervalle, $C.U.$ et intégration sur un segment, $C.U.$ et dérivation
- Théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications.

Les méthodes à retenir

Pour étudier la convergence simple d'une suite d'applications
 $(f_n : X \longrightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$, dans un exemple

Fixer $x \in X$ quelconque, étudier la convergence de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dans E , et, si celle-ci converge, déterminer sa limite $f(x)$.

➡ Exercices 5.1, 5.8, 5.13, 5.27

Dans des exemples faciles, on peut quelquefois montrer directement la convergence uniforme, ce qui entraîne la convergence simple.

➡ Exercice 5.1 a).

Sachant déjà que $(f_n)_n$ converge simplement sur X vers une certaine application $f : X \longrightarrow E$, voir si, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée, et, si c'est le cas, on a :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

On essaiera de calculer $\|f_n - f\|_\infty$, souvent en étudiant les variations de $f_n - f$.

➡ Exercices 5.1 c), d)

Si le calcul de $\|f_n - f\|_\infty$ ne paraît pas facile, étudier $\|f_n - f\|_\infty$. À cet effet :

* pour montrer la convergence uniforme, majorer $\|f_n - f\|_\infty$ par un terme tendant vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

➡ Exercices 5.1 a), b), 5.8 c), 5.13, 5.27 b), c)

* pour montrer la non-convergence uniforme, minorer $\|f_n - f\|_\infty$ par un terme ne tendant pas vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini, par exemple, en évaluant $|f_n - f|$ en un point convenable dépendant de n .

➡ Exercices 5.1 e) à h), 5.8 a), b), d), 5.27 a), d)

Pour montrer la non-convergence uniforme, on pourra parfois mettre en défaut une propriété qu'aurait transmise à f la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$. Par exemple, si les f_n sont toutes continues, si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ et si f est discontinue, alors la convergence n'est pas uniforme.

➡ Exercices 5.1 g), 5.27 b)

Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ et $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$, on cherche alors éventuellement des parties convenables Y de X telles que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f|_Y$.

➡ Exercices 5.1 e) à h).

Pour étudier la convergence uniforme d'une suite d'applications
 $(f_n : X \longrightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$, dans un exemple

Dans un cadre abstrait,

pour montrer $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur X

- Évaluer $\|f_n - f\|_\infty$ et établir $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, souvent par une majoration convenable.

➡ Exercices 5.9 à 5.12.

- Ne revenir à la définition en ε et N qu'en dernier recours.

Pour montrer qu'une application, obtenue comme limite d'une suite d'applications, est continue, est de classe C^1 , C^k , C^∞

Essayer d'appliquer le théorème du cours sur continuité et convergence uniforme sur tout segment de l'intervalle d'étude, ou le théorème du cours sur la dérivation pour une suite d'applications.

➡ Exercice 5.46 c).

Pour permuter intégrale et limite en vue d'obtenir une formule du genre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

Essayer de :

- appliquer une méthode élémentaire : si, pour $x \in I$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ admet une limite, notée $f(x)$, voir si f est intégrable sur I , former $\left| \int_I f_n - \int_I f \right|$, et, par majorations élémentaires (utilisant souvent : linéarité de l'intégration, relation de Chasles, changement de variable, intégration par parties, expression conjuguée, majorations classiques), obtenir $\left| \int_I f_n - \int_I f \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, d'où $\int_I f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_I f$.

➡ Exercice 5.18 a)

- appliquer le théorème du cours sur convergence uniforme et intégration sur un segment, dans le cas où :
 - * $I = [a; b]$ est un segment
 - * pour tout n , f_n est continue sur $[a; b]$
 - * $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a; b]$ vers une certaine f
- appliquer le théorème de convergence dominée dont on rappelle les hypothèses :
 - * pour tout n , f_n est continue par morceaux sur I
 - * $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ sur I
 - * f est continue par morceaux sur I
 - * il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur I , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

➡ Exercices 5.3, 5.4, 5.16, 5.17, 5.42, 5.43.

Pour permuter intégrale et limite pour un réel, en vue d'obtenir une formule du genre :

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) \right) dt$$

Essayer de :

- se ramener à une question de continuité, et appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale
- combiner le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle des limites.

➡ Exercice 5.30

➡ Exercice 5.30.

Pour trouver un équivalent simple d'une intégrale $\int_{I_n} f_n$, lorsque l'entier n tend vers l'infini, dans laquelle, a priori, l'intervalle et la fonction dépendent de n

Essayer de se ramener à une recherche de limite d'intégrale, sur un intervalle fixe, par transformation de l'écriture de l'énoncé, utilisant les méthodes usuelles : linéarité de l'intégration, relation de Chasles, intégration par parties.

➡ Exercices 5.18, 5.19, 5.30 à 5.32.

Pour obtenir une approximation uniforme par des polynômes satisfaisant une condition supplémentaire

Appliquer le premier théorème de Weierstrass, puis modifier les polynômes obtenus, de façon à en construire d'autres, vérifiant la condition supplémentaire, et convergeant uniformément encore vers f .

➡ Exercice 5.15.

Pour faire intervenir une condition de majoration des degrés des polynômes d'une suite convergeant, en un certain sens, vers une fonction

Essayer d'utiliser le fait que, pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathbb{R}_N[X]$ est de dimension finie. En particulier, $\mathbb{R}_N[X]$ est complet, donc fermé, et toutes les normes sur $\mathbb{R}_N[X]$ sont équivalentes entre elles.

➡ Exercice 5.28.

Pour étudier les convergences d'une série d'applications

$$\sum_n (f_n : X \longrightarrow \mathbb{K})$$

Se rappeler d'abord, avec des abréviations évidentes :

$$C.N. \implies C.U. \implies C.S.,$$

$$C.N. \implies C.A. \implies C.S.$$

Suivre, sauf exception, le plan de travail proposé dans le cours :

- Est-ce que $\sum_n f_n$ converge simplement sur X ?

Si non, remplacer X par la partie de X formée des $x \in X$ tels que la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge, puis passer à l'étape suivante.

Si oui, passer à l'étape suivante.

- Est-ce que $\sum_n f_n$ converge normalement sur X ?

Si oui, alors, d'après le cours, $\sum_n f_n$ converge uniformément, absolument, simplement sur X , et l'étude est finie.

Si non, voir si $\sum_n f_n$ converge normalement sur des parties convexes de X (en option), et, d'autre part, passer à l'étape suivante.

- Est-ce que $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$?

Si non, alors, d'après le cours, $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur X .

Si oui, passer à l'étape suivante.

- Est-ce que $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$?

Si oui, alors $\sum_n f_n$ converge uniformément sur X .

Si non, alors $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur X .

➡ Exercices 5.5, 5.6 a), 5.7 a), 5.20, 5.21 a), 5.22 a), 5.24 a), 5.33, 5.34 a), 5.35 a), 5.38 a), 5.44 a), 5.45.

Pour étudier la convergence simple d'une série d'applications

$$\sum_n (f_n : X \longrightarrow \mathbb{K})$$

Étudier, pour $x \in X$ fixé, la nature de la série numérique $\sum_n f_n(x)$.

→ Exercices 5.5, 5.6 a), 5.7 a), 5.20, 5.33, 5.35 a), 5.38 a), 5.44 a), 5.45 a).

Pour étudier la convergence absolue d'une série d'applications

$$\sum_n (f_n : X \longrightarrow \mathbb{K})$$

Étudier, pour $x \in X$ fixé, la nature de la série numérique $\sum_n |f_n(x)|$.

→ Exercices 5.5, 5.6 a), 5.33 c).

Pour étudier la convergence normale d'une série d'applications

$$\sum_n (f_n : X \longrightarrow \mathbb{K})$$

Étudier la nature de la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$.

Si il n'existe pas $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, f_n soit bornée, alors $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur X .

→ Exercices 5.20 a), 5.33 a)

Si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, f_n soit bornée, alors, d'après le cours : $\sum_n f_n \text{ C.N.} \iff \sum_n \|f_n\|_\infty \text{ converge.}$

→ Exercices 5.5, 5.6 a), 5.20 b), 5.33 a), b), d), e), 5.34 a), 5.35 a), 5.38 a), 5.44 a), 5.45 b).

Pour étudier la convergence uniforme d'une série d'applications

$$\sum_n (f_n : X \longrightarrow \mathbb{K})$$

Se rappeler d'abord : $\text{C.N.} \implies \text{C.U.}$

En pratique, on aura déjà montré que $\sum_n f_n$ converge simplement et ne converge pas normalement.

Si $\|f_n\|_\infty \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors, d'après le cours, $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur X .

→ Exercices 5.5 c), 5.20, 5.33 a), d), 5.44 a)

Si $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, former le reste d'ordre n :

$$R_n : X \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \longmapsto R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x),$$

et résoudre la question : $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$?

À cet effet, évaluer $R_n(x)$, puis $\|R_n\|_\infty$.

Pour cela, essayer d'utiliser :

* une comparaison série/intégrale, lorsque les $f_n(x)$ sont tous ≥ 0 et que, pour x fixé, la suite $n \mapsto f_n(x)$ s'extrapole simplement en une fonction $\varphi_x : t \mapsto \varphi_x(t)$, qui soit décroissante, continue, intégrable,

et pour laquelle l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt$ soit calculable ou évaluable.

→ Exercice 5.33 b)

* une majoration géométrique, si $\sum_n f_n(x)$ ressemble à une série géométrique.

* le TSCSA si, pour chaque $x \in X$, la série $\sum_n f_n(x)$ relève du TSCSA.

On aura alors : $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$,

puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \|R_n\|_\infty \leq \|f_{n+1}\|_\infty$.

➡ Exercices 5.5 g), 5.6 a), 5.33 c)

* une minoration du reste, si tous ses termes sont ≥ 0 , par une somme de n termes (par exemple), que l'on minorera encore, si possible.

➡ Exercices 5.33 a), d), e).

Pour montrer que la somme d'une série d'applications admet une limite en un point, ou est continue en un point, ou est continue sur son ensemble de définition

Essayer d'appliquer les théorèmes du cours :

- théorème sur convergence uniforme et limite
- théorème sur convergence uniforme et continuité en un point
- théorème sur convergence uniforme sur tout segment et continuité sur l'intervalle de départ.

➡ Exercices 5.21 b), 5.22 b), 5.24 b), 5.34 b), 5.35 b), 5.38 b), 5.46 c).

Pour montrer $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$,

où $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

Essayer de :

- minorer convenablement $S(x)$.

➡ Exercice 5.44 c)

- revenir à la définition d'une limite infinie.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n$ et si la série $\sum_n \ell_n$ diverge,

alors, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=0}^N \ell_n \geq A + 1$, puis,

au voisinage de a :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^N f_n(x) \geq A.$$

Pour permuter intégrale et série, en vue d'obtenir une formule du genre :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

Essayer de :

- appliquer le théorème sur convergence uniforme et intégration sur un segment, dans le cas où :

* $I = [a ; b]$ est un segment

* pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a ; b]$

* $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a ; b]$.

- appliquer le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications, dont on rappelle les hypothèses :

* pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I

- * $\sum_n f_n$ converge simplement sur I
- * $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I
- * la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(x)| dx$ converge.

➡ Exercices 5.25, 5.26, 5.37, 5.38 c), 5.39

- montrer que l'intégrale du reste tend vers 0.

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ la n -ème somme partielle,

$S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ la somme totale (la convergence simple doit être déjà

acquise), $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ le n -ème reste, les applications

S_n, S, R_n sont intégrables sur I (déjà acquis pour f_n , puis pour S_n par somme d'un nombre fini d'applications intégrables sur I , pour S par un raisonnement approprié à l'exemple, pour R_n par différence), et :

$$\int_I S = \int_I S_n + \int_I R_n = \sum_{k=0}^n \int_I f_k + \int_I R_n.$$

Si $\int_I R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on déduit que la série $\sum_{k \geq 0} \int_I f_k$ converge et que

$$\int_I S = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k, \text{ d'où le résultat voulu.}$$

Pour montrer que l'intégrale du reste tend vers 0, essayer d'utiliser les méthodes classiques d'évaluation des restes des séries convergentes : comparaison série/intégrale, majoration géométrique, TSCSA.

➡ Exercices 5.40, 5.41.

**Pour établir une égalité du type
intégrale = somme de série**

Développer la fonction sous l'intégrale en somme d'une série de fonctions (souvent par utilisation d'une série géométrique, ou d'une série entière voir ch. 6, ou d'une série de Fourier voir ch. 7), justifier la permutation intégrale/série, et calculer le terme général de la série apparaissant.

➡ Exercices 5.25, 5.26.

**Pour montrer que la somme
d'une série d'applications
est de classe C^1, C^k, C^∞**

Essayer d'appliquer le théorème du cours sur la dérivation pour une série d'applications, éventuellement de façon répétée.

➡ Exercices 5.7 b), 5.23 b), 5.34 d), 5.44 b).

Énoncés des exercices

5.1 Exemples d'étude de suites de fonctions, convergence simple, convergence uniforme

Étudier (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur des parties de l'ensemble de départ) les suites d'applications suivantes :

$$a) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{n+1}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$b) f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{nx^2}{1+nx}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$c) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x}{x^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$d) f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n(1-x), n \in \mathbb{N}^*$$

$$e) f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{nx^3}{1+n^2x}, n \in \mathbb{N}$$

$$f) f_n : [0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \text{Min} \left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right), n \in \mathbb{N}$$

$$g) f_n : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} n|x| - n + 1 & \text{si } |x| > 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x| \leq 1 - \frac{1}{n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$h) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

5.2 Convergence simple et : croissance, convexité, lipschitzianité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $k \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante (resp. convexe, resp. k -lipschitzienne), alors f est croissante (resp. convexe, resp. k -lipschitzienne).

5.3 Exemples de recherche de limites d'intégrales

Déterminer les limites suivantes, lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2 + e^x} dx \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1} dx.$$

5.4 Exemple d'utilisation du théorème de convergence dominée

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer :

$$\int_0^1 f(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) e^{-x} dx.$$

5.5 Exemples d'étude de convergence pour une série d'applications

Étudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme) les séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes :

- a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}, n \in \mathbb{N}^*$
- b) $f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto n^2 x^n (1 - x)^n, n \in \mathbb{N}$
- c) $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{nx^2}{n^3 + x^2}, n \in \mathbb{N}^*$
- d) $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x}{n} e^{-n^2 x^2}, n \in \mathbb{N}^*$
- e) $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{n+x}{x^2 + n^2}, n \in \mathbb{N}^*$
- f) $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}, n \in \mathbb{N}^*$
- g) $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{(-1)^n}{x^2 + n}, n \in \mathbb{N}^*.$

5.6 Étude de la somme d'une série de fonctions, continuité

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+x}$.

a) Étudier les convergences de la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$.

b) Montrer que la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0; +\infty[$.

5.7 Étude de la somme d'une série de fonctions, classe C^2

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\ln(n+x)}{n^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$.

On note S la somme.

b) Montrer que S est de classe C^2 sur $[0; +\infty[$ et exprimer, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries.

c) En déduire que S est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et que S est concave sur $[0; +\infty[$.

5.8 Exemples d'étude de suites de fonctions, convergence simple, convergence uniforme

Étudier (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur des parties de l'ensemble de départ) les suites d'applications suivantes :

a) $f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto n(1-x) \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^n, n \in \mathbb{N}$

b) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin \left(\frac{n+1}{n} x \right), n \in \mathbb{N}^*$

c) $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln \left(1 + \frac{nx^2}{1+nx} \right), n \in \mathbb{N}$

d) $f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (nx)^{\frac{x}{n}}, n \in \mathbb{N}^*.$

5.9 Exemple de convergence uniforme et composition

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application. On suppose : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$.

Montrer : $\ln(1 + f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} \ln(1 + f)$.

5.10 Convergence uniforme pour une suite de fonctions définies à partir d'une fonction donnée

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 , telle que $f^{(3)}$ est bornée.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto n^2 \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{1}{n}\right) \right]$.

Montrer : $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f''$ sur $\mathbb{R}$.

5.11 Convergence d'une suite de fonctions définies par récurrence

Soit $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, bornée, ≥ 0 . Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \sqrt{1 + f_n(x)}.$$

5.12 Convergence d'une suite de fonctions définies par récurrence

Soit $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, bornée, ≥ 0 . Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \ln(1 + f_n(x)).$$

5.13 Limites d'intégrales issues de la fonction Γ d'Euler

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites d'applications $(f_n, g_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt, \quad g_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

5.14 Une application classique du premier théorème de Weierstrass

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b x^n f(x) dx = 0$. Démontrer : $f = 0$.

5.15 Recherche d'une suite de polynômes convergeant uniformément vers une fonction donnée et vérifiant une condition supplémentaire

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, $c \in [a; b]$.

Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que :
$$\begin{cases} P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f \text{ sur } [a; b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_n(c) = f(c). \end{cases}$$

5.16 Exemples de recherche de limites d'intégrales

Déterminer les limites suivantes, lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
 a) & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n \left(e^{\frac{x}{n+x}} - 1 \right) dx & b) & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} (x^2 + 1) \frac{n+x}{n+x^2} e^{-x} dx & c) & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + x^4} dx \\
 d) & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sqrt{\pi - x} \sin^n x dx & e) & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+a)^n}}{\sqrt{x}} dx, a \in [0; 1[& f) & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n} dx.
 \end{aligned}$$

5.17 Exemple d'utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer, pour tout $a \in [0; +\infty[$ fixé : $\int_0^a \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - 1 \right) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{e^x - 1}{x} dx$.

5.18 Exemple de recherche d'un équivalent d'une intégrale

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $f(0) \neq 0$.

Trouver un équivalent simple de $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-n^2 x^2} dx$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

5.19 Comportement asymptotique d'une intégrale

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 \sqrt{1 - x^n} dx$.

a) Montrer : $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

b) Trouver un équivalent simple de $I_n - 1$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

5.20 Exemples d'étude de convergence pour une série d'applications

Étudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme) les séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes :

a) $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

b) $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right), n \in \mathbb{N}^*$.

5.21 Étude de la somme d'une série d'applications, limite

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{n+x}{1+n^3 x}$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et converge normalement sur $[1; +\infty[$. On note S la somme.

b) Montrer : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^3}$, et calculer une valeur approchée décimale de L à 10^{-3} près.

5.22 Étude de la somme d'une série d'applications, développement asymptotique

On note, pour tout $n \in \mathbb{N} : f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et converge uniformément sur $[1; +\infty[$.

On note S la somme.

b) Montrer : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

c) On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Établir : $S(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$.

5.23 Fonction ζ de Riemann

On note, sous réserve d'existence, pour $x \in \mathbb{R}$: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

a) Montrer : $\text{Déf}(\zeta) =]1; +\infty[$.

b) Établir que ζ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ et exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]1; +\infty[$, $\zeta^{(k)}(x)$ sous forme de somme d'une série.

c) Étudier les variations et la convexité de ζ .

d) Montrer : $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$,

et en déduire : $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$, puis : $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$.

e) Montrer : $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, et $\zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$.

f) Dresser le tableau de variations de ζ et tracer la courbe représentative de ζ .

5.24 Étude de la somme d'une série d'applications, continuité

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$.

a) Étudier les convergences simple, absolue, normale, normale sur certaines parties, uniforme, uniforme sur certaines parties, de la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$.

On note : $T :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

b) Montrer que T est continue sur $]0; +\infty[$.

c) Exprimer, pour tout $x \in]0; +\infty[, T(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$, où ζ est la fonction de Riemann (cf. exercice 5.23).

5.25 Calcul d'une intégrale à l'aide de ζ et Γ

Montrer : $\forall \alpha \in]0; +\infty[, \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (x - \ln(e^x - 1)) dx = \zeta(\alpha + 1) \Gamma(\alpha)$,

où ζ est la fonction de Riemann : $\zeta :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

et Γ la fonction d'Euler : $\Gamma :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.

5.26 Calcul d'une intégrale par utilisation d'une série

Existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$. On admettra : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5.27 Exemples d'étude de suites de fonctions, convergence simple, convergence uniforme

Étudier (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur des parties de l'ensemble de départ) les suites d'applications suivantes :

$$a) f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+nx^2)}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$b) f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln \frac{2 + (\ln x)^{2n}}{1 + (\ln x)^{2n}}, n \in \mathbb{N}$$

$$c) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (2^n + |x|^n)^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$d) f_n :]0; +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \ln \left(x + \frac{y}{n} \right), n \in \mathbb{N}^*.$$

5.28 Convergence simple d'une suite de polynômes de degrés majorés

Soient $N \in \mathbb{N}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degrés $\leq N$, qui converge simplement sur un intervalle I (de longueur > 0) vers une application f . Montrer que f est un polynôme, de degré $\leq N$.

5.29 Limite uniforme, sur un segment, d'une suite de polynômes à degrés majorés

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $N \in \mathbb{N}^*$, $(P_n : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers une application f , et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq N$. Montrer que f est un polynôme et que $\deg(f) \leq N$.

5.30 Exemple de recherche d'un équivalent d'une intégrale à paramètre réel

Trouver un équivalent simple de $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^4} dt$, lorsque $x \longrightarrow 0^+$.

5.31 Recherche d'équivalents d'intégrales à paramètre entier naturel

Trouver un équivalent simple, lorsque l'entier n tend vers l'infini, de :

$$a) \int_0^1 \ln(1+x^n) dx, \text{ on admettra : } \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}$$

$$b) \int_0^1 x^n \ln(1+x^n) dx \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx.$$

5.32 Recherche d'un développement asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre entier

Former un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^{2n}} dx$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

On laissera un des coefficients sous forme d'une intégrale.

5.33 Exemples d'étude de convergence pour une série d'applications

Étudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme) les séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes :

$$a) f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x^a}{(n+x)^b}, \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ fixé}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$b) f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x e^{-nx}}{\ln n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$c) f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{(-1)^n x}{x^2 + n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$d) f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan} n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$e) f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{nx}{1+n^3 x^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.34 Étude de la somme d'une série d'applications, classe C^1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x^{n+1})}{n(n+1)}$.

a) Étudier les convergences de la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$. On note S la somme.

b) Montrer que S est continue sur $[0; +\infty[$.

$$c) \text{ Établir : } \forall x \in]0; +\infty[, S(x) = \frac{\pi}{2} - S\left(\frac{1}{x}\right).$$

d) Montrer que S est de classe C^1 sur $[0; 1[$, que S est strictement croissante sur $[0; 1]$, calculer $S(1)$, et déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} S'(x)$.

e) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

f) Dresser le tableau de variation de S et tracer la courbe représentative de S .

5.35 Étude de la somme d'une série d'applications, intégrabilité

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x^2(n^4 + x^2)}$.

a) Montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$, et converge normalement sur $[a; +\infty[$, pour tout $a \in]0; +\infty[$ fixé.

b) Établir que S est continue sur $]0; +\infty[$.

c) Est-ce que S est intégrable sur $]0; 1]$? sur $[1; +\infty[$?

5.36 Équivalent d'une somme d'une série d'applications

Montrer : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$.

5.37 Série d'intégrales

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-nx} dx$.

Convergence et somme de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

On exprimera le résultat sous forme d'une intégrale.

5.38 Étude de la somme d'une série d'applications, intégrabilité

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(1+nx)(n+x)}$.

a) Montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$, et converge normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a \in]0; +\infty[$ fixé.

On note S la somme.

b) Montrer que S est continue sur $]0; +\infty[$.

c) Montrer que S est intégrable sur $]0; +\infty[$ et que : $\int_0^{+\infty} S(x) dx = 1 + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2 - 1}$.

5.39 Égalité entre une intégrale et une somme de série

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Montrer : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx} dx = 4a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 b^2 - a^2}$.

5.40 Calcul d'une intégrale à l'aide de T et Γ

Établir : $\forall x \in]0; +\infty[, \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t + 1} dt = \Gamma(x)T(x)$,

où Γ est la fonction d'Euler : $\Gamma :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

et T est définie par : $T :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

5.41 Égalité entre une intégrale et une somme de série

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+$, croissante, de limite $+\infty$. Montrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{a_n} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + a_n}.$$

5.42 Comportement d'une transformée de Laplace, en $+\infty$, en 0

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

a) On suppose ici que f est bornée sur $[0; +\infty[$.

Montrer : $x \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0^+)$.

b) On suppose ici que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

Montrer : $x \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell$.

5.43 Théorème de Scheffé

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n : I \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications intégrables sur I , à valeurs ≥ 0 , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable sur I .

On suppose : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ sur I et $\int_I f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_I f$.

Démontrer : $\int_I |f_n - f| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

5.44 Étude de la somme d'une série d'applications, classe C^1 , équivalent

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1 + x^n)$.

a) Étudier les convergences de la série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$. On note S la somme.

b) Montrer que S est de classe C^1 sur $[0; 1[$ et que S est strictement croissante sur $[0; 1[$.

c) 1) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1[, \sum_{k=0}^n f_k(x) \geq \ln\left(\sum_{k=0}^n x^k\right)$.

2) En déduire : $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$.

d) En utilisant une comparaison série/intégrale, montrer :

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{I}{1-x}, \text{ où } I = \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-u}) du.$$

5.45 Convergences d'une série d'applications dépendant d'une suite numérique

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes dans $[0; +\infty[$, décroissante.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n x^n (1 - x)$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; 1]$.

b) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.

c) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ si et seulement si : $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

5.46 Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide d'intégrales, intervention de séries

a) Montrer qu'il existe une suite d'applications $(f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ et une seule telle que $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt$, et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un polynôme.

b) 1) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq e^x$.

2) En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers une application notée f .

c) Établir que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$, que f est continue sur $[0; 1]$, et que : $\forall x \in [0; 1], f(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt$.

d) 1) Montrer que f est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et que $\forall x \in [0; 1], f'(x) = f(x - x^2)$.

2) Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0; 1]$.

Du mal à démarrer ?

5.1 • Pour étudier la convergence simple d'une suite d'applications $(f_n)_n$, on fixe x et on étudie la suite $(f_n(x))_n$.

• Pour étudier la convergence uniforme d'une suite d'applications $(f_n)_n$, après avoir montré que $(f_n)_n$ converge simplement vers une certaine f , on étudie la convergence vers 0 de la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_n$. Si $\|f_n - f\|_\infty$ n'est pas facilement calculable, soit on essaie de majorer $\|f_n - f\|_\infty$ par un terme tendant vers 0, soit on essaie de minorer $\|f_n - f\|_\infty$ par un terme ne tendant pas vers 0.

• Si $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur tout l'ensemble d'étude X , déterminer des parties de X sur lesquelles $(f_n)_n$ converge uniformément.

f) Pour $x \in [0; 1[$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est stationnaire.

h) Pour la convergence uniforme sur tout $[-a; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé, utiliser l'inégalité connue : $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$.

5.2 Pour des éléments fixés dans l'ensemble de départ des f_n , passer à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini, dans la condition d'hypothèse des f_n .

5.3 Appliquer le théorème de convergence dominée.

5.4 Appliquer le théorème de convergence dominée.

5.5 Utiliser, de manière générale, le plan d'étude d'une série d'applications : C.S., C.A., C.N., C.U. Cependant, dans des cas très simples, il se peut que l'étude de la convergence normale soit facile et qu'il y ait convergence normale, auquel cas l'étude des autres convergences est inutile.

• Pour étudier la convergence simple d'une série d'applications $\sum_n f_n$, on fixe x et on étudie la série $\sum_n f_n(x)$.

• Pour étudier la convergence absolue d'une série d'applications $\sum_n f_n$, on fixe x et on étudie la série $\sum_n |f_n(x)|$. Lorsque les $f_n(x)$ sont tous ≥ 0 (pour tout n et pour tout x), la convergence absolue revient à la convergence simple.

• Pour étudier la convergence normale d'une série d'applications $\sum_n f_n$, on étudie la série numérique $\sum_n \|f_n\|_\infty$.

• Pour étudier la convergence uniforme d'une série d'applications $\sum_n f_n$, si $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on étudie le reste R_n , et on résout la question : est-ce que $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$?

g) Pour l'étude du reste dans la convergence uniforme, utiliser le TSCSA.

5.6 a) • Pour l'étude de la convergence normale sur $]0; +\infty[$, remarquer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$.

• Pour l'étude de la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$, utiliser le TSCSA.

5.7 a) Pour la convergence simple, avec x fixé, utiliser un équivalent lorsque l'entier n tend vers l'infini.

b) Appliquer deux fois le théorème de dérivation pour une série d'applications.

5.8 a) Pour montrer la non-convergence uniforme sur $[0; 1]$, évaluer, par exemple, $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

b) • Pour montrer la non-convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, évaluer, par exemple, $|f_{2n} - f|(n\pi)|$, où $f : x \mapsto \sin x$.

• Pour montrer la convergence uniforme sur $[-a; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé, transformer la différence de deux sinus, puis utiliser l'inégalité connue : $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$.

c) Pour étudier la convergence uniforme, utiliser l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $t \mapsto \ln(1+t)$ entre x et $\frac{nx^2}{1+nx}$.

d) Pour étudier la convergence uniforme, étudier les variations de $g_n = f_n - f$.

5.9 Appliquer l'inégalité des accroissements finis à

$t \mapsto \ln(1+t)$ entre $f(x)$ et $f_n(x)$.

5.10 Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f entre x et $x + \frac{1}{n}$, entre x et $x - \frac{1}{n}$, puis combiner par l'inégalité triangulaire. Obtenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|g_n - f\|_\infty \leq \frac{M_3}{3n}$,

où $M_3 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(3)}(t)|$.

5.11 Montrer que l'application

$$\varphi : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{1+t}$$

admet un point fixe et un seul, noté α , et calculer α .

Majorer ensuite $|f_{n+1}(x) - \alpha|$, puis $\|f_n - \alpha\|_\infty$. Faire apparaître une suite géométrique.

5.12 La méthode utilisée pour la résolution de l'exercice 5.11 (majoration géométrique) ne s'applique pas ici. Montrer que la suite $(\|f_n\|_\infty)_n$ est décroissante et minorée, et montrer qu'elle converge vers 0.

5.13 Commencer par l'étude de $(f_n)_{n \geq 0}$. Remarque ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, \quad g_n(x) = 1 - f_n(x),$$

après un calcul faisant éventuellement intervenir la fonction Γ d'Euler.

5.14 Montrer d'abord :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \int_a^b \overline{P(x)} f(x) dx = 0,$$

en utilisant la décomposition additive de P , ou encore une linéarité.

5.15 Utiliser le premier théorème de Weierstrass.

Utiliser le premier théorème de Weierstrass pour avoir une suite $(Q_n)_n$ de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$, puis modifier Q_n pour obtenir P_n .

5.16 Appliquer le théorème de convergence dominée.

a) Pour la domination, après avoir obtenu :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], \quad |f_n(x)| \leq n(e^{\frac{1}{n}} - 1),$$

remarquer que la suite de terme général $n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ est convergente, donc bornée.

b) Une fois appliqué le théorème de convergence dominée, pour calculer $I = \int_0^{+\infty} (x^2 + 1) e^{-x} dx$, on peut utiliser la fonction Γ d'Euler.

c) Pour la domination, utiliser l'inégalité classique :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

f) Remarquer que la borne $\sqrt[n]{n}$ dépend de n et que $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1^+$. Décomposer, par la relation de Chasles, l'intégrale de l'énoncé en somme d'une intégrale de 0 à 1 (à laquelle on pourra appliquer le théorème de convergence dominée) et d'une intégrale de 1 à $\sqrt[n]{n}$ (dont on montrera qu'elle tend vers 0).

5.17 Appliquer le théorème de convergence dominée. Pour la domination, utiliser l'inégalité classique :

$$\forall t \in]-1; +\infty[, \quad \ln(1+t) \leq t.$$

5.18 Montrer d'abord l'existence de I_n , en utilisant par exemple la règle $x^2 f(x)$ en $+\infty$.

Pour obtenir un équivalent, effectuer le changement de variable $t = nx$, puis appliquer le théorème de convergence dominée à l'intégrale obtenue après mise en facteur de $\frac{1}{n}$.

5.19 a) Majorer convenablement $|I_n - 1|$.

$$b) \text{ Obtenir : } I_n - 1 = - \int_0^1 \frac{x^n}{1 + \sqrt{1-x^n}} dx,$$

effectuer le changement de variable $t = x^n$, et appliquer le théorème de convergence dominée à l'intégrale obtenue après mise en facteur de $\frac{1}{n}$.

5.20 a) Pour l'étude de la convergence normale sur $[0; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé, utiliser l'encadrement classique :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad -\frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) - t \leq 0.$$

b) Pour l'étude de la convergence normale, utiliser le même encadrement que ci-dessus.

5.21 a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$.

b) Pour obtenir une valeur approchée décimale de L , étudier le reste R_n , en utilisant une majoration et une comparaison série/intégrale.

5.22 a) Pour la convergence uniforme, utiliser la majoration de la valeur absolue du reste venant du TSCSA.

b) Montrer d'abord que a existe.

Considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{nx}}$$

et majorer $|f_n(x) - g_n(x)|$, puis $\left| S(x) - \frac{a}{\sqrt{x}} \right|$.

5.23 b) Appliquer, de façon répétée, le théorème de dérivation pour une série d'applications. Pour obtenir des convergences simples ou des convergences uniformes, on sera amené à montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^k}{n^x}$ converge. À cet effet, utiliser la règle $n^\alpha u_n$, avec un α

bien choisi, $\alpha = \frac{x+1}{2}$.

d) Utiliser une comparaison série/intégrale, en considérant, pour $x \in]1; +\infty[$ fixé : $\varphi_x : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{t^x}$.

e) Pour le deuxième point, considérer $\zeta(x) - 1 - \frac{1}{2^x}$ et majorer $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ grâce à une comparaison série/intégrale.

5.24 a) Pour la convergence uniforme sur tout $[b; +\infty[$, $b \in]0; +\infty[$, utiliser la majoration de la valeur absolue du reste venant du TSCSA.

b) Former $\zeta(x) + T(x)$ et remarquer qu'alors les termes d'indices impairs sont nuls.

5.25 Développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions, puis permuter intégrale et série en montrant qu'on peut appliquer le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions.

5.26 1) S'assurer d'abord que l'intégrale proposée existe.

2) Développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions (en faisant apparaître une série géométrique) puis permuter intégrale et série en montrant qu'on peut appliquer le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions.

Pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, décomposer, pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k^2}$ en termes d'indices pairs, termes d'indices impairs, puis faire tendre l'entier N vers l'infini.

5.27 a) Pour l'étude de la convergence uniforme, comme le signe de $f'_n(x)$ ne paraît pas facile à déterminer, et puisque $1 + nx^2$ intervient, séparer en deux cas selon la position de x par rapport à $\frac{1}{\sqrt{n}}$, obtenir une bonne majoration dans chaque cas, puis regrouper en une seule majoration.

b) 1) Pour l'étude de la convergence simple, on sera amené à séparer en cas selon la position de x par rapport à e^{-1} et à e .

2) Pour l'étude de la convergence uniforme, remarquer que les f_n sont continues sur $]0; +\infty[$ et que la limite simple f est discontinue en e^{-1} et en e .

D'autre part, montrer qu'il y a convergence uniforme sur des intervalles de $]0; +\infty[$ décollés de e^{-1} et de e .

c) 1) Pour obtenir la limite de $(f_n(x))_{n \geq 1}$, où x est fixé, séparer en cas selon la position de $|x|$ par rapport à 2.

2) Pour étudier la convergence uniforme, utiliser l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^{\frac{1}{n}}$, entre 2^n et $2^n + |x|^n$, entre $|x|^n$ et $2^n + |x|^n$.

d) 2) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $]0; a] \times [b; +\infty[$, pour tout $(a, b) \in]0; +\infty[^2$ fixé.

5.28 Utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange $(L_i)_{0 \leq i \leq N}$ sur des points $x_0, \dots, x_N$, deux à deux distincts, et l'égalité du cours :

$$\forall P \in \mathbb{C}_N[X], \quad P = \sum_{i=0}^N P(x_i) L_i.$$

5.29 Montrer que le sev F de $C([a; b]; \mathbb{R})$, formé des polynômes de degré $\leq N$, est de dimension finie, donc complet, donc fermé.

5.30 • Commencer par montrer que l'intégrale proposée existe.

• Comme, pour tout $t \in [0; +\infty[$ fixé, $\sin(xt) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} xt$, on peut conjecturer que $I(x)$ ressemble, lorsque $x \rightarrow 0^+$, à $\int_0^{+\infty} \frac{xt}{1+t^4} dt$.

1^{re} méthode : transformer l'écriture de $I(x)$, en utilisant

$$\phi : u \mapsto \begin{cases} \frac{\sin u}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0, \end{cases}$$

mettre x en facteur dans $I(x)$, puis appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

2^e méthode : utiliser le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle des limites.

5.31 a) Utiliser le changement de variable $t = x^n$, mettre $\frac{1}{n}$ en facteur dans l'intégrale, puis utiliser le théorème de convergence dominée.

b) 1^{re} méthode : comme pour a).

2^e méthode : considérer $K_n = \int_0^1 x^{n-1} \ln(1+x^n) dx$.

5.32 Utiliser une intégration par parties, puis le changement de variable $t = x^n$, et le théorème de convergence dominée.

5.33 a) • Étudier d'abord la convergence simple.

• Pour la convergence normale, étudier les variations de $f_n, n \in \mathbb{N}^*$ fixé, calculer $\|f_n\|_\infty$, et déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$.

• Pour la convergence uniforme, dans le cas $a \geq b - 1$, minorer convenablement le reste.

Former finalement une réponse claire à la question posée, donnant les CNS sur (a, b) pour les différentes convergences.

b) • Pour la convergence normale, étudier les variations de $f_n, n \geq 2$ fixé. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge, par comparaison, série/intégrale.

• Pour la convergence uniforme, étudier le reste, en faisant une comparaison série/intégrale, pour $x \in]0; +\infty[$ fixé, à l'aide de :

$$\varphi_x : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\ln t}.$$

c) • Pour la convergence uniforme, utiliser la majoration de la valeur absolue du reste venant du TSCSA.

d) • Montrer que, si $x + n \geq 0$, on peut transformer l'écriture de l'énoncé en : $f_n(x) = \operatorname{Arctan} \frac{x}{1+n(x+n)}$.

Utiliser l'inégalité connue : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\operatorname{Arctan} t| \leq |t|$.

- Pour la convergence normale, étudier les variations de f_n , $n \in \mathbb{N}$ fixé.
- Pour montrer la non-convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, minorer convenablement le reste.
- e) • Pour la convergence normale, étudier les variations de f_n , $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
- Pour la non-convergence uniforme sur $[0; +\infty[$, minorer convenablement le reste.

5.34 a) Par une majoration convenable, montrer qu'il y a convergence normale.

c) Former $S(x) + S\left(\frac{1}{x}\right)$ et utiliser la formule connue, pour tout

$$t \in \mathbb{R}_+^* : \operatorname{Arctan} t + \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, faire apparaître un télescopage.

d) • Appliquer le théorème de dérivation pour une série d'applications.

- Le calcul de $S(1)$ se ramène à la série vue plus haut.
- Pour montrer $S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$, minorer convenablement $S'(x)$, pour $x \in [0; 1[$.

5.35 c) • Pour l'étude en 0^+ , considérer la série d'applications $\sum_{n \geq 1} \left(x \mapsto \frac{1}{n^4 + x^2}\right)$ et montrer $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{C}{x^2}$, où C est une constante > 0 . • Pour l'étude en $+\infty$, montrer $0 \leq S(x) \leq \frac{C}{x^2}$.

5.36 Pour $x \in [0; 1[$, pour évaluer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$, utiliser une comparaison série/intégrale, à l'aide de :

$$\varphi_x : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{x^t}{1+x^t}.$$

5.37 Appliquer le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications.

5.38 c) Appliquer le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications.

5.39 Développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions (à l'aide d'une série géométrique), puis permuter intégrale et série en montrant qu'on peut appliquer le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions.

5.40 Développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions (à l'aide d'une série géométrique), puis permuter intégrale et série en montrant que l'intégrale du reste tend vers 0. Le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications ne s'applique pas ici, car la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ diverge.

5.41 Développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions (à l'aide d'une série géométrique), puis permuter intégrale et série en montrant que l'intégrale du reste tend vers 0. Le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications ne s'applique pas ici, car la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(x)| dx$ peut diverger.

5.42 a) Utiliser le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle des limites.

b) Même méthode qu'en a).

5.43 1) Considérer, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = (f_n - f)^-$. Montrer que le théorème de convergence dominée s'applique à $(g_n)_n$. En déduire : $\int_I g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2) Utiliser : $(f_n - f)^+ = (f_n - f) + g_n$

$$\text{puis : } |f_n - f| = (f_n - f)^+ + (f_n - f)^-.$$

c) 2) Utiliser : $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

5.44 a) Utiliser le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 .

5.45 b) Étudier les variations de f_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et calculer $\|f_n\|_\infty$, puis un équivalent simple de $\|f_n\|_\infty$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

c) 1) En supposant $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, majorer convenablement $R_n(x)$, puis $\|R_n\|_\infty$.

2) Réciproquement, si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$, raisonner par l'absurde : supposer $a_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ne pas oublier que $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Minorer convenablement $R_n(x)$, puis $\|R_n\|_\infty$ et conclure.

5.46 a) Récurrence sur n .

b) 1) Récurrence sur n .

c) Remarquer : $\forall t \in [0; 1], \quad t - t^2 \in [0; 1/4]$.

Noter, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M_n = \|f_{n+1} - f_n\|_\infty^{[0;1]}, \quad m_n = \|f_{n+1} - f_n\|_\infty^{[0;1/4]}.$$

Majorer convenablement $|f_{n+1}(x) - f_n(x)|$, puis $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty$, et obtenir une majoration géométrique pour m_n , pour M_n .

Utiliser le lien suite/série pour la convergence uniforme.

Corrigés des exercices

5.1 a) 1) Convergence simple :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé : $f_n(x) = \frac{n+1}{n^2+x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

donc : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$.

2) Convergence uniforme :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| = \frac{n+1}{n^2+x^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$,

donc : $\|f_n\|_\infty \leq \frac{n+1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$, et donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$, ce qui rend l'étude de 1) inutile, à condition de prévoir que la limite sera 0.

b) 1) Convergence simple :

Soit $x \in [0; 1]$.

Si $x \neq 0$, alors : $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} = x$,

donc : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$.

Si $x = 0$, alors : $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où : $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$.

2) Convergence uniforme :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n},$$

donc : $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$, ce qui semble rendre l'étude de 1) inutile. Cependant, pour former $\|f_n - f\|_\infty$, il faut d'abord connaître f , ce qui nécessite l'étude de la convergence simple.

c) 1) Convergence simple :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé : $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

donc : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$.

2) Convergence uniforme :

1^{re} méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application f_n est impaire, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'_n(x) = \frac{x^2 + n^2 - x(2x)}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2},$$

d'où le tableau des variations de f_n (sur $[0; +\infty[$) :

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	-
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

On a donc : $\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

et on conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$,

donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$, ce qui rend l'étude de 1) inutile.

2^e méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a^2 + b^2 \geq 2ab$.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \frac{x}{2nx} = \frac{1}{2n},$$

d'où, puisque $f_n(0) = 0$ et que f_n est impaire :

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n},$$

et on termine comme dans la 1^{re} méthode.

d) 1) Convergence simple :

Soit $x \in [0; 1]$ fixé.

Si $x \neq 1$, alors : $f_n(x) = x^n(1-x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Si $x = 1$, alors : $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$.

2) Convergence uniforme :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application f_n est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x),$$

d'où le tableau des variations de f_n :

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$f'_n(x)$		+	-
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

On a donc :

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et on conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$, ce qui rend l'étude de I inutile.

e) 1) *Convergence simple* :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

$$\text{Si } x \neq 0, \text{ alors : } f_n(x) = \frac{nx^3}{1+n^2x} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ alors : } f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{On conclut : } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0.$$

2) *Convergence uniforme* :

• On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - 0$ n'est pas bornée sur $[0; +\infty[$, car $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc : $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$ sur $[0; +\infty[$.

• Soit $b \in [0; +\infty[$ fixé.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; b], |f_n(x)| = \frac{nx^3}{1+n^2x} \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{b^2}{n},$$

$$\text{donc : } \|f_n\|_\infty^{[0; b]} \leq \frac{b^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On conclut :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0 \text{ sur tout } [a; b], \quad b \in [0; +\infty[\text{ fixé.}$$

f) 1) *Convergence simple* :

Soit $x \in [0; 1[$ fixé.

$$\text{En notant } N_x = E\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) + 1, \text{ on a :}$$

$$\forall n \geq N_x, f_n(x) = \text{Min}\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

donc la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ stationne sur $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, d'où :

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\text{Notons : } f : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\text{On conclut : } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f \text{ sur } [0; 1[.$$

2) *Convergence uniforme* :

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'application $|f_n - f|$ n'est pas bornée sur $[0; 1[$, car, pour x assez près de 1 :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

Il en résulte, d'après le cours : $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur $[0; 1[$.

Soit $a \in [0; 1[$ fixé.

$$\text{En notant } N = E\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right) + 1, \text{ on a :}$$

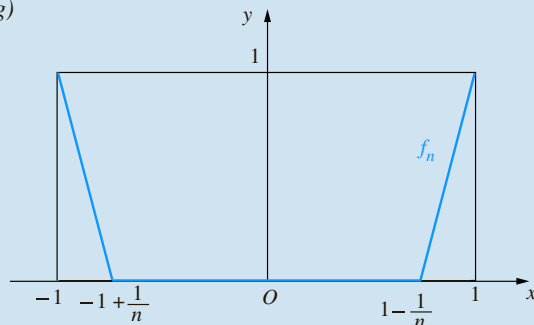
$$\forall n \geq N, \forall x \in [0; a], f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

$$\text{d'où : } \forall n \geq N, \forall x \in [0; a], f_n(x) - f(x) = 0.$$

Ceci montre que $((f_n - f)|_{[0; a]})_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire nulle,

$$\text{donc : } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f \text{ sur } [0; a].$$

g)



1) *Convergence simple* :

Soit $x \in [-1; 1]$ fixé.

Si $|x| < 1$, alors, pour tout n assez grand (précisément, pour $n \geq \frac{1}{1-|x|}$), $f_n(x) = 0$, donc la suite $(f_n(x))_{n \geq 2}$ stationne sur 0, donc : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

$$\text{Si } |x| = 1, \text{ alors : } f_n(x) = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

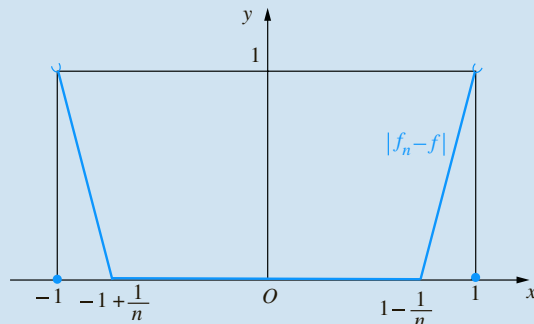
$$\text{On conclut : } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f, \text{ où :}$$

$$f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 1 & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

2) *Convergence uniforme* :

• *Étude sur $[-1; 1]$:*

1^{re} méthode :



On a : $\forall n \geq 2, \|f_n - f\|_\infty = 1$,

donc : $\|f_n - f\|_\infty \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$,

et on conclut : $f_n \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty}^{\text{C.U.}} 0$ sur $[-1; 1]$.

2^e méthode :

Puisque les f_n sont continues sur $[-1; 1]$, et que f n'est pas continue sur $[-1; 1]$, d'après le cours, on conclut : $f_n \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty}^{\text{C.U.}} 0$ sur $[-1; 1]$.

• Étude sur $[-a; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé :

On a, pour n assez grand (précisément : $n \geq \frac{1}{1-a}$) :

$$\forall x \in [-a; a], f_n(x) = 0 = f(x),$$

d'où : $\|f_n - f\|_\infty^{[-a; a]} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On conclut :

$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.U.}} f$ sur tout $[-a; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé.

h) 1) Convergence simple :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \neq 0$, alors : $f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Si $x = 0$, alors : $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.S.}} 0$ sur $\mathbb{R}$.

2) Convergence uniforme :

• Étude sur $\mathbb{R}$:

On remarque : $\|f_n\|_\infty \geq f_n(n) = n^2 \sin \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$,

donc : $\|f_n\|_\infty \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, $f_n \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty}^{\text{C.U.}} 0$ sur $\mathbb{R}$.

• Étude sur $[-a; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé :

Soit $a \in [0; +\infty[$ fixé.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a; a]$,

$$|f_n(x)| = x^2 \left| \sin \frac{1}{nx} \right| \leq x^2 \left| \frac{1}{nx} \right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n},$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty^{[-a; a]} \leq \frac{a}{n}$,

d'où : $\|f_n\|_\infty^{[-a; a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On conclut :

$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.U.}} 0$ sur tout $[-a; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé.

5.2 1) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq f_n(y)$.

Comme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.S.}} f$, on déduit, par passage à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini : $f(x) \leq f(y)$.

On conclut que f est croissante.

2) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit convexe.

Soient $\lambda \in [0; 1]$, $(x, y) \in I^2$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1 - \lambda)f_n(y).$$

Comme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.S.}} f$, on déduit, par passage à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

On conclut que f est convexe.

3) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est k -lipschitzienne, où $k \in \mathbb{R}_+$ est fixé, indépendamment de n .

Soit $(x, y) \in I^2$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|.$$

Comme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.S.}} f$, on déduit, par passage à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

On conclut que f est k -lipschitzienne.

5.3 Nous allons essayer, dans ces exemples, d'appliquer le théorème de convergence dominée.

a) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1 + x^2}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

• Pour tout $x \in [0; +\infty[$ fixé :

$$f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1 + x^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1 + x^2}.$$

En notant $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$,

on a donc : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{C.S.}} f$.

• f est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

• On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, |f_n(x)| = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1 + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

et l'application $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$

car $\frac{1}{1 + x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 .

Ainsi, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, f est intégrable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Arctan } x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{n}{nx^2 + e^x}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[1; +\infty[$.

• On a, pour tout $x \in [1; +\infty[$ fixé :

$$f_n(x) = \frac{n}{nx^2 + e^x} = \frac{1}{x^2 + \frac{e^x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où : $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2}.$

• f est continue par morceaux (car continue) sur $[1; +\infty[$.

• On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1; +\infty[, \quad |f_n(x)| = \frac{n}{nx^2 + e^x} \leq \frac{1}{x^2},$$

et $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[1; +\infty[$ (exemple de Riemann en $+\infty$, $2 > 1$).

Ceci montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_1^{+\infty} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 1.$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2 + e^x} dx = 1.$

c) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

• Soit $x \in [0; +\infty[$.

Si $0 \leq x < 1$, alors : $f_n(x) = \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Si $x = 1$, alors : $f_n(x) = \frac{1}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$

Si $x > 1$, alors :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}} = x^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ sur $[0; +\infty[$, où :

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1/3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

• f est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; +\infty[$.

Si $0 \leq x \leq 1$, alors :

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1} \leq x^n \leq 1.$$

Si $x > 1$, alors :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{si } n \geq 2.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \forall x \in [0; +\infty[, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x),$

où :

$$\varphi : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

L'application φ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$ (exemple de Riemann en $+\infty$, $2 > 1$).

Ceci montre que $(f_n)_{n \geq 2}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f = 0.$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + x^n + 1} dx = 0.$

5.4 Essayons d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto f_n(x) = f(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux, comme produit de deux applications continues par morceaux.

• Pour tout $x \in [0; 1]$, et pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f(x) \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\ &= f(x) \exp\left(n \left[-\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) \\ &= f(x) \exp\left(-x + o(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) e^{-x}. \end{aligned}$$

En notant $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto f(x) e^{-x},$

on a donc : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} g$ sur $[0; 1]$.

• L'application g est continue par morceaux, comme produit de deux applications continues par morceaux.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$|f_n(x)| = |f(x)| \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq |f(x)|,$$

et $|f|$ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $[0; 1]$ car continue par morceaux sur ce segment.

Du théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^1 f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^1 f(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f(x) e^{-x} dx.$$

5.5

a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$), la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Il en résulte, d'après le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément, absolument, simplement.

b) L'étude des variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0; 1]$ montre : $\forall x \in [0; 1], |x(1-x)| \leq \frac{1}{4}.$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], |f_n(x)| \leq \frac{n^2}{4^n},$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq \frac{n^2}{4^n}.$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{n^2}{4^n}.$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

$$\text{et : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{1}{4} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{4} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

D'après le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0; 1]$, donc uniformément, absolument, simplement.

c) 1) *Convergence simple, convergence absolue :*

La convergence absolue revient à la convergence simple, puisque les f_n sont toutes ≥ 0 .

Soit $x \in [0; +\infty[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^2} \leq \frac{nx^2}{n^3} = \frac{x^2}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement et absolument sur $[0; +\infty[$.

2) *Convergence normale, convergence uniforme :*

• On a : $\|f_n\|_\infty \geq |f_n(n)| = \frac{n^3}{n^3 + n^2} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1,$

donc : $\|f_n\|_\infty \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$

D'après le cours, il en résulte que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$, donc ne converge pas normalement sur $[0; +\infty[$.

• Soit $a \in [0; +\infty[$ fixé.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; a], |f_n(x)| = \frac{nx^2}{n^3 + x^2} \leq \frac{na^2}{n^3} = \frac{a^2}{n^2},$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty}^{[0;a]} \leq \frac{a^2}{n^2}.$

Il en résulte, d'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{[0;a]}$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[0; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé.

d) 1) *Convergence simple, convergence absolue :*

La convergence absolue revient à la convergence simple, puisque les f_n sont toutes ≥ 0 .

Soit $x \in [0; +\infty[$.

Si $x > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-n^2 x^2} \leq x e^{-n x^2} = x (e^{-x^2})^n.$$

Puisque $|e^{-x^2}| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-x^2})^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Si $x = 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 0$,

donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement et absolument sur $[0; +\infty[$.

2) *Convergence normale, convergence uniforme :*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application f_n est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0; +\infty[: f'_n(x) = \frac{1}{n}(1 - 2n^2x^2)e^{-n^2x^2}$,

d'où le tableau des variations de f_n :

x	0	$\frac{1}{n\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0 -
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{n^2\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^2\sqrt{2}e}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$), la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; +\infty[$, et rend l'étude de I) inutile.

e) 1) *Convergence simple, convergence absolue :*

La convergence absolue revient à la convergence simple, puisque les f_n sont toutes ≥ 0 .

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

$$\text{On a : } f_n(x) = \frac{n+x}{n^3+x^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument et simplement sur $[0; +\infty[$.

2) *Convergence normale, convergence uniforme :*

1^{re} méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application f_n est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'_n(x) = \frac{(n^3+x^2) - (n+x)2x}{(n^3+x^2)^2} = -\frac{x^2+2nx-n^3}{(n^3+x^2)^2}.$$

Par résolution d'une équation du second degré, on déduit le tableau de variations de f_n , en notant $x_n = -n + \sqrt{n^3+n^2}$:

x	0	x_n	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0 -
$f_n(x)$	$\frac{1}{n^2}$	$\nearrow$	$\searrow$ 0

On a donc :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= f_n(x_n) \\ &= \frac{\sqrt{n^3+n^2}}{2n^3+2n^2-2n\sqrt{n^3+n^2}} = \frac{1}{2(\sqrt{n^3+n^2}-n)} \\ &= \frac{1}{2n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}} \geq 0. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; +\infty[$, donc uniformément, absolument, simplement, et rend inutile l'étude de I).

2^e méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Vu le dénominateur n^3+x^2 , séparons en cas selon la position relative de n^3 et de x^2 , c'est-à-dire selon la position de x par rapport à $n^{3/2}$:

• si $x \geq n^{3/2}$, alors :

$$|f_n(x)| = \frac{n+x}{n^3+x^2} \leq \frac{n+x}{x^2} \leq \frac{n^{3/2}+x}{x^2} \leq \frac{2x}{x^2} \leq \frac{2}{n^{3/2}}$$

• si $x \leq n^{3/2}$, alors :

$$|f_n(x)| = \frac{n+x}{n^3+x^2} \leq \frac{n+x}{n^3} \leq \frac{n+n^{3/2}}{n^3} \leq \frac{2n^{3/2}}{n^3} = \frac{2}{n^{3/2}}.$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{2}{n^{3/2}}$,

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^{3/2}}$.

D'après l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; +\infty[$, donc uniformément, absolument, simplement.

f) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, |f_n(x)| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; +\infty[$, donc uniformément, absolument, simplement.

g) 1) *Convergence simple* :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$ est alternée, $\left| \frac{(-1)^n}{x^2 + n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et la suite $\left(\frac{1}{x^2 + n} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante.

D'après le TSCSA, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

2) *Convergence absolue, convergence normale* :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

$$\text{On a : } |f_n(x)| = \frac{1}{x^2 + n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ diverge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge absolument sur aucune partie non vide de $[0; +\infty[$.

Il en résulte que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge normalement sur aucune partie non vide de $[0; +\infty[$.

3) *Convergence uniforme* :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Puisque, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ relève du TSCSA, en notant $R_n(x)$ le reste d'ordre n , on a, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x^2 + (n+1)} \leq \frac{1}{n+1},$$

$$\text{donc : } \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte : $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et on conclut, d'après le cours, que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

5.6 a) 1) *Convergence simple* :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

La série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est alternée, $|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et la suite $(|f_n(x)|)_{n \geq 1}$ est décroissante. D'après le TSCSA, il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

On conclut : $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

2) *Convergence absolue* :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

• Cas $x \neq 0$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+x} \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n.$$

Comme $|e^{-x}| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-x})^n$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge.

• Cas $x = 0$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| = \frac{1}{n}$,

donc la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ diverge.

On conclut : $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument sur $]0; +\infty[$, mais non sur $[0; +\infty[$.

3) *Convergence normale* :

• *Étude sur $]0; +\infty[$* :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Comme } |f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{n},$$

on a : $\|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{n}$, et donc, d'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty^{]0; +\infty[}$ diverge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$.

• *Étude sur $[a; +\infty[$, $a \in]0; +\infty[$ fixé* :

Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; +\infty[,$$

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+x} \leq \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-nx} \leq e^{-na},$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty^{[a; +\infty[} \leq (e^{-a})^n.$$

Puisque $|e^{-a}| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-a})^n$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$, pour tout $a \in]0; +\infty[$ fixé.

4) *Convergence uniforme :*

Puisque, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ relève du TSCSA, on a, en notant R_n le reste d'ordre n :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[$,

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{(n+1)+x} \leq \frac{1}{n+1},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$,

puis : $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

b) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$, d'après un théorème du cours, on conclut que la somme S est continue sur $[0; +\infty[$.

5.7 a) Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé. On a :

$$f_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2} = \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} \geq 0.$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ converge (cf. Exercice 4.2, utilisation de la règle $n^{3/2}u_n$), par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

On conclut : $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^2 sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)n^2}, \quad f''_n(x) = -\frac{1}{(n+x)^2n^2}.$$

• Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f''_n\|_\infty = \frac{1}{n^4}$,

d'après l'exemple de Riemann ($4 > 1$), la série $\sum_{n \geq 1} f''_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; +\infty[$.

• Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^3}$,

d'après l'exemple de Riemann ($3 > 1$), la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; +\infty[$.

• On a vu en a) que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation pour les séries d'applications, on conclut que S est de classe C^2 sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)n^2}, \quad S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{(n+x)^2n^2}.$$

c) 1) D'après b), S est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $S'(x)$ est la somme d'une série à termes tous > 0 , donc $S'(x) > 0$. On conclut que S est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2) D'après b), S est de classe C^2 sur $[0; +\infty[$, et, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $S''(x)$ est la somme d'une série à termes tous ≤ 0 , donc $S''(x) \leq 0$. On conclut que S est concave sur $[0; +\infty[$.

5.8 a) 1) *Convergence simple :*

Soit $x \in [0; 1]$ fixé.

• Si $x \neq 1$, alors : $0 \leq \sin \frac{\pi x}{2} < 1$,

donc, par prépondérance de la suite géométrique sur les puissances : $f_n(x) = n(1-x) \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

• Si $x = 1$, alors : $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$.

2) *Convergence uniforme :*

L'étude des variations de f_n paraît malcommode, car le signe de $f'_n(x)$ ne paraît pas facile à déterminer.

• *Étude sur $[0; 1]$:*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons :

$$\begin{aligned} f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right)^n = \left(\cos \frac{\pi}{2n}\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln \cos \frac{\pi}{2n}\right) = \exp\left(n \ln \left[1 - \frac{\pi^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(n \left[-\frac{\pi^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1. \end{aligned}$$

Il en résulte : $\|f_n - 0\|_\infty \geq \left|f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ceci montre que $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0; 1]$.

• *Étude sur $[0; a]$, $a \in [0; 1]$ fixé :*

Soit $a \in [0; 1]$ fixé. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; a]$,

$$|f_n(x)| = n(1-x) \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^n \leq n \left(\sin \frac{\pi a}{2} \right)^n,$$

$$\text{donc : } \|f_n\|_{\infty}^{[0;a]} \leq n \left(\sin \frac{\pi a}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{d'où : } \|f_n\|_{\infty}^{[0;a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $[0; a]$, pour tout $a \in [0; 1[$ fixé.

b) 1) *Convergence simple* :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \sin \left(\frac{n+1}{n} x \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sin x.$$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$.

2) *Convergence uniforme* :

• *Étude sur $\mathbb{R}$* :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que, par exemple :

$$\begin{aligned} |(f_{2n} - f)(n\pi)| &= \left| \sin \left(\frac{2n+1}{2n} n\pi \right) - \sin(n\pi) \right| \\ &= |(-1)^n - 0| = 1. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \|f_{2n} - f\|_{\infty} \geq 1,$$

$$\text{d'où : } \|f_{2n} - f\|_{\infty} \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ puis } \|f_n - f\|_{\infty} \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ceci montre que $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

• *Étude sur $[-a; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé* :

Soit $a \in [0; +\infty[$ fixé.

On a, en utilisant une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a; a], \\ |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sin \left(\frac{n+1}{n} x \right) - \sin x \right| \\ &= \left| 2 \sin \left(\frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} x - x \right) \right) \cos \left(\frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} x + x \right) \right) \right| \\ &= \left| 2 \sin \frac{x}{2n} \cos \frac{(2n+1)x}{2n} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x}{2n} \right| \leq 2 \left| \frac{x}{2n} \right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \|f_n - f\|_{\infty}^{[-a;a]} \leq \frac{a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[-a; a]$, pour tout $a \in (0; +\infty[$ fixé.

c) 1) *Convergence simple* :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

Si $x \neq 0$, alors :

$$f_n(x) = \ln \left(1 + \frac{nx^2}{1+nx} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(1+x).$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ alors : } f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où :

$$f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x).$$

2) *Convergence uniforme* :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le calcul de $(f_n - f)'$ paraissant compliqué, nous allons essayer, pour $x \in [0; +\infty[$, de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

L'application $\varphi : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$

$$\text{et : } \forall t \in [0; +\infty[, \varphi'(t) = \frac{1}{1+t}.$$

D'où, d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée

à φ entre x et $\frac{nx^2}{1+nx}$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \varphi \left(\frac{nx^2}{1+nx} \right) - \varphi(x) \right| \\ &\leq \left(\sup_{t \in [0; +\infty[} |\varphi'(t)| \right) \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{et on conclut : } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f \text{ sur } [0; +\infty[.$$

Remarque : Ce résultat entraîne la convergence simple. Cependant, on ne pouvait pas se passer de l'étude de la convergence simple, car, pour étudier la convergence uniforme, on a besoin de former $f_n - f$, donc de connaître f , issue de l'étude de la convergence simple.

d) 1) *Convergence simple* :

Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. On a :

$$f_n(x) = (nx)^{\frac{1}{n}} = \exp \left(\frac{x}{n} \ln(nx) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où $f = 1$ (application constante).

2) *Convergence uniforme* :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $g_n = f_n - f$ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= f'_n(x) = f_n(x) \left(\frac{1}{n} \ln(nx) + \frac{x}{n} \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{n} f_n(x) (\ln(nx) + 1). \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations de g_n :

x	0	$\frac{1}{en}$	$+\infty$
$g'_n(x)$	-	0	+
$g_n(x)$	0	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$

Et :

$$g_n(x) = f_n(x) - 1 = \exp\left(\frac{x}{n} \ln(nx)\right) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

$$g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

$$g_n\left(\frac{1}{en}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{en^2}} - 1 = e^{-\frac{1}{en^2}} - 1.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = f_n - f$ n'est pas bornée sur $]0; +\infty[$, donc $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$.

• Soit $b \in]0; +\infty[$ fixé. On a, d'après le tableau de variations de $g_n = f_n - f$:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty}^{[0; b]} &\leq \text{Max}\left(-g_n\left(\frac{1}{en}\right), g_n(b)\right) \\ &= \text{Max}\left(e^{-\frac{1}{en^2}} - 1, g_n(b)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

car $e^{-\frac{1}{en^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et, par convergence simple,

$$g_n(b) = f_n(b) - f(b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout $]0; b]$, $b \in]0; +\infty[$ fixé.

5.9 L'application $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(1+t)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \varphi'(t) = \frac{1}{1+t},$$

donc φ' est bornée et $\sup_{t \in [0; +\infty[} |\varphi'(t)| = 1$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in [0; +\infty[^2, |\varphi(u) - \varphi(v)| \\ \leq \left(\sup_{t \in [0; +\infty[} |\varphi'(t)|\right) |u - v| = |u - v|, \end{aligned}$$

donc :

$$\forall (u, v) \in [0; +\infty[^2, |\ln(1+u) - \ln(1+v)| \leq |u - v|.$$

D'où, ici : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} |\ln(1+f_n(x)) - \ln(1+f(x))| \\ \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\ln(1+f_n) - \ln(1+f)\|_{\infty} \leq \|f_n - f\|_{\infty}.$$

Comme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$, on a $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc,

par encadrement, $\|\ln(1+f_n) - \ln(1+f)\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

et on conclut : $\ln(1+f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} \ln(1+f)$.

5.10 Puisque f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, en notant $M_3 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(3)}(t)|$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - \left(f(x) + \frac{1}{n}f'(x) + \frac{1}{2n^2}f''(x)\right) \right| \leq \frac{1}{6n^3}M_3 \\ \left| f\left(x - \frac{1}{n}\right) - \left(f(x) - \frac{1}{n}f'(x) + \frac{1}{2n^2}f''(x)\right) \right| \leq \frac{1}{6n^3}M_3, \end{cases}$$

d'où, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &\left| \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}f''(x)\right) \right| \\ &= \left| \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - \left(f(x) + \frac{1}{n}f'(x) + \frac{1}{2n^2}f''(x)\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + \left[f\left(x - \frac{1}{n}\right) - \left(f(x) - \frac{1}{n}f'(x) + \frac{1}{2n^2}f''(x)\right)\right] \right| \\ &\leq 2 \frac{1}{6n^3}M_3 = \frac{M_3}{3n^3}, \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} &|g_n(x) - f''(x)| \\ &= n^2 \left| \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{1}{n}\right)\right] - \frac{1}{n^2}f''(x) \right| \\ &\leq \frac{M_3}{3n}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $g_n - f''$ est bornée et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|g_n - f''\|_{\infty} \leq \frac{M_3}{3n}.$$

Comme $\frac{M_3}{3n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il en résulte, par encadrement :

$\|g_n - f''\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, et on conclut : $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f''$ sur $\mathbb{R}$.

5.11 Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ existe et $f_n(x) \geq 0$.

Considérons l'application

$$\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sqrt{1+t}$$

et cherchons les éventuels points fixes de φ .

On a, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $\varphi(t) \geq 0$ et :

$$\begin{aligned} \varphi(t) = t &\iff 1+t = t^2 \iff t^2 - t - 1 = 0 \\ &\iff t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ noté } \alpha. \end{aligned}$$

Essayons de montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante α .

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. On a, par utilisation d'une expression conjuguée :

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - \alpha| &= |\sqrt{1+f_n(x)} - \sqrt{1+\alpha}| \\ &= \frac{|f_n(x) - \alpha|}{\sqrt{1+f_n(x)} + \sqrt{1+\alpha}} \leq \frac{1}{2} |f_n(x) - \alpha|. \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate montre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |f_0(x) - \alpha|,$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|f_n(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (|f_0(x) - \alpha|) \leq \frac{1}{2^n} (\|f_0\|_\infty + \alpha).$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et que :

$$\|f_n - \alpha\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} (\|f_0\|_\infty + \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} \alpha$ sur $\mathbb{R}$, où α est la fonction constante égale à α .

5.12 • Montrons, par récurrence sur n , que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n existe, est ≥ 0 et est bornée sur $\mathbb{R}$.

La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse.

Si la propriété est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, alors f_{n+1} existe, et, comme : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f_n(x) \leq \|f_n\|_\infty$,

$$\text{on a : } \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \ln(1 + f_n(x)) \leq \ln(1 + \|f_n\|_\infty),$$

donc f_{n+1} est ≥ 0 et bornée.

On a ainsi montré, par récurrence sur n , que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n existe, est ≥ 0 et est bornée.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq f_{n+1}(x) = \ln(1 + f_n(x)) \leq \ln(1 + \|f_n\|_\infty),$$

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N}, \|f_{n+1}\|_\infty \leq \ln(1 + \|f_n\|_\infty).$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \|f_n\|_\infty$, et étudions la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \ln(1 + u_n) \leq u_n,$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\text{De plus, comme : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0,$$

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.

Il en résulte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite ℓ vérifie $\ell \geq 0$.

$$\text{De plus, comme : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \ln(1 + u_n),$$

$$\text{on a, par passage à la limite : } \ell \leq \ln(1 + \ell).$$

L'étude des variations de la fonction $t \mapsto \ln(1 + t) - t$ sur $[0; +\infty[$ montre que : $\ell \leq \ln(1 + \ell) \iff \ell = 0$.

$$\text{Ceci montre : } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ c'est-à-dire } \|f_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

$$\text{et on conclut : } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0.$$

5.13 a) Étude de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

1) Convergence simple :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

On a :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt \leq \frac{1}{n!} x x^n = \frac{x^{n+1}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

par prépondérance classique.

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$ sur $[0; +\infty[$.

2) Convergence uniforme :

• Étude sur $[0; +\infty[$:

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'étude de la fonction Γ d'Euler :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{n!} \Gamma(n+1) = \frac{1}{n!} n! = 1. \end{aligned}$$

Il en résulte : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \geq 1$,

et donc : $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$ sur $[0; +\infty[$.

• Étude sur $[0; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé :

Soit $a \in [0; +\infty[$ fixé.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; a]$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^a t^n e^{-t} dt = f_n(a),$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty^{[0;a]} \leq f_n(a).$$

Comme $f_n(a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on déduit $\|f_n\|_\infty^{[0;a]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

et on conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$ sur tout $[0; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé.

b) Étude de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{n!} \left(\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt - \int_0^x t^n e^{-t} dt \right) \\ &= \frac{1}{n!} \Gamma(n+1) - f_n(x) = 1 - f_n(x). \end{aligned}$$

On déduit de a) les résultats suivants :

• $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 1$ sur $[0; +\infty[$

• $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 1$ sur tout $[0; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé

• $g_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 1$ sur $[0; +\infty[$.

5.14 • Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{P(x)} f(x) dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^N \overline{a_k} x^k \right) f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^N \overline{a_k} \underbrace{\int_a^b x^k f(x) dx}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

• D'après le premier théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_a^b \overline{f(x)} f(x) dx \\ &= \int_a^b \overline{f(x)} f(x) dx - \underbrace{\int_a^b \overline{P_n(x)} f(x) dx}_{=0} \\ &= \int_a^b (\overline{f(x)} - \overline{P_n(x)}) f(x) dx \leq (b-a) \|f - P_n\|_\infty \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on déduit : $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$.

Puisque f est continue sur $[a; b]$, il en résulte $f = 0$.

5.15 D'après le premier théorème de Weierstrass, il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ telle que : $Q_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur $[a; b]$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n = Q_n - Q_n(c) + f(c)$.

Il est clair que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(c) = f(c)$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [a; b], |P_n(x) - f(x)| &\leq |P_n(x) - Q_n(x)| + |Q_n(x) - f(x)| \\ &= |Q_n(c) - f(c)| + |Q_n(x) - f(x)| \leq 2\|Q_n - f\|_\infty, \end{aligned}$$

d'où : $\|P_n - f\|_\infty \leq 2\|Q_n - f\|_\infty$.

Comme $Q_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$, on a : $\|Q_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

puis, par encadrement : $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

d'où : $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$. Ainsi, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient.

5.16 a) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto n(e^{\frac{x}{n+1}} - 1).$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; 1]$.

• Soit $x \in [0; 1]$ fixé.

Si $x \neq 0$, alors :

$$f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n+1}} - 1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \frac{x}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x,$$

donc : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$.

Si $x = 0$, alors : $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ainsi : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où : $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x$.

• f est continue par morceaux (car continue) sur $[0; 1]$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1]$,

$$|f_n(x)| = n(e^{\frac{x}{n+1}} - 1) \leq n(e^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

On a : $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Il existe donc $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq C$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], |f_n(x)| \leq C$,

et l'application constante C est intégrable sur le segment $[0; 1]$.

Ceci montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^1 f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n(e^{\frac{x}{n+1}} - 1) dx = \frac{1}{2}$.

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (x^2 + 1) \frac{n+x}{n+x^2} e^{-x}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

• Pour tout $x \in [0; +\infty[: f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (x^2 + 1) e^{-x}$,

donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où :

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (x^2 + 1) e^{-x}.$$

• f est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= (x^2 + 1) \frac{n+x}{n+x^2} e^{-x} = (x^2 + 1) \frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n}} e^{-x} \\ &\leq (x^2 + 1)(1+x) e^{-x}, \end{aligned}$$

car $\frac{x}{n} \leq x$ et $\frac{x^2}{n} \geq 0$.

L'application

$$\varphi : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (x^2 + 1)(1+x) e^{-x}$$

est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$ car : $x^2 \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^5 e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,

donc, pour x assez grand : $x^2 \varphi(x) \leq 1$, $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{x^2}$,

exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 .

Ceci montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, f est intégrable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} f_n \mapsto \underbrace{\int_0^{+\infty} f}_{\text{notée } I}.$$

Il reste à calculer I .

On a, en utilisant des intégrales de fonctions intégrables :

$$I = \int_0^{+\infty} (x^2 + 1) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ = \Gamma(3) + \Gamma(1) = 2! + 0! = 3.$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} (x^2 + 1) \frac{n+x}{n+x^2} e^{-x} dx = 3.$

c) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{n \sin nx}{n^2 + x^4}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_n(x)| = \frac{n |\sin nx|}{n^2 + x^4} \leq \frac{n}{n^2 + x^4} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

donc : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$ sur $\mathbb{R}$.

- 0 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|f_n(x)| = \frac{n |\sin nx|}{n^2 + x^4} \leq \frac{n}{n^2 + x^4}.$$

Rappelons : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad a^2 + b^2 \geq 2ab,$

d'où ici : $n^2 + x^4 \geq 2nx^2,$

et donc, si $x \neq 0$: $|f_n(x)| \leq \frac{n}{2nx^2} = \frac{1}{2x^2}.$

D'autre part, si $|x| \leq 1$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{n}{n^2 + x^4} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x),$

où : $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

L'application φ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $\mathbb{R}$ (exemple de Riemann en $\pm\infty$, $2 > 1$).

Ceci montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} 0 = 0.$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + x^4} dx = 0.$

d) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\pi - x} \sin^n x.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; \pi]$.

- Soit $x \in [0; \pi]$.

Si $x \neq \frac{\pi}{2}$, alors $\sin x \in [0; 1[$, donc $\sin^n x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ puis :

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Si $x = \frac{\pi}{2}$, alors : $f_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où :

$$f : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \pi/2 \\ \sqrt{\pi/2} & \text{si } x = \pi/2. \end{cases}$$

- f est continue par morceaux sur $[0; \pi]$.

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; \pi],$

$$|f_n(x)| = \sqrt{\pi - x} \sin^n x \leq \sqrt{\pi - x} \leq \sqrt{\pi}$$

et l'application constante $x \mapsto \sqrt{\pi}$ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur le segment $[0; \pi]$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^\pi f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^\pi f = 0.$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sqrt{\pi - x} \sin^n x dx = 0.$

e) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^{-(x+a)^n}}{\sqrt{x}}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

- Soit $x \in]0; +\infty[$.

Si $x < 1 - a$, alors $0 < x + a < 1$, $(x + a)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Si $x = 1 - a$, alors : $f_n(x) = \frac{e^{-1}}{\sqrt{1-a}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{e^{-1}}{\sqrt{1-a}}.$

Si $x > 1 - a$, alors $x + a > 1$, $(x + a)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ sur $]0; +\infty[$, où l'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 - a \\ \frac{e^{-1}}{\sqrt{1-a}} & \text{si } x = 1 - a \\ 0 & \text{si } x > 1 - a. \end{cases}$$

- f est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0; +\infty[$.

Si $x \in]0; 1]$, alors : $0 \leq f_n(x) = \frac{e^{-(x+a)^n}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Si $x \in]1; +\infty[$, alors :

$$0 \leq f_n(x) = \frac{e^{-(x+a)^n}}{\sqrt{x}} \leq e^{-(x+a)^n} \leq e^{-x^n} \leq e^{-x}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; +\infty[, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$,

en notant :

$$\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

L'application φ est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur $]0; +\infty[$ (exemple de Riemann en 0, $1/2 < 1$; exemple du cours en $+\infty$). Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, f est intégrable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} f &= \int_0^{1-a} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= [2\sqrt{x}]_0^{1-a} = 2\sqrt{1-a}. \end{aligned}$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+a)^n}}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{1-a}$.

f) Remarquons que la borne $\sqrt[n]{n}$ dépend de n et que $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ par valeurs supérieures à 1.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n} dx = \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx}_{\text{notée } v_n} + \underbrace{\int_1^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n} dx}_{\text{notée } w_n}.$$

1) Étude de v_n :

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{1+x^n}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; 1]$.

- On a : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ sur $[0; 1]$, où :

$$f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

- f est continue par morceaux sur $[0; 1]$.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], |f_n(x)| = \sqrt{1+x^n} \leq \sqrt{2},$$

et l'application constante $\sqrt{2}$ est intégrable sur le segment $[0; 1]$.

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$v_n = \int_0^1 f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f = \int_0^1 1 dx = 1.$$

2) Étude de w_n :

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 0 \leq w_n &= \int_1^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n} dx \leq (\sqrt[n]{n} - 1)\sqrt{1+n} \\ &= (e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1)\sqrt{1+n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \sqrt{n} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

donc : $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

$$\text{Ainsi : } \int_0^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n} dx = v_n + w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 + 0 = 1.$$

$$\text{On conclut : } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n} dx = 1.$$

5.17 Essayons d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; a] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - 1 \right).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; a]$.

- Soit $x \in]0; a]$. On sait : $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^x$, donc :

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{e^x - 1}{x}. \text{ Ainsi, } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f \text{ sur }]0; a], \text{ où :}$$

$$f :]0; a] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{e^x - 1}{x}.$$

- f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; a]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque : $\forall t \in]-1; +\infty[, \ln(1+t) \leq t$,

$$\text{on a : } \forall t \in [0; +\infty[, 1+t \leq e^t,$$

$$\text{d'où, pour tout } x \in]0; a] : \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq (e^{\frac{x}{n}})^n = e^x,$$

$$\text{puis : } 0 \leq \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - 1 \leq e^x - 1,$$

$$\text{et enfin : } 0 \leq f_n(x) \leq f(x).$$

L'application f est continue par morceaux sur $]0; a]$, ≥ 0 , et

$$\text{intégrable sur }]0; a] \text{ car } f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1.$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^a f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^a f,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^a \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - 1 \right) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^a \frac{e^x - 1}{x} dx.$$

5.18

1) Existence de I_n :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $u_n : x \mapsto f(x) e^{-n^2 x^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car f l'est), et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x)| \leq \|f\|_\infty e^{-n^2 x^2}.$$

L'application $\varepsilon_n : x \mapsto e^{-n^2 x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car $x^2 \varepsilon_n(x) = x^2 e^{-n^2 x^2} \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{} 0$, donc, pour $|x|$ assez grand,

$$0 \leq \varepsilon_n(x) \leq \frac{1}{x^2}, \text{ et } x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ est intégrable sur }]-\infty; -1]$$

et sur $[1; +\infty[$, exemple de Riemann. Par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , u_n est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc I_n existe.

2) Équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini :

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, par le changement de variable $t = nx$:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-n^2 x^2} dx = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t^2} dt.$$

Essayons d'appliquer le théorème de convergence dominée, pour obtenir l'éventuelle limite de cette dernière intégrale.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t^2}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, car f l'est.

• Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $\frac{t}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc, par continuité de f en 0 : $f\left(\frac{t}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0)$, puis : $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0) e^{-t^2}$.

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} g$, où :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(0) e^{-t^2}.$$

• g est continue par morceaux (car continue) sur $\mathbb{R}$.

• On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t)| = \left| f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t^2} \right| \leq \|f\|_\infty e^{-t^2},$$

et l'application $t \mapsto \|f\|_\infty e^{-t^2}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t^2} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) e^{-t^2} dt = f(0) \sqrt{\pi},$$

en utilisant l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

On obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-n^2 x^2} dx = f(0) \frac{\sqrt{\pi}}{n} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

et on conclut, si on suppose $f(0) \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-n^2 x^2} dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} f(0) \frac{\sqrt{\pi}}{n}.$$

Remarque : La même méthode permet de montrer :

• si $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux et bornée, alors :

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-n^2 x^2} dx = f(0^+) \frac{\sqrt{\pi}}{2n} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right),$$

où $f(0^+)$ désigne la limite de f en 0 à droite

• si $f :]-\infty; 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux et bornée, alors :

$$\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-n^2 x^2} dx = f(0^-) \frac{\sqrt{\pi}}{2n} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right),$$

où $f(0^-)$ désigne la limite de f en 0 à gauche

• si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux et bornée, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-n^2 x^2} dx = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{n} + o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

5.19

D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe comme intégrale d'une application continue sur un segment.

a) Comme, pour tout $x \in]0; 1]$, $\sqrt{1-x^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$,

on peut conjecturer : $I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Le théorème de convergence dominée s'applique, mais un simple calcul de majoration est possible. En effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant une expression conjuguée :

$$\begin{aligned} |I_n - 1| &= \left| \int_0^1 \sqrt{1-x^n} dx - \int_0^1 1 dx \right| \\ &= \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^n}) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + \sqrt{1-x^n}} dx \\ &\leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

donc $|I_n - 1| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, puis : $I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

b) Reprenons le calcul de $I_n - 1$ effectué ci-dessus (sans la valeur absolue) :

$$I_n - 1 = - \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{1 + \sqrt{1 - x^n}} dx}_{\text{notée } J_n}.$$

Pour étudier J_n , effectuons le changement de variable

$$t = x^n, x = t^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt :$$

$$J_n = \int_0^1 \frac{t}{1 + \sqrt{1 - t}} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1 - t}} dt}_{\text{notée } K_n}.$$

Pour trouver la limite de K_n (si elle existe) lorsque l'entier n tend vers l'infini, nous allons essayer d'utiliser le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1 - t}}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

• Pour tout $t \in]0; 1]$, on a : $t^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ sur $]0; 1]$, où : $f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t}}.$

• f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

• On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0; 1], |f_n(t)| = \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1 - t}} \leq 1,$$

et l'application constante 1 est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur l'intervalle borné $]0; 1]$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$K_n = \int_0^1 f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t}} dt}_{\text{notée } L}.$$

Pour calculer L , on effectue le changement de variable

$$u = \sqrt{1 - t}, t = 1 - u^2, dt = -2u du :$$

$$\begin{aligned} L &= \int_1^0 \frac{1}{1 + u} (-2u) du = 2 \int_0^1 \frac{u}{1 + u} du \\ &= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + u}\right) du = 2[u - \ln(1 + u)]_0^1 = 2(1 - \ln 2). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } K_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2(1 - \ln 2),$$

et on conclut :

$$I_n - 1 = -J_n = -\frac{1}{n} K_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2(1 - \ln 2)}{n}.$$

5.20 a) 1) Convergence simple, convergence absolue :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

On a, par développement limité :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} = \left(\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{x}{n} \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est

absolument convergente. Ainsi, la série $\sum_n f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument, donc simplement, sur $[0; +\infty[$.

2) Convergence normale, convergence uniforme :

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

(prépondérance classique), f_n n'est pas bornée, et donc, d'après le cours, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément, ni donc normalement, sur $[0; +\infty[$.

• Soit $a \in [0; +\infty[$ fixé.

L'étude des variations des deux fonctions

$$t \longmapsto \ln(1 + t) - t, \quad t \longmapsto \ln(1 + t) - t + \frac{t^2}{2}$$

montre : $\forall t \in [0; +\infty[, -\frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t) - t \leq 0,$

d'où : $\forall t \in [0; +\infty[, |\ln(1 + t) - t| \leq \frac{t^2}{2}.$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; a],$

$$|f_n(x)| = \left| \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{x^2}{2n^2} \leq \frac{a^2}{2n^2}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty}^{[0; a]} \leq \frac{a^2}{2n^2}.$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{[0; a]}$ converge, et on conclut : $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[0; a]$, $a \in [0; +\infty[$ fixé.

b) L'étude des variations des deux fonctions

$$t \longmapsto \ln(1 + t) - t, \quad t \longmapsto \ln(1 + t) - t + \frac{t^2}{2}$$

montre : $\forall t \in [0; +\infty[, t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t) \leq t.$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[$,

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-x} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2} = \frac{x^2 e^{-x}}{2} \frac{1}{n^2}.$$

L'application $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^{-x}$

est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$, et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\varphi'(x) = (2x - x^2) e^{-x},$$

d'où le tableau de variations de φ :

x	0	2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

Ceci montre que φ est bornée et que :

$$\|\varphi\|_\infty = \varphi(2) = 4e^{-2}.$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty \leq 4e^{-2} \frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$, converge et on conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément, absolument, simplement) sur $[0; +\infty[$.

5.21 a) 1) Convergence simple sur $]0; +\infty[$:

Soit $x \in]0; +\infty[$.

Si $x \neq 0$, alors

$$f_n(x) = \text{Arctan} \frac{n+x}{1+n^3x} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n+x}{1+n^3x} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2x} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Si $x = 0$, alors $f_n(x) = \text{Arctan} n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi/2 \neq 0$,

donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge (grossièrement).

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ (et non sur $[0; +\infty[$).

2) Convergence normale sur $[1; +\infty[$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application f_n est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{n+x}{1+n^3x}\right)^2} \cdot \frac{(1+n^3x) - (n+x)n^3}{(1+n^3x)^2} \\ &= \frac{1-n^4}{(1+n^3x)^2 + (n+x)^2} \leq 0, \end{aligned}$$

donc f_n est décroissante sur $[0; +\infty[$, d'où :

$$\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq f_n(x) \leq f_n(1),$$

et donc : $\|f_n\|_\infty^{[1; +\infty[} \leq f_n(1)$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} f_n(1)$ converge (cf. 1)), par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty^{[1; +\infty[}$ converge, et on conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1; +\infty[$.

b) 1) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \text{Arctan} \frac{n+x}{1+n^3x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan} \frac{1}{n^3}$$

et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[1; +\infty[$, d'après le théorème du cours sur convergence uniforme et limite,

on a : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arctan} \frac{1}{n^3}$.

2) En notant R_n le reste d'ordre n de la série définissant L ci-dessus, et en utilisant une comparaison série/intégrale, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ étant décroissante et intégrable sur $[1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \text{Arctan} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \\ &\leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_n^{+\infty} = \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |R_n| \leq 0,9 \cdot 10^{-3} &\iff \frac{1}{2n^2} \leq 0,9 \cdot 10^{-3} \\ &\iff n^2 \geq \frac{10^3}{0,9} \simeq 555, \dots \iff n \geq 24. \end{aligned}$$

D'autre part, à $0,1 \cdot 10^{-3}$ près, en utilisant la calculatrice :

$$\sum_{k=1}^{24} \text{Arctan} \frac{1}{k^3} \simeq 0,9866.$$

On conclut : $L \simeq 0,986$ à 10^{-3} près.

5.22 a) 1) Convergence simple sur $]0; +\infty[$:

Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. La série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est alternée,

$|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et la suite $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, donc, d'après le TSCSA, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

2) Convergence uniforme sur $[1; +\infty[$:

On a, pour tout $x \in [1; +\infty[$, puisque la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ relève du TSCSA, en notant $R_n(x)$ le reste d'ordre n :

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}},$$

d'où : $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

donc $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Il en résulte que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[1; +\infty[$.

b) Puisque, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[1; +\infty[$, d'après le théorème du cours sur convergence uniforme et limite, on déduit :

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

c) D'abord, a existe car la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, d'après le TSCSA.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [1; +\infty[$, en utilisant une expression conjuguée :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - g_n(x)| &= \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \right| \\ &= \frac{\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{nx})} = \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{1}{2x^{3/2}} \frac{1}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (exemple de Riemann, $3/2 > 1$), il en résulte, pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left| S(x) - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x) - g_n(x)) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x) - g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2x^{3/2}} \frac{1}{n^{3/2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \right) \frac{1}{x\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

et donc : $S(x) - \frac{a}{\sqrt{x}} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$,

d'où, en conclusion : $S(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$.

5.23 a) D'après le cours, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la série de Riemann

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$, d'où :

$$\text{Déf}(f) =]1; +\infty[.$$

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]1; +\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge simplement sur $]1; +\infty[$.

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]1; +\infty[$ fixés :

$$n^{\frac{1+x}{2}} f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^{\frac{x-1}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc, pour n assez grand : $n^{\frac{1+x}{2}} |f_n^{(k)}(x)| \leq 1$,

puis : $|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}}$.

D'après l'exemple de Riemann ($\frac{x+1}{2} > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} |f_n^{(k)}(x)|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}(x)$ converge absolument, donc converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge simplement sur $]1; +\infty[$.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout segment $[a; b]$ inclus dans $]1; +\infty[$, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a; b]$.

En effet, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b]$,

$$|f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^x} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a} = |f_n^{(k)}(a)|,$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n^{(k)}\|_{\infty}^{[a; b]} \leq |f_n^{(k)}(a)|$.

D'après le point précédent, la série $\sum_{n \geq 1} |f_n^{(k)}(a)|$ converge, donc,

par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{[a; b]}$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a; b]$.

D'après un théorème du cours, il en résulte que ζ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ et que l'on peut dériver terme à terme, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]1; +\infty[, \quad \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

c) 1) D'après b), on a :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

Les termes de cette dernière série sont tous ≥ 0 et non tous nuls, donc leur somme est > 0 , d'où :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \zeta'(x) < 0.$$

Il en résulte que ζ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

2) D'après b) : $\forall x \in]1; +\infty[, \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$,

donc ζ est convexe.

d) 1) Pour obtenir un encadrement de $\zeta(x)$, nous allons utiliser une comparaison série/intégrale.

Soit $x \in]1; +\infty[$ fixé.

Puisque l'application

$$\varphi :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \frac{1}{t^x} = t^{-x}$$

est continue par morceaux (car continue), décroissante, intégrable sur $[1; +\infty[$ (exemple de Riemann en $+\infty, x > 1$), par comparaison série/intégrale, on a :

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)}_{= \zeta(x)} \leq \varphi(1) + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

Et :

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_1^{+\infty} t^{-x} dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}.$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

2) Comme $1 + \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$, on déduit, par encadrement : $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

3) Puisque $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$, on obtient :

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty.$$

e) 1) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

• $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[2; +\infty[$.

D'après le théorème du cours sur convergence uniforme et limite, on déduit :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

2) On a, pour tout $x \in [2; +\infty[$:

$$\zeta(x) - 1 - \frac{1}{2^x} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Par comparaison série/intégrale, puisque, pour tout $x \in [2; +\infty[$ fixé, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue par morceaux (car continue), décroissante et intégrable sur $[1; +\infty[$, on a :

$$0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_2^{+\infty} = \frac{2^{-x+1}}{x-1} = \frac{2}{x-1} 2^{-x}.$$

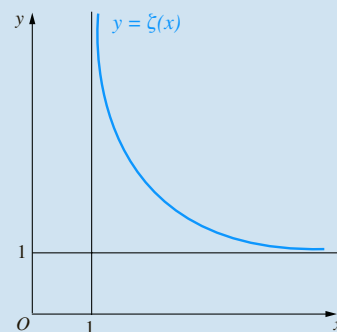
$$\text{On a donc : } \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (2^{-x}),$$

$$\text{d'où : } \zeta(x) - 1 - \frac{1}{2^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{2^x} \right),$$

$$\text{et on conclut : } \zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}.$$

f)

x	1	$+\infty$
$\zeta'(x)$		-
$\zeta(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1



5.24 a) 1) Convergence simple :

Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est alternée,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^x} \right| = \frac{1}{n^x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et la suite } \left(\frac{1}{n^x} \right)_{n \geq 1} \text{ décroît. D'après}$$

le TSCSA, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

2) Convergence absolue :

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0; +\infty[, |f_n(x)| = \frac{1}{n^x}$,

la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge si et seulement si $x > 1$.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument sur $]1; +\infty[$ et ne converge pas absolument ailleurs.

3) *Convergence normale :*

- Pour tout $a > 1$, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$, car $\|f_n\|_{\infty}^{[a; +\infty[} = \frac{1}{n^a}$.

- La série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]1; +\infty[$, puisque $\|f_n\|_{\infty}^{[1; +\infty[} = \frac{1}{n}$ et que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

4) *Convergence uniforme :*

- Puisque $\|f_n\|_{\infty}^{[0; +\infty[} = 1 \not\rightarrow 0$, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$.

- Soit $b \in]0; +\infty[$ fixé. Puisque, pour tout $x \in]0; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ relève du TSCSA, on a, en notant R_n le reste d'ordre n :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [b; +\infty[$,

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^b},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_{\infty}^{[b; +\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^b}$,

et donc : $\|R_n\|_{\infty}^{[b; +\infty[} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout $[b; +\infty[$, $b \in]0; +\infty[$ fixé.

b) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0; +\infty[$, et que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$, d'après un théorème du cours, on conclut que la somme T est continue sur $]0; +\infty[$.

c) Soit $x \in]1; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \zeta(x) + T(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x}, \end{aligned}$$

car les termes d'indices impairs sont tous nuls. Puis :

$$\zeta(x) + T(x) = 2^{1-x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = 2^{1-x} \zeta(x).$$

On conclut : $\forall x \in]1; +\infty[$, $T(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

5.25 Nous allons développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions, puis permuter intégrale et série.

On a, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} x^{\alpha-1}(x - \ln(e^x - 1)) &= -x^{\alpha-1} \ln(1 - e^{-x}) \\ &= x^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-nx}}{n}. \end{aligned}$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x^{\alpha-1} e^{-nx}}{n}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et la somme S

$$\text{est : } S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n : x \longmapsto x^{\alpha-1}(x - \ln(e^x - 1)).$$

- S est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

- Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

On remarque d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; +\infty[, f_n(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-nx}}{n} \geq 0.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-nx}}{n} dx \\ &\stackrel{u=nx}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{u}{n}\right)^{\alpha-1} e^{-u}}{n} \frac{1}{n} du \\ &= \frac{1}{n^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Comme $\alpha + 1 > 1$, d'après l'exemple de Riemann, la série

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \text{ converge.}$$

D'après le théorème sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications, on déduit que S est intégrable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(x - \ln(e^x - 1)) dx \\ = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha) = \zeta(\alpha + 1) \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

5.26 1) Existence :

- L'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x}{\operatorname{sh} x}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

- En 0 : $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, donc f est intégrable sur $]0; 1]$.

• En $+\infty$: $x^2 f(x) = \frac{x^3}{\text{sh } x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc, pour x assez grand : $x^2 f(x) \leq 1$, puis : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$. D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur $]0; +\infty[$ et on conclut que $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\text{sh } x} dx$ existe.

2) Calcul :

Nous allons essayer de développer la fonction sous l'intégrale en somme d'une série de fonctions, puis permuter intégrale et série.

On a, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\text{sh } x} &= \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2x e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \\ &= 2x e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2x})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2x e^{-(2n+1)x}, \end{aligned}$$

car $|e^{-2x}| < 1$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x e^{-(2n+1)x}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

• $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et a pour somme f .

• f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

• Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

Remarquons d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; +\infty[, \quad f_n(x) = 2x e^{-(2n+1)x} \geq 0.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} 2x e^{-(2n+1)x} dx \\ &\stackrel{t = (2n+1)x}{=} \int_0^{+\infty} 2 \frac{t}{2n+1} e^{-t} \frac{1}{2n+1} dt \\ &= \frac{2}{(2n+1)^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \\ &= \frac{2}{(2n+1)^2} \Gamma(2) = \frac{2}{(2n+1)^2} 1! = \frac{2}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

D'après le théorème sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications, on déduit :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Il reste à calculer cette somme de série.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

d'où, en passant à la limite lorsque l'entier N tend vers l'infini et puisque les séries considérées convergent :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On conclut : $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\text{sh } x} dx = \frac{\pi^2}{8}.$

5.27 a) 1) Convergence simple :

Soit $x \in [0; +\infty[$.

Si $x \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{\ln(1 + nx^2)}{nx} \\ &= \frac{\ln n + \ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{nx^2}\right)}{nx} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{nx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, alors : $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$ sur $[0; +\infty[$.

2) Convergence uniforme :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. L'étude des variations de f_n paraît malcommode, car le signe de $f'_n(x)$ semble difficile à étudier.

Vu l'expression $1 + nx^2$, il peut être intéressant de séparer en cas selon les positions relatives de 1 et nx^2 .

Soit $x \in [0; +\infty[$.

• Si $x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors, en utilisant l'inégalité classique

$$\forall t \in]-1; +\infty[, \quad \ln(1+t) \leq t,$$

on a : $0 \leq f_n(x) \leq \frac{nx^2}{nx} = x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$

• Si $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $1 \leq nx^2$, d'où :

$$\begin{aligned}
0 \leq f_n(x) &= \frac{\ln(1+nx^2)}{nx} \leq \frac{\ln(2nx^2)}{nx} \\
&= \frac{\ln(2n)}{n} \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{n} \\
&\leq \frac{\ln(2n)}{n} \sqrt{n} + \frac{2}{n} = \frac{\ln(2n)}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

On déduit, en regroupant les deux cas précédents :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{\ln(2n)}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n},$$

$$\text{et donc : } \|f_n\|_\infty \leq \frac{\ln(2n)}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} 0$ sur $]0; +\infty[$.

b) 1) Convergence simple :

Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé.

Vu la présence de $(\ln x)^{2n}$, nous allons séparer en cas selon la position de $(\ln x)^2$ par rapport à 1, c'est-à-dire selon la position de $\ln x$ par rapport à -1 et à 1 .

• Si $x \in]0; e^{-1} \cup]e; +\infty[$, alors $(\ln x)^2 > 1$,

$$\text{donc } (\ln x)^{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty, \text{ puis : } \frac{2 + (\ln x)^{2n}}{1 + (\ln x)^{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1,$$

$$\text{et enfin : } f_n(x) = \ln \frac{2 + (\ln x)^{2n}}{1 + (\ln x)^{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

• Si $x = e^{-1}$ ou $x = e$, alors $(\ln x)^2 = 1$, donc :

$$f_n(x) = \ln \frac{3}{2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln \frac{3}{2}.$$

• Si $e^{-1} < x < e$, alors $(\ln x)^2 < 1$, donc $(\ln x)^{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

$$\text{puis : } f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln 2.$$

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où : $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < e^{-1} \text{ ou } e < x \\ \ln \frac{3}{2} & \text{si } x = e^{-1} \text{ ou } x = e \\ \ln 2 & \text{si } e^{-1} < x < e. \end{cases}$$

On pouvait aussi remarquer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x),$$

ce qui permet de se ramener à une étude sur $[1; +\infty[$ au lieu de $]0; +\infty[$.

2) Convergence uniforme :

• Puisque chaque f_n est continue sur $]0; +\infty[$ et que f est discontinue en e^{-1} et en e , d'après un théorème du cours par contraposée, on déduit que la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f n'est uniforme sur aucun des intervalles suivants : $]0; e^{-1}[$, $]e^{-1}; 1]$, $[1; e]$, $]e; +\infty[$.

• Soit $a \in]e; +\infty[$ fixé. On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; +\infty[$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \ln \frac{2 + (\ln x)^{2n}}{1 + (\ln x)^{2n}} = \ln \left(1 + \frac{1}{1 + (\ln x)^{2n}} \right) \\
&\leq \frac{1}{1 + (\ln x)^{2n}} \leq \frac{1}{1 + (\ln a)^{2n}},
\end{aligned}$$

$$\text{donc : } \|f_n - f\|_\infty^{[a; +\infty[} \leq \frac{1}{1 + (\ln a)^{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur $[a; +\infty[$, pour tout $a \in]e; +\infty[$ fixé.

De même (ou en remplaçant x par $\frac{1}{x}$) : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur tout $]0; b]$, $b \in]0; e^{-1}[$ fixé.

• Soit $b \in [1; e]$ fixé. On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [1; b]$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \ln \frac{2 + (\ln x)^{2n}}{1 + (\ln x)^{2n}} - \ln 2 \right| \\
&= \ln \frac{2 + 2(\ln x)^{2n}}{2 + (\ln x)^{2n}} = \ln \left(1 + \frac{(\ln x)^{2n}}{2 + (\ln x)^{2n}} \right) \\
&\leq \frac{(\ln x)^{2n}}{2 + (\ln x)^{2n}} \leq \frac{(\ln x)^{2n}}{2} \leq \frac{(\ln b)^{2n}}{2},
\end{aligned}$$

$$\text{donc : } \|f_n - f\|_\infty^{[1; b]} \leq \frac{(\ln b)^{2n}}{2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur tout $[1; b]$, $b \in [1; e]$ fixé.

De même (ou en changeant x en $\frac{1}{x}$) : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur tout $[a; 1]$, $a \in]e^{-1}; 1]$ fixé.

Il en résulte que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur tout $[a; b]$, $(a, b) \in]e^{-1}; e]^2$ fixé.

c) 1) Convergence simple :

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Vu la présence de $2^n + |x|^n$, séparons en cas selon la position de $|x|$ par rapport à 2.

• Si $|x| < 2$, alors :

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= (2^n + |x|^n)^{\frac{1}{n}} = 2 \left[1 + \left(\frac{|x|}{2} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\
&= 2 \exp \left(\frac{1}{n} \ln \left[1 + \left(\frac{|x|}{2} \right)^n \right] \right) \\
&= 2 \exp \left[\frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{2} \right)^n + o \left(\left(\frac{|x|}{2} \right)^n \right) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2.
\end{aligned}$$

• Si $|x| = 2$, alors :

$$f_n(x) = (2^n + |x|^n)^{\frac{1}{n}} = (2 \cdot 2^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2.$$

• Si $|x| > 2$, alors :

$$f_n(x) = (2^n + |x|^n)^{\frac{1}{n}} = |x| \left(1 + \left(\frac{2}{|x|} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |x|,$$

comme plus haut.

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} 2 & \text{si } |x| \leq 2 \\ |x| & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{Max}(2, |x|)$.

2) *Convergence uniforme* :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} (2^n + |x|^n)^{\frac{1}{n}} - (2^n)^{\frac{1}{n}} & \text{si } |x| \leq 2 \\ (2^n + |x|^n)^{\frac{1}{n}} - (|x|^n)^{\frac{1}{n}} & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

L'application $\varphi : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^{\frac{1}{n}}$

est continue sur $[0; +\infty[$, de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, et :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \varphi'(t) = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n t^{1-\frac{1}{n}}}.$$

D'où, par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(a, h) \in [0; +\infty[^2$:

$$0 \leq \varphi(a+h) - \varphi(a) \leq h \sup_{t \in [a; a+h]} \varphi'(t) \leq \frac{h}{n a^{1-\frac{1}{n}}}.$$

On a donc :

* si $|x| \leq 2$, alors :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\varphi(2^n + |x|^n) - \varphi(2^n)| \\ &\leq \frac{|x|^n}{n(2^n)^{1-\frac{1}{n}}} \leq \frac{2^n}{n 2^{n-1}} = \frac{2}{n} \end{aligned}$$

* si $|x| > 2$, alors :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\varphi(2^n + |x|^n) - \varphi(|x|^n)| \\ &\leq \frac{2^n}{n(|x|^n)^{1-\frac{1}{n}}} \leq \frac{2^n}{n(2^n)^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n},$$

$$\text{donc : } \|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur $\mathbb{R}$.

d) 1) *Convergence simple* :

Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$. On a :

$$f_n(x, y) = \ln \left(x + \frac{y}{n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln x.$$

On conclut : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où :

$$f :]0; +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \ln x.$$

2) *Convergence uniforme* :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$:

$$\begin{aligned} |f_n(x, y) - f(x, y)| &= \left| \ln \left(x + \frac{y}{n} \right) - \ln x \right| \\ &= \left| \ln \left(1 + \frac{y}{xn} \right) \right| = \ln \left(1 + \frac{y}{xn} \right). \end{aligned}$$

• Par exemple, pour tout $x \in]0; +\infty[$ fixé, $|(f_n - f)(x, y)| \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} +\infty$, donc $f_n - f$ n'est pas bornée sur $]0; +\infty[^2$. Il en résulte, d'après le cours, que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[^2$.

• Soit $(a, b) \in]0; +\infty[^2$.

On a, pour tout $(x, y) \in D =]0; a] \times [b; +\infty[$:

$$|f_n(x, y) - f(x, y)| = \left| \ln \left(1 + \frac{y}{xn} \right) \right| \leq \ln \left(1 + \frac{b}{an} \right),$$

$$\text{donc : } \|f_n - f\|_{\infty}^D \leq \ln \left(1 + \frac{b}{an} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout $D =]0; a] \times [b; +\infty[$, pour $(a, b) \in]0; +\infty[^2$ fixé.

5.28 Puisque I est un intervalle de longueur > 0 , I est un ensemble infini, donc il existe $x_0, \dots, x_N \in I$, deux à deux distincts.

Considérons les polynômes d'interpolation de Lagrange sur les abscisses $x_0, \dots, x_N$, c'est-à-dire les polynômes $L_0, \dots, L_N$ définis par :

$$\forall i \in \{0, \dots, N\}, \forall x \in I, L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

D'après le cours sur l'interpolation de Lagrange, on a, pour tout

$$P \in \mathbb{R}_N[X] : P = \sum_{i=0}^N P(x_i) L_i.$$

En particulier, on a donc :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) = \sum_{i=0}^N P_n(x_i) L_i(x).$$

Comme $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ sur I , on déduit, en faisant tendre l'entier n vers l'infini :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i) L_i(x).$$

Ceci montre que f est un polynôme, c'est le polynôme

$$\sum_{i=0}^N f(x_i) L_i, \text{ de degré } \leq N.$$

5.29 Munissons $E = C([a; b], \mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_{\infty}$. Considérons le sev F de E , formé des polynômes de degré $\leq N$. Ce sev F est de dimension finie (égale à $N+1$), donc, d'après le cours, F est complet. Puisque F est complet, F est fermé dans E .

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \in E$, et que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans E (la convergence uniforme est la convergence pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$), il s'ensuit : $f \in F$.

On conclut que f est un polynôme, de degré $\leq N$.

Comparer l'énoncé et la méthode de résolution de l'exercice 5.28.

5.30 • D'abord, montrons que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, l'intégrale proposée existe.

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé. L'application $f_x : t \mapsto \frac{\sin(xt)}{1+t^4}$, est continue sur $[0; +\infty[$ et, pour $t \geq 1$:

$$|F_x(t)| \leq \frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{t^4}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($4 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , F_x est intégrable sur $[0; +\infty[$, donc $I(x) = \int_0^{+\infty} F_x(t) dt$ existe.

• Comme, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $\sin(xt) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} xt$, on peut conjecturer que $I(x)$ ressemble, pour $x \rightarrow 0^+$, à $\int_0^{+\infty} \frac{xt}{1+t^4} dt$, donc que $I(x)$ admette un équivalent du genre λx , $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1^{re} méthode : utilisation du théorème de continuité sous le signe intégrale :

On a, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^4} dt = \int_0^{+\infty} xt \frac{\sin(xt)}{xt} \frac{1}{1+t^4} dt \\ &= x \int_0^{+\infty} \phi(xt) \frac{t}{1+t^4} dt, \end{aligned}$$

en notant :

$$\phi : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \begin{cases} \frac{\sin u}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

Notons :

$$F : [0; +\infty[\times [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \phi(xt) \frac{t}{1+t^4}.$$

• F est continue par rapport à x (car ϕ est continue), continue par morceaux par rapport à t (car continue par rapport à t , ϕ étant continue).

• On a : $\forall (x, t) \in [0; +\infty[\times [0; +\infty[$,

$$|f(x, t)| = |\phi(xt)| \frac{t}{1+t^4} \leq \frac{t}{1+t^4},$$

car : $\forall u \in [0; +\infty[$, $|\sin u| \leq u$.

L'application $\varphi : t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$ (exemple de Riemann, $3 > 1$ et théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0).

Ainsi, F vérifie HD sur $[0; +\infty[\times [0; +\infty[$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, l'application

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

est continue sur $[0; +\infty[$. En particulier :

$$\begin{aligned} g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4} dt \\ &\underset{u=t^2}{=} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} [\text{Arctan } u]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Puis, comme : $\forall x \in [0; +\infty[$, $I(x) = xg(x)$,

on conclut : $I(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{4} x$.

2^e méthode : utilisation du théorème de convergence dominée et de la caractérisation séquentielle des limites :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $]0; +\infty[$, convergeant vers 0.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\sin(x_n t)}{x_n(1+t^4)}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

• Soit $t \in [0; +\infty[$. Si $t \neq 0$, alors :

$$f_n(t) = \frac{\sin(x_n t)}{x_n t} \frac{t}{1+t^4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{t}{1+t^4}.$$

Si $t = 0$, alors : $f_n(t) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$ sur $[0; +\infty[$, où :

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t}{1+t^4}.$$

• L'application f est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ (car continue).

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; +\infty[$,

$$|f_n(t)| = \frac{|\sin(x_n t)|}{x_n(1+t^4)} \leq \frac{|x_n t|}{x_n(1+t^4)} = \frac{t}{1+t^4}$$

et l'application $t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4} dt = \frac{\pi}{4}$$

(calcul fait plus haut, dans la première méthode).

Ceci montre que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $]0; +\infty[$, convergeant vers 0, la suite $\left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n(1+t^4)} dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{4}$.

Il en résulte, par caractérisation séquentielle des limites :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{x(1+t^4)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{4},$$

et donc : $I(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{4}x$.

5.31 a) D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$, existe comme intégrale d'une application continue sur un segment.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par le changement de variable $t = x^n$, $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$:

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+t) \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 t^{\frac{1}{n}} \frac{\ln(1+t)}{t} dt}_{\text{notée } J_n},$$

où J_n est d'ailleurs une intégrale de fonction intégrable sur $]0; 1]$.

Pour obtenir la limite de J_n (si elle existe), nous allons utiliser le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto t^{\frac{1}{n}} \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où $f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$, car, pour $t \in]0; 1]$ fixé, on a $t^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

- f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0; 1]$:

$$|f_n(t)| = t^{\frac{1}{n}} \frac{\ln(1+t)}{t} \leq \frac{\ln(1+t)}{t},$$

et l'application $t \longmapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $]0; 1]$, puisque $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$.

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} f.$$

Ainsi : $J_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}$.

On conclut : $\int_0^{+\infty} \ln(1+x^n) dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{n}$.

b) 1^{re} méthode : utilisation du théorème de convergence dominée :

D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^n) dx$ existe comme intégrale d'une application continue sur un segment. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par le changement de variable $t = x^n$, $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$:

$$I_n = \int_0^1 t \ln(1+t) \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 t^{\frac{1}{n}} \ln(1+t) dt}_{\text{notée } J_n}.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto t^{\frac{1}{n}} \ln(1+t).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où $f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \ln(1+t)$, car, pour $t \in]0; 1]$ fixé, $t^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

- f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0; 1], \quad |f_n(t)| = t^{\frac{1}{n}} \ln(1+t) \leq \ln(1+t),$$

et l'application $t \longmapsto \ln(1+t)$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $]0; 1]$ car intégrable sur $[0; 1]$ puisque continue sur ce segment.

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} J_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \ln(1+t) dt \\ &= [(1+t) \ln(1+t) - (1+t)]_0^1 = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

On conclut : $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2 \ln 2 - 1}{n}$.

2^e méthode : intervention d'une autre intégrale, calculable :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^n) dx$, qui existe comme intégrale d'une application continue sur un segment, et notons $K_n = \int_0^1 x^{n-1} \ln(1+x^n) dx$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|I_n - K_n| = \int_0^1 (x^{n-1} - x^n) \ln(1+x^n) dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 (x^{n-1} - x^n) \ln 2 \, dx = \ln 2 \left[\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \ln 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{\ln 2}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

• D'autre part, on peut calculer K_n par le changement de variable $t = x^n$, $dt = x^{n-1} dx$:

$$K_n = \int_0^1 \frac{1}{n} \ln(1+t) \, dt = \frac{1}{n} (2 \ln 2 - 1),$$

calcul déjà fait dans la 1^{re} méthode.

Ainsi : $I_n = K_n + (I_n - K_n)$,

$$\text{où : } K_n = \frac{2 \ln 2 - 1}{n}, \text{ et } I_n - K_n = o\left(\frac{1}{n}\right) = o(K_n).$$

On obtient : $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K_n$,

$$\text{et on conclut : } I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2 \ln 2 - 1}{n}.$$

c) Comme, pour $x \in [0; +\infty[$ fixé : $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{n}$,

on conjecture que $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \, dx$ est équivalente

à $\int_0^{+\infty} \frac{\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} \, dx$, c'est-à-dire à λn , où $\lambda > 0$ est une constante.

On va donc essayer de faire apparaître $\frac{1}{n}$ en facteur.

À cet effet, considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)},$$

et essayons de montrer que le théorème de convergence dominée s'applique.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

• Pour tout $x \in]0; +\infty[$ fixé :

$$f_n(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1+x^2},$$

donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

• f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; +\infty[$,

$$|f_n(x)| = \frac{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \leq \frac{\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

car on sait : $\forall t \in]-1; +\infty[, \ln(1+t) \leq t$.

L'application $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $]0; +\infty[$.

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} f &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= [\text{Arctan } x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \, dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

5.32 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^{2n}} \, dx = \int_0^1 x \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}} \, dx \\ &= \left[x \text{Arctan}(x^n) \right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \text{Arctan}(x^n) \, dx}_{\text{notée } J_n} = \frac{\pi}{4} - J_n. \end{aligned}$$

Par le changement de variable

$$\begin{aligned} t &= x^n, \quad x = t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \, dt, \\ J_n &= \int_0^1 \text{Arctan } t \cdot \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \, dt = \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 t^{\frac{1}{n}} \frac{\text{Arctan } t}{t} \, dt}_{\text{notée } K_n}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la limite de K_n (si elle existe) lorsque l'entier n tend vers l'infini, nous allons essayer d'utiliser le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto t^{\frac{1}{n}} \frac{\text{Arctan } t}{t}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

• $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, où $f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{\text{Arctan } t}{t}$.

• f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0; 1]$,

$$|f_n(t)| = t^{\frac{1}{n}} \frac{\text{Arctan } t}{t} \leq \frac{\text{Arctan } t}{t} \leq 1,$$

et l'application constante 1 est intégrable sur l'intervalle borné $]0; 1]$.

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$K_n = \int_0^1 f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f = \underbrace{\int_0^1 \frac{\text{Arctan } t}{t} dt}_{\text{notée } C}.$$

Puisque l'application $t \mapsto \frac{\text{Arctan } t}{t}$ est continue, ≥ 0 et n'est pas l'application nulle, on a : $C > 0$.

On obtient : $K_n = C + o_{n \rightarrow \infty}(1)$

d'où :

$$I_n = \frac{\pi}{4} - J_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n} K_n = \frac{\pi}{4} - \frac{C}{n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarque : Le calcul de C , en se ramenant à une série, peut être l'objet d'un exercice.

5.33 a) 1) Convergence simple, convergence absolue :

Puisque toutes les f_n sont ≥ 0 , la convergence absolue revient à la convergence simple.

Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé.

On a :

$$f_n(x) = \frac{x^a}{(n+x)^b} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^a}{n^b} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut :

* si $b > 1$, alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$

* si $b \leq 1$, alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge simplement sur aucune partie non vide de $]0; +\infty[$.

Dans la suite de l'étude, on peut donc se limiter au cas : $b > 1$.

2) Convergence normale :

• Étude sur $]0; +\infty[$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

L'application f_n est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= ax^{a-1}(n+x)^{-b} + x^a(-b)(n+x)^{-b-1} \\ &= x^{a-1}(n+x)^{-b-1}(a(n+x) - bx) \\ &= x^{a-1}(n+x)^{-b-1}((a-b)x + an). \end{aligned}$$

* Si $a > b$, alors :

$$f_n(x) = \frac{x^a}{(n+x)^b} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{a-b} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

f_n n'est pas bornée, donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$.

* Si $a = b$, alors : $f_n(x) = \frac{x^a}{(n+x)^b} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{a-b} = 1$,

donc $\|f_n\|_\infty \geq 1$, $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ diverge grossièrement, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$.

* Supposons maintenant $a < b$ et dressons le tableau de variations de f_n :

x	0	$\frac{an}{b-a}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	-
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

On a donc :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= f_n\left(\frac{an}{b-a}\right) = \frac{\left(\frac{an}{b-a}\right)^a}{\left(n + \frac{an}{b-a}\right)^b} \\ &= \left(\frac{an}{b-a}\right)^a \left(\frac{b-a}{bn}\right)^b = a^a (b-a)^{b-a} b^{-b} \frac{1}{n^{b-a}}. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge

si et seulement si : $b-a > 1$.

On conclut :

◦ si $b-a \leq 1$, alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$

◦ si $b-a > 1$, alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $]0; +\infty[$.

• Étude sur $]0; A]$, $A \in]0; +\infty[$ fixé :

Soit $A \in]0; +\infty[$ fixé.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; A]$,

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x^a}{(n+x)^b} \leq \frac{x^a}{n^b} \leq \frac{A^a}{n^b},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty^{[0;A]} \leq \frac{A^a}{n^b}$.

D'après l'exemple de Riemann ($b > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty^{[0;A]}$ converge, et on conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $]0; A]$, pour tout $A \in]0; +\infty[$ fixé (on rappelle que l'on a supposé $b > 1$).

3) Convergence uniforme :

Si $a \geq b$, on a vu $\|f_n\|_\infty \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc, d'après le cours, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$.

Supposons dorénavant $a < b$.

Si $a < b-1$, on a vu que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $]0; +\infty[$.

Supposons dorénavant $a \geq b - 1$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0; +\infty[$, en notant R_n le reste d'ordre n :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{f_k(x)}_{\geq 0} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^a}{(k+x)^b} \geq n \frac{x^a}{(2n+x)^b},$$

d'où, en particulier :

$$R_n(n) \geq n \frac{n^a}{(3n)^b} = \frac{1}{3^b} n^{\overbrace{a+1-b}^{\geq 0}} \geq \frac{1}{3^b},$$

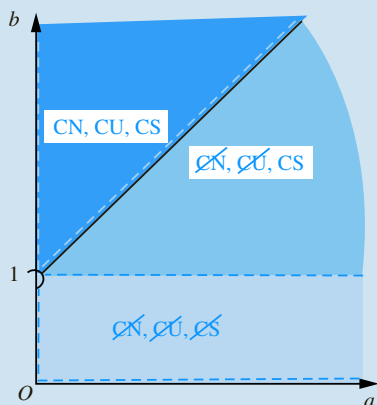
puis : $\|R_n\|_\infty \geq R_n(n) \geq \frac{1}{3^b}.$

Il en résulte : $\|R_n\|_\infty \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, et on conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

	Nature de la convergence		
	normale	uniforme	simple
$a+1 < b$	oui	oui	oui
$1 < b \leq a+1$	non	non	oui
$b \leq 1$	non	non	non

ou encore dans le plan des (a, b) :



b) 1) Convergence simple :

Puisque les f_n sont toutes ≥ 0 , la convergence absolue revient à la convergence simple.

Soit $x \in]0; +\infty[$.

On a :

$$\forall n \geq 3, 0 \leq f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n} \leq x e^{-nx} = x(e^{-x})^n.$$

Si $x \neq 0$, alors $|e^{-x}| < 1$, la série géométrique $\sum_n (e^{-x})^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n f_n(x)$ converge.

Si $x = 0$, alors : $\forall n \geq 2, f_n(x) = 0$, donc la série $\sum_n f_n(x)$, converge.

On conclut : $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

2) Convergence normale :

• Étude sur $[0; +\infty[$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, fixé.

L'application f_n est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f'_n(x) = \frac{1}{\ln n} (1 - nx) e^{-nx}.$$

On en déduit le tableau de variations de f_n :

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

D'où : $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e n \ln n}.$

Comme la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{e n \ln n}$ diverge (cf. exercice 4.2, par utilisation d'une comparaison série/intégrale), la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$, diverge, donc $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur $[0; +\infty[$.

• Étude sur $[a; +\infty[, a \in]0; +\infty[$ fixé :

Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé.

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il existe $N \geq 2$ tel que :

$$\forall n \geq N, \frac{1}{n} \leq a.$$

On a alors, d'après le tableau de variations de f_n :

$$\forall n \geq N, \|f_n\|_{\infty}^{[a; +\infty[} = |f_n(a)| = f_n(a).$$

Comme la série $\sum_n f_n(a)$ converge (cf. 1)), il s'ensuit que la série $\sum_n \|f_n\|_{\infty}^{[a; +\infty[}$ converge, et on conclut : $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout $[a; +\infty[, a \in]0; +\infty[$ fixé.

3) Convergence uniforme :

• Étude sur $[a; +\infty[$:

D'après 2), $\sum_n f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[a; +\infty[, a \in]0; +\infty[$ fixé.

• Étude sur $[0; +\infty[$:

Comme $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{e^n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, il nous faut étudier le reste d'ordre n , noté R_n .

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

Nous allons utiliser une comparaison série/intégrale.

L'application $\varphi_x : t \in [2; +\infty[\mapsto \frac{x e^{-tx}}{\ln t} = \frac{x}{e^{tx} \ln t}$

est continue par morceaux (car continue), décroissante, intégrable sur $[2; +\infty[$, car $t^2 \varphi_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

On a donc, par comparaison série/intégrale, pour tout $n \geq 2$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_x(k) \leq \int_n^{+\infty} \varphi_x(t) dt.$$

Et :

$$\begin{aligned} \int_n^{+\infty} \varphi_x(t) dt &= \int_n^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{\ln t} dt \leq \int_n^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{\ln n} dt \\ &= \frac{1}{\ln n} [-e^{-tx}]_n^{+\infty} = \frac{1}{\ln n} e^{-nx} \leq \frac{1}{\ln n}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \geq 2, \forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln n}$,

puis : $\forall n \geq 2, \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\ln n}$.

Comme $\frac{1}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, il en résulte $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et on conclut : $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

c) 1) Convergence simple :

Pour tout $x \in [0; +\infty[$ fixé, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x}{x^2 + n}$ relève du TSCSA, car elle est alternée, le terme général tend vers 0, et la valeur absolue du terme général décroît. Il en résulte que cette série converge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

2) Convergence absolue :

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.

Si $x \neq 0$, alors : $|f_n(x)| = \frac{|x|}{x^2 + n} \sim \frac{|x|}{n} \geq 0$,

donc, par l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ diverge.

Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls, donc la série converge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument seulement sur $\{0\}$.

3) Convergence normale :

D'après 2) (et le cas trivial $x = 0$), $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge normalement sur aucune partie non vide ni égale à $\{0\}$, de $[0; +\infty[$.

4) Convergence uniforme :

Puisque, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ relève du TSCSA, on a, en notant R_n le reste d'ordre n :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[$,

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x}{x^2 + (n+1)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'étude des variations de

$$\varphi_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^2 + (n+1)}$$

montre : $\sup_{x \in [0; +\infty[} |\varphi_n(x)| = \varphi_n(\sqrt{n+1}) = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

On a donc : $0 \leq \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

d'où, par encadrement : $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

d) 1) Convergence simple, convergence absolue :

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq -x$, on a :

$$\text{Arctan}(x+n) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \text{Arctan } n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[,$$

d'où : $f_n(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Et, par une formule de trigonométrie :

$$\tan(f_n(x)) = \frac{(x+n) - n}{1 + (x+n)n} = \frac{x}{1 + n(x+n)}.$$

On a donc, pour tout $n \geq -x$:

$$f_n(x) = \text{Arctan} \frac{x}{1 + n(x+n)}.$$

On sait : $\forall t \in \mathbb{R}, |\text{Arctan } t| \leq |t|$.

D'où : $\forall n \geq -x, |f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1 + n(x+n)}$.

Si $x = 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = 0$,

donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Si $x \neq 0$, alors $\frac{|x|}{1 + n(x+n)} \sim \frac{|x|}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$), le théorème d'équivalence et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n |f_n(x)|$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument, donc simplement, sur $\mathbb{R}$.

2) Convergence normale, convergence uniforme :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = \frac{1}{1 + (x+n)^2} > 0,$$

d'où le tableau de variations de f_n :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
$f_n(x)$		$\nearrow$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } n = -\pi + \text{Arctan } \frac{1}{n},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } n = \text{Arctan } \frac{1}{n}.$$

• *Étude sur $]-\infty; 0]$:*

Puisque $\|f_n\|_{\infty}^{]-\infty; 0]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi \neq 0$, d'après le cours, $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément (donc ne converge pas normalement non plus) sur $]-\infty; 0]$.

• *Étude sur $[0; +\infty[$:*

* Puisque $\|f_n\|_{\infty} = \text{Arctan } \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \geq 0$, d'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^{[0; +\infty[}$ diverge, donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0; +\infty[$.

* Pour étudier la convergence uniforme, puisque

$$\|f_n\|_{\infty}^{[0; +\infty[} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ et que la série } \sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^{[0; +\infty[} \text{ diverge,}$$

il nous faut étudier le reste d'ordre n , noté R_n .

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \text{Arctan } \frac{x}{1+k(x+k)} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \text{Arctan } \frac{x}{1+k(x+k)} \geq n \text{Arctan } \frac{x}{1+2n(x+2n)}, \end{aligned}$$

$$\text{puis : } R_n(n) \geq n \text{Arctan } \frac{n}{1+6n^2}, \text{ donc :}$$

$$\|R_n\|_{\infty} \geq n \text{Arctan } \frac{n}{1+6n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2}{1+6n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{6}.$$

Il en résulte : $\|R_n\|_{\infty} \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ceci montre que $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

* Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, par exemple, $a \leq 0 \leq b$.

Notons $c = \text{Max}(-a, b)$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq -a$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [a; b], |f_n(x)| &= \left| \text{Arctan } \frac{x}{1+n(x+n)} \right| \\ &\leq \frac{|x|}{1+n(x+n)} \leq \frac{c}{1+na+n^2}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \|f_n\|_{\infty}^{[a; b]} \leq \frac{c}{1+an+n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c}{n^2} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$), le théorème d'équivalence et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n \|f_n\|_{\infty}^{[a; b]}$ converge.

On conclut que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a; b]$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé tel que $a \leq 0 \leq b$, puis sur tout segment de $\mathbb{R}$.

e) 1) *Convergence simple, convergence absolue :*

Comme les f_n sont toutes ≥ 0 , la convergence absolue revient à la convergence simple.

Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé. Si $x \neq 0$, alors :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{nx}{n^3x^2} = \frac{1}{x} \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_n f_n(x)$ converge.

Si $x = 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = 0$,

donc la série $\sum_n f_n(x)$ converge.

On conclut :

la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

2) *Convergence normale :*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application f_n est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{n(1+n^3x^2) - nx2n^3x}{(1+n^3x^2)^2} \\ &= \frac{n - n^4x^2}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}, \end{aligned}$$

d'où le tableau de variations de f_n :

x	0	$n^{-3/2}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	-
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

• *Étude sur $[0; +\infty[$:*

L'application f_n est bornée et :

$$\|f_n\|_{\infty} = f_n(n^{-3/2}) = \frac{n^{-1/2}}{1+1} = \frac{1}{2n^{1/2}}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($1/2 \leq 1$), la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ diverge, donc : $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur $[0; +\infty[$.

• *Étude sur $[a; +\infty[$, $a \in]0; +\infty[$ fixé :*

Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé.

1^{re} méthode :

Puisque $n^{-3/2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N, n^{-3/2} \leq a.$$

On a alors : $\forall n \geq N, \|f_n\|_\infty^{[a; +\infty[} = |f_n(a)| = f_n(a)$.

Puisque $\sum_n f_n(a)$ converge (cf. 1)), la série $\sum_n \|f_n\|_\infty^{[a; +\infty[}$ converge. Ceci montre que $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

2^e méthode :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; +\infty[$,

$$0 \leq f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2} \leq \frac{nx}{n^3x^2} = \frac{1}{n^2x} \leq \frac{1}{n^2a},$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty^{[a; +\infty[} \leq \frac{1}{an^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_n \|f_n\|_\infty^{[a; +\infty[}$ converge, et on conclut que $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

3) *Convergence uniforme :*

• *Étude sur $[a; +\infty[$, $a \in]0; +\infty[$ fixé :*

D'après 2), $\sum_n f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a; +\infty[$.

• *Étude sur $]0; +\infty[$:*

Puisque $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et que la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ diverge, il nous faut étudier le reste.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$, en notant R_n le reste d'ordre n :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{kx}{1+k^3x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kx}{1+k^3x^2} \\ &\geq n \frac{(n+1)x}{1+(2n)^3x^2} = \frac{n(n+1)x}{1+8n^3x^2}. \end{aligned}$$

D'où, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$R_n(n^{-3/2}) \geq \frac{n(n+1)n^{-3/2}}{1+8} = \frac{n+1}{9\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{n}}{9},$$

et donc : $\|R_n\|_\infty \geq R_n(n^{-3/2}) \geq \frac{\sqrt{n}}{9} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$,

d'où : $\|R_n\|_\infty \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On conclut : $\sum_n f_n$, ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$.

5.34 a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[$,

$$|f_n(x)| = \frac{\text{Arctan}(x^{n+1})}{n(n+1)} \leq \frac{\pi}{2n(n+1)} \leq \frac{\pi}{2n^2},$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, absolument, simplement, sur $[0; +\infty[$.

b) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et que la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur

$[0; +\infty[$, d'après un théorème du cours, la somme S est continue sur $[0; +\infty[$.

c) On a, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} S(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x^{n+1})}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}\right)}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\text{Arctan}(x^{n+1}) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \right) \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Comme, pour $N \geq 1$, par télescopage :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 1,$$

on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$,

et donc : $\forall x \in]0; +\infty[, S(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$,

d'où l'égalité demandée.

d) 1) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $[0; 1[$ et, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$f'_n(x) = \frac{1}{n(n+1)} \frac{(n+1)x^n}{1+x^{2(n+1)}} = \frac{x^n}{n(1+x^{2(n+1)})}.$$

• Soit $a \in [0; 1[$ fixé. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; a]$,

$$|f'_n(x)| = \frac{x^n}{n(1+x^{2(n+1)})} \leq \frac{x^n}{n} \leq x^n \leq a^n,$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f'_n\|_{\infty}^{[0;a]} \leq a^n$.

Comme $|a| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} a^n$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty}^{[0;a]}$ converge. Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[0; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé.

• On a vu en a) que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$, donc sur $[0; 1[$.

D'après le théorème de dérivation pour une série de fonctions, on conclut que S est de classe C^1 sur $[0; 1[$ et que :

$$\forall x \in [0; 1[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(1+x^{2(n+1)})}.$$

2) Comme $S'(0) = 0$ et $\forall x \in]0; 1[, S'(x) > 0$, il s'ensuit que S est strictement croissante sur $[0; 1[$.

De plus, comme S est continue sur $[0; 1]$ (cf. b)), on conclut que S est strictement croissante sur $[0; 1]$.

$$3) \text{ On a : } S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan } 1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

4) On a, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(1+x^{2(n+1)})} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty, \end{aligned}$$

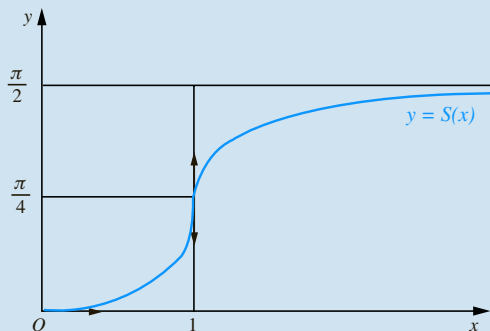
donc : $S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

e) D'après c) et la continuité de S en 0 (cf. a)), on a :

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - S\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - S(0) = \frac{\pi}{2}.$$

f) L'étude des variations de S sur $[1; +\infty[$ se déduit de celle des variations de S sur $[0; 1[$ par la formule obtenue en c).

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$	0	+	$+\infty$	$+\infty$	+
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



5.35 a) 1) Soit $x \in]0; +\infty[$.

$$\text{On a : } f_n(x) = \frac{1}{x^2(n^4 + x^2)} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 n^4} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($4 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

2) Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; +\infty[$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x^2(n^4 + x^2)} \leq \frac{1}{a^2(n^4 + a^2)} = f_n(a),$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty}^{[a; +\infty[} \leq f_n(a)$.

D'après 1) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{[a; +\infty[}$ converge.

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[a; +\infty[$, $a \in]0; +\infty[$ fixé.

b) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0; +\infty[$ et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$, d'après un théorème du cours, la somme S est continue sur $]0; +\infty[$.

c) 1) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{n^4 + x^2}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $]0; +\infty[$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|g_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^4}$,

donc la série $\sum_{n \geq 1} \|g_n\|_{\infty}$ converge, $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $]0; +\infty[$.

D'après un théorème du cours, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est continue sur $]0; +\infty[$, en particulier en 0.

En notant $C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} > 0$,

on a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} C$,

d'où : $x^2 S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} C$, puis : $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{C}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en 0 ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , on conclut que S n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

2) On a, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$0 \leq S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2(n^4 + x^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 n^4} = C \frac{1}{x^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , on conclut que S est intégrable sur $[1; +\infty[$.

5.36 Soit $x \in]0; 1[$ fixé.

L'application $\varphi_x : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{x^t}{1+x^t}$

est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$\varphi'_x(t) = \frac{(\ln x)x^t(1+x^t) - x^t(\ln x)x^t}{(1+x^t)^2} = \frac{(\ln x)x^t}{(1+x^t)^2} \leq 0,$$

donc φ_x est décroissante sur $[0; +\infty[$.

D'autre part : $x^t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$,

donc : $\varphi_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} x^t = e^{(\ln x)t} \geq 0$.

Comme $\ln x < 0$, l'application $t \mapsto e^{(\ln x)t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$. Par théorème d'équivalence pour des fonctions ≥ 0 , on déduit que φ_x est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Par comparaison série/intégrale, il en résulte que la série $\sum_{n \geq 0} \varphi_x(n)$ converge, et on a :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_x(n) \leq \varphi_x(0) + \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt.$$

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt &= \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t} dt \\ u &= t \ln x \quad \int_0^{-\infty} \frac{e^u}{1+e^u} \frac{1}{\ln x} du \\ &= \frac{1}{-\ln x} \left[\ln(1+e^u) \right]_{-\infty}^0 = \frac{\ln 2}{-\ln x}. \end{aligned}$$

On obtient : $\frac{\ln 2}{-\ln x} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \leq \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{-\ln x}$.

Comme $\frac{\ln 2}{-\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$, on déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{-\ln x}.$$

Enfin, comme $-\ln x \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} 1-x$, on conclut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}.$$

5.37 Nous allons essayer d'appliquer le théorème sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n e^{-nx}.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

• On a, puisque $n > 0$: $x^2 f_n(x) = x^{n+2} e^{-nx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

donc, pour x assez grand : $x^2 f_n(x) \leq 1$,

puis : $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f_n est intégrable sur $[1; +\infty[$, puis sur $[0; +\infty[$.

• Étudions $x e^{-x}$, pour x décrivant $[0; +\infty[$.

L'application $\varphi : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x e^{-x}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad \varphi'(x) = (1-x) e^{-x},$$

d'où le tableau de variations de φ :

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}
		$\searrow$	0

On a donc : $\|\varphi\|_{\infty} = \varphi(1) = e^{-1}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq f_n(x) = (x e^{-x})^n \leq (e^{-1})^n.$$

Comme $|e^{-1}| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-1})^n$ converge,

donc, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

- On a, en notant $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{-x})^n = x e^{-x} \frac{1}{1 - x e^{-x}},$$

donc S est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.

- Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-nx} dx \\ &= \int_{t=nx}^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{n^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{n^{n+1}} = \frac{1}{n} \frac{1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

donc, d'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \text{ converge.}$$

D'après le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications, on déduit que la série

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \text{ converge, que } S \text{ est intégrable sur } [0; +\infty[$$

et que :

$$\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

$$\text{On conclut : } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - x e^{-x}} dx.$$

5.38 a) 1) Convergence simple :

Soit $x \in]0; +\infty[$.

$$\text{On a : } f_n(x) = \frac{1}{(1+nx)(n+x)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x n^2} \geq 0.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

2) Convergence normale sur $[a; +\infty[$, $a \in]0; +\infty[$ fixé :

Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; +\infty[$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \frac{1}{(1+nx)(n+x)} \\ &\leq \frac{1}{(1+na)(n+a)} = |f_n(a)| = f_n(a), \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty}^{[a; +\infty[} \leq f_n(a).$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} f_n(a)$ converge (cf. 1)), par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{[a; +\infty[}$ converge.

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a; +\infty[$, pour tout $a \in]0; +\infty[$ fixé.

b) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0; +\infty[$ et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$, d'après un théorème du cours, on conclut que la somme S est continue sur $]0; +\infty[$.

c) Nous allons essayer d'appliquer le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$ (cf. b)).

- Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

Remarquons d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; +\infty[, f_n(x) \geq 0.$$

Pour $n = 1$:

$$\int_0^{+\infty} f_1(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

Pour calculer, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$, commençons par effectuer une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+nX)(n+X)} = \frac{a}{1+nX} + \frac{b}{n+X}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Par multiplication puis remplacement, on obtient facilement :

$$a = \frac{1}{n - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n^2 - 1}, \quad b = \frac{1}{1 - n^2}.$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{(1+nX)(n+X)} = \frac{1}{n^2 - 1} \left(\frac{n}{1+nX} - \frac{1}{n+X} \right),$$

puis :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left(\frac{n}{1+nx} - \frac{1}{n+x} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2-1} \left[\ln(1+nx) - \ln(n+x) \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{n^2-1} \left[\ln \frac{1+nx}{n+x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2-1} \left(\ln n - \ln \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{2 \ln n}{n^2-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2 \ln n}{n^2}.
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{2 \ln n}{n^2}$ converge (par la règle $n^{3/2}u_n$, par exemple, cf. exercice 4.2), donc, par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

D'après le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications, on déduit que S est intégrable sur $]0; +\infty[$ et que, le calcul ayant déjà été fait ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1 + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2-1}.$$

5.39 Nous allons essayer de développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions, puis permuter intégrale et série.

Remarquons d'abord que l'application $f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{a}{b}$. On peut donc compléter f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{a}{b}$.

D'autre part, il est clair que f est paire.

On a, pour tout $x \in]0; +\infty[$, en utilisant une série géométrique :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx} = \frac{2 \operatorname{sh} ax}{e^{bx} - e^{-bx}} = 2e^{-bx} \operatorname{sh} ax \frac{1}{1 - e^{-2bx}} \\
&= 2e^{-bx} \operatorname{sh} ax \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2bx})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2e^{-(2n+1)bx} \operatorname{sh} ax,
\end{aligned}$$

car $|e^{-2bx}| < 1$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2e^{-(2n+1)bx} \operatorname{sh} ax.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et a pour somme f .
- f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.
- Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

Remarquons d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; +\infty[, \quad f_n(x) \geq 0.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \\
&= \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} 2e^{-(2n+1)bx} \operatorname{sh} ax dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)bx} (e^{ax} - e^{-ax}) dx \\
&= \int_0^{+\infty} (e^{(-(2n+1)b+a)x} - e^{(-(2n+1)b-a)x}) dx \\
&= \left[\frac{e^{(-(2n+1)b+a)x}}{-(2n+1)b+a} - \frac{e^{(-(2n+1)b-a)x}}{-(2n+1)b-a} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(2n+1)b-a} - \frac{1}{(2n+1)b+a} \\
&= \frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2}.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2a}{4n^2b^2} = \frac{a}{2b^2} \frac{1}{n^2} \geq 0$,

d'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \text{ converge.}$$

D'après le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications, on déduit que f est intégrable sur $]0; +\infty[$ (ce que l'on pouvait aussi montrer directement) et que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x) dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2}.
\end{aligned}$$

Enfin, on conclut, par parité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4a}{(2n+1)^2b^2 - a^2}.$$

5.40 Nous allons essayer de développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions, puis permuter intégrale et série.

Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé.

On a, pour tout $t \in]0; +\infty[$, en utilisant une série géométrique :

$$\begin{aligned}\frac{t^{x-1}}{e^t + 1} &= t^{x-1} e^{-t} \frac{1}{1 + e^{-t}} \\ &= t^{x-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{x-1} e^{-(n+1)t},\end{aligned}$$

car $|-e^{-t}| < 1$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto (-1)^n t^{x-1} e^{-(n+1)t}.$$

Le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications ne s'applique pas ici, car la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ diverge, comme on peut s'en rendre

compte en calculant l'intégrale (de toute façon, nous allons calculer cette intégrale, sans la valeur absolue).

Pour pouvoir permuter intégrale et série, nous allons montrer que l'intégrale du reste tend vers 0.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $t \in]0; +\infty[$.

On a, en notant $R_n(t)$ le reste d'ordre n :

$$\begin{aligned}R_n(t) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{x-1} e^{-(k+1)t} \\ &= t^{x-1} e^{-t} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-e^{-t})^k = t^{x-1} e^{-t} \frac{(-e^{-t})^{n+1}}{1 - (-e^{-t})} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{t^{x-1} e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}}.\end{aligned}$$

Il est clair, par l'exemple de Riemann en 0 et la règle $t^\alpha f(t)$ en $+\infty$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_0, \dots, f_n$ et S sont intégrables sur $]0; +\infty[$. Il en résulte, par combinaison linéaire, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est intégrable sur $]0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_0^{+\infty} |R_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} dt \\ u &= \frac{t}{(n+1)t} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^{x-1} e^{-u} \frac{1}{n+1} du \\ &= \frac{1}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x}.\end{aligned}$$

Puisque $x \in]0; +\infty[$ est fixé, on a : $\frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc

$$\int_0^{+\infty} R_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ la somme partielle d'indice n et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$, la somme totale :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} S(t) dt &= \int_0^{+\infty} (S_n(t) + R_n(t)) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k(t) \right) dt + \int_0^{+\infty} R_n(t) dt,\end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} f_k(t) dt = \int_0^{+\infty} S(t) dt - \int_0^{+\infty} R_n(t) dt.$$

Comme $\int_0^{+\infty} R_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on déduit :

$$\sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} f_k(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} S(t) dt.$$

Ceci montre que la série $\sum_{k \geq 0} \int_0^{+\infty} f_k(t) dt$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(t) dt = \int_0^{+\infty} S(t) dt.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^{+\infty} (-1)^n t^{x-1} e^{-(n+1)t} dt \\ u &= \frac{t}{(n+1)t} \quad (-1)^n \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^{x-1} e^{-u} \frac{1}{n+1} du \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \Gamma(x),\end{aligned}$$

calcul presque déjà fait plus haut.

On conclut :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t + 1} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \Gamma(x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \Gamma(x) = T(x) \Gamma(x).\end{aligned}$$

5.41 Nous allons essayer de permuter intégrale et série.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $a_n > 0$, l'application

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (-1)^n x^{a_n}$$

est continue sur le segment $[0; 1]$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 x^{a_n} dx = \left[\frac{x^{1+a_n}}{1+a_n} \right]_0^1 = \frac{1}{1+a_n}$$

et que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1+a_n}$ peut diverger, pour $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}}$

par exemple, nous ne pouvons pas appliquer le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications.

Nous allons essayer de montrer que l'intégrale du reste tend vers 0.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n la n -ème somme partielle :

$$S_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{a_k}.$$

Pour tout $x \in [0; 1[$ fixé, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ relève du TSCSA, car elle est alternée, $|f_n(x)| = x^{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ puisque $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, et la suite $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puisque $x \in [0; 1]$ et que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et à termes dans $\mathbb{R}_+^*$.

Il en résulte que, pour tout $x \in [0; 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0; 1[$.

Notons S la somme :

$$S : [0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'ordre n :

$$R_n : [0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

On a, pour tout $b \in [0; 1[$:

$$\|R_n\|_{\infty}^{[0;b]} \leq \|f_{n+1}\|_{\infty}^{[0;b]} = b^{a_{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout segment de $[0; 1[$.

Comme chaque f_n est continue sur $[0; 1[$, il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est continue sur $[0; 1[$.

D'après ce qui précède, les applications S et R_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur $[0; 1[$.

Puisque, pour tout $x \in [0; 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ relève du

TSCSA, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1[$:

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = |(-1)^{n+1} x^{a_{n+1}}| = x^{a_{n+1}}.$$

Il en résulte, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est intégrable sur $[0; 1[$, et on a :

$$\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq \int_0^1 |R_n(x)| dx \leq \int_0^1 x^{a_{n+1}} dx = \frac{1}{1 + a_{n+1}}.$$

Comme $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, on a : $\frac{1}{1 + a_{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

donc, par encadrement : $\int_0^{+\infty} R_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(x) dx &= \int_0^1 (S_n(x) + R_n(x)) dx \\ &= \int_0^1 S_n(x) dx + \int_0^1 R_n(x) dx, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \int_0^1 f_k(x) dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n f_k(x) \right) dx \\ &= \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 S(x) dx - \int_0^1 R_n(x) dx. \end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 R_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il s'ensuit que la série

$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k(x) dx$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(x) dx = \int_0^{+\infty} S(x) dx.$$

On conclut :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{a_n} \right) dx \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{a_n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + a_n}. \end{aligned}$$

5.42 a) Remarquons d'abord que, puisque f est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$, f admet en 0^+ une limite finie, notée $f(0^+)$, et qu'il se peut que $f(0^+)$ soit différent de $f(0)$, lorsque f n'est pas continue en 0.

Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle des limites.

On a, pour tout $x \in]0; +\infty[$ fixé, par le changement de variable $u = xt$:

$$x \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) du.$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $]0; +\infty[$, de limite $+\infty$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto e^{-u} f\left(\frac{u}{x_n}\right).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car f l'est) sur $[0; +\infty[$.

- Pour tout $u \in]0; +\infty[$ fixé, puisque $f \xrightarrow[0^+]{} f(0^+)$, on a, par composition de limites :

$$f_n(u) = e^{-u} f\left(\frac{u}{x_n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-u} f(0^+).$$

D'autre part : $f_n(0) = f(0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0)$.

Ceci montre : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} g$, où :

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \begin{cases} e^{-u} f(0^+) & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

- L'application g est continue par morceaux (car f l'est) sur $[0; +\infty[$.
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0; +\infty[$,

$$|f_n(u)| = e^{-u} \left| f\left(\frac{u}{x_n}\right) \right| \leq e^{-u} \|f\|_\infty,$$

et l'application $u \mapsto e^{-u} \|f\|_\infty$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[0; +\infty[$.

Ceci montre que $(f_n)_{n \geq 0}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} f,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x_n}\right) du &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-u} f(0^+) du \\ &= [-e^{-u} f(0^+)]_0^{+\infty} = f(0^+). \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans $]0; +\infty[$, de limite $+\infty$,

la suite $\left(\int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x_n}\right) du \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(0^+)$.

Par caractérisation séquentielle des limites, on déduit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0^+),$$

et on conclut : $x \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0^+)$.

b) Même méthode qu'en a), avec utilisation des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $]0; +\infty[$ telles que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On remarquera que f est bornée sur $[0; +\infty[$, car, puisque f admet une limite finie en $+\infty$, il existe $a \in [0; +\infty[$ telle que $f|_{[a; +\infty]}$ soit bornée, et $f|_{[0; a]}$ est bornée car continue par morceaux sur un segment.

5.43 Rappelons que, pour toute application $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, on note u^+, u^- les applications de I dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in I$, par :

$$u^+(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } u(x) < 0 \end{cases}$$

$$u^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x) \geq 0 \\ -u(x) & \text{si } u(x) < 0, \end{cases}$$

et que l'on a :

$$u^+ - u^- = u, \quad u^+ + u^- = |u|,$$

$$0 \leq u^+ \leq |u|, \quad 0 \leq u^- \leq |u|.$$

1) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N} : g_n = (f_n - f)^-$.

Nous allons essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée à $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = (f_n - f)^-$ est continue par morceaux, car $f_n - f$ l'est et l'application $y \mapsto y^-$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in I$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq g_n(x) = (f_n - f)^-(x) \leq |f_n - f|(x).$$

Comme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, on a : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$,

donc : $|f_n - f|(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

puis, par encadrement : $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ceci montre : $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} 0$ sur I .

- L'application nulle est continue par morceaux (car continue) sur I .

- Par hypothèse : $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geq 0$,

d'où, puisque $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$, par passage à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini : $\forall x \in I, f(x) \geq 0$.

Soient $n \in \mathbb{N}, x \in I$.

* Si $f_n(x) \geq f(x)$, alors $f_n(x) - f(x) \geq 0$,

donc $g_n(x) = 0 \leq f(x)$.

* Si $f_n(x) \leq f(x)$, alors :

$$g_n(x) = -(f_n(x) - f(x)) = f(x) - f_n(x) \leq f(x).$$

Ceci montre : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |g_n(x)| = g_n(x) \leq f(x)$.

Et l'application f est continue par morceaux, ≥ 0 , intégrable sur I (par hypothèse).

Ainsi, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur I , et que :

$$\int_I g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_I 0 = 0.$$

2) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (f_n - f)^+ = (f_n - f) + (f_n - f)^- = (f_n - f) + g_n.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ et g_n sont intégrables sur I , par opérations, $(f_n - f)^+$ est intégrable sur I . Et :

$$\begin{aligned} \int_I (f_n - f)^+ &= \int_I (f_n - f) + \int_I g_n \\ &= \int_I f_n - \int_I f + \int_I g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_I f - \int_I f + 0 = 0. \end{aligned}$$

3) Enfin :

$$\begin{aligned} \int_I |f_n - f| &= \int_I ((f_n - f)^+ + (f_n - f)^-) \\ &= \int_I (f_n - f)^+ + \int_I (f_n - f)^- \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

5.44 a) 1) Convergence simple, convergence absolue :

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], f_n(x) \geq 0$,

la convergence absolue revient à la convergence simple.

Soit $x \in [0; 1]$ fixé.

Si $x \neq 1$, alors $x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x^n \geq 0.$$

Puisque $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge. Par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on déduit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Si $x = 1$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln 2 \neq 0$, donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ diverge (grossièrement).

On conclut que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0; 1[$ et non en 1.

2) *Convergence normale, convergence uniforme :*

• *Étude sur $[0; 1[$:*

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|f_n\|_{\infty}^{[0;1[} = \ln 2 \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément, ni normalement, sur $[0; 1[$.

• *Étude sur $[0; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé :*

Soit $a \in [0; 1[$ fixé.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty}^{[0;a]} = \ln(1 + a^n) = f_n(a)$.

Comme la série $\sum_{n \geq 0} f_n(a)$ converge (cf. 1)), la série

$\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^{[0;a]}$ converge, et on conclut que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; a]$.

b) 1) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $[0; 1[$ et, pour tout $x \in [0; 1[$: $f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$.

• Soit $a \in [0; 1[$ fixé. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; a]$,

$$|f'_n(x)| = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \leq nx^{n-1} \leq na^{n-1},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f'_n\|_{\infty}^{[0;a]} \leq na^{n-1}$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} na^{n-1}$ converge (règle $n^2 u_n$ par exemple),

par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty}^{[0;a]}$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[0; a]$, $a \in [0; 1[$ fixé, donc sur tout segment de $[0; 1[$.

• On a vu en a) 1) que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0; 1[$.

D'après le théorème de dérivation pour une série d'applications, on déduit que S est de classe C^1 sur $[0; 1[$ et que :

$$\forall x \in [0; 1[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}.$$

2) Pour tout $x \in [0; 1[$, $S'(x)$ est donc la somme d'une série à termes ≥ 0 et dont le terme d'indice 1 est > 0 , d'où : $S'(x) > 0$. Il en résulte que S est strictement croissante sur $[0; 1[$.

c) 1) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1[$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f_k(x) &= \sum_{k=0}^n \ln(1+x^k) = \ln \left(\prod_{k=0}^n (1+x^k) \right) \\ &= \ln((1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots (1+x^n)). \end{aligned}$$

En développant ce produit de n parenthèses, les termes sont tous ≥ 0 et il y a, parmi eux : $1, x, x^2, \dots, x^n$. On a donc :

$$\sum_{k=0}^n f_k(x) \geq \ln(1+x+\dots+x^n) = \ln \left(\sum_{k=0}^n x^k \right).$$

2) D'après 1), on a :

$$\forall x \in [0; 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f_k(x) \geq \ln \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

d'où, en faisant tendre l'entier n vers l'infini, pour x fixé :

$$\forall x \in [0; 1[, S(x) \geq \ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x).$$

Comme $-\ln(1-x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$, on conclut :

$$S(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty.$$

d) Soit $x \in]0; 1[$ fixé.

Pour évaluer $S(x)$, nous allons utiliser une comparaison série/intégrale. Notons

$$\varphi_x : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \ln(1+x^t) = \ln(1+e^{t \ln x}).$$

Il est clair que φ_x est continue par morceaux (car continue), décroissante, intégrable sur $[1; +\infty[$, car $\varphi_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{t \ln x} \geq 0$ et $\ln x < 0$.

On a donc, par comparaison série/intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n) \leq \varphi_x(1) + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt.$$

Pour calculer l'intégrale, utilisons le changement de variable $u = -t \ln x$ (rappelons que $x \in]0; 1[$ est fixé) :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt &= \int_1^{+\infty} \ln(1+e^{t \ln x}) dt \\ &= \int_{-\ln x}^{+\infty} \ln(1+e^{-u}) \left(\frac{-1}{\ln x} \right) du \\ &= -\frac{1}{\ln x} \int_{-\ln x}^{+\infty} \ln(1+e^{-u}) du. \end{aligned}$$

L'application $\psi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \ln(1 + e^{-u})$, est continue par morceaux (car continue) et intégrable sur $]0; +\infty[$, car $\psi(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0^+} \ln 2$, et $\psi(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} e^{-u}$.

En notant $I = \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-u}) du$,

on a donc : $\int_{-\ln x}^{+\infty} \ln(1 + e^{-u}) du \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} I$.

De plus, comme ψ est continue, ≥ 0 et n'est pas l'application nulle, on a : $I > 0$.

Il en résulte :

$$\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{t \ln x}) dt \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{I}{\ln x} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{I}{1-x}.$$

De plus :

$$\varphi_x(1) = \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ln 2 = \underset{x \rightarrow 1^-}{o} \left(\frac{1}{1-x} \right),$$

d'où :

$$\varphi_x(1) + \int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{t \ln x}) dt \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{I}{1-x}.$$

On conclut, par encadrement : $S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{I}{1-x}$.

5.45 a) Soit $x \in [0; 1]$.

Si $x \neq 1$, alors :

$$0 \leq f_n(x) = a_n x^n (1-x) \leq a_n x^n \leq a_1 x^n,$$

donc, puisque la série géométrique $\sum_{n \geq 1} x^n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Si $x = 1$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 0$,

donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0; 1]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application f_n est dérivable sur $[0; 1]$ et, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f'_n(x) = a_n(n x^{n-1} - (n+1)x^n) = a_n x^{n-1}(n - (n+1)x),$$

d'où le tableau de variations de f_n :

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

On a donc :

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

et :

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left[-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \exp\left[-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \exp(-1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}. \end{aligned}$$

D'où : $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_n}{e}$.

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.

c) 1) Supposons $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Puisque la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, on a, en notant R_n le reste d'ordre n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_{n+1} x^k (1-x) \\ &= a_{n+1} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \right) (1-x) = a_{n+1} x^{n+1}, \end{aligned}$$

et l'inégalité est aussi vraie pour $x = 1$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_\infty \leq a_{n+1}$,

d'où : $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

2) Réciproquement, supposons $a_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Comme $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$, et par hypothèse, $\ell \neq 0$, donc $\ell > 0$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k (1-x) \\ &= \ell \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \right) (1-x) = \ell x^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où : $\|R_n\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} R_n(x) \geq \sup_{x \in [0; 1]} (\ell x^{n+1}) = \ell$,

et donc : $\|R_n\|_\infty \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; 1]$.

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ si et seulement si : $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

5.46

a) Récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, $f_0 = 1$ existe, est unique et est un polynôme.
- Si, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n existe, est unique et est un polynôme, il est clair que

$$f_{n+1} : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt$$

existe, est unique et est un polynôme (fonction polynomiale).

b) 1) Récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in [0; 1]$, $f_0(x) = 1$ et :

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x f_0(t - t^2) dt = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x,$$

d'où : $0 \leq f_0(x) \leq f_1(x) \leq e^x$,

par l'inégalité classique : $e^x \geq 1 + x$.

- Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

On a alors, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) &= \left(1 + \int_0^x f_{n+1}(t - t^2) dt\right) - \left(1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt\right) \\ &= \int_0^x \underbrace{(f_{n+1}(t - t^2) - f_n(t - t^2))}_{\geq 0} dt \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= 1 + \int_0^x f_{n+1}(t - t^2) dt \\ &\leq 1 + \int_0^x e^{t-t^2} dt \leq 1 + \int_0^x e^t dt = 1 + [e^t]_0^x = e^x. \end{aligned}$$

On obtient : $\forall x \in [0; 1]$, $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+2}(x) \leq e^x$,
ce qui établit la propriété pour $n + 1$.

On conclut, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq e^x.$$

2) Pour tout $x \in [0; 1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante et majorée (par e^x), donc converge vers un réel, noté $f(x)$, et on a : $0 \leq f(x) \leq e^x$.

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers une application f .

c) Remarquons d'abord : $\forall t \in [0; 1]$, $t - t^2 \in [0; 1/4]$,

$$\text{car : } t - t^2 = -(t^2 - t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

ou encore par étude des variations de $t \mapsto t - t^2$ sur $[0; 1]$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M_n = \|f_{n+1} - f_n\|_{\infty}^{[0;1]}, \quad m_n = \|f_{n+1} - f_n\|_{\infty}^{[0;1/4]}.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left| \left(1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt\right) - \left(1 + \int_0^x f_{n-1}(t - t^2) dt\right) \right| \\ &= \left| \int_0^x (f_n(t - t^2) - f_{n-1}(t - t^2)) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |f_n(t - t^2) - f_{n-1}(t - t^2)| dt \\ &\leq \int_0^x m_{n-1} dt = x m_{n-1} \leq m_{n-1}. \end{aligned}$$

Il en résulte : $M_n = \sup_{x \in [0;1]} |f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq m_{n-1}$.

Mais aussi, en particulier :

$$\forall x \in [0; 1/4], \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq x m_{n-1} \leq \frac{1}{4} m_{n-1},$$

$$\text{d'où : } m_n \leq \frac{1}{4} m_{n-1}.$$

Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n \leq \frac{1}{4^n} m_0$.

Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n}$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , il s'ensuit que la série $\sum_{n \geq 0} m_n$ converge, puis, comme $M_n \leq m_{n-1}$,

la série $\sum_{n \geq 1} M_n$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \|f_{n+1} - f_n\|_{\infty}^{[0;1]}$ converge, donc

$\sum_{n \geq 0} (f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur $[0; 1]$, donc uniformément. D'après le lien suite/série pour la convergence uniforme, on déduit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

Enfin, comme $(f_n)_{n \geq 0}$ converge déjà simplement vers f , on conclut que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$.

• Puisque les f_n sont toutes continues sur $[0; 1]$ et que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$, d'après un théorème du cours, f est continue sur $[0; 1]$.

• Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f_n(t - t^2).$$

Puisque $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur $[0; 1]$, a fortiori, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ sur $[0; 1/4]$, donc $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} g$ sur $[0; 1]$, où :

$$g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t - t^2).$$

Alors, d'après le théorème du cours sur l'intégration sur un segment et la convergence uniforme, on déduit, pour tout $x \in [0; 1]$ fixé :

$$\int_0^x f_n(t - t^2) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^x f(t - t^2) dt.$$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt$,
on déduit donc, en faisant tendre l'entier n vers l'infini :

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt.$$

d) 1) Puisque f est continue sur $[0; 1]$ et que

$$\forall t \in [0; 1], t - t^2 \in [0; 1/4] \subset [0; 1],$$

l'application $t \mapsto f(t - t^2)$ est continue sur $[0; 1]$, donc, par
primitivation, $x \mapsto \int_0^x f(t - t^2) dt$ est de classe C^1 sur

$[0; 1]$. D'après le résultat de c), on déduit que f est de
classe C^1 sur $[0; 1]$ et que :

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) = f(x - x^2).$$

2) • Montrons que f est de classe C^∞ sur $[0; 1]$ par récurrence.

* On sait déjà que f est de classe C^1 sur $[0; 1]$.

* Si f est C^n pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors l'application

$x \mapsto f(x - x^2)$ est C^n donc f' est C^n , f est C^{n+1} .

Ceci montre, par récurrence sur n , que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f
est C^n .

On conclut que f est de classe C^∞ sur $[0; 1]$.

Plan

Les méthodes à retenir	248
Énoncés des exercices	253
Du mal à démarrer ?	262
Corrigés	267

On abrège « développable en série entière en 0 » en $dSE(0)$, et « développement en série entière en 0 » en $DSE(0)$.

Thèmes abordés dans les exercices

- Détermination du rayon de convergence d'une série entière
- Calcul du rayon de convergence et de la somme d'une série entière
- Détermination du $DSE(0)$ d'une fonction
- Calculs d'intégrales et de sommes de séries numériques (convergentes) par l'intermédiaire de séries entières
- Manipulation des fonctions usuelles complexes (exponentielle, cos, sin, ch, sh), résolution d'équations portant sur celles-ci
- Obtention de la classe C^∞ pour une fonction d'une ou de plusieurs variables réelles, par intervention de la notion de $dSE(0)$
- Dénombrements par utilisation de séries entières génératrices.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et caractérisations du rayon de convergence d'une série entière
- Théorèmes de comparaison, pour obtenir inégalité ou égalité, sur des rayons de convergence de séries entières
- Règle de d'Alembert pour les séries numériques et son emploi dans le cadre des séries entières
- Théorèmes sur rayon et somme de séries entières obtenues par opération sur une ou deux séries entières : addition, loi externe, dérivation, primitivation, produit de Cauchy
- Théorèmes sur la convergence (absolue, simple, normale, uniforme) pour les séries entières
- Relation entre coefficients d'une série entière et dérivées successives en 0 de la somme de cette série entière, lorsque le rayon est > 0
- Définition de la notion de fonction $dSE(0)$, unicité du $DSE(0)$ en 0
- Théorèmes sur les opérations sur les fonctions $dSE(0)$: addition, loi externe, dérivation, primitivation, produit

- Liste des DSE(0) usuels, avec leur rayon de convergence et leur ensemble de validité
- Définition et propriétés de l'exponentielle complexe
- Définition et propriétés des fonctions cos, sin, ch, sh, sur les complexes.

Les méthodes à retenir

Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_n a_n z^n$

Essayer de :

- Chercher un équivalent simple de $|a_n|$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Si $|a_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |b_n|$, alors les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

➡ Exercices 6.3 b), 6.13 a), 6.20 b), 6.22 b)

Pour trouver un équivalent simple de $|a_n|$ lorsque l'entier n tend vers l'infini, on pourra être amené à utiliser des développements asymptotiques intermédiaires.

➡ Exercices 6.12 a), d)

- Majorer ou minorer $|a_n|$ par un terme général plus simple.

Si, pour tout n , $|a_n| \leq |b_n|$, alors les rayons de convergence R_a et R_b des séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ vérifient : $R_a \geq R_b$.

➡ Exercices 6.32 f), 6.39, 6.47 b)

Une combinaison de majoration et de minoration de $|a_n|$ permet quelquefois d'obtenir le rayon de convergence.

➡ Exercices 6.1 f), 6.2 g), 6.12 e), m), o), 6.33 e), h), 6.46

- Appliquer la règle de d'Alembert, en particulier lorsque a_n contient des factorielles ou des exponentielles.

➡ Exercices 6.1 e), 6.2 a), d), f), 6.12 i), 6.13 b), 6.16 a), f) 6.35 b), c), d), 6.51 a)

- Combiner prise d'équivalent et règle de d'Alembert.

➡ Exercices 6.1 a) à d), 6.2 b), c), e), 6.3 e), 6.12 b), 6.16 a) à d), 6.17 d), 6.33 c), d), 6.35 e), 6.49 a)

- Si $|a_n|$ n'admet pas d'équivalent simple lorsque l'entier n tend vers l'infini, et si la règle de d'Alembert ne paraît pas applicable ou paraît peu commode à appliquer, se ramener à étudier, pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, la nature de la suite $(|a_n z^n|)_n$ en fonction de z .

Si on trouve un $R \in [0; +\infty]$ tel que :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $(a_n z^n)_n$ converge vers 0
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée,

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est égal à R .

Pour étudier la nature de la suite $(|a_n z^n|)_n$, on pourra commencer par étudier la nature de la suite $(\ln |a_n| + n \ln |z|)_n$, puis composer par l'exponentielle.

➡ Exercices 6.12 c), f), g), h), j), l), n), 6.13 c), d), e), 6.33 b), 6.35 f)

- Séparer la recherche de R en la recherche de deux inégalités complémentaires sur R , obtenues par les méthodes précédentes.

En particulier :

- s'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $a_n z_1^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors : $R \geq |z_1|$
- s'il existe $z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $a_n z_2^n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors : $R \leq |z_2|$.

➡ Exercices 6.3 a), d), k), 6.33 a), 6.35 a), 6.36 a)

- Utiliser le théorème du cours sur le rayon de convergence d'une série entière dérivée, en vue de faire disparaître un n en facteur, ou sur le rayon de convergence d'une série entière primitive, en vue de faire disparaître un n ou un $n + 1$ du dénominateur.

➡ Exercices 6.33 a), 6.36 b).

**Pour calculer
le rayon R et la somme S**

d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

- Commencer par déterminer le rayon R , par les méthodes précédentes.

Dans la plupart des exemples où l'énoncé demande le rayon et la somme d'une série entière, la détermination du rayon est aisée. En effet, le coefficient a_n est souvent une fraction rationnelle en n autre que la fraction nulle, et alors le rayon est 1, ou a_n fait intervenir simplement des factorielles ou des exponentielles, et alors le rayon peut être souvent calculé par application de la règle de d'Alembert.

➡ Exercice 6.2

Ayant déterminé le rayon R , pour calculer la somme S , c'est-à-dire $S(x)$ pour $x \in]-R; R[$ si la variable est réelle, $S(z)$ pour $|z| < R$, si la variable est complexe, essayer de se ramener aux séries entières connues, en utilisant notamment les techniques suivantes :

- dérivation ou primitivation, éventuellement répétée, d'une série entière

➡ Exercices 6.2 a) à d), g), 6.35 b), 6.36 b)

- décomposition de a_n en éléments simples, lorsque a_n est une fraction rationnelle en n

➡ Exercices 6.16 a), b)

- combinaison linéaire de séries entières connues

➡ Exercices 6.2 b) à g), 6.16 c) à h), 6.17 d)

En particulier, si a_n est un polynôme en $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$, essayer de faire intervenir l'exponentielle complexe

➡ Exercice 6.36 a)

- changement de variable du genre $t = \sqrt{x}$ ou $t = \sqrt{-x}$ lorsque l'énoncé comporte x^n et que l'on préférerait y voir un élément du genre t^{2n}

➡ Exercices 6.35 c), d), e)

Si on est amené à calculer « à part » $S(0)$, ne pas oublier que, tout simplement, $S(0)$ est le terme constant de la série entière définissant

$$S(x), \text{ c'est-à-dire } S(0) = a_0 \text{ lorsque } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

➡ Exercices 6.16 a), b), c), 6.35 c), d), e)

Si, pour le rayon R , on a obtenu seulement une minoration $R \geq \rho > 0$, et si on a calculé la somme $S(x)$ pour tout $x \in]-\rho; \rho[$, souvent, on pourra montrer $R = \rho$ en faisant apparaître un comportement irrégulier de $S(x)$ (ou de $S'(x), \dots$) lorsque x tend vers ρ^- ou lorsque x tend vers $-\rho^+$.

➡ Exercice 6.39.

**Pour montrer
qu'une fonction f est dSE(0)
et calculer le DSE(0) de f**

Essayer de se ramener aux DSE(0) connus, par les opérations suivantes :

- combinaison linéaire de fonctions dSE(0)

➡ Exercices 6.3 a), b), e), f), 6.18 a), b), c), f)

- produit d'un polynôme par une fonction dSE(0)

➡ Exercices 6.3 c), d)

- produit de deux fonctions dSE(0)

Si f se présente comme produit de deux fonctions dSE(0), alors, d'après le cours, f est dSE(0). Mais, pour le calcul de DSE(0) de f , on envisagera souvent un autre point de vue, car la valeur des coefficients du DSE(0) de f , obtenue par produit de deux séries entières, est souvent inutilisable ou inapproprié.

➡ Exercices 6.18 f), 6.41

**Pour obtenir
le DSE(0) d'une intégrale
dépendant d'un paramètre**

- dérivation, primitivation d'une fonction dSE(0).
Si la dérivée f' de f est plus simple que f , former le DSE(0) de f' , puis en déduire celui de f . Essayer en particulier lorsque f est une intégrale dépendant d'une de ses bornes ou lorsque f est un logarithme ou une fonction circulaire réciproque ou une fonction hyperbolique réciproque.

➡ Exercices 6.18 d), e), h), i), 6.25

- utilisation d'une équation différentielle

➡ Exercices 6.41, 6.42

- montrer que f est de classe C^∞ , appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer que le reste tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

➡ Exercices 6.40, 6.53, 6.55.

Développer la fonction sous l'intégrale en la somme d'une série de fonctions, souvent par l'intermédiaire d'une série entière, puis montrer que l'on peut permuter intégrale et série, par l'une des trois méthodes suivantes :

- continuité et convergence uniforme (normale ?) sur un segment

➡ Exercices 6.23, 6.30, 6.31, 6.39

- théorème sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions

➡ Exercices 6.26, 6.28, 6.45

- montrer que l'intégrale du reste tend vers 0.

**Pour calculer la somme
d'une série numérique
(convergente)**

En plus des méthodes vues dans le chapitre 4, on peut essayer de faire intervenir une ou des séries entières.

Pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, (après avoir montré la convergence de cette série), introduire par exemple la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$, déterminer son rayon R et sa somme S .

- Si $R > 1$, alors, on peut remplacer directement x par 1, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S(1).$$

➡ Exercices 6.4, 6.29

- Si $R = 1$, essayer de montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ converge uniformément (normalement ?) sur $[0; 1]$, ce qui permettra de déduire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x).$$

Avant d'introduire une série entière dans ce contexte, il peut être commode de commencer par transformer l'écriture du terme général

de la série numérique de l'énoncé, ou de considérer d'autres séries numériques analogues.

→ 6.30, 6.54.

Pour montrer qu'une fonction f d'une variable réelle est de classe C^∞

Essayer d'abord les théorèmes généraux : somme, produit, quotient, composée... de fonctions de classe C^∞ .
Sinon, il suffit de montrer que f est dSE(0).
Y penser en particulier lorsque $f(x)$ est donné par deux expressions selon la position de x .

→ Exercices 6.24, 6.37 a), 6.43 b).

Pour montrer qu'une fonction f de deux variables réelles est de classe C^∞

Essayer d'abord les théorèmes généraux : somme, produit, quotient, composée... de fonctions de classe C^∞ .
Sinon, essayer de se ramener à des fonctions d'une variable réelle et essayer d'appliquer la méthode précédente à ces fonctions d'une variable réelle.

→ Exercice 6.24.

Pour établir une égalité du type intégrale = série

Essayer d'écrire la fonction située dans l'intégrale comme somme d'une série de fonctions, souvent par l'intermédiaire d'une série entière, puis justifier la permutation entre intégrale et série.

→ Exercice 6.21.

Pour établir une égalité du type série = série

Essayer d'écrire le terme général d'une des deux séries comme somme d'une série, souvent par l'intermédiaire d'une série entière, puis justifier la permutation entre séries, par un théorème d'interversion pour des séries doubles.

→ Exercices 6.48, 6.52.

**Pour montrer qu'un DSE(0),
 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, valable pour tout
 $x \in]-R; R[$, est encore valable
pour $x = R$, ou pour $x = -R$**

Essayer de montrer que la série d'applications $\sum_{n \geq 0} (x \mapsto a_n x^n)$ converge uniformément (normalement ?) sur $[0; R]$, puis appliquer le théorème sur convergence uniforme et continuité.

→ Exercice 6.30.

Pour résoudre une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, faisant intervenir $e^z, \cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z, \dots$

Se ramener, en général, à des exponentielles et utiliser éventuellement un changement de variable.

→ Exercices 6.6, 6.32.

Pour établir une formule portant sur $\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}$, de complexes

Essayer de :
• utiliser les liens entre $\cos$, et ch , entre $\sin$ et sh , en passant par les nombres complexes.

→ Exercices 6.8, 6.10, 6.11

- faire intervenir l'exponentielle complexe.

➡ Exercices 6.7, 6.8, 6.10, 6.11.

Pour obtenir une inégalité faisant intervenir des fonctions usuelles de la variable complexe

Essayer d'utiliser des DSE(0).

➡ Exercice 6.9.

Énoncés des exercices

6.1 Exemples de détermination du rayon de convergence d'une série entière

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2} z^n & b) \sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) z^n & c) \sum_{n \geq 0} \frac{2^n + n^2}{3^n - n^2} z^n \\ d) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n^2 + 1)}{\ln(n^3 + 1)} z^n & e) \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n & f) \sum_{n \geq 0} e^{\sin n} z^n. \end{array}$$

6.2 Calcul du rayon de convergence et de la somme d'une série entière

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes

(z : variable complexe, x : variable réelle) :

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n \geq 0} n^2 x^n & b) \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n & c) \sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n^2 - 1}{n+1} x^n \\ d) \sum_{n \geq 0} (n^2 + 1)(-1)^n x^{2n} & e) \sum_{n \geq 0} \operatorname{sh} n z^n & f) \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n!} z^n \quad g) \sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n. \end{array}$$

6.3 Exemples de DSE(0)

Pour les fonctions f des exemples suivants, où l'on donne $f(x)$ (x : variable réelle), montrer que f est dSE(0) et calculer son DSE(0) ; préciser le rayon de convergence R .

$$\begin{array}{lll} a) \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} & b) \frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2} & c) (1-x) \ln(1-x) \\ d) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & e) \ln(x^2 - 8x + 15) & f) \frac{\sin 4x}{\sin x} \quad g) \frac{\sin x}{x}. \end{array}$$

6.4 Exemple de calcul d'une somme de série numérique par utilisation d'une série entière

Existence et calcul de $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}$.

6.5 Exemple de calcul d'un produit infini par utilisation d'une série entière

Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n 3^{\frac{2^k}{k!}}$.

6.6 Exemple de résolution d'une équation portant sur l'exponentielle complexe

Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $e^z = -2$.

6.7 Calculs de modules de fonctions usuelles complexes

a) Montrer : $\forall y \in \mathbb{R}, (\cos(iy) = \operatorname{ch} y, \sin(iy) = i \operatorname{sh} y).$

b) Établir : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\cos(x + iy)| = |\cos x + i \sin y|.$

6.8 Résolution d'une équation portant sur des fonctions hyperboliques complexes

Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $|\operatorname{ch} z| = |\operatorname{sh} z|.$

6.9 Inégalité sur des modules de fonctions usuelles complexes

Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|\cos z| \leq \operatorname{ch}(|z|), \quad |\sin z| \leq \operatorname{sh}(|z|).$

6.10 Calculs de carrés de modules de fonctions usuelles complexes

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + iy$. Montrer :

$$|\cos z|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x, \quad |\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y$$

$$|\sin z|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x, \quad |\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y.$$

6.11 Calcul d'une expression faisant intervenir le cosinus d'un complexe

Simplifier, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'expression : $A = |1 - \cos z| + |1 + \cos z|.$

6.12 Exemples de détermination du rayon de convergence d'une série entière

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 0} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}) z^n \quad b) \sum_{n \geq 0} \sqrt[n]{n} \operatorname{ch} n z^n \quad c) \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{-n} z^n$$

$$d) \sum_{n \geq 0} \tan(\pi \sqrt{n^2 + 1}) z^n \quad e) \sum_{n \geq 0} \ln(n!) z^n \quad f) \sum_{n \geq 2} (\ln n)^{-\ln n} z^n \quad g) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n z^n$$

$$h) \sum_{n \geq 0} e^{-\operatorname{ch} n} z^n \quad i) \sum_{n \geq 0} \frac{n^{3n}}{(3n)!} z^{3n} \quad j) \sum_{n \geq 0} n z^{n^2} \quad k) \sum_{n \geq 1} a_n z^n, a_n = n\text{-ième décimale de } \sqrt{2}$$

$$l) \sum_{n \geq 1} n^{-E(\sqrt{n})} z^n \quad m) \sum_{n \geq 1} S_2(n) z^n, S_2(n) = \text{somme des carrés des diviseurs } \geq 1 \text{ de } n$$

$$n) \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^3} z^n \quad o) \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^n} dt \right) z^n \quad p) \sum_{n \geq 0} \left(e^{-n} \sum_{k=0}^n e^{\sqrt{k}} \right) z^n.$$

6.13 Exemples de détermination du rayon de convergence d'une série entière, avec paramètres

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, les paramètres a, b étant fixés :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n + b^n} z^n, (a, b) \in]0; +\infty[^2 \quad b) \sum_{n \geq 0} \frac{a^{n^2}}{(2n)!} z^n, a \in]0; +\infty[$$

$$c) \sum_{n \geq 0} a^{n!} z^n, a \in \mathbb{C}^* \quad d) \sum_{n \geq 1} a^n z^{n!}, a \in \mathbb{C}^* \quad e) \sum_{n \geq 2} e^{(\ln n)^a} z^n, a \in \mathbb{R}.$$

6.14 Rayons de séries entières définies à partir d'une série entière donnée

Soient $\sum_n a_n z^n$, une série entière, R son rayon de convergence.

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_n a_n^2 z^n$, $\sum_n a_n z^{2n}$.

6.15 Caractérisation des séries entières de rayon > 0

Soient $\sum_n a_n z^n$, une série entière, R son rayon de convergence.

Montrer que $R > 0$ si et seulement si la suite $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n \geq 1}$ est majorée.

6.16 Calcul du rayon de convergence et de la somme d'une série entière

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes

(z : variable complexe, x : variable réelle) :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)} \quad b) \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^3 - n} \quad c) \sum_{n \geq 2} \frac{n + (-1)^{n+1}}{n + (-1)^n} x^n$$

$$d) \sum_{n \geq 0} \frac{n^4 + n^2 + 1}{n!} z^n \quad e) \sum_{p \geq 0} \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!} \quad f) \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{(n+2)n!} z^n$$

$$g) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2 + (-1)^n}{3 + (-1)^n} \right)^n z^n \quad h) \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3p, p \in \mathbb{N} \\ 2^p & \text{si } n = 3p+1, p \in \mathbb{N} \\ 3^p & \text{si } n = 3p+2, p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

6.17 Séries entières issues du développement de $(1 + \sqrt{2})^n$

a) Montrer qu'il existe un couple unique $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$ de suites réelles tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 \\ a_n + b_n \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n. \end{cases}$$

b) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n \sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n$.

c) En déduire une expression de a_n et de b_n , en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Déterminer le rayon de convergence et la somme des deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$.

6.18 Exemples de DSE(0)

Pour les fonctions f des exemples suivants, où l'on donne $f(x)$ (x : variable réelle), montrer que f est dSE(0) et calculer son DSE(0) ; préciser le rayon de convergence R .

$$a) \frac{1}{x^2 - x + 2} \quad b) \frac{16}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} \quad c) \ln(1 + x + x^2)$$

$$d) \ln(x^2 + 2x + 5) \quad e) \operatorname{Arctan}(2 + x) \quad f) \sin x \operatorname{ch} x$$

$$g) \left(\frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} \right)^2 \quad h) \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \quad i) \int_{2x}^{3x} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} dt.$$

6.19 Exemple d'inégalité sur la somme d'une série entière

Montrer : $\forall x \in]0; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \geq \frac{(1-x)(\ln(1-x))^2}{x}$.

6.20 Étude d'une série entière dont les coefficients sont des sommes de séries

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)}$.

a) 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n existe.

2) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n}(H_{2n-1} - H_{n-1})$,

où on a noté $H_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On pourra utiliser : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler.

3) En déduire un équivalent simple de a_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

b) On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, où la variable x est réelle, et on note R son rayon de convergence.

1) Déterminer R .

2) Quelles sont les natures des séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n R^n$, $\sum_{n \geq 1} a_n (-R)^n$?

6.21 Calcul d'une intégrale double par utilisation d'une série entière

Montrer : $\iint_{[0;1]^2} xy e^{xy} dx dy = e - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$.

6.22 Étude d'une série entière dont les coefficients sont des intégrales

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$ existe.

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$ (où x est une variable réelle), et on note R son rayon, S sa somme.

b) Déterminer R .

c) Étudier la nature des séries numériques $\sum_{n \geq 1} I_n R^n$, $\sum_{n \geq 1} I_n (-R)^n$.

6.23 Exemple de DSE(0) pour une fonction définie par une intégrale

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^\pi \operatorname{ch}(x \cos t) dt$ est dSE(0) et calculer son DSE(0) ; préciser le rayon de convergence R .

6.24 Classe C^∞ pour une fonction de deux variables réelles

Montrer que l'application $f :]-1; +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1+x)^y - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[\times \mathbb{R}$.

6.25 DSE(0) d'une fonction définie par une intégrale

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et que f admet une limite finie ℓ en 0.

On note encore f l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenue en prolongeant f par continuité en 0.

b) Montrer que f est dSE(0) et calculer le rayon de ce DSE(0).

6.26 DSE(0) d'une fonction définie par une intégrale

On note, pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve d'existence : $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(1 + x e^{-t}) dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Montrer que f est dSE(0) et déterminer le rayon et le DSE(0).

6.27 Détermination d'une fonction dSE(0) dont on connaît les dérivées successives en 0

Trouver un intervalle ouvert I contenant 0 et une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I , tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n^2 \cdot n!$.

6.28 Transformée de Fourier d'une fonction à support borné

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et nulle en dehors d'un segment.

On considère la transformée de Fourier g de f :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Démontrer que g est dSE(0), de rayon infini.

6.29 Calcul d'une somme de série numérique par utilisation de séries entières

Existence et calcul de $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

6.30 Calcul d'une somme de série numérique par utilisation d'une série entière

Existence et calcul de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$.

6.31 Calculs d'intégrales à l'aide de DSE(0)

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(nt - \sin t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(nt - \sin t) dt.$$

6.32 Exemple d'équation faisant intervenir des fonctions usuelles complexes

Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $3 \cos z + 2 \sin z = 5$.

6.33 Exemples de détermination du rayon de convergence d'une série entière

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

$$\begin{aligned} a) \sum_{n \geq 0} \sin n z^n, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} z^n, \quad \sum_{n \geq 0} n \sin n z^n & \quad b) \sum_{n \geq 2} \frac{3^n}{(\ln(n+2))^{n-1}} z^n \\ c) \sum_{n \geq 0} \left(\operatorname{Arcsin} \frac{n+1}{2n+3} - \frac{\pi}{6} \right) z^n & \quad d) \sum_{n \geq 1} \operatorname{Arccos} \left(1 - \frac{1}{n} \right) z^n \\ e) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1) \cdots (t-n) dt \right) z^n & \quad f) \sum_{n \geq 0} \left(\int_n^{+\infty} t^n e^{-t} dt \right) z^n \\ g) \sum_{n \geq 0} \left(\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt \right) z^n & \quad h) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{2} - E(n\sqrt{2})} z^n. \end{aligned}$$

6.34 Effet de la multiplication du coefficient d'une série entière par une fraction rationnelle de l'indice

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $F \in \mathbb{C}(\mathbf{X}) - \{0\}$. Montrer que les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n F(n) a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

6.35 Calcul du rayon de convergence et de la somme d'une série entière

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes

(z : variable complexe, x : variable réelle) :

$$\begin{aligned} a) \sum_{n \geq 0} \cos n x^n & \quad b) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n+2}}{3n+2} & \quad c) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2n+1} \\ d) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)!} & \quad e) \sum_{n \geq 0} \frac{3n}{2n^2+n-1} x^n & \quad f) \sum_{n \geq 0} z^{E(\sqrt{n})}. \end{aligned}$$

6.36 Séries entières de coefficients $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $\frac{\cos n\theta}{n}$, $\frac{\sin n\theta}{n}$

a) Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les rayons de convergence et les sommes des deux séries entières $\sum_{n \geq 0} \cos n\theta x^n$, $\sum_{n \geq 0} \sin n\theta x^n$.

b) En déduire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les rayons de convergence et les sommes des deux séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$.

6.37 Fonction de classe C^∞ par DSE(0)

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On note $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{n+1}} \left(e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{(n+1)!} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_n^{(n)}(x) = \frac{e^{x/2}}{x^{2n+1}} (e^{x/2} P_n(x) - e^{-x/2} P_n(-x))$$

et calculer P_n .

6.38 Exemple d'égalité de sommes de séries entières, par produits de Cauchy

Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$e^z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \frac{z^n}{n!}$$

6.39 Étude d'une série entière dont les coefficients sont des intégrales

On note $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(\prod_{k=0}^{n-1} (t-k) \right) dt.$$

Déterminer le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, où la variable x est réelle.

6.40 Résolution d'une équation fonctionnelle par utilisation d'une série entière

Pour $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^* \times]-1; 1[$ fixé, trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$. On exprimera le résultat sous forme d'une série.

6.41 Exemple de DSE(0), méthode de l'équation différentielle

Montrer que $f : x \longmapsto \frac{\operatorname{Argsh} x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dSE(0) et calculer son DSE(0) ; préciser le rayon de convergence R .

6.42 Exemple de DSE(0), méthode de l'équation différentielle

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé, former le DSE(0) de $f : x \longmapsto \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$.

6.43 Fonction d'une variable réelle de classe C^∞ par utilisation de DSE(0)

On note $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$.

a) Montrer que f admet une limite finie ℓ en 0 et calculer ℓ .

On note encore f l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenue en prolongeant f par continuité en 0.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

6.44 Principe des zéros isolés et une application

a) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R > 0$, f sa somme. On suppose qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, -R < t_n < R \text{ et } t_n \neq 0 \text{ et } f(t_n) = 0 \\ t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{cases}$$

Démontrer : $f = 0$.

b) Existe-t-il une application $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$, dSE(0) de rayon ≥ 1 , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} ?$$

6.45 DSE(0) de $x \mapsto \Gamma(I+x)$, où Γ est la fonction d'Euler

Montrer que l'application $x \mapsto \Gamma(1+x)$ est dSE(0), de rayon 1, et exprimer les coefficients de ce DSE(0) à l'aide d'intégrales.

6.46 Étude d'une série entière dont les coefficients vérifient une relation de récurrence linéaire du second ordre, à coefficients constants et avec second membre

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + \frac{1}{n+1}.$$

Déterminer le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$, où la variable x est réelle.

6.47 Série entière génératrice pour le nombre de dérangements

On note, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, $F_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement k points fixes, et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = F_{n,0}$. On convient : $\alpha_0 = 1$.

a) 1) Montrer, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$: $F_{n,k} = \binom{n}{k} \alpha_{n-k}$.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k = n!$.

b) On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$, où la variable z est complexe, et on note R son rayon de convergence, S sa somme.

1) Montrer $R \geq 1$ et établir, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$: $S(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$.

2) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = n! \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!}$.

3) Conclure, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$: $\alpha_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$, puis : $\alpha_n = \frac{n!}{e} + o(1)$.

6.48 Calcul d'une somme de série par utilisation d'une série double et d'une série entière

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n) - 1}{n}$, où ζ est la fonction de Riemann.

6.49 Étude d'une série entière dont les coefficients vérifient une relation de récurrence

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 \in]0; +\infty[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, son rayon de convergence R , sa somme S .

a) 1) Montrer : $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. 2) Établir : $a_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a_n$. 3) Déterminer R .

b) En considérant $b_n = \frac{1}{a_n}$, montrer : $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

c) 1) Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$?

2) Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$?

6.50 Comparaison des comportements de deux séries entières au bord

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ deux séries entières, R_a, R_b les rayons, S_a, S_b les sommes.

On suppose : (1) $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$, (2) $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge, (3) $R_b = 1$, (4) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer : $S_b(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$. b) Établir : $\frac{S_a(x)}{S_b(x)} \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \ell$.

6.51 Étude d'une série entière, comportement au bord

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{n^n}{e^n n!}$, et on considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ (où la variable x est réelle), R son rayon de convergence, S sa somme.

a) Déterminer R .

b) Déterminer un équivalent simple de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

À cet effet, on admettra $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et on utilisera l'exercice 6.50.

6.52 Égalité entre sommes de séries, utilisation d'une série double et d'une série entière

Établir, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{p+n-1}{n} (\zeta(p+n) - 1) = p \zeta(p+1)$,

où ζ est la fonction de Riemann.

6.53 Fonction dSE(0) par inégalités sur des intégrales

Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-1}^1 (f^{(n)}(x))^2 dx \leq (n!)^2$.

Montrer que f est dSE(0), de rayon ≥ 1 .

6.54 Formule de Simon Plouffe

Montrer :
$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

6.55 Toute fonction C^∞ absolument monotone est dSE(0)

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f :]-a; a[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a; a[, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-a; a[$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0), \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

a) 1) Montrer que, pour tout $x \in [0; a[$, la suite $(S_n(x))_{n \geq 0}$ converge et la suite $(R_n(x))_{n \geq 0}$ converge.

2) Établir, pour tout $(x, y) \in]0; a[^2$ tel que $x < y$: $0 \leq \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.

3) Montrer, pour tout $x \in [0; a[$: $R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

4) En déduire que, pour tout $x \in [0; a[$, la série de Taylor de f en 0, prise en x converge et a pour somme $f(x)$.

b) Établir : $\forall x \in]-a; 0], R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

c) Conclure que f est dSE(0), de rayon $\geq a$.

Du mal à démarrer ?

6.1 a) à d) Équivalent, puis règle de d'Alembert.

e) Règle de d'Alembert.

f) Encadrer la valeur absolue du coefficient.

6.2 a) À partir de la série géométrique, dériver, multiplier par x .

b) Décomposer en combinaison linéaire de trois séries entières.

c) Décomposer en combinaison linéaire de deux séries entières et utiliser le résultat de a).

d) Décomposer en combinaison linéaire de deux séries entières et utiliser le résultat de a), en remplaçant x par $-x^2$.

e) Remplacer $\operatorname{sh} x$ par $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

f) Décomposer en combinaison linéaire de séries entières et utiliser le DSE(0) de l'exponentielle.

g) Séparer les termes d'indices pairs, d'indices impairs, d'abord sur des sommes partielles.

6.3 a), b) Décomposer en éléments simples.

c) Calcul direct.

d) Remarquer : $f(x) = (1-x)(1-x^2)^{-1/2}$.

e) Factoriser et décomposer en somme de logarithmes (de nombres strictement positifs !).

f) Simplifier $f(x)$ et linéariser.

g) Diviser le DSE(0) de $\sin x$ par x , puis récupérer la valeur pour $x = 0$.

6.4 Calculer les rayons et les sommes des deux séries entières

$$\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{(n-1)n} \text{ et } \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n-1}, \text{ puis remplacer } x \text{ par } \frac{2}{5}, \text{ par } \frac{3}{5}.$$

6.5 Se ramener à une étude de somme en passant par le logarithme.

6.6 Poser $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6.7 Remplacer $\cos(iy)$ et $\sin(iy)$ par leurs expressions à l'aide d'exponentielles complexes.

6.8 Poser $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis développer $\operatorname{ch}(x + iy)$ et $\operatorname{sh}(x + iy)$.

6.9 Remplacer $\cos z$ et $\sin z$ par des sommes de séries entières, puis utiliser l'inégalité triangulaire.

6.10 Développer $\cos(x + iy)$.

6.11 Poser $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis développer $\cos z$.

6.12 a), d) Obtenir un équivalent simple de a_n , par développement asymptotique, puis appliquer la règle de d'Alembert.

b) Équivalent, puis règle de d'Alembert.

c), f), g), h), j), l), n) Pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, déterminer la limite de $|a_n z^n|$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

e), m), o), p) Encadrer $|a_n|$.

i) Règle de d'Alembert pour les séries numériques.

k) Majorer $|a_n|$. D'autre part, étudier le cas $z = 1$.

6.13 a) Chercher un équivalent simple de a_n , en séparant les cas $b \leq 1$, $b > 1$.

b) Règle de d'Alembert.

c) à e) Pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, déterminer la limite de $|a_n z^n|$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

6.14 Étudier la nature des suites $(a_n^2 z^n)_{n \geq 0}$, $(a_n z^{2n})_{n \geq 0}$.

6.15 1) Si $R > 0$, intercaler ρ tel que $0 < \rho < R$, et déduire une majoration de $|a_n|^{1/n}$.

2) Réciproquement, comparer $|a_n|$ avec le terme général d'une série géométrique.

6.16 a) Décomposer en éléments simples, multiplier par x^2 .

b) Décomposer en éléments simples et diviser par x .

c) Séparer les termes d'indices pairs, d'indices impairs, d'abord sur les sommes partielles, puis sur les sommes totales.

d) Décomposer le polynôme $n^4 + n^2 + 1$ (variable n) sur les polynômes $n(n-1)(n-2)(n-3)$, $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$, n , 1 , puis utiliser le DSE(0) de l'exponentielle.

e) Combiner les DSE(0) de sh et $\sin$.

f) Multiplier le dénominateur par $n+1$, pour faire apparaître $(n+2)!$, puis utiliser le DES(0) de l'exponentielle.

g) Séparer les termes d'indices pairs, d'indices impairs, d'abord sur les sommes partielles.

h) Calculer d'abord une somme partielle, par exemple $\sum_{n=0}^{3N+2} a_n z^n$.

6.17 a) 1) Existence : Récurrence sur n .

2) Unicité : Utiliser $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Utiliser la formule du binôme de Newton.

d) Pour les rayons, chercher un équivalent simple de a_n , de b_n , lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Pour les sommes, utiliser c) pour se ramener à une combinaison linéaire de séries entières géométriques.

6.18 a) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, utiliser des séries entières géométriques, puis regrouper les termes conjugués deux par deux.

b) Décomposer en éléments simples et utiliser la série entière géométrique et sa dérivée.

c) Remarquer : $1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x}$, pour $x \in]-1; 1[$.

d) Former le DES(0) de f' par la même méthode qu'en a), puis primitiver.

e) Former le DES(0) de f' par la même méthode qu'en a), puis primitiver.

f) 1^{re} méthode : Remplacer $\sin x$ par $-i \operatorname{sh}(ix)$, puis linéariser.

2^e méthode : Exprimer $\sin x$ et $\operatorname{ch} x$ à l'aide d'exponentielles complexes.

g) Linéariser $(\operatorname{ch} x - 1)^2$, diviser par x^4 , former le DSE(0), puis récupérer le cas $x = 0$.

h) Former le DSE(0) de $g : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$, compléter convenablement en 0, puis primitiver.

i) Former le DSE(0) de $g : t \mapsto \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$, compléter convenablement en 0, exprimer $f'(x)$ à l'aide de g , puis primitiver.

6.19 Utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz sur des séries entières.

6.20 a) On obtient : $a_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

b) 1) $R = 1$. 2) Pour $\sum_n a_n (-R)^n$, utiliser le TSCSA.

6.21 Calculer l'intégrale double, par emboîtement d'intégrales simples, en utilisant une intégration par parties, puis calculer $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ par intégration d'un DSE(0) de rayon infini.

6.22 a) Remarquer ici : $e^{-t^n} \leq e^{-t}$.

b) Obtenir un équivalent simple de I_n , par le changement de variable $u = t^n$, suivi du théorème de convergence dominée.

c) Pour $\sum_{n \geq 1} I_n (-R)^n$, utiliser le TSCSA.

6.23 Développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions, puis permuter intégrale et série, par le théorème du cours sur continuité et convergence uniforme sur un segment.

Calculer les intégrales de Wallis d'indices pairs.

6.24 Décomposer f , par produit et composition, à l'aide de fonctions d'une variable réelle, en considérant

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Se rappeler que toute application dSE(0) est de classe C^∞ .

6.25 b) Montrer que l'application $t \mapsto \frac{\text{Arctan } t}{t}$, convenablement prolongée en 0, est dSE(0), puis primitiver et refaire le même raisonnement pour obtenir $f(x)$.

6.26 a) Séparer les cas : $x < -1$, $x = -1$, $x > -1$.

b) Pour $x \in]-1; 1[$, développer $t \mapsto \ln(1 + x e^{-t})$ en somme d'une série de fonctions, puis permuter intégrale et série, par le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions.

6.27 Considérer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$.

6.28 En notant $[-a; a]$ un segment en dehors duquel f est nulle, exprimer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, puis permuter intégrale et série, par le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions.

6.29 Noter

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}, B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!}, C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!},$$

et calculer $A + B + C$, $A + jB + j^2C$, $A + j^2B + jC$, puis déduire A .

6.30 Considérer la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)}$, de rayon 1.

Calculer sa somme pour $x \in [0; 1[$, puis montrer qu'on peut remplacer x par 1, par continuité et convergence uniforme.

6.31 Former $I_n + iJ_n$, développer la fonction sous l'intégrale en une somme de série de fonctions, puis permuter intégrale et série, par continuité et convergence uniforme sur un segment.

6.32 Remplacer $\cos z$ et $\sin z$ par leurs expressions à l'aide de e^{iz} et e^{-iz} .

6.33 a) 1) Utiliser la majoration usuelle de $|\sin n|$, et, d'autre part, montrer que la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

2) Une série entière a le même rayon que sa série entière dérivée, ou qu'une série entière primitive.

b) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, déterminer la limite de $|a_n z^n|$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

c) Pour obtenir un équivalent simple du coefficient, utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à Arcsin , entre $\frac{1}{2}$

$$\text{et } \frac{n+1}{2n+3}.$$

d) Remarquer $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc : $a_n \sim \sin a_n$.

e) Encadrer $|a_n|$.

f) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq n^n e^{-n}$,

puis règle de d'Alembert pour $\sum_{n \geq 1} n^n e^{-n} z^n$.

g) Par le changement de variable $t = x^2$, se ramener à $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

On sait que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est semi-convergente, c'est-à-dire convergente mais non absolument convergente.

h) • Montrer : $a_n \geq 1$.

• Par utilisation d'une expression conjuguée, montrer : $a_n \leq n\sqrt{2}$.

6.34 Utiliser la même méthode que celle employée dans le cours pour montrer qu'une série entière a le même rayon que sa série entière dérivée.

6.35 a) • Rayon : Comme pour l'exercice 6.33 a).

• Somme : Remplacer $\cos n$ par son expression à l'aide d'exponentielles complexes et utiliser des séries géométriques.

b) Dériver, décomposer en éléments simples, primitiver.

c) Changements de variable :

$$t = \sqrt{x} \text{ si } x \in]0; 1[, \quad t = \sqrt{-x} \text{ si } x \in]-1; 0[.$$

d) Changements de variable :

$$t = \sqrt{x} \text{ si } x \in]0; +\infty[, \quad t = \sqrt{-x} \text{ si } x \in]-\infty; 0[.$$

e) Décomposer en éléments simples.

Pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, utiliser des changements de variable, comme dans c).

f) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$, découper $\sum_{n=0}^{(N+1)^2-1} z^{E(\sqrt{n})}$ en paquets.

6.36 a) 1) Rayons : Une inégalité est immédiate.

Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la suite $(\cos n\theta)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0, en raisonnant par l'absurde. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, la suite $(\sin n\theta)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0, en raisonnant par l'absurde.

2) Sommes : Considérer $S_c(x) + iS_s(x)$ et utiliser une série géométrique.

b) 1) Rayons : Série entière dérivée.

2) Sommes : Se ramener à a) par dérivation et multiplication par x .

6.37 a) En utilisant le DSE(0) de l'exponentielle, montrer que f est dSE(0) de rayon infini, donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

6.38 Effectuer le produit de Cauchy des séries entières

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} z^n, \text{ puis exprimer le coefficient de } z^n,$$

$$\text{en remplaçant } \frac{1}{n-k} \text{ par } \int_0^1 t^{n-k-1} dt.$$

6.39 1) Par majoration de $|a_n|$, montrer : $R \geq 1$.

2) Soit $x \in]-1; 1[$. Pour calculer $S(x)$, montrer qu'on peut permuter série et intégrale, par continuité et convergence uniforme sur un segment.

$$3) \text{ Ayant obtenu } S(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

montrer $R = 1$ en considérant le comportement de $S'(x)$ lorsque $x \rightarrow -1^+$.

6.40 1) Soit f convenant.

• Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Montrer que le reste de Taylor de f en 0 tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

2) Reporter $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans l'équation, et raisonner par équivalences logiques successives.

6.41 1) Montrer que f est dSE(0), par des arguments qualitatifs.

2) Pour calculer le DSE(0) de f , utiliser la méthode de l'équation différentielle.

6.42 Montrer que f satisfait une EDL2 (E) à coefficients variables polynomiaux.

• Supposer que f est dSE(0), $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, reporter dans (E), et déduire les a_n .

• Réciproquement, montrer que la série entière obtenue est de rayon > 0 et satisfait (E) et les mêmes conditions initiales que f . Conclure à l'aide du théorème de Cauchy linéaire.

6.43 a) Utiliser des DL(0) pour obtenir :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

$$b) \text{ Montrer, pour } x \neq 0 : f(x) = -\frac{x}{e^x - 1} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Montrer que $x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ complétée convenablement en 0, est dSE(0), puis utiliser le lien entre dSE(0) et classe C^∞ .

6.44 a) Montrer : $f(0) = 0$. Se ramener au cas où $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ en décroissant strictement, et utiliser le théorème de Rolle pour construire une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ jouant, pour f' , le même rôle que celui joué par $(t_n)_{n \geq 0}$ pour f .

En déduire $f'(0) = 0$, réitérer, puis $f = 0$.

b) Raisonner par l'absurde et appliquer le résultat de a) à

$$g : x \mapsto f(x) - x^3, \quad h : x \mapsto f(x) + x^3.$$

6.45 Montrer qu'on peut permuter intégrale et série, par application du théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions.

6.46 1) Rayon : Encadrer u_n par deux suites plus simples, $0 \leq v_n \leq u_n \leq w_n$, calculer v_n et w_n et en déduire $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) Somme : Décomposer $u_{n+2}x^{n+2}$ d'après l'énoncé, puis sommer.

6.47 b) 1) • Encadrer $\left| \frac{\alpha_n}{n!} \right|$, et déduire $R \geq 1$.

• Faire le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$.

2) Effectuer $(1-z)S(z)$ et utiliser un télescopage.

3) La série $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{p!}$ relève du TSCSA et sa somme est égale à e^{-1} .

6.48 Montrer que le théorème d'interversion pour les séries doubles à termes ≥ 0 s'applique à $\left(\frac{1}{np^{2n}}\right)_{n \geq 1, p \geq 2}$.

6.49 a) Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0, et que la seule limite possible est 0.

b) 1) Appliquer un théorème de sommation des relations de comparaison à la série de terme général $b_{n+1} - b_n$.

c) 2) Utiliser le TSCSA.

6.50 a) Revenir à la définition d'une limite infinie et utiliser des sommes partielles.

b) Revenir à la définition d'une limite finie, pour $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, et utiliser des sommes partielles.

6.51 a) Règle de d'Alembert.

b) Par la formule de Stirling et l'exercice 6.50, montrer :

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Pour obtenir un équivalent simple de cette dernière somme de série entière lorsque $x \rightarrow 1^-$, utiliser une comparaison série/intégrale.

6.52 Montrer qu'on peut appliquer le théorème d'interversion des sommations à la suite double $(u_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 2}$ définie par

$$u_{n,k} = n \binom{p+n-1}{n} \frac{1}{k^{p+n}}.$$

Utiliser le DSE(0) classique :

$$\forall x \in]-1; 1[, (1-x)^{-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{n} x^n$$

et dériver.

6.53 Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f sur le segment joignant 0 et x , et majorer la valeur absolue du reste à l'aide de l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

6.54 Remarquer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{16^n(8n+p)} = \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{8n+p-1} dx.$$

Montrer que l'on peut permuter intégrale et série, par continuité et convergence uniforme sur un segment.

En déduire, après changement de variable $u = x\sqrt{2}$:

$$S = 16 \int_0^1 \frac{4 - 2u^3 - u^4 - u^5}{16 - u^8} du.$$

Simplifier la fraction rationnelle et calculer l'intégrale.

6.55 a) 1) Montrer que, pour tout $x \in [0; a[$, la suite $(S_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante et majorée.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in]0; a[^2$ tel que $x < y$, exprimer $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ à l'aide du changement de variable $u = \frac{t}{x}$, et comparer à $\frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.

3) Pour $x \in]0; a[$ fixé, intercaler strictement un y entre x et a et utiliser 2).

b) Montrer, pour tout $x \in]-a; 0[$: $|R_n(x)| \leq R_n(|x|)$, et utiliser a).

Corrigés des exercices

6.1 Notons, dans chaque exemple, a_n le coefficient de la série entière envisagée.

a) On a :
$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

puis, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{n+1} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = 1$.

b) On a : $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$

puis, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = 1$.

c) On a : $a_n = \frac{2^n + n^2}{3^n - n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^n}{3^n},$

puis, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{2^n} |z| = \frac{2}{3} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} |z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = \frac{3}{2}$.

d) On a :

$$a_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{\ln(n^3 + 1)} = \frac{2 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{3 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3},$$

puis, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = 1$.

e) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| &= \binom{2n+2}{n+1} \binom{2n}{n}^{-1} |z| \\ &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} |z| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4|z|, \end{aligned}$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = \frac{1}{4}$.

f) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq e^{-1} \leq e^{\sin n} \leq e^1.$

Les séries entières $\sum_{n \geq 0} e^{-1} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} e z^n$ sont de rayon 1 (séries géométriques, ou règle de d'Alembert), donc, par théorème d'encadrement pour les rayons : $R = 1$.

6.2 a) La règle de d'Alembert montre : $R = 1$.

On a : $\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$

d'où, en dérivant :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

puis, en multipliant par x :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} = x(1-x)^{-2},$$

puis, en dérivant : $\forall x \in]-1; 1[,$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = (1-x)^{-2} + 2x(1-x)^{-3} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

puis, en multipliant par x et en remarquant que le terme d'indice 0 est nul :

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Réponse : $R = 1$ et :

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

b) L'utilisation d'un équivalent et la règle de d'Alembert montrent : $R = 1$.

On a, pour tout $x \in]-1; 1[:$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n + 2 + \frac{1}{n} \right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \end{aligned}$$

car ces trois séries entières sont de rayon 1.

On sait : $\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$

donc : $\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$

D'autre part, en dérivant, on obtient :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

puis, en multipliant par x :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Enfin, on sait : } \forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

En combinant linéairement, on en déduit $S(x)$.

Réponse : $R = 1$ et :

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2} - \ln(1-x).$$

c) L'utilisation d'un équivalent et la règle de d'Alembert montrent : $R = 1$.

On a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + n^2 - 1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n}_{\text{notée } A(x)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n}_{\text{notée } B(x)}, \end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1.

$$\text{On a calculé } A(x) \text{ dans } a) : A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

D'autre part, si $x \neq 0$:

$$B(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x),$$

et on a $B(0) = 1$, terme constant de la série entière définissant $B(x)$.

Réponse : $R = 1$ et pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{1}{x} \ln(1-x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

d) • Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left| (n^2 + 1)(-1)^n x^{2n} \right| = (n^2 + 1)x^{2n}.$$

$$\text{On a : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} |x|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |x|^2,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = 1$.

• On a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1)(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1)(-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 (-x^2)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n, \end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1.

D'une part, par série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

D'autre part, d'après l'exercice a) :

$$\forall t \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 t^n = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3},$$

puis en remplaçant t par $-x^2 \in]-1; 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 (-x^2)^n = \frac{-x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

Réponse : $R = 1$ et :

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \frac{-x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{1+x^2}.$$

$$e) \bullet \text{ On a : } a_n = \operatorname{sh} n = \frac{e^n - e^{-n}}{2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^n}{2}.$$

Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} e^n z^n$ est de rayon $\frac{1}{e}$ (série géométrique), par théorème d'équivalence : $R = \frac{1}{e}$.

• On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{e}$:

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh} n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2} z^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n \end{aligned}$$

car les rayons respectifs sont $\frac{1}{e}$, et

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ez} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-1}z} = \frac{1}{2} \frac{(1 - e^{-1}z) - (1 - ez)}{(1 - ez)(1 - e^{-1}z)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e - e^{-1})z}{1 - (e + e^{-1})z + z^2} = \frac{(\operatorname{sh} 1)z}{1 - 2(\operatorname{ch} 1)z + z^2}. \end{aligned}$$

Réponse : $R = \frac{1}{e}$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{e}$:

$$S(z) = \frac{z \operatorname{sh} 1}{1 - 2z \operatorname{ch} 1 + z^2}.$$

f) • On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{n!}{n+1} |z| = \frac{n+2}{(n+1)^2} |z| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = +\infty$.

• On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon infini

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = (1+z) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = (1+z) e^z.$$

Réponse : $R = +\infty$ et : $\forall z \in \mathbb{C}, S(z) = (1+z) e^z$.

g) • On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq |a_n| \leq n$.

Comme les deux séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} z^n$ sont de rayon 1, par théorème d'encadrement : $R = 1$.

• Soit $x \in]-1; 1[$. Pour séparer les termes d'indices pairs, d'indices impairs, nous allons travailler sur des sommes partielles.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{2N+1} n(-1)^n x^n = \sum_{p=1}^N 2p x^{2p} + \sum_{p=0}^N \frac{1}{2p+1} x^{2p+1}.$$

Comme les trois séries entières qui interviennent sont de rayon 1, on déduit, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$S(x) = \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} 2p x^{2p}}_{\text{notée } A(x)} + \underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}}_{\text{notée } B(x)}.$$

On a, d'après la série géométrique :

$$\forall t \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t},$$

d'où, en dérivant :

$$\forall t \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2},$$

puis, en multipliant par t :

$$\forall t \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n t^n = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Il s'ensuit :

$$\forall x \in]-1; 1[, A(x) = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} p(x^2)^p = 2 \frac{x^2}{(1-x^2)^2}.$$

D'autre part :

$$\forall x \in]-1; 1[, B(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Réponse : $R = 1$ et :

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

6.3 a) La fonction $f : x \mapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}$ est définie sur

$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, donc au moins sur $] -1; 1[$, et on a, par une décomposition en éléments simples immédiate, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{x+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} \\ &= x + \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} = x - \frac{3}{2} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} \\ &= x - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \\ &= x + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} (-1)^n \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

$$\text{en notant : } a_n = \begin{cases} -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} (-1)^n & \text{si } n \neq 1 \\ 0 & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

$$\text{ou encore : } a_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 2p+1, p \in \mathbb{N}^* \\ -2 & \text{si } n = 2p, p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Déterminons le rayon R de cette série entière.

D'une part, puisque la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, on a : $R \leq 1$.

D'autre part, puisque $(a_n)_n$ est bornée, on a : $R \geq 1$.

On conclut : $R = 1$.

b) La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2-2)}$$

est définie sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$, donc (au moins) sur $] -1; 1[$ et on a, par une décomposition en éléments simples immédiate, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{(x^2-1)(x^2-2)} \\
 &= -\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-2} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^{2n}.
 \end{aligned}$$

Puisque $1 - \frac{1}{2^{n+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$ et que la série entière $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$ est de rayon 1, par théorème d'équivalence, on a : $R = 1$.

c) La fonction $f : x \mapsto (1-x) \ln(1-x)$ est définie que $] -\infty; 1[$, donc (au moins) sur $] -1; 1[$.
On a, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1-x) \ln(1-x) = -(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
 &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} \\
 &= -x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) x^n = -x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n} x^n.
 \end{aligned}$$

On peut considérer que ce dernier résultat constitue la réponse à la question posée. On peut aussi se ramener précisément à une série entière :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

$$\text{où, pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{(n-1)n} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Par la règle de d'Alembert : $R = 1$.

$$d) \text{ La fonction } x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

est définie sur $] -1; 1[$, donc (au moins) sur $] -1; 1[$.

On a, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x)(1-x^2)^{-1/2} \\
 &= (1-x) \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} (-x^2)^n \right] \\
 &= (1-x) \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} (-1)^n x^{2n} \right] \\
 &= (1-x) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n+1}.
 \end{aligned}$$

On peut considérer que ce dernier résultat constitue la réponse à la question posée. On peut aussi se ramener précisément à une série entière :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k,$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = \begin{cases} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} & \text{si } k \text{ est pair, } k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} & \text{si } k \text{ est impair, } k = 2n+1, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ou encore, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (-1)^k \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$, en notant $n = E\left(\frac{k}{2}\right)$.

Déterminons le rayon R . On sait déjà : $R \geq 1$.

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty$, on a : $R \leq 1$.

On conclut : $R = 1$.

$$e) \text{ On a : } \quad X^2 - 8X + 15 = (X-3)(X-5).$$

La fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 8x + 15)$ est définie sur $] -\infty; 3[\cup] 5; +\infty[$, donc (au moins) sur $] -3; 3[$.

On a, pour tout $x \in] -3; 3[$ (en faisant attention à ne mettre des logarithmes que sur des nombres > 0) :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln((x-3)(x-5)) \\
 &= \ln(3-x) + \ln(5-x) \\
 &= \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ln 5 + \ln\left(1 - \frac{x}{5}\right) \\
 &= \ln 15 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{5}\right)^n \\
 &= \ln 15 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) x^n.
 \end{aligned}$$

On peut considérer que ce dernier résultat constitue la réponse à la question posée.

On peut aussi se ramener précisément à une série entière :

$$\forall x \in] -3; 3[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où $a_0 = \ln 15$ et $a_n = -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right)$ pour tout $n \geq 1$.

On a $|a_n| \sim \frac{1}{n3^n}$ noté b_n , et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ fixé :

$$\left| \frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_nx^n} \right| = \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} |x| = \frac{n}{n+1} \frac{|x|}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{3}.$$

On en déduit, d'après la règle de d'Alembert et le théorème d'équivalence : $R = 3$.

f) L'application $f : x \mapsto \frac{\sin 4x}{\sin x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x,$$

donc, pour tout $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $f(x) = 4 \cos x \cos 2x$.

Ainsi, f peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier, en notant : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4 \cos x \cos 2x$.

Linéarisons : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2(\cos x + \cos 3x)$.

D'après le cours, comme $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \cos 3x$ sont dSE(0) de rayon infini, par combinaison linéaire, f est dSE(0) de rayon infini, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (3x)^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \right) \\ &= 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (3^{2p} + 1) x^{2p}. \end{aligned}$$

On peut considérer que ce dernier résultat constitue la réponse à la question posée. On peut aussi se ramener précisément à une série entière :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (3^{2p} + 1) & \text{si } n \text{ est pair } n = 2p, p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a vu plus haut que le rayon est infini.

g) L'application $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et

$f(x) = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. On peut donc prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier, en notant :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après le cours :

$$\sin x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1},$$

$$\text{d'où, pour tout } x \in \mathbb{R}^* : f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}.$$

De plus, cette dernière égalité est vraie pour $x = 0$, car $f(0) = 1$ et la valeur en 0 de la série entière du second membre est égale à son terme constant, donc égale à 1.

$$\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}.$$

Il est clair que : $R = +\infty$.

6.4 On a, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n} = \frac{1}{(n-1)n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Nous allons calculer les sommes respectives A, B des séries entières $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{(n-1)n}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n-1}$, puis remplacer x par $\frac{2}{5}$, par $\frac{3}{5}$. Il est clair, par la règle de d'Alembert par exemple, que ces deux séries entières sont de rayon égal à 1.

On a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x(-\ln(1-x)) = -x \ln(1-x). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in]-1; 1[$, en utilisant une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(n-1)n}$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \end{aligned}$$

car ces séries entières sont de rayon 1

$$\begin{aligned} &= B(x) - (-\ln(1-x) - x) \\ &= -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x = (1-x) \ln(1-x) + x. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= A\left(\frac{2}{5}\right) + B\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} \ln \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \ln \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \ln \frac{3}{2} + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

6.5 En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=0}^n 3^{\frac{2k}{k!}}$, on a $P_n > 0$

$$\text{et : } \ln P_n = \sum_{k=0}^n \frac{2k}{k!} \ln 3 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{2k}{k!} \right) \ln 3,$$

donc : $\ln P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} \right) \ln 3 = e^2 \ln 3,$

puis, par continuité de l'exponentielle :

$$P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{e^2 \ln 3} = 3^{e^2}.$$

On conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n 3^{\frac{2^k}{k!}} = 3^{e^2}.$

6.6 Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$e^z = -2 \iff e^{x+iy} = -2$$

$$\iff \begin{cases} e^x = 2 \\ y = \text{Arg}(-1) [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln 2 \\ y \equiv \pi [2\pi] \end{cases}.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est : $S = \{ \ln 2 + (\pi + 2k\pi)i ; k \in \mathbb{Z} \}.$

6.7 a) On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \text{ch } y,$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \text{ sh } y.$$

b) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant a) :

$$\begin{aligned} \cos(x + iy) &= \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \text{ch } y - i \sin x \text{sh } y, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} |\cos(x + iy)|^2 &= (\cos x \text{ch } y)^2 + (\sin x \text{sh } y)^2 \\ &= \cos^2 x \text{ch}^2 y + \sin^2 x \text{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x (1 + \text{sh}^2 y) + (1 - \cos^2 x) \text{sh}^2 y = \cos^2 x + \text{sh}^2 y \end{aligned}$$

et

$$|\cos x + \sin(iy)|^2 = |\cos x + i \text{sh } y|^2 = \cos^2 x + \text{sh}^2 y.$$

On conclut : $|\cos(x + iy)| = |\cos x + \sin(iy)|.$

6.8 Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \text{ch } z &= \text{ch}(x + iy) = \text{ch } x \text{ch}(iy) + \text{sh } x \text{sh}(iy) \\ &= \text{ch } x \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} + \text{sh } x \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2} \\ &= \text{ch } x \cos y + i \text{sh } x \sin y, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \text{sh } z &= \text{sh}(x + iy) = \text{sh } x \text{ch}(iy) + \text{ch } x \text{sh}(iy) \\ &= \text{sh } x \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} + \text{ch } x \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2} \\ &= \text{sh } x \cos y + i \text{ch } x \sin y. \end{aligned}$$

d'où :

$$|\text{ch } z| = |\text{sh } z|$$

$$\begin{aligned} \iff (\text{ch } x \cos y)^2 + (\text{sh } x \sin y)^2 \\ = (\text{sh } x \cos y)^2 + (\text{ch } x \sin y)^2 \end{aligned}$$

$$\iff (\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x) \cos^2 y - (\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x) \sin^2 y = 0$$

$$\iff \cos^2 y - \sin^2 y = 0$$

$$\iff 2 \cos^2 y = 1 \iff y \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right].$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation proposée est : $S = \left\{ x + i \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) ; (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \right\}.$

6.9 On a, en passant par les séries entières définissant $\cos, \text{ch}, \sin, \text{sh}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} \right| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2p}}{(2p)!} = \text{ch}(|z|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p z^{2p+1}}{(2p+1)!} \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^p z^{2p+1}}{(2p+1)!} \right| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2p+1}}{(2p+1)!} = \text{sh}(|z|). \end{aligned}$$

6.10 On a :

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} - \sin x \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} \\ &= \cos x \frac{e^{-y} + e^y}{2} + \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2i} \\ &= \cos x \text{ch } y + i \sin x \text{sh } y, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= (\cos x \text{ch } y)^2 + (\sin x \text{sh } y)^2 \\ &= \cos^2 x \text{ch}^2 y + \sin^2 x \text{sh}^2 y \\ &= (1 - \sin^2 x) \text{ch}^2 y + \sin^2 x (\text{ch}^2 y - 1) = \text{ch}^2 y - \sin^2 x \\ &= (1 + \text{sh}^2 y) - (1 - \cos^2 x) = \text{sh}^2 y + \cos^2 x. \end{aligned}$$

Même méthode pour les trois autres formules.

6.11 Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a :

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} - \sin x \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} \\ &= \cos x \frac{e^{-y} + e^y}{2} + \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2i} \\ &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}|1 - \cos z|^2 &= (1 - \cos x \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2 \\ &= 1 - 2 \cos x \operatorname{ch} y + \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= 1 - 2 \cos x \operatorname{ch} y + \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1 - \cos^2 x)(\operatorname{ch}^2 y - 1) \\ &= -2 \cos x \operatorname{ch} y + \cos^2 x + \operatorname{ch}^2 y = (\operatorname{ch} y - \cos x)^2.\end{aligned}$$

Comme $\cos x \leq 1 \leq \operatorname{ch} y$, on a : $\operatorname{ch} y - \cos x \geq 0$, donc :
 $|1 - \cos z| = \operatorname{ch} y - \cos x$.

De même : $|1 + \cos z| = \operatorname{ch} y + \cos x$.

On conclut :

$$A = |1 - \cos z| + |1 + \cos z| = 2 \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z).$$

6.12 a) On a, par développement asymptotique lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \\ &= n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} - n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= n \left[1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - n \left[1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{6} + o(1).\end{aligned}$$

d'où, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |z|$,

et donc, par la règle de d'Alembert : $R = 1$.

b) On a : $a_n = \sqrt[n]{n} \operatorname{ch} n = e^{\frac{1}{n} \ln n} \frac{e^n + e^{-n}}{2} \sim \frac{e^n}{2}$,

puis, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}}{2} \frac{2}{e^n} |z| = e|z|$$

donc, par la règle de d'Alembert : $R = \frac{1}{e}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\ln(|a_n z^n|) &= -n \ln \sqrt{n} + n \ln |z| \\ &= n \left(-\frac{1}{2} \ln n + \ln |z| \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty,\end{aligned}$$

donc : $a_n z^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. On conclut : $R = \infty$.

d) On a, par développement asymptotique lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}a_n &= \tan(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = \tan \left[\pi n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \tan \left[\pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] \\ &= \tan \left[\pi n + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \tan \left[\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n},\end{aligned}$$

d'où, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2(n+1)} \frac{2n}{\pi} |z| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = 1$.

e) On a, pour tout $n \geq 2$:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \ln 2 \leq \ln k \leq \ln n,$$

d'où, en sommant :

$$(n-1) \ln 2 \leq \sum_{k=2}^n \ln k \leq (n-1) \ln n.$$

Comme, pour tout $n \geq 2$:

$$a_n = \ln(n!) = \ln \left(\prod_{k=2}^n k \right) = \sum_{k=2}^n \ln k,$$

on a : $0 \leq (n-1) \ln 2 \leq a_n \leq (n-1) \ln n$.

D'après la règle de d'Alembert, les deux séries entières $\sum_{n \geq 2} (n-1) \ln 2 z^n$ et $\sum_{n \geq 2} (n-1) \ln n z^n$ sont de rayon 1, donc,

par encadrement : $R = 1$.

f) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned}\ln(|a_n z^n|) &= -\ln n \ln \ln n + n \ln |z| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} -\infty & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{donc : } |a_n z^n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

On conclut : $R = 1$.

g) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned}\ln(|a_n z^n|) &= n \ln \frac{n+1}{2n+1} + n \ln |z| \\ &= n \left[\ln \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} + \ln |z| \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} -\infty & \text{si } |z| < 2 \\ +\infty & \text{si } |z| > 2 \end{cases}\end{aligned}$$

(il n'est pas utile d'examiner le cas $|z| = 2$).

$$\text{D'où : } |a_n z^n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 2 \\ +\infty & \text{si } |z| > 2, \end{cases}$$

et on conclut : $R = 2$.

h) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} \ln(|a_n z^n|) &= -\ln n + n \ln |z| \\ &= -\frac{e^n + e^{-n}}{2} + n \ln |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \end{aligned}$$

donc : $a_n z^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On conclut : $R = \infty$.

i) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{3(n+1)} z^{3(n+1)}}{a_{3n} z^{3n}} \right| &= \frac{(n+1)^{3n+3} (3n)!}{(3n+3)! n^{3n}} |z|^3 \\ &= \frac{(n+1)^{3n+3}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)n^{3n}} |z|^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} |z|^3. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} &= \exp \left[3n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \exp \left[3n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] = \exp \left(3 + o(1) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^3, \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \left| \frac{a_{3n+1} z^{3(n+1)}}{a_{3n} z^{3n}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^3}{27} |z|^3.$$

$$\text{Comme : } \frac{e^3}{27} |z|^3 = 1 \iff |z|^3 = \frac{27}{e^3} \iff |z| = \frac{3}{e},$$

$$\text{on conclut : } R = \frac{3}{e}.$$

j) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\text{Si } |z| < 1, \text{ alors } \ln(|n z^{n^2}|) = \ln n + n^2 \ln |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty,$$

$$\text{donc : } n z^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Si } |z| = 1, \text{ alors } |n z^{n^2}| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

On conclut : $R = 1$.

k) Par définition de a_n , on a : $\forall n \geq 1, 0 \leq a_n \leq 9$.

Comme la série entière $\sum_{n \geq 1} 9z^n$ est de rayon 1, on déduit : $R \geq 1$.

D'autre part, on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel (ou, au moins ici, que $\sqrt{2}$ n'est pas décimal), donc la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ ne stationne pas sur 0. Comme les a_n sont des entiers, il en résulte que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0. Ceci montre que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ diverge pour $z = 1$, donc : $R \leq 1$.

On conclut : $R = 1$.

l) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} \ln(|a_n z^n|) &= \ln \left| n^{-E(\sqrt{n})} z^n \right| = -E(\sqrt{n}) \ln n + n \ln |z| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

car $\sqrt{n} - 1 \leq E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$, donc $E(\sqrt{n}) \sim \sqrt{n}$.

$$\text{D'où : } |a_n z^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

(il n'est pas utile d'examiner le cas $|z| = 1$)

et on conclut : $R = 1$.

m) Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\text{Div}(n)$ des diviseurs ≥ 1 de n vérifie :

$$\{1\} \subset \text{Div}(n) \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\text{donc : } 1 \leq S_2(n) \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq n \cdot n^2 = n^3.$$

Comme les séries entières $\sum_{n \geq 1} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n^3 z^n$ sont de rayon 1 (par la règle de d'Alembert, par exemple), on conclut, par encadrement : $R = 1$.

n) On a, par développement asymptotique lorsque l'entier n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \exp \left[n^3 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \exp \left[n^3 \left(\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \right] = \exp \left[n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= \exp \left[n + O\left(\frac{1}{n}\right) + n \ln |z| \right] \\ &= \exp \left[n \left(1 + \ln |z| \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty & \text{si } |z| < e^{-1} \\ +\infty & \text{si } |z| > e^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

(il n'est pas utile d'examiner le cas $|z| = e^{-1}$)

et on conclut : $R = e^{-1}$.

o) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \frac{t^n}{3} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^n} dt \leq \int_0^1 t^n dt,$$

$$\text{d'où : } 0 \leq \frac{1}{3(n+1)} \leq |a_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme les séries entières $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3(n+1)} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} z^n$ sont de rayon 1, par encadrement, on conclut : $R = 1$.

p) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall k \in \{0, \dots, n\}, 1 \leq e^{\sqrt{k}} \leq e^{\sqrt{n}}$,

d'où, en sommant : $(n+1) \leq \sum_{k=0}^n e^{\sqrt{k}} \leq (n+1)e^{\sqrt{n}}$,

puis : $0 \leq \underbrace{(n+1)e^{-n}}_{\text{noté } b_n} \leq a_n \leq \underbrace{(n+1)e^{\sqrt{n}}e^{-n}}_{\text{noté } c_n}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{b_{n+1}z^{n+1}}{b_n z^n} \right| = \frac{(n+2)e^{-(n+1)}}{(n+1)e^{-n}} |z| \xrightarrow[n \infty]{} e^{-1} |z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R_b = e$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ fixé :

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n} \right| &= \frac{(n+2)e^{-\sqrt{n+1}}e^{-(n+1)}}{(n+1)e^{\sqrt{n}}e^{-n}} |z| \\ &= \frac{n+2}{n+1} e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} e^{-1} |z| \\ &= \frac{n+2}{n+1} e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} e^{-1} |z| \xrightarrow[n \infty]{} e^{-1} |z|, \end{aligned}$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R_c = e$.

Par encadrement, on conclut : $R = e$.

6.13

a) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{a^n}{n+b^n}$.

On a : $a_n \sim_{n \infty} \frac{a^n}{n}$ si $b \leq 1$, $a_n \sim_{n \infty} \frac{a^n}{b^n}$ si $b > 1$. La série

entière $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n} z^n$ a le même rayon que sa série entière dérivée

$\sum_{n \geq 1} a^n z^{n-1}$ qui, par produit par la variable z , a le même

rayon que la série entière $\sum_{n \geq 1} a^n z^n$, qui est de rayon $\frac{1}{a}$ (série géométrique).

La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{b^n} z^n$ est de rayon $\frac{b}{a}$ (il s'agit de la série géométrique).

On conclut, par théorème d'équivalence :

$$R = \frac{1}{a} \text{ si } b \leq 1, \quad R = \frac{b}{a} \text{ si } b > 1,$$

ou encore : $R = \frac{1}{a} \text{Max}(1, b)$.

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{a^{n^2}}{(2n)!}$.

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{a^{(n+1)^2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{a^{n^2}} |z|$$

$$= \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)} |z| \xrightarrow[n \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

On conclut, d'après la règle de d'Alembert :

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \leq 1 \\ 0 & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

c) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = a^{n!}$.

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$|a_n z^n| = \exp(n! \ln |a| + n \ln |z|)$$

$$\xrightarrow[n \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ 0 & \text{si } |a| = 1 \text{ et } |z| < 1 \\ 1 & \text{si } |a| = 1 \text{ et } |z| = 1 \\ +\infty & \text{si } |a| > 1. \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } R = \begin{cases} +\infty & \text{si } |a| < 1 \\ 1 & \text{si } |a| = 1 \\ 0 & \text{si } |a| > 1. \end{cases}$$

d) Notons, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$: $u_n = a_n z^{n!}$.

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$|u_n| = \exp(n \ln |a| + n! \ln |z|) \xrightarrow[n \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

(l'examen du cas $|z| = 1$ est inutile).

On déduit : $R = 1$.

e) Notons, pour tout $n \geq 2$: $a_n = e^{(\ln n)^a}$.

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$|a_n z^n| = \exp((\ln n)^a + n \ln |z|) \xrightarrow[n \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

(l'examen du cas $|z| = 1$ est inutile).

On conclut : $R = 1$.

6.14

1) Notons R' le rayon de la série entière $\sum_n a_n^2 z^n$.

On a, pour tout entier n et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|a_n^2 z^n| = (|a_n| |z|^{\frac{1}{2}})^2.$$

• Si $|z|^{\frac{1}{2}} < R$, alors $|a_n| |z|^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \infty]{} 0$,

donc $|a_n^2 z^n| \xrightarrow[n \infty]{} 0$, d'où : $|z| \leq R'$.

• Si $|z|^{\frac{1}{2}} > R$, alors la suite $(|a_n| |z|^{\frac{1}{2}})_n$ n'est pas bornée, donc la suite $(|a_n^2 z^n|)_n$ n'est pas bornée, d'où $|z| \geq R'$.

On a montré : $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R^2 \implies |z| \leq R' \\ |z| > R^2 \implies |z| \geq R' \end{cases}$
d'où : $R^2 \leq R'$ et $R^2 \geq R'$,

et on conclut : $R' = R^2$.

2) Notons R'' le rayon de la série entière $\sum_n a_n z^{2n}$.

On a, pour tout entier n et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$a_n z^{2n} = a_n (z^2)^n.$$

• Si $|z^2| < R$, alors $a_n |z^2|^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc : $|z| \leq R''$.

• Si $|z^2| > R$, alors la suite $(a_n (z^2)^n)_n$ n'est pas bornée, donc la suite $(a_n z^{2n})_n$ n'est pas bornée, d'où : $|z| \geq R''$.

On a montré : $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R^{\frac{1}{2}} \implies |z| \leq R'' \\ |z| > R^{\frac{1}{2}} \implies |z| \geq R'' \end{cases}$

d'où : $R^{\frac{1}{2}} \leq R''$ et $R^{\frac{1}{2}} \geq R''$,

et on conclut : $R'' = R^{\frac{1}{2}}$.

6.15 1) Supposons $R > 0$.

Il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \rho < R$, par exemple : $\rho = \frac{R}{2}$.

Puisque $|\rho| < R$, la suite $(a_n \rho^n)_{n \geq 1}$ est bornée. Il existe donc $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \geq 1, |a_n \rho^n| \leq C$, d'où :

$$\forall n \geq 1, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\rho} C^{\frac{1}{n}}.$$

Comme $C^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, la suite $(C^{\frac{1}{n}})_{n \geq 1}$ est bornée.

Il existe donc $D \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \geq 1, C^{\frac{1}{n}} \leq D$.

On a alors : $\forall n \geq 1, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{D}{\rho}$,

ce qui montre que la suite $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n \geq 1}$ est majorée.

2) Réciproquement, supposons que la suite $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n \geq 1}$ est majorée.

Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \geq 1, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq M$.

On a alors : $\forall n \geq 1, |a_n| \leq M^n$.

Comme la série entière $\sum_{n \geq 1} M^n z^n$ est de rayon $\frac{1}{M}$ (série géométrique), il en résulte que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ est de rayon $\geq \frac{1}{M}$, donc de rayon 0.

6.16 a) • On a : $\frac{1}{n(n+2)} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$, donc, par la règle de d'Alembert et le théorème d'équivalence : $R = 1$.

• Utilisons une décomposition en éléments simples du coefficient : $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$.

On a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) x^n \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n}_{\text{notée } A(x)} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n}_{\text{notée } B(x)} \end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1.

D'après le cours : $A(x) = -\ln(1-x)$.

On a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} x^2 B(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x) - \left(x + \frac{x^2}{2} \right), \end{aligned}$$

d'où, pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$:

$$B(x) = \frac{1}{x^2} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right).$$

Puis :

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2x^2} \left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \right) \ln(1-x) + \frac{2+x}{4x} \\ &= \frac{1-x^2}{2x^2} \ln(1-x) + \frac{2+x}{4x}. \end{aligned}$$

Enfin : $S(0) = 0$, car $S(0)$ est le terme constant de la série entière définissant S .

Réponse : $R = 1$ et, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{2x^2} \ln(1-x) + \frac{2+x}{4x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b) • On a : $\frac{1}{n^3 - n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}$, donc, par la règle de d'Alembert et le théorème d'équivalence : $R = 1$.

• Utilisons une décomposition en éléments simples du coefficient $\frac{1}{n^3 - n}$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\frac{1}{X^3 - X} = \frac{1}{(X-1)X(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X+1}.$$

Par multiplication par $X-1$ puis remplacement de X par 1, on obtient : $a = \frac{1}{2}$.

Par multiplication par X puis remplacement de X par 0 , on obtient : $b = -1$.

Par multiplication par $X + 1$ puis remplacement de X par -1 , on obtient : $c = \frac{1}{2}$.

On a donc : $\frac{1}{X^3 - X} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{2}{X} + \frac{1}{X+1} \right)$.

D'où, pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3 - n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \end{aligned}$$

car ces trois séries entières sont de rayon 1

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2x} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \frac{x}{2} (-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x) - x) \\ &\quad + \frac{1}{2x} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= -\left(\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{2x} \right) \ln(1-x) - \frac{1}{2} + \frac{3x}{4}. \end{aligned}$$

Enfin, $S(0) = 0$, car $S(0)$ est le terme constant de la série entière définissant S .

Réponse : $R = 1$, $S(0) = 0$ et : $\forall x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$,

$$S(x) = -\left(\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{2x} \right) \ln(1-x) - \frac{1}{2} + \frac{3x}{4}.$$

c) • On a : $\frac{n + (-1)^{n+1}}{n + (-1)^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$, donc, d'après la règle de d'Alembert et le théorème d'équivalence : $R = 1$.

• Soit $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\sum_{n=2}^{2N+1} \frac{n + (-1)^{n+1}}{n + (-1)^n} x^n = \sum_{p=1}^N \frac{2p-1}{2p+1} x^{2p} + \sum_{p=1}^N \frac{2p+2}{2p} x^{2p+1}.$$

Comme les trois séries entières qui interviennent sont de rayon 1, on déduit, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2p-1}{2p+1} x^{2p} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2p+2}{2p} x^{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{2p+1} \right) x^{2p} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{p} \right) x^{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p} - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2p+1} + \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p+1} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{p} \end{aligned}$$

car ces quatre séries entières sont de rayon 1

$$\begin{aligned} &= -1 - x + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^p}{p} \\ &= -1 - x + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - x \right) \\ &\quad + x(-\ln(1-x^2)) \\ &= \frac{2-2x+x^2}{1-x} - \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} - x \ln(1-x^2). \end{aligned}$$

Et : $S(0) = 0$, car $S(0)$ est le terme constant de la série entière définissant S .

Réponse : $R = 1$, $S(0) = 0$ et : $\forall x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$,

$$S(x) = \frac{2-2x+x^2}{1-x} - \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} - x \ln(1-x^2).$$

d) • Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{n^4 + n^2 + 1}{n!}$.

On a : $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^4}{n!}$.

D'où, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(n+1)^4 n!}{(n+1)! n^4} |z| = \frac{(n+1)^3}{n^4} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert et le théorème d'équivalence, on conclut : $R = \infty$.

• La série entière proposée ressemble à celle de l'exponentielle :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Dans le numérateur $n^4 + n^2 + 1$, faisons apparaître $n(n-1)(n-2)(n-3)$:

$$\begin{aligned} &n^4 + n^2 + 1 \\ &= \underbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)}_{\text{noté } \alpha_n} + (6n^3 - 11n^2 + 6n) + n^2 + 1 \\ &= \alpha_n + 6n^3 - 10n^2 + 6n + 1 \\ &= \alpha_n + 6 \left[\underbrace{n(n-1)(n-2)}_{\text{noté } \beta_n} + 3n^2 - 2n \right] - 10n^2 + 6n + 1 \\ &= \alpha_n + 6\beta_n + 8n^2 - 6n + 1 \\ &= \alpha_n + 6\beta_n + 8 \left[\underbrace{n(n-1)}_{\text{noté } \gamma_n} + n \right] - 6n + 1 \\ &= \alpha_n + 6\beta_n + 8\gamma_n + 2n + 1. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4 + n^2 + 1}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n + 6\beta_n + 8\gamma_n + 2n + 1) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \frac{z^n}{n!} + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \frac{z^n}{n!} + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \frac{z^n}{n!} \\ &\quad + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

car toutes ces séries entières sont de rayon infini. Mais :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} &= e^z, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{z^n}{n!} &= z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = z e^z, \end{aligned}$$

et, de même :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \frac{z^n}{n!} &= z^2 e^z, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2) \frac{z^n}{n!} &= z^3 e^z, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) \frac{z^n}{n!} &= z^4 e^z. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} S(z) &= z^4 e^z + 6z^3 e^z + 8z^2 e^z + 2z e^z + e^z \\ &= (z^4 + 6z^3 + 8z^2 + 2z + 1) e^z. \end{aligned}$$

Réponse : $R = \infty$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$S(z) = (z^4 + 6z^3 + 8z^2 + 2z + 1) e^z.$$

e) • Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$u_p = \left| \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!} \right| > 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{p+1}}{u_p} &= \frac{|x|^{4p+5}}{(4p+5)!} \frac{(4p+1)!}{|x|^{4p+1}} \\ &= \frac{|x|^4}{(4p+2) \cdots (4p+5)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

donc, d'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_p converge.

On conclut : $R = \infty$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^N \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2 \sum_{p=0}^{2N} \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!},$$

car les termes d'indice k pair se doublent, et les termes d'indice k impair s'éliminent.

Puisque les séries entières envisagées sont de rayon infini, on déduit, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x + \sin x). \end{aligned}$$

Réponse : $R = \infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x + \sin x).$$

f) • Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{n+1}{(n+2)n!} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}.$$

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| &= \frac{(n+2)^2}{(n+3)!} \frac{(n+2)!}{(n+1)^2} |z| \\ &= \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2(n+3)} |z| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = \infty$.

• On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} z^n,$$

donc, en multipliant par z^2 :

$$\begin{aligned} &z^2 S(z) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} z^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)^2}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n!} z^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1) - n + 1}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} z^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n!} z^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{(n-2)!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

$$= z^2 e^z - z(e^z - 1) + (e^z - 1 - z)$$

$$= (z^2 - z + 1)e^z - 1.$$

On conclut : $R = \infty$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$S(z) = (z^2 - z + 1)e^z - 1.$$

g) • Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \left(\frac{2 + (-1)^n}{3 + (-1)^n} \right)^n$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_{2p} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2p}, \quad a_{2p+1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2p+1}.$$

On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} z^{2p} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2p} z^{2p} = \left(\left(\frac{3}{4} \right)^2 z^2 \right)^p,$$

donc la série entière $\sum_{p \geq 0} a_{2p} z^{2p}$ est de rayon $\frac{4}{3}$.

De même :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} z^{2p+1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2p+1} z^{2p+1} = \left(\frac{z}{2} \right)^{2p+1},$$

donc la série entière $\sum_{p \geq 0} a_{2p+1} z^{2p+1}$ est de rayon 2.

Il en résulte, par addition de deux séries entières de rayons différents : $R = \min \left(\frac{4}{3}, 2 \right) = \frac{4}{3}$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{4}{3}$.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\sum_{n=0}^{2N+1} \left(\frac{2 + (-1)^n}{3 + (-1)^n} \right)^n z^n = \sum_{p=0}^N \left(\frac{3}{4} \right)^{2p} z^{2p} + \sum_{p=0}^N \left(\frac{1}{2} \right)^{2p+1} z^{2p+1}$$

d'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{2p} z^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2p+1} z^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\left(\frac{3}{4} z \right)^2 \right]^p + \frac{z}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} z \right)^2 \right]^p \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4} z \right)^2} + \frac{z}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} z \right)^2} \\ &= \frac{16}{16 - 9z^2} + \frac{2z}{4 - z^2}. \end{aligned}$$

Réponse : $R = \frac{4}{3}$, et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{4}{3}$:

$$S(z) = \frac{16}{16 - 9z^2} + \frac{2z}{4 - z^2}.$$

h) • La série entière envisagée est la somme des trois séries entières :

$$\sum_{p \geq 0} z^{3p}, \quad \sum_{p \geq 0} 2^p z^{3p+1}, \quad \sum_{p \geq 0} 3^p z^{3p+2}.$$

La série entière $\sum_{p \geq 0} z^{3p}$ est de rayon 1, car c'est une série géométrique en z^3 .

La série entière $\sum_{p \geq 0} 2^p z^{3p+1}$ est de rayon $\left(\frac{1}{2} \right)^{1/3}$, car c'est une série géométrique en $2z^3$.

La série entière $\sum_{p \geq 0} 3^p z^{3p+2}$ est de rayon $\left(\frac{1}{3} \right)^{1/3}$, car c'est une série géométrique en $3z^3$.

Comme ces trois rayons sont deux à deux différents, on a, d'après le cours :

$$R = \min \left(1, \left(\frac{1}{2} \right)^{1/3}, \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3} \right) = \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3}.$$

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3}$.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{3N+2} a_n z^n &= \sum_{p=0}^N a_{3p} z^{3p} + \sum_{p=0}^N a_{3p+1} z^{3p+1} + \sum_{p=0}^N a_{3p+2} z^{3p+2} \\ &= \sum_{p=0}^N z^{3p} + \sum_{p=0}^N 2^p z^{3p+1} + \sum_{p=0}^N 3^p z^{3p+2}. \end{aligned}$$

D'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{p=0}^{+\infty} z^{3p} + \sum_{p=0}^{+\infty} 2^p z^{3p+1} + \sum_{p=0}^{+\infty} 3^p z^{3p+2} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (z^3)^p + z \sum_{p=0}^{+\infty} (2z^3)^p + z^2 \sum_{p=0}^{+\infty} (3z^3)^p \\ &= \frac{1}{1 - z^3} + z \frac{1}{1 - 2z^3} + z^2 \frac{1}{1 - 3z^3}. \end{aligned}$$

Réponse : $R = \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3}$, et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$|z| < \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3} : S(z) = \frac{1}{1 - z^3} + \frac{z}{1 - 2z^3} + \frac{z^2}{1 - 3z^3}.$$

6.17 a) 1) Existence :

Récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, on a : $(1 + \sqrt{2})^0 = 1 = a_0 + b_0\sqrt{2}$,
avec $a_0 = 1 \in \mathbb{N}$, $b_0 = 0 \in \mathbb{N}$.
- Supposons qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2})^{n+1} &= (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^n \\ &= (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

En notant $a_{n+1} = a_n + 2b_n \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} = a_n + b_n \in \mathbb{N}$, on a bien : $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{n+1}$,
ce qui établit la propriété pour $n + 1$.

On a montré, par récurrence sur n , qu'il existe un couple de suites $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$ à termes dans $\mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n.$$

2) Unicité :

Supposons que $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}), ((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}})$ conviennent.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n = \alpha_n + \beta_n\sqrt{2},$$

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{(a_n - \alpha_n)}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{(\beta_n - b_n)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Si $\beta_n - b_n \neq 0$, alors : $\sqrt{2} = \frac{a_n - \alpha_n}{\beta_n - b_n} \in \mathbb{Q}$, contradiction,
car on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = b_n$,

puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = a_n$,

donc $((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}) = ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$,
ce qui montre l'unicité.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}a_n + b_n\sqrt{2} &= (1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p + \sqrt{2} \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p,\end{aligned}$$

donc, d'après l'unicité dans la question a) :

$$a_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p, \quad b_n = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p.$$

On déduit, en utilisant à nouveau la formule du binôme de Newton en sens inverse :

$$\begin{aligned}a_n - b_n\sqrt{2} &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p - \sqrt{2} \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sqrt{2}^k = (1 - \sqrt{2})^n.\end{aligned}$$

c) D'après a) et b), on a, par addition et soustraction, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n), \\ b_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}}((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n).\end{aligned}$$

d) 1) Rayon :

D'après c), comme $|1 - \sqrt{2}| < 1$, et $|1 + \sqrt{2}| > 1$,

$$\text{on a : } a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})^n, \quad b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^n,$$

donc, par théorème d'équivalence, les deux séries entières envisagées ont le même rayon que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} (1 + \sqrt{2})^n z^n, \text{ donc : } R = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

2) Somme :

Notons S_a et S_b les sommes des deux séries entières proposées.

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$:

$$\begin{aligned}S_a(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n) z^n \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} ((1 + \sqrt{2})z)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} ((1 - \sqrt{2})z)^n \right] \\ &\quad \text{car ces deux séries entières sont de rayons } \geq R \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - (1 + \sqrt{2})z} + \frac{1}{1 - (1 - \sqrt{2})z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - z - z\sqrt{2}} + \frac{1}{1 - z + z\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(1 - z)}{(1 - z)^2 - 2z^2} = \frac{1 - z}{1 - 2z - z^2}.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}S_b(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}}((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n) z^n \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1 - (1 + \sqrt{2})z} - \frac{1}{1 - (1 - \sqrt{2})z} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2z\sqrt{2}}{(1 - z)^2 - 2z^2} = \frac{z}{1 - 2z - z^2}.\end{aligned}$$

6.18

a) Le trinôme $T = X^2 - X + 2$ a pour discriminant $\Delta = -7 < 0$, T ne s'annule en aucun point, donc l'application $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 2}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Passons par les nombres complexes. Le trinôme T admet deux zéros simples, complexes non réels :

$$x_1 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}.$$

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\frac{1}{X^2 - X + 2} = \frac{1}{(X - x_1)(X - x_2)} = \frac{\alpha_1}{X - x_1} + \frac{\alpha_2}{X - x_2}.$$

En multipliant par $X - x_1$, puis en remplaçant X par x_1 , on obtient : $\alpha_1 = \frac{1}{x_1 - x_2}$.

En multipliant par $X - x_2$, puis en remplaçant X par x_2 , on obtient : $\alpha_2 = \frac{1}{x_2 - x_1}$.

$$\text{D'où : } \frac{1}{X^2 - X + 2} = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(-\frac{1}{X - x_1} + \frac{1}{X - x_2} \right).$$

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\frac{1}{x_1 - x} - \frac{1}{x_2 - x} \right) \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} - \frac{1}{x_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} \right). \end{aligned}$$

De plus : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$.

On a donc, en utilisant la série géométrique, pour tout $x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\frac{1}{x_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_1} \right)^n - \frac{1}{x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_2} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) x^n. \end{aligned}$$

Notons $\alpha = \text{Arg}(x_1) \in]-\pi; \pi]$. On a donc :

$$x_1 = \sqrt{2}e^{i\alpha}, \quad x_2 = \overline{x_1} = \sqrt{2}e^{-i\alpha},$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{2}(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) = -2i\sqrt{2}\sin\alpha.$$

D'où, pour tout $x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{-2i\sqrt{2}\sin\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(\sqrt{2}e^{i\alpha})^{n+1}} - \frac{1}{(\sqrt{2}e^{-i\alpha})^{n+1}} \right) x^n \\ &= -\frac{1}{2i\sqrt{2}\sin\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}} (e^{-i(n+1)\alpha} - e^{i(n+1)\alpha}) x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sin\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}} (\sin(n+1)\alpha) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-\frac{n}{2}-1} \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} x^n. \end{aligned}$$

Déterminons le rayon R de cette série entière.

On a :

$$\forall x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sin\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n+1)\alpha \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^n,$$

ce qui montre : $R \geq \sqrt{2}$.

D'autre part, dans $\mathbb{C}$:

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{(z - x_1)(z - x_2)} \right| \xrightarrow{z \rightarrow x_1} +\infty,$$

donc : $R \leq \sqrt{2}$.

On conclut : $R = \sqrt{2}$.

On peut aussi utiliser le résultat de l'exercice 6.33 a), d'après lequel la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin(n+1)\alpha z^n$ est de rayon 1. Par

le changement de variable $z = \frac{x}{\sqrt{2}}$, la série entière étudiée est de rayon : $R = \sqrt{2}$.

b) En notant $P = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$, on remarque : $P(-1) = 0$. On en déduit la factorisation de P :

$$P = (X + 1)(X^2 - 6X + 9) = (X + 1)(X - 3)^2.$$

L'application

$$f : x \mapsto \frac{16}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \frac{16}{(x + 1)(x - 3)^2}$$

est définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$, donc (au moins) sur $] -1; 1[$.

Par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\frac{16}{(X + 1)(X - 3)^2} = \frac{a}{(X - 3)^2} + \frac{b}{X - 3} + \frac{c}{X + 1}.$$

En multipliant par $(X - 3)^2$, puis en remplaçant X par 3, on obtient : $a = 4$.

En multipliant par $X + 1$, puis en remplaçant X par -1 , on obtient : $c = 1$.

En multipliant par X puis en faisant tendre X vers l'infini, on obtient : $0 = b + c$, d'où $b = -1$.

D'où la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{16}{(X + 1)(X - 3)^2} = \frac{4}{(X - 3)^2} - \frac{1}{X - 3} + \frac{1}{X + 1}.$$

Puis, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{(x-3)^2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{4}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{3}\right)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} + \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Rappelons la série entière géométrique :

$$\forall t \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n,$$

d'où, en dérivant :

$$\forall t \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) t^n.$$

On a donc, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9} \frac{n+1}{3^n} + \frac{1}{3} \frac{1}{3^n} + (-1)^n \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4n+7}{9 \cdot 3^n} + (-1)^n \right) x^n. \end{aligned}$$

On a : $|a_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$, donc, par théorème d'équivalence, le rayon R de cette série entière est : $R = 1$.

c) L'application $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$, puisque le discriminant du trinôme $1+x+x^2$ est $\Delta = -3 < 0$.

On remarque que, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x+x^2) = \ln \frac{1-x^3}{1-x} \\ &= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^3)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{1}{n}$, si $3 \nmid n$, et, si $n = 3p$, $p \in \mathbb{N}^*$, $a_n = -\frac{1}{p} + \frac{1}{3p} = -\frac{2}{3p}$.

Puisque la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est bornée, on a : $R \geq 1$.

Puisque la série $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ diverge, on a : $R \leq 1$.

On conclut : $R = 1$.

d) Le trinôme $X^2 + 2X + 5$ a pour discriminant $\Delta = -16 < 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5 > 0$.

Il en résulte que l'application $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 5)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Nous allons former le DSE(0) de f' , puis primitiver pour obtenir le DSE(0) de f .

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}.$$

Passons par les nombres complexes.

Le trinôme $X^2 + 2X + 5$ admet deux zéros simples, complexes non réels :

$$x_1 = -1 + 2i, \quad x_2 = -1 - 2i.$$

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\frac{2X+2}{X^2+2X+5} = \frac{2X+2}{(X-x_1)(X-x_2)} = \frac{\alpha_1}{X-x_1} + \frac{\alpha_2}{X-x_2}.$$

En multipliant par $X - x_1$, puis en remplaçant X par x_1 , on obtient :

$$\alpha_1 = \frac{2x_1+2}{x_1-x_2} = \frac{2(-1+2i)+2}{4i} = 1,$$

puis : $\alpha_2 = \overline{\alpha_1} = 1$.

On a donc : $\frac{2X+2}{X^2+2X+5} = \frac{1}{X-x_1} + \frac{1}{X-x_2}$,

d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} = -\frac{1}{x_1} \frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} - \frac{1}{x_2} \frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}.$$

Comme $|x_1| = |x_2| = \sqrt{5}$, on a, pour tout $x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$, par utilisation de la série géométrique :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_1}\right)^n - \frac{1}{x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) x^n. \end{aligned}$$

Notons $\alpha = \text{Arg } x_1 \in]-\pi; \pi]$.

On a donc : $x_1 = \sqrt{5} e^{i\alpha}$, $x_2 = \sqrt{5} e^{-i\alpha}$,

d'où, pour tout $x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}^{n+1}} (e^{i(n+1)\alpha} + e^{-i(n+1)\alpha}) x^n \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1)\alpha}{\sqrt{5}^{n+1}} x^n. \end{aligned}$$

Comme dans l'exercice a), le rayon de cette série entière est $\sqrt{5}$.

Par primitivation, on en déduit que f est dSE(0), de rayon $\sqrt{5}$, et que, pour tout $x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1)\alpha}{(n+1)\sqrt{5}^{n+1}} x^{n+1} \\ &= \ln 5 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cos n\alpha}{n\sqrt{5}^n} x^n. \end{aligned}$$

On peut considérer que ce dernier résultat est la réponse à la question posée. On peut aussi se ramener précisément à une série entière :

$$\forall x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n ,$$

$$\text{où } a_0 = \ln 5 \text{ et } a_n = -\frac{2 \cos n\alpha}{n\sqrt{5}^n}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

e) L'application $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(2+x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2+x)^2} = \frac{1}{x^2+4x+5}.$$

Nous allons former le DSE(0) de f' , puis primitiver pour obtenir le DSE(0) de f .

Le trinôme X^2+4X+5 a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$, donc ce trinôme admet deux zéros simples, complexes non réels : $x_1 = -2+i$, $x_2 = -2-i$.

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\frac{1}{X^2+4X+5} = \frac{1}{(X-x_1)(X-x_2)} = \frac{\alpha_1}{X-x_1} + \frac{\alpha_2}{X-x_2}.$$

En multipliant par $X-x_1$, puis en remplaçant X par x_1 , on obtient : $\alpha_1 = \frac{1}{x_1-x_2}$.

En multipliant par $X-x_2$, puis en remplaçant X par x_2 , on obtient : $\alpha_2 = \frac{1}{x_2-x_1}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^2+4X+5} &= \frac{1}{x_1-x_2} \left(\frac{1}{X-x_1} - \frac{1}{X-x_2} \right) \\ &= \frac{1}{x_1-x_2} \left(-\frac{1}{x_1} \frac{1}{1-\frac{X}{x_1}} + \frac{1}{x_2} \frac{1}{1-\frac{X}{x_2}} \right). \end{aligned}$$

On a : $|x_1| = |x_2| = \sqrt{5}$.

D'où, pour tout $x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$, par utilisation de la série géométrique :

$$f'(x) = \frac{1}{x_1-x_2} \left(-\frac{1}{x_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_1} \right)^n + \frac{1}{x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_2} \right)^n \right)$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{x_1^{n+1}} + \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) x^n.$$

Notons $\alpha = \operatorname{Arg} x_1 \in]-\pi; \pi]$. On a donc :

$$x_1 = \sqrt{5} e^{i\alpha}, \quad x_2 = \sqrt{5} e^{-i\alpha}, \quad x_1 - x_2 = 2i\sqrt{5} \sin \alpha,$$

et, pour tout $x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2i\sqrt{5} \sin \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}}{\sqrt{5}^{n+1}} x^n \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{5} \sin \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2i \sin(n+1)\alpha}{\sqrt{5}^{n+1}} x^n \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sqrt{5}^{n+2}} x^n. \end{aligned}$$

D'après un théorème du cours, par primitivation, f est dSE(0), de rayon $\sqrt{5}$, et, pour tout $x \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sqrt{5}^{n+2}} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \operatorname{Arctan} 2 + \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{5}^{n+1}} x^n. \end{aligned}$$

Comme dans l'exercice a), le rayon de cette série entière est : $R = \sqrt{5}$.

f) L'application $f : x \mapsto \sin x \operatorname{ch} x$ est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x$ sont dSE(0) de rayons infinis, par produit de Cauchy, f est dSE(0) de rayon infini.

1^{re} méthode : Utilisation de fonctions circulaires ou hyperboliques de variable complexe :

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \operatorname{sh}(ix),$$

d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -i \operatorname{sh}(ix) \operatorname{ch} x \\ &= -i \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(ix+x) + \operatorname{sh}(ix-x)) \\ &= -\frac{i}{2} (\operatorname{sh}((i+1)x) + \operatorname{sh}((i-1)x)) \\ &= -\frac{i}{2} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{((i+1)x)^{2p+1}}{(2p+1)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{((i-1)x)^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \\ &= -\frac{i}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(i+1)^{2p+1} + (i-1)^{2p+1}}{(2p+1)!} x^{2p+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2p+1} + (-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{2p+1}}{(2p+1)!} x^{2p+1} \\
&= -\frac{i}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^{2p+1}}{(2p+1)!} \left(e^{i(2p+1)\frac{\pi}{4}} - e^{-i(2p+1)\frac{\pi}{4}} \right) x^{2p+1} \\
&= -\frac{i}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p \sqrt{2}}{(2p+1)!} \left(2i \sin \left((2p+1) \frac{\pi}{4} \right) \right) x^{2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p \sqrt{2}}{(2p+1)!} \sin \left((2p+1) \frac{\pi}{4} \right) x^{2p+1}.
\end{aligned}$$

2^e méthode : Utilisation de l'exponentielle complexe :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) = \sin x \operatorname{ch} x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{4i} (e^{(i+1)x} + e^{(i-1)x} - e^{(1-i)x} - e^{-(1+i)x}) \\
&= \frac{1}{4i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i+1)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i-1)^n x^n}{n!} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1-i)^n x^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} ((1+i)^n + (-1+i)^n - (1-i)^n - (-1-i)^n) x^n \\
&= \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left((\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n + (-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^n \right. \\
&\quad \left. - (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^n - (-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n \right) x^n \\
&= \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} (e^{in\frac{\pi}{4}} - (-1)^n e^{in\frac{\pi}{4}} + (-1)^n e^{-in\frac{\pi}{4}} - e^{-in\frac{\pi}{4}}) x^n \\
&= \frac{1}{4i} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^{2p+1}}{(2p+1)!} (2e^{i(2p+1)\frac{\pi}{4}} - 2e^{-i(2p+1)\frac{\pi}{4}}) x^{2p+1}
\end{aligned}$$

car les termes d'indices pairs sont tous nuls

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4i} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p \sqrt{2}}{(2p+1)!} 4i \sin \left((2p+1) \frac{\pi}{4} \right) x^{2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p \sqrt{2}}{(2p+1)!} \sin \left((2p+1) \frac{\pi}{4} \right) x^{2p+1}.
\end{aligned}$$

On a vu, au début de la solution, que le rayon de la série entière obtenue est $R = +\infty$.

g) L'application $f : x \mapsto \left(\frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} \right)^2$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

De plus : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{x^2/2}{x^2} \right)^2 = \frac{1}{4}$.

On peut donc compléter f par continuité en 0, en posant $f(0) = \frac{1}{4}$.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} \right)^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 x - 2 \operatorname{ch} x + 1}{x^4} \\
&= \frac{1}{x^4} \left(\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1) - 2 \operatorname{ch} x + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2x^4} (\operatorname{ch} 2x - 4 \operatorname{ch} x + 3),
\end{aligned}$$

puis, en utilisant le DSE(0) de ch , qui est de rayon infini :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2x^4} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{2p}}{(2p)!} - 4 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + 3 \right) \\
&= \frac{1}{2x^4} \left[1 + 2x^2 + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{2^{2p} x^{2p}}{(2p)!} - 4 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \right) + 3 \right] \\
&= \frac{1}{2x^4} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{2^{2p} - 4}{(2p)!} x^{2p} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{2^{2p-1} - 2}{(2p)!} x^{2p-4} \\
&= \sum_{q=p-2}^{+\infty} \frac{2^{2(q+2)-1} - 2}{(2(q+2))!} x^{2q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{2^{2q+3} - 2}{(2q+4)!} x^{2q}.
\end{aligned}$$

On peut considérer que ce dernier résultat constitue la réponse à la question posée. On peut aussi se ramener précisément à une série entière :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} \frac{2^{2q+3} - 2}{(2q+4)!} & \text{si } n \text{ est pair, } n = 2q, \quad q \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a vu plus haut que le rayon de cette série entière est infini.

h) L'application

$$g : t \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $] -1; +\infty[- \{0\}$, et :

$$g(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 = g(0),$$

donc g est continue en 0.

Ainsi, g est continue sur $] -1; +\infty[$.

L'application $f : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \int_0^x g(t) dt$ est donc définie (au moins) sur $] -1; +\infty[$.

On a, en utilisant le DSE(0) de $t \mapsto \ln(1+t)$, qui est de rayon 1, pour tout $t \in]-1; 1[\cup]0; 1[$:

$$g(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n.$$

De plus, $g(0) = 1$, et la valeur de la dernière série entière en 0 est égale à 1, car c'est le terme constant de cette série entière.

On a donc : $\forall t \in]-1; 1[\cup]0; 1[$, $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n$.

D'après le cours, il en résulte que f , qui est la primitive de g telle que $f(0) = 0$ est dSE(0), de rayon ≥ 1 , et on a, pour tout $x \in]-1; 1[\cup]0; 1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n.$$

Il est clair, par la règle de d'Alembert par exemple, que cette dernière série entière est de rayon 1.

i) Considérons l'application

$$g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{e^t - 1 - t}{t^2}.$$

On a, pour t tendant vers 0, par développement limité :

$$g(t) = \frac{1}{t^2} \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) - 1 - t \right] = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

On peut donc compléter g par continuité en 0, en posant $g(0) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, l'application, encore notée g :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_{2x}^{3x} g(t) dt$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3g(3x) - 2g(2x).$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 3 \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{(3x)^2} - 2 \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{(2x)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3x^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - 1 - 3x \right) - \frac{1}{2x^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 1 - 2x \right) \\ &= \frac{1}{3x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} x^n - \frac{1}{2x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{(n+2)!} x^n. \end{aligned}$$

De plus, comme $f'(0) = g(0) = \frac{1}{2}$ et que le terme constant de la dernière série entière est aussi égal à $\frac{1}{2}$, l'égalité est aussi valable pour $x = 0$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{(n+2)!} x^n.$$

Ceci montre que f' est dSE(0), de rayon infini.

D'après le cours, il en résulte que f est dSE(0), de rayon infini, et que l'on peut primitiver terme à terme, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{(n+2)!} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{(n+1)! n} x^n.$$

6.19 Soit $x \in]0; 1[$. On a, par l'inégalité de Cauchy et Schwarz, les séries manipulées étant (absolument) convergentes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right)^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[x^{n/2} \left(\frac{1}{n} x^{n/2} \right) \right]^2 \\ &\leq \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n/2})^2 \right] \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} x^{n/2} \right)^2 \right] \\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \right), \end{aligned}$$

d'où en utilisant des DSE(0) du cours :

$$(-\ln(1-x))^2 \leq \frac{x}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

et finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \geq \frac{(1-x)(\ln(1-x))^2}{x}.$

6.20 a) 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\frac{1}{k(k+n)} \sim \frac{1}{k^2} \geq 0$, donc, par l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_k \frac{1}{k(k+n)}$ converge,

$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)}$ existe.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $N \geq n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k(k+n)} &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^N \frac{1}{k+n} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=2n}^{N+n} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n} ((H_N - H_{n-1}) - (H_{N+n} - H_{2n-1})) \\ &= \frac{1}{n} \left[((\ln N + \gamma + o_{N \rightarrow \infty}(1)) - H_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. - ((\ln(N+n) + \gamma + o(1)) - H_{2n-1}) \right] \\ &= \frac{1}{n} \ln \frac{N}{N+n} + \frac{1}{n} (H_{2n-1} - H_{n-1}) + \frac{1}{n} o(1). \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, en faisant tendre l'entier N vers l'infini, on obtient :

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)} = \frac{1}{n} (H_{2n-1} - H_{n-1}).$$

3) On a donc : $a_n = \frac{1}{n} (H_{2n-1} - H_{n-1})$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \left((\ln(2n-1) + \gamma + o_{n \rightarrow \infty}(1)) - (\ln(n-1) + \gamma + o(1)) \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \frac{2n-1}{n-1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln \left(2 + o(1) \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}. \end{aligned}$$

b) 1) Puisque $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$, et que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ est de rayon 1, par théorème d'équivalence, le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est : $R = 1$.

2) • Nature de la série de terme général $a_n R^n$:

On a : $a_n R^n = a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$, donc, d'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} a_n R^n$ diverge.

• Nature de la série de terme général $a_n (-R)^n$:

Il s'agit de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$, puisque $R = 1$.

Cette série est alternée, et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, car $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

On a, pour tout $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n+1)}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)} = a_n,$$

donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

D'après le TSCSA, on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge.

Finalement, la série $\sum_{n \geq 1} a_n (-R)^n$ converge.

6.21 On a, en utilisant le théorème de Fubini et une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{[0;1]^2} xy e^{xy} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 y(x e^{xy}) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left([y e^{xy}]_{y=0}^1 - \int_0^1 e^{xy} dy \right) dx, \end{aligned}$$

puis, en faisant apparaître des intégrales de fonctions intégrables :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[y e^{xy} - \frac{e^{xy}}{x} \right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left(e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int_0^1 e^x dx - \underbrace{\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx}_{\text{notée } J} = [e^x]_0^1 - J = e - 1 - J. \end{aligned}$$

On a, en utilisant le DSE(0) de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{x} (e^x - 1) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right) dx. \end{aligned}$$

La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+1)!}$ est de rayon infini, (par la règle de d'Alembert, par exemple), donc on peut intégrer terme à terme sur $[0; 1]$, c'est-à-dire permuter intégrale et série :

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{x^n}{(n+1)!} dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Finalement : $I = e - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$.

6.22 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $f_n : t \mapsto e^{-t^n}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad 0 \leq f_n(t) = e^{-t^n} \leq e^{-t}.$$

Comme l'application $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, par théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , f_n est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$ existe.

b) Étudions le comportement de I_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

On a, par le changement de variable

$$u = t^n, \quad t = u^{\frac{1}{n}}, \quad dt = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du$$

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} du}_{\text{notée } J_n}.$$

Déterminons la limite de J_n lorsque l'entier n tend vers l'infini, en utilisant le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue par morceaux (car continue) sur $[1; +\infty[$

- $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} g$, où $g : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$

- g est continue par morceaux (car continue) sur $[1; +\infty[$

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in [1; +\infty[$:

$$|g_n(u)| = \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} = e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1} \leq e^{-u},$$

et $u \mapsto e^{-u}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, $(g_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$J_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_1^{+\infty} g(u) du = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du}_{\text{notée } \alpha} > 0.$$

Il en résulte : $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$,

et donc, par théorème d'équivalence : $R = 1$.

c) 1) Étude de la série $\sum_{n \geq 1} I_n R^n$:

Comme $I_n R^n = I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha}{n} > 0$, d'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 1} I_n R^n$ diverge.

2) Étude de la série $\sum_{n \geq 1} I_n (-R)^n$:

Il s'agit de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$.

Cette série est alternée et $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

De plus, la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ décroît, car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = \int_1^{+\infty} e^{-t^{n+1}} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt = I_n,$$

puisque ici $t \geq 1$ et $n \geq 0$.

D'après le TSCSA, on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} I_n (-R)^n$ converge.

6.23 Remarquons d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe, car l'application $t \mapsto \operatorname{ch}(x \cos t)$ est continue sur le segment $[0; \pi]$.

Nous allons développer la fonction sous l'intégrale en somme d'une série de fonctions, puis permuter intégrale et série.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

On a, par DSE(0) du cours :

$$\forall t \in [0; \pi], \quad \operatorname{ch}(x \cos t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(x \cos t)^{2p}}{(2p)!}.$$

Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$f_p : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{(x \cos t)^{2p}}{(2p)!}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p est continue sur $[0; \pi]$.

La série d'applications $\sum_{p \geq 0} f_p$ converge normalement, donc

uniformément, sur $[0; \pi]$, car, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|f_p\|_\infty = \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ et la série numérique $\sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ converge.

D'après un théorème du cours, on peut donc permuter intégrale et série, d'où :

$$f(x) = \int_0^\pi \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(x \cos t)^{2p}}{(2p)!} \right) dt$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(x \cos t)^{2p}}{(2p)!} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\underbrace{\int_0^\pi \cos^{2p} t dt}_{\text{notée } I_{2p}} \right) \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

Il reste à calculer I_{2p} , pour tout $p \in \mathbb{N}$, ce qui est classique (intégrale de Wallis d'indice pair, sur $[0; \pi]$).

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^\pi \cos^{2p} t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t dt + \int_{\pi/2}^\pi \cos^{2p} t dt$$

$$\stackrel{u=\pi-t}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t dt + \int_0^{\pi/2} \cos^{2p} u du$$

$$= 2 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t dt}_{\text{notée } J_{2p}}.$$

Par intégration par parties, pour tout $p \geq 2$:

$$\begin{aligned} J_{2p} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} t \cos t \, dt \\ &= [\cos^{2p-1} t \sin t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (2p-1) \cos^{2p-2} t \sin^2 t \, dt \\ &= (2p-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-2} t (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= (2p-1)(J_{2p-2} - J_{2p}), \end{aligned}$$

d'où : $2pJ_{2p} = (2p-1)J_{2p-2}$.

On a donc, de proche en proche :

$$\begin{aligned} J_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} J_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdots \frac{1}{2} J_0 \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{(2p)(2p-2) \cdots 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2 \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\pi}{(2^p p!)^2} x^{2p}.$$

Finalement, f est dSE(0), de rayon infini.

6.24 Nous allons essayer de nous ramener à des fonctions d'une variable réelle, dSE(0) donc de classe C^∞ .

Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On a, pour tout $(x, y) \in]-1; +\infty[\times \mathbb{R}$:

• si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors :

$$f(x, y) = \frac{e^{y \ln(1+x)} - 1}{\ln(1+x)} = y \varphi(y \ln(1+x))$$

• si $x \neq 0$ et $y = 0$: $f(x, y) = 0 = y \varphi(y \ln(1+x))$

• si $x = 0$: $f(x, y) = y = y \varphi(y \ln(1+x))$.

Ainsi :

$$\forall (x, y) \in]-1; +\infty[\times \mathbb{R}, f(x, y) = y \varphi(y \ln(1+x)).$$

Par composition, il suffit donc de montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. À cet effet, nous allons montrer que φ est dSE(0) de rayon infini.

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}(e^t - 1) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

De plus, comme $\varphi(0) = 1$ et que le terme constant de la dernière série entière est égal à 1, l'égalité est aussi vraie en 0, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

Ceci montre que φ est dSE(0), de rayon infini.

D'après le cours, il en résulte que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Par composition, on conclut que f est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[\times \mathbb{R}$.

6.25 a) Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \begin{cases} \frac{\text{Arctan } t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Alors, φ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 = \varphi(0)$, donc φ est continue en 0.

Ainsi, φ est continue sur $\mathbb{R}$, donc φ admet des primitives sur $\mathbb{R}$, l'une d'elles étant :

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_0^x \varphi(t) \, dt,$$

et ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$).

On a : $f(x) = \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \phi'(0) = \varphi(0) = 1$,

donc f admet une limite finie ℓ en 0, et $\ell = 1$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0) = \ell = 1$.

b) D'après le cours :

$$\forall t \in]-1; 1[, \text{Arctan } t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1},$$

d'où :

$$\forall t \in]-1; 1[-\{0\}, \varphi(t) = \frac{\text{Arctan } t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1}.$$

De plus, comme $\varphi(0) = 1$ et que le terme constant de la dernière série entière est égal à 1, l'égalité est aussi vraie pour $t = 0$, d'où :

$$\forall t \in]-1; 1[, \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1}.$$

Par primitivation, ϕ est dSE(0) et :

$$\forall x \in]-1; 1[, \phi(x) = \underbrace{\phi(0)}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2},$$

d'où :

$$\forall x \in]-1; 1[-\{0\}, f(x) = \frac{\phi(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)^2}.$$

Comme $f(0) = 1$ et que le terme constant de la dernière série entière est égal à 1, l'égalité est aussi vraie pour $x = 0$, d'où :

$$\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)^2}.$$

Ceci montre que f est dSE(0).

Par la règle de d'Alembert, le rayon est égal à 1.

6.26 a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Cas $x \in]-1; +\infty[$:

L'application $t \mapsto \ln(1 + x e^{-t})$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $\ln(1 + x e^{-t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} x e^{-t}$. D'après le cours, $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, donc, par théorème d'équivalence pour des fonctions de signe fixe, $t \mapsto \ln(1 + x e^{-t})$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, et donc $f(x)$ existe.

• Cas $x = -1$:

L'application $t \mapsto \ln(1 - e^{-t})$ est continue sur $]0; +\infty[$, intégrable sur $[1; +\infty[$ (comme dans le cas précédent), et, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \ln(1 - e^{-t}) &= \ln(1 - (1 - t + o(t))) = \ln(t + o(t)) \\ &= \ln t + \ln(1 + o(1)) = \ln t + o(1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t < 0. \end{aligned}$$

D'après le cours, $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0; 1]$. Par théorème d'équivalence pour des fonctions de signe fixe, $t \mapsto \ln(1 - e^{-t})$ est intégrable sur $]0; 1]$.

Ainsi, $t \mapsto \ln(1 - e^{-t})$ est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, donc sur $]0; +\infty[$, et on conclut que $f(x)$ existe.

• Cas $x \in]-\infty; -1[$:

L'application $t \mapsto \ln(1 + x e^{-t})$ n'est pas définie sur $]0; +\infty[$, donc $f(x)$ n'existe pas.

On conclut : $\text{Def}(f) = [-1; +\infty[$.

b) On a, par DSE(0) de $u \mapsto \ln(1 + u)$, pour tout $(x, t) \in]-1; +\infty[\times]0; +\infty[$ tel que $|x e^{-t}| < 1$:

$$\ln(1 + x e^{-t}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x e^{-t})^n}{n}.$$

Soit $x \in]-1; 1[$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{(-1)^{n-1} (x e^{-t})^n}{n}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$

• $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$, et a pour somme $S : t \mapsto \ln(1 + x e^{-t})$

• S est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$

• On a, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n| &= \int_0^{+\infty} \frac{(|x| e^{-t})^n}{n} dt = \frac{|x|^n}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt \\ &= \frac{|x|^n}{n} \left[\frac{e^{-nt}}{-n} \right]_0^{+\infty} = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

D'après le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications, on peut permuter intégrale et série, d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}, \end{aligned}$$

le calcul de la dernière intégrale étant analogue au calcul ci-dessus.

On conclut que f est dSE(0) et que :

$$\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}.$$

La règle de d'Alembert montre que le rayon est 1.

6.27 La condition demandée revient à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n^2.$$

Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$. Son rayon est 1. Le calcul de sa somme a été fait dans l'exercice 6.2 a) :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Notons, $I =]-1; 1[$, qui est un intervalle ouvert contenant 0,

et : $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$

Alors, f est dSE(0) de rayon 1, donc f est de classe C^∞ sur $] -1; 1[$ et, d'après le cours :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n^2 \cdot n!,$$

donc f convient.

6.28 Par hypothèse, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - [-a; a], f(x) = 0.$$

Il est clair que, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-a; a]$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(t) e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ixt)^n}{n!} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(t) \frac{(-ixt)^n}{n!} \right) dt. \end{aligned}$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [-a; a] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t) \frac{(-i x t)^n}{n!}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[-a; a]$, car f_n est continue par morceaux sur ce segment.

• $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[-a; a]$.

• $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : t \longmapsto f(t) e^{-i x t}$ est continue par morceaux sur $[-a; a]$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a |f_n(t)| dt &= \int_{-a}^a \left| f(t) \frac{(-i x t)^n}{n!} \right| dt \\ &= \frac{|x|^n}{n!} \int_{-a}^a |f(t)| |t|^n dt \leq \frac{|a|^n |x|^n}{n!} \int_{-a}^a |f(t)| dt, \end{aligned}$$

et cette dernière expression est le terme général d'une série convergente, d'après la série de l'exponentielle.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \int_{-a}^a |f_n|$ converge.

D'après le théorème sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications, on peut permuter intégrale et série, donc :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-a}^a f(t) \frac{(-i x t)^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(t) \frac{(-i t)^n}{n!} dt \right) x^n. \end{aligned}$$

Ceci montre que g est dSE(0), de rayon infini.

6.29 Notons

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}, \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!}, \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!},$$

les trois séries étant convergentes d'après la règle de d'Alembert par exemple.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a, par groupement de termes dans des sommes d'un nombre fini de termes :

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(3n)!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(3n+2)!} = \sum_{p=0}^{3N+2} \frac{1}{p!}.$$

D'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$A + B + C = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} = e^1 = e.$$

De même :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{(3n)!} + j \sum_{n=0}^N \frac{1}{(3n+1)!} + j^2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(3n+2)!} \\ = \sum_{n=0}^N \frac{j^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^N \frac{j^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^N \frac{j^{3n+2}}{(3n+2)!} = \sum_{p=0}^{3N+2} \frac{j^p}{p!}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad A + jB + j^2C = e^j.$$

De même, ou par conjugaison, puisque A, B, C sont réels : $A + j^2B + jC = e^{j^2}$.

On déduit, par addition, puisque $1 + j + j^2 = 0$:

$$\begin{aligned} 3A = e + e^j + e^{j^2} = e + e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ = e + e^{-\frac{1}{2}} 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut :} \quad A = \frac{1}{3} \left(e + 2e^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Remarquons que la méthode fournit aussi les valeurs de B et C :

$$\begin{aligned} 3B &= e + j^2 e^j + j e^{j^2} \\ &= e + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= e - e^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} - e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

et de même :

$$3C = e - e^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} + e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.30 Nous allons calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)}, \text{ puis essayer remplacer } x \text{ par } 1.$$

I) Calculons la somme $f(x)$ de la série entière, pour tout $x \in]0; 1[$. On a, en utilisant la décomposition en éléments simples du coefficient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(2n+1)} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n+1} \right) x^n \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n}_{\text{notée } A(x)} + 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n}_{\text{notée } B(x)} \end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1.

On a, pour tout $x \in]0; 1[$:

$$A(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \\ = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1+x)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} \\ = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{x}.$$

On obtient :

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) = -\frac{1}{x} \ln(1+x) + \frac{2}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{x}.$$

2) Nous allons montrer qu'on peut remplacer x par 1 dans la formule précédente, par continuité.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; 1]$.

• On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

donc, d'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$

converge. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; 1]$.

D'après le cours, il en résulte que la somme f est continue sur $[0; 1]$, donc :

$$S = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x} \ln(1+x) + \frac{2}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} x \right) \\ = -\ln 2 + 2 \operatorname{Arctan} 1 = -\ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

6.31 Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que I_n et J_n existent comme intégrales d'applications continues sur un segment.

On a, en passant par les nombres complexes :

$$I_n + i J_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} e^{i(nt - \sin t)} dt \\ = \int_0^{2\pi} e^{(\cos t - i \sin t) + i n t} dt = \int_0^{2\pi} e^{e^{-it}} e^{i n t} dt.$$

En utilisant le DSE(0) de l'exponentielle, de rayon infini, on a donc :

$$I_n + i J_n = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{-it})^k}{k!} \right) e^{i n t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{i(n-k)t}}{k!} \right) dt.$$

Nous allons essayer de permuter intégrale et série.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_k : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto \frac{e^{i(n-k)t}}{k!}.$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue sur le segment $[0; 2\pi]$.

• On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\|f_k\|_\infty = \frac{1}{k!}$, donc la série $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_\infty$ converge, donc $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; 2\pi]$.

D'après un théorème du cours, on peut permuter intégrale et série, donc : $I_n + i J_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-k)t}}{k!} dt.$

De plus, si $k \neq n$, alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-k)t}}{k!} dt = \left[\frac{e^{i(n-k)t}}{i(n-k)k!} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\text{et, si } k = n, \text{ alors : } \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-k)t}}{k!} dt = \frac{2\pi}{n!}.$$

Les termes de la série précédente sont donc tous nuls, sauf celui d'indice $k = n$, d'où : $I_n + i J_n = \frac{2\pi}{n!}.$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, comme I_n et J_n sont réels, on conclut : $I_n = \frac{2\pi}{n!}$, $J_n = 0$.

6.32 Rappelons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Notons $Z = e^{iz}$. On a donc $Z \neq 0$ et $e^{-iz} = \frac{1}{Z}$. Alors :

$$(E) \quad 3 \cos z + 2 \sin z = 5 \\ \iff 3 \frac{Z + \frac{1}{Z}}{2} + 2 \frac{-\frac{1}{Z}}{2i} = 5 \\ \iff \frac{3(Z^2 + 1)}{2Z} + \frac{(Z^2 - 1)}{iZ} = 5 \\ \iff 3i(Z^2 + 1) + 2(Z^2 - 1) = 10iZ \\ \iff (2 + 3i)Z^2 - 10iZ + (-2 + 3i) = 0 \quad (F).$$

Le discriminant Δ de cette équation du second degré est :

$$\Delta = (-10i)^2 - 4(2 + 3i)(-2 + 3i) \\ = -100 - 4(-4 - 9) = -48 = (4\sqrt{3}i)^2.$$

D'où :

$$(F) \iff Z = \frac{10i + \varepsilon 4\sqrt{3}i}{2(2+3i)} = \frac{(5+2\varepsilon\sqrt{3})i(2-3i)}{13}$$

$$= \frac{5+2\varepsilon\sqrt{3}}{13}(3+2i), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Puis, en notant $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$e^{iz} = Z \iff e^{i(x+iy)} = Z \iff e^{ix-y} = Z$$

$$\iff e^{-y} e^{ix} = \underbrace{\frac{5+2\varepsilon\sqrt{3}}{13}}_{\geq 0} (3+2i)$$

$$\iff \begin{cases} e^{-y} = \frac{5+2\varepsilon\sqrt{3}}{13} \sqrt{13} = \frac{5+2\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \\ x = \text{Arg}(3+2i) \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -\ln \frac{5+2\varepsilon\sqrt{3}}{13} \\ x = \text{Arctan} \frac{2}{3} \quad [2\pi]. \end{cases}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ -\ln \frac{5+2\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + i \left(\text{Arctan} \frac{2}{3} + 2k\pi \right); \right.$$

$$\left. \varepsilon \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6.33

a) 1) • Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin n| \leq 1$

et que la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ est de rayon 1, par théorème de majoration, on déduit : $R \geq 1$.

• Montrons que la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, en raisonnant par l'absurde.

Supposons : $\sin n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Alors, par suite extraite : $\sin(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n,$$

donc, comme $\sin 1 \neq 0$:

$$\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin n \cos 1}{\sin 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Enfin : $1 = \cos^2 n + \sin^2 n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 + 0 = 0$, contradiction.

Ceci montre que la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Il en résulte que la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin n z^n$ diverge pour $z = 1$,

donc $R \leq 1$.

Finalement : $R = 1$.

2) La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} z^n$ a le même rayon que sa série entière dérivée, qui est $\sum_{n \geq 1} \sin n z^{n-1}$, et celle-ci a le même rayon que la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin n z^n$, donc : $R = 1$.

3) La série entière $\sum_{n \geq 0} n \sin n z^n$ a le même rayon que $\sum_{n \geq 0} n \sin n z^{n-1}$, qui est la série entière dérivée de la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin n z^n$, donc a le même rayon que celle-ci, d'où : $R = 1$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\ln |a_n z^n| = \ln \left| \frac{3^n}{(\ln(n+2))^{n-1}} z^n \right|$$

$$= n \ln 3 - (n-1) \ln \ln(n+2) + n \ln |z|$$

$$= n (\ln 3 + \ln |z|) - (n-1) \ln \ln(n+2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty,$$

par prépondérance classique, donc : $a_n z^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On conclut : $R = \infty$.

c) Pour obtenir un équivalent simple du coefficient

$a_n = \text{Arcsin} \frac{n+1}{2n+3} - \frac{\pi}{6}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini, appliquons le théorème des accroissements finis à Arcsin entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{n+1}{2n+3}$. Il existe c_n , compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{n+1}{2n+3}$ tel que :

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right) \text{Arcsin}'(c_n) = -\frac{1}{2n+3} \frac{1}{\sqrt{1-c_n^2}}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{1}{n\sqrt{3}}.$$

Comme la série entière $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{n\sqrt{3}} z^n$ est de rayon 1 (par la règle de d'Alembert par exemple), on conclut, par théorème d'équivalence : $R = 1$.

d) Comme $a_n = \text{Arccos} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{Arccos} 1 = 0$,

on a :

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sin \left(\text{Arccos} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$= \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Puisque la série entière $\sum_n \sqrt{\frac{2}{n}} z^n$ est de rayon 1 (par la règle de d'Alembert par exemple), par théorème d'équivalence, on conclut : $R = 1$.

e) Essayons d'encadrer $|a_n|$, pour tout $n \geq 2$. On a :

$$|a_n| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^1 \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{(t-1)}_{\leq 0} \cdots \underbrace{(t-n)}_{\leq 0} dt \right| \\ = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(1-t) \cdots (n-t) dt.$$

$$\text{D'où : } |a_n| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots n dt = 1$$

et :

$$|a_n| \geq \frac{1}{n!} \int_0^1 t \cdot (1-t) \cdot 1 \cdots (n-1) dt \\ = \frac{(n-1)!}{n!} \int_0^1 (t-t^2) dt = \frac{1}{n} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6n}.$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \geq 2, \frac{1}{6n} \leq |a_n| \leq 1.$$

Comme les séries entières $\sum_n \frac{1}{6n} z^n$ et $\sum_n z^n$ sont de rayon 1 (par la règle de d'Alembert par exemple), on conclut, par théorème d'encadrement : $R = 1$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ (par la règle $t^2 f(t)$ en $+\infty$, par exemple), donc intégrable sur $[n; +\infty[$, ce qui montre que $a_n = \int_n^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ existe.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \int_n^{+\infty} t^n e^{-t} dt \geq \int_n^{+\infty} n^n e^{-t} dt \\ = n^n [-e^{-t}]_n^{+\infty} = \underbrace{n^n e^{-n}}_{\text{noté } b_n} > 0.$$

Et, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left| \frac{b_{n+1} z^{n+1}}{b_n z^n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{n^n e^{-n}} |z| \\ = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n (n+1) e^{-1} |z| \geq (n+1) e^{-1} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

$$\text{donc : } \left| \frac{b_{n+1} z^{n+1}}{b_n z^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty > 1,$$

et donc la série numérique $\sum_n a_n z^n$ diverge (grossièrement).

Ceci montre : $R_b = 0$.

Par théorème de minoration, on conclut : $R = 0$.

g) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par le changement de variable $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$:

$$a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$$

• D'une part :

$$\sum_{n=1}^N a_n = \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt,$$

car on sait que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Ceci montre que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ converge pour $z = 1$, donc : $R \geq 1$.

• D'autre part, puisque $t \mapsto \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}$ est de signe fixe sur chaque $[n\pi; (n+1)\pi]$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^N |a_n| = \int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty,$$

car on sait que l'intégrale impropre $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt$ diverge.

Ceci montre que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ n'est pas absolument convergente pour $z = 1$, donc : $R \leq 1$.

On conclut : $R = 1$.

h) Remarquons d'abord que, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a, pour tout $n \geq 1$: $n\sqrt{2} - E(n\sqrt{2}) \neq 0$,

donc $a_n = \frac{1}{n\sqrt{2} - E(n\sqrt{2})}$ existe.

• D'une part, puisque $0 < n\sqrt{2} - E(n\sqrt{2}) \leq 1$, on a : $a_n \geq 1$.

• D'autre part, en utilisant une expression conjuguée :

$$a_n = \frac{n\sqrt{2} + E(n\sqrt{2})}{2n^2 - (E(n\sqrt{2}))^2}.$$

Comme $2n^2 - (E(n\sqrt{2}))^2$ est un entier naturel non nul, il est ≥ 1 , donc : $a_n \leq n\sqrt{2} + E(n\sqrt{2}) \leq 2n\sqrt{2}$.

On obtient ainsi : $\forall n \geq 1, 1 \leq a_n \leq 2n\sqrt{2}$.

Comme les séries entières $\sum_n z^n$ et $\sum_n 2n\sqrt{2} z^n$ sont de rayon 1 (par la règle de d'Alembert par exemple), on conclut, par encadrement : $R = 1$.

6.34 Nous allons utiliser la même méthode que celle employée dans le cours pour montrer qu'une série entière a le même rayon que sa série entière dérivée.

Notons R et R' les rayons respectifs des deux séries entières $\sum_n a_n z^n$, $\sum_n F(n) a_n z^n$.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Il existe alors $Z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < |Z| < R$, par exemple $Z = \frac{1}{2}(|z| + R)$.

On a, pour tout n :

$$|F(n) a_n z^n| = |a_n Z^n| \left| F(n) \left(\frac{z}{Z} \right)^n \right|.$$

D'une part, puisque $|Z| < R$, la suite $(|a_n Z^n|)_n$ est bornée.

D'autre part, puisque F est une fraction rationnelle et que $\left| \frac{z}{Z} \right| < 1$, par prépondérance classique, on a :

$$\left| F(n) \left(\frac{z}{Z} \right)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il en résulte : $|F(n) a_n z^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc : $|z| \leq R'$.

On a montré : $\forall z \in \mathbb{C}, (|z| < R \implies |z| \leq R')$.

Il en résulte : $R \leq R'$.

2) On peut appliquer le résultat de 1) à $\sum_n F(n) a_n z^n$ et $\frac{1}{F}$ respectivement, ce qui permet d'échanger les rôles des deux séries entières de l'énoncé, et on obtient : $R' \leq R$.

Finalement : $R' = R$.

6.35 a) • Rayon :

1) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |\cos n| \leq 1$.

Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ est de rayon 1, par théorème de majoration : $R \geq 1$.

2) Montrons que la suite $(\cos n)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0.

Raisonnons par l'absurde : supposons $\cos n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On a alors, par suite extraite : $\cos 2n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Mais : $\cos 2n = 2 \cos^2 n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$, contradiction.

Ceci montre que la suite $(\cos n)_n$ ne converge pas vers 0.

Il en résulte que la série entière $\sum_{n \geq 0} \cos n z^n$ diverge pour

$z = 1$, donc : $R \leq 1$.

Finalement : $R = 1$. Cf. aussi l'exercice 6.33 a).

• Somme :

On a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in} + e^{-in}}{2} x^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in} x^n, \end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1, d'après la règle de d'Alembert par exemple.

D'où :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^i x)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-i} x)^n \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^i x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-i} x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - e^i x - e^{-i} x}{(1 - e^i x)(1 - e^{-i} x)} = \frac{1 - (\cos 1)x}{1 - 2(\cos 1)x + x^2}. \end{aligned}$$

Réponse : $R = 1$ et :

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \frac{1 - (\cos 1)x}{1 - 2(\cos 1)x + x^2}.$$

b) • Rayon :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.

On a :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{3n+5}}{3n+5} \right| \left| \frac{3n+2}{x^{3n+2}} \right| = \frac{3n+2}{3n+5} |x|^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|^3.$$

D'après la règle de d'Alembert, si $|x| < 1$, alors la série $\sum_n |u_n|$ converge, et, si $|x| > 1$, alors la série $\sum_n |u_n|$ diverge.

On conclut : $R = 1$.

• Somme :

L'application $S :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$ est de classe C^1 sur $]-1; 1[$ et :

$$\forall x \in]-1; 1[, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (x^3)^n = \frac{x}{1 - x^3}.$$

En primitivant et puisque $S(0) = 0$ (terme constant de la série entière définissant S), on a :

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \int_0^x \frac{t}{1 - t^3} dt.$$

Pour calculer cette intégrale, utilisons une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{X}{1 - X^3} = \frac{X}{(1 - X)(1 + X + X^2)} = \frac{a}{1 - X} + \frac{bX + c}{1 + X + X^2},$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est à calculer.

On multiplie par $1 - X$, puis on remplace X par 1, d'où :

$$a = \frac{1}{3}.$$

On multiplie par X puis on fait tendre X vers l'infini, d'où :

$$0 = -a + b, \text{ donc } b = a = \frac{1}{3}.$$

Enfin, en remplaçant X par 0 : $0 = a + c$, d'où :
 $c = -a = -\frac{1}{3}$.

On a donc la décomposition en éléments simples :

$$\frac{X}{1-X^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-X} + \frac{X-1}{1+X+X^2} \right).$$

D'où le calcul de primitive :

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{1-t^3} dt &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{t-1}{1+t+t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{2}(2t+1) - \frac{3}{2}}{t^2+t+1} dt \\ &= -\frac{1}{3} \ln(1-t) + \frac{1}{6} \ln(t^2+t+1) - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{dt}{t^2+t+1}}_{\text{notée } J(t)}. \end{aligned}$$

Par mise sous forme canonique pour un trinôme :

$$\begin{aligned} t^2+t+1 &= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2 \right] = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

D'où, par le changement de variable $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$:

$$J(t) = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} du}{\frac{3}{4}(1+u^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} u = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}.$$

D'où, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \left[-\frac{1}{3} \ln(1-t) + \frac{1}{6} \ln(1+t+t^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Réponse : $R = 1$ et, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

c) Par la règle de d'Alembert, on obtient $R = 1$.

La série entière proposée ressemble à la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Soit $x \in]-1; 1[$.

1) Si $x \in]0; 1[$, notons $t = \sqrt{x}$.

On a alors $x = t^2$, donc :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{t} \operatorname{Argth} t = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Argth} \sqrt{x}. \end{aligned}$$

2) Si $x \in]-1; 0[$, notons $t = \sqrt{-x}$.

On a alors $x = -t^2$, donc :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{2n+1} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{t} \operatorname{Arctan} t = \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x}. \end{aligned}$$

3) Enfin, $S(0) = 1$, car $S(0)$ est le terme constant de la série entière définissant S .

Réponse : $R = 1$ et :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Argth} \sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x} & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

d) Par la règle de d'Alembert, on obtient $R = +\infty$.

La série entière proposée ressemble à la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Si $x \in]0; +\infty[$, notons $t = \sqrt{x}$.

On a alors $x = t^2$, donc :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^n}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{t} \operatorname{sh} t = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2) Si $x \in]-\infty; 0[$, notons $t = \sqrt{-x}$.

On a alors $x = -t^2$, donc :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{t} \sin t = \frac{\sin \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}. \end{aligned}$$

3) Enfin, $S(0) = 1$, car $S(0)$ est le terme constant de la série entière définissant S .

Réponse :

$$R = \infty \text{ et } S(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

e) Par utilisation d'un équivalent et de la règle de d'Alembert, on obtient : $R = 1$.

Formons la décomposition en éléments simples du coefficient a_n de la série entière :

$$a_n = \frac{3n}{2n^2 + n - 1} = \frac{3n}{(n+1)(2n-1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1}.$$

On a alors, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n}_{\text{notée } A(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} x^n}_{\text{notée } B(x)}$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1.

On a, si $x \neq 0$:

$$A(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x),$$

et $A(0) = 1$ car $A(0)$ est le terme constant de la série entière définissant $A(x)$.

D'autre part, en isolant dans $B(x)$ le terme constant, on a :

$$B(x) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = -1 + x \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}}_{\text{notée } C(x)}.$$

On a calculé $C(x)$ dans l'exercice c) :

$$C(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Argth} \sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x} & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

On reporte la valeur de $C(x)$ et on en déduit l'expression de $A(x)$.

Réponse : $R = 1$ et : $S(x) =$

$$\begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 + \sqrt{x} \operatorname{Argth} \sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 - \sqrt{-x} \operatorname{Arctan} \sqrt{-x} & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

f) • Rayon :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Si $|z| < 1$, alors $|z^{E(\sqrt{n})}| = |z|^{E(\sqrt{n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Si $|z| > 1$, alors $|z^{E(\sqrt{n})}| = |z|^{E(\sqrt{n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

On conclut : $R = 1$.

• Somme :

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{(N+1)^2-1} z^{E(\sqrt{n})} &= \sum_{p=0}^N \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} z^{E(\sqrt{n})} \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{n=p^2}^{p^2+2p} z^p = \sum_{p=0}^N (2p+1) z^p. \end{aligned}$$

En faisant tendre l'entier N vers l'infini, on obtient :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{E(\sqrt{n})} = \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+1) z^p = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} p z^p + \sum_{p=0}^{+\infty} z^p,$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1.

On sait (série géométrique) : $\sum_{p=0}^{+\infty} z^p = \frac{1}{1-z}$.

D'où, en dérivant (algébriquement, car $z \in \mathbb{C}$ ici) :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} p z^{p-1} = \frac{1}{(1-z)^2},$$

et donc, en multipliant par z : $\sum_{p=0}^{+\infty} p z^p = \frac{z}{(1-z)^2}$.

On obtient :

$$S(z) = 2 \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{2z + (1-z)}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^2}.$$

Réponse : $R = 1$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$S(z) = \frac{1+z}{(1-z)^2}.$$

6.36 a) Notons R_c, R_s, S_c, S_s les rayons et les sommes des deux séries entières proposées.

1) Rayons :

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}, (|\cos n\theta| \leq 1 \text{ et } |\sin n\theta| \leq 1)$,

d'où, par théorème de majoration : $R_c \geq 1$ et $R_s \geq 1$.

• Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la suite $(\cos n\theta)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0.

En effet, si $\cos n\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors, par suite extraite,

$$\cos 2n\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ d'où } 2 \cos^2 n\theta - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

contradiction avec $2 \cos^2 n\theta - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$.

Ceci montre que la série entière $\sum_{n \geq 0} \cos n\theta x^n$ diverge pour

$x = 1$, donc $R_c \leq 1$.

• Pour tout $\theta \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, la suite $(\sin n\theta)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0.

En effet, si $\sin n\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

alors, par suite extraite, $\sin(n+1)\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

d'où $\sin n\theta \cos \theta + \sin \theta \cos n\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

puis (comme $\sin \theta \neq 0$) $\cos n\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, contradiction comme on l'a vu ci-dessus.

Ceci montre que la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin n\theta x^n$ diverge pour

$x = 1$, donc $R_s \leq 1$.

Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin n\theta = 0$, donc $R_s = \infty$.

Finalement : $R_c = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et $R_s = 1$ si $\theta \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, $R_s = \infty$ si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

2) Sommes :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} e^{in\theta} x^n$ est 1 et on a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} S_c(x) + i S_s(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos n\theta x^n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \sin n\theta x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\theta} x)^n = \frac{1}{1 - e^{i\theta} x} \\ &= \frac{1}{(1 - x \cos \theta) - i x \sin \theta} = \frac{(1 - x \cos \theta) + i x \sin \theta}{(1 - x \cos \theta)^2 + (x \sin \theta)^2}. \end{aligned}$$

D'où, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$S_c(x) = \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \quad S_s(x) = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}.$$

De plus, si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_s(x) = 0$.

b) Notons $\rho_c, \rho_s, \sigma_c, \sigma_s$ les rayons et les sommes des deux séries entières proposées.

1) Rayons :

Puisqu'une série entière a le même rayon que sa série entière dérivée, on a : $\rho_c = R_c$ et $\rho_s = R_s$.

2) Sommes :

• On a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} x\sigma'_c(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos n\theta x^n \\ &= \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} - 1 = \frac{x \cos \theta - x^2}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \end{aligned}$$

d'où, si $x \neq 0$: $\sigma'_c(x) = \frac{\cos \theta - x}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$.

D'autre part : $\sigma'_c(0) = \cos \theta$, car il s'agit du terme constant de la série entière définissant $\sigma'_c(x)$.

On a donc : $\forall x \in]-1; 1[$, $\sigma'_c(x) = \frac{\cos \theta - x}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$.

On déduit, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\sigma_c(x) = \sigma_c(0) + \int_0^x \sigma'_c(t) dt = \int_0^x \frac{\cos \theta - t}{1 - 2t \cos \theta + t^2} dt$$

$$= -\left[\frac{1}{2} \ln(1 - 2t \cos \theta + t^2) \right]_0^x = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2).$$

• On a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$x\sigma'_s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\theta x^n = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2},$$

d'où, si $x \neq 0$: $\sigma'_s(x) = \frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$.

D'autre part, $\sigma'_s(0) = \sin \theta$, car il s'agit du terme constant de la série entière définissant $\sigma'_s(x)$.

On a donc : $\forall x \in]-1; 1[$, $\sigma'_s(x) = \frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$.

On déduit, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} \sigma_s(x) &= \sigma_s(0) + \int_0^x \frac{\sin \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} dt \\ &= \int_0^x \frac{\sin \theta}{(t - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} dt \\ &\text{si } \sin \theta \neq 0 \quad \int_0^x \frac{d\left(\frac{t - \cos \theta}{\sin \theta}\right)}{\left(\frac{t - \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 + 1} \\ &= \left[\text{Arctan } \frac{t - \cos \theta}{\sin \theta} \right]_0^x \\ &= \text{Arctan } \frac{x - \cos \theta}{\sin \theta} - \text{Arctan } \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \text{Arctan } \frac{x - \cos \theta}{\sin \theta} + \text{Arctan } \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Réponse : • Pour $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$:

$$R = 1 \text{ et } S(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2)$$

• Pour $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$:

* Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$: $R = +\infty$ et $S = 0$

* Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, : $R = 1$ et :

$$S(x) = \text{Arctan } \frac{x - \cos \theta}{\sin \theta} + \text{Arctan } \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

ce dernier résultat pouvant être transformé sous diverses formes.

6.37 a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$,

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{x^{n+1}} \left(e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{p+n+1}}{(p+n+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{(p+n+1)!}. \end{aligned}$$

Comme $f_n(0) = \frac{1}{(n+1)!}$ et que le terme constant de la dernière série entière est égal à $\frac{1}{(n+1)!}$, l'égalité est aussi vraie pour $x = 0$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{(p+n+1)!}.$$

Ceci montre que f_n est dSE(0) de rayon infini, donc f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_n(x) = x^{-n-1}e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^{k-n-1}.$

On en déduit, en dérivant n fois et en utilisant la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (x^{-n-1})^{(n-p)} (e^x)^{(p)} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (x^{k-n-1})^{(n)} \\ &= e^x \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} [(-n-1) \cdots (-2n+p)] x^{-n-1-n+p} \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (k-n-1) \cdots (k-2n) x^{k-2n-1} \\ &= e^x \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} (-1)^{n-p} \frac{(2n-p)!}{n!} x^{-2n+p-1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-1)^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)!} x^{k-2n-1} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}} (-1)^n}{x^{2n+1}} \left(e^{\frac{x}{2}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{(2n-p)!}{p!(n-p)!} x^p \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!} (-x)^k \right). \end{aligned}$$

En notant $P_n = (-1)^n \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{(2n-p)!}{p!(n-p)!} X^p \in \mathbb{R}[X]$,

on conclut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^{2n+1}} (e^{\frac{x}{2}} P_n(x) - e^{-\frac{x}{2}} P_n(-x)).$$

6.38 On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par produit de Cauchy de deux séries entières de rayon infini :

$$\begin{aligned} e^z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{n!} z^n \\ = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} z^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n, \end{aligned}$$

où, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k-1} dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} t^{n-k-1} \right) dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 -\frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-t)^{n-k} \right) dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 -\frac{1}{t} ((1-t)^n - 1) dt \\ u = 1-t &\quad \frac{1}{n!} \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} du = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k \right) du \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

6.39 1) Minoration du rayon R :

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{n!} \left| \int_0^1 \left(\prod_{k=0}^{n-1} (t-k) \right) dt \right| \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 t((1-t) \cdots (n-1-t)) dt \\ &\leq \frac{1}{n!} 1(1 \cdot 2 \cdots (n-1)) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Comme la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n$ est de rayon 1, par théorème

de majoration, on conclut : $R \geq 1$.

2) Calcul de la somme S sur $] -1; 1[$:

Soit $x \in] -1; 1[$ fixé. On a :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{x^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) \right) dt.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \frac{x^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k).$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur le segment $[0; 1]$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &= \frac{|x|^n}{n!} t((1-t) \cdots (n-1-t)) \\ &\leq \frac{|x|^n}{n!} 1 \cdot 1 \cdots (n-1) = \frac{|x|^n}{n!} (n-1)! = \frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n, \end{aligned}$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty \leq |x|^n$.

Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} |x|^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série numérique $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge. Ceci montre que la $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; 1]$.
D'après un théorème du cours, on peut alors permuter intégrale et série, d'où :

$$\begin{aligned} S(x) &= a_0 + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) \right) dt \\ &= 1 + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1)}{n!} x^n \right) dt \\ &= \int_0^1 (1+x)^t dt = \int_0^1 e^{t \ln(1+x)} dt \\ \text{si } x \neq 0 \quad &= \frac{1}{\ln(1+x)} \left[\frac{e^{t \ln(1+x)}}{1} \right]_0^1 = \frac{e^{\ln(1+x)} - 1}{\ln(1+x)} = \frac{x}{\ln(1+x)}. \end{aligned}$$

D'autre part, $S(0) = a_0 = 1$, car $S(0)$ est le terme constant de la série entière définissant S .

Ainsi :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad S(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3) Valeur du rayon R :

Pour montrer $R = 1$, étudions la série entière au voisinage de -1 , point qui annule le dénominateur de l'expression de $S(x)$.

On a :
$$S(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 0,$$

ce qui n'amène pas de résultat net sur la position de -1 par rapport à l'intervalle $[-R; R]$.

Mais S est dérivable sur $] -1; 1[$ et on a, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$S'(x) = \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(1+x)(\ln(1+x))^2},$$

d'où, par prépondérance classique :

$$S'(x) \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{(1+x)(\ln(1+x))^2} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty.$$

Raisonnons par l'absurde : supposons $R > 1$. Comme S est de classe C^∞ sur $] -R; R[$ et que $-1 \in] -R; R[$, S' est en particulier continue en -1 , contradiction avec le résultat précédent.

On conclut : $R = 1$.

6.40 1) Soit f convenant.

• Montrons que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

À cet effet, montrons, par récurrence sur n , que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

La propriété est vraie pour $n = 1$, par hypothèse.

Supposons que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$$

et que le second membre est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On conclut, par récurrence sur n , que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Montrons que f est dSE(0). À cet effet, nous allons montrer que le reste de Taylor de f en 0 tend vers 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{notée } R_n(x)}.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_n = \sup_{t \in [-x; x]} |f^{(n)}(t)|$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} M_{n+1} dt \right| = \frac{M_{n+1}}{n!} \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \\ &= \frac{M_{n+1}}{n!} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1}. \end{aligned}$$

Essayons d'établir une majoration de M_n .

Par hypothèse : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \alpha f(t) + f(\lambda t)$,

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(t) = \alpha f^{(n)}(t) + \lambda^n f^{(n)}(\lambda t),$$

et donc, en passant aux bornes supérieures lorsque t décrit $[-x; x]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} \leq |\alpha| M_n + |\lambda|^n M_n \leq (|\alpha| + 1) M_n.$$

Par récurrence immédiate, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n \leq (|\alpha| + 1)^n M_0.$$

D'où :
$$|R_n(x)| \leq \frac{(|\alpha| + 1)^{n+1} M_0}{(n+1)!} |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

par prépondérance classique de la factorielle sur les exponentielles.

On déduit, en faisant tendre l'entier n vers l'infini dans la formule de Taylor avec reste intégral, que la série de Taylor de f

en 0, $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, converge et a pour somme $f(x)$.

On conclut que f est dSE(0) de rayon infini.

2) Soit f dSE(0) de rayon infini, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} & f \text{ convient} \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x) \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n x^n \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha + \lambda^n) a_n x^n \\ \text{unicité du DSE(0)} \iff & \forall n \in \mathbb{N}, (n+1) a_{n+1} = (\alpha + \lambda^n) a_n \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{\alpha + \lambda^n}{n+1} a_n \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + \lambda^k) \right) a_0. \end{aligned}$$

On conclut :

$$S = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + \lambda^k) x^n ; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

6.41

1) L'application $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$ est dSE(0) de rayon 1, d'après le cours. Par primitivation, il en résulte que l'application $x \longmapsto \text{Argsh } x$ est dSE(0) de rayon 1. Par produit, l'application f est donc dSE(0) de rayon ≥ 1 .

2) Pour calculer le DSE(0) de f , nous allons utiliser la méthode dite de l'équation différentielle.

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx} (\sqrt{1+x^2} f(x)) = \frac{d}{dx} (\text{Argsh } x),$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} f'(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{donc : } \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2) f'(x) + x f(x) = 1.$$

En notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ le DSE(0) de f , qui existe et est de rayon ≥ 1 comme on l'a vu plus haut, on a, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x^2) f'(x) + x f(x) - 1 \\ &= (1+x^2) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 1 \\ &= (a_1 - 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} + n a_{n-1}) x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du DSE(0) de la fonction nulle, on déduit $a_1 = 1$ et : $\forall n \geq 1, (n+1) a_{n+1} + n a_{n-1} = 0$.

Comme $a_0 = f(0) = 0$, il en résulte, de proche en proche :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0,$$

ce que l'on pouvait aussi trouver en remarquant que f est impaire.

Et, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= -\frac{2p}{2p+1} a_{2p-1} \\ &= \left(-\frac{2p}{2p+1} \right) \left(-\frac{2p-2}{2p-1} \right) \cdots \left(-\frac{2}{3} \right) a_1 \\ &= \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)(2p-1) \cdots 3} = \frac{(-1)^p (2^p p!)^2}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

3) Déterminons le rayon R par la règle de d'Alembert.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé. Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, u_p le terme général de la série obtenue. On a alors $|u_p| > 0$ et :

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| &= \frac{(2^{p+1}(p+1)!)^2}{(2p+3)!} \frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2} |x|^2 \\ &= \frac{4(p+1)^2}{(2p+2)(2p+3)} |x|^2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} |x|^2, \end{aligned}$$

donc : $R = 1$.

6.42

L'application $f : x \longmapsto \sin(\alpha \text{Arcsin } x)$ est de classe C^∞ sur $] -1; 1[$ et on a, en dérivant, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$f'(x) = \cos(\alpha \text{Arcsin } x) \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{donc : } \sqrt{1-x^2} f'(x) = \alpha \cos(\alpha \text{Arcsin } x),$$

puis, encore en dérivant :

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x^2} f''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f'(x) \\ &= -\alpha^2 \sin(\alpha \text{Arcsin } x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\alpha^2 f(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } (1-x^2) f''(x) - x f'(x) + \alpha^2 f(x) = 0.$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0.$$

• Supposons que f soit dSE(0), $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon $R > 0$. On peut alors dériver (deux fois) terme à terme sur $] - R; R[$, d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \alpha^2 f(x) \\ &= (1-x^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\ &\quad - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - n a_n + \alpha^2 a_n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - \alpha^2)a_n) x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du DSE(0) de la fonction nulle, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2 - \alpha^2)a_n.$$

Comme $a_0 = f(0) = 0$, on déduit, de proche en proche :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0.$$

Comme $a_1 = f'(0) = \alpha$, on déduit de proche en proche :

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{(2p-1)^2 - \alpha^2}{(2p+1)(2p)} \cdots \frac{1^2 - \alpha^2}{3 \cdot 2} \alpha \\ &= \frac{\alpha}{(2p+1)!} \prod_{k=1}^p ((2k-1)^2 - \alpha^2). \end{aligned}$$

• Réciproquement, considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où a_n est défini ci-dessus.

Comme les a_{2p+1} sont tous $\neq 0$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ fixé :

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{2p+1} x^{2p+1}}{a_{2p-1} x^{2p-1}} \right| &= \left| \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} \right| |x|^2 \\ &= \left| \frac{(2p-1)^2 - \alpha^2}{(2p+1)(2p)} \right| |x|^2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} |x|^2, \end{aligned}$$

le rayon de la série entière est 1, qui est > 0 .

D'après le calcul fait plus haut, en réciproque, la somme S de la série entière est solution de (E) sur $] - 1; 1[$.

De plus : $S(0) = 0$ et $S'(0) = \alpha$.

Ainsi, f et S sont solutions de (E), sur $] - 1; 1[$ et $f(0) = S(0)$, $f'(0) = S'(0)$.

D'après le théorème de Cauchy linéaire, il en résulte :

$$\forall x \in] - 1; 1[, f(x) = S(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in] - 1; 1[$:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{(2p+1)!} \left(\prod_{k=1}^p ((2k-1)^2 - \alpha^2) \right) x^{2p+1},$$

donc f est dSE(0), de rayon, 1.

6.43 a) On a, en utilisant des DL(0) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x - (e^x - 1)}{x(e^x - 1)} \\ &= \frac{x - \left(x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)}{x(x + o(x))} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On conclut que f admet une limite finie ℓ en 0, et que : $\ell = -\frac{1}{2}$.

On prolonge f par continuité en 0, en posant : $f(0) = -\frac{1}{2}$.

b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = -\frac{x}{e^x - 1} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

• On sait : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$,

donc : $e^x - 1 - x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$,

puis, si $x \neq 0$: $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}.$

Considérons l'application

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On vient de montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^*, u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$.

De plus, cette égalité est aussi vraie pour $x = 0$, car $u(0) = \frac{1}{2}$, et le terme constant de la série entière est $\frac{1}{2}$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$.

Ceci montre que u est dSE(0) de rayon infini, donc, d'après le cours, u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• De même, et plus brièvement, l'application

$$v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi remarquer, à cet effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = xu(x) + 1.$$

• De plus, il est clair, sur la définition de v , que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, v(x) \neq 0.$$

D'après le cours, $\frac{1}{v}$ est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = -\frac{1}{v(x)}u(x)$.

Et comme $f(0) = -\frac{1}{2}$, $v(0) = 1$, $u(0) = \frac{1}{2}$, l'égalité est aussi vraie pour $x = 0$.

On a donc : $f = -\frac{1}{v}u$.

Comme u et $\frac{1}{v}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, par produit, f est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

6.44 a) Par hypothèse, f est dSE(0) de rayon $R > 0$, donc f est de classe C^∞ sur $] - R; R[$.

Puisque $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(t_n) = 0$ et que f est continue en 0, on déduit : $f(0) = 0$.

On peut se ramener, en prenant une suite extraite, au cas où la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < t_n < R.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de Rolle, puisque $f(t_n) = f(t_{n+1})$ et que f est continue sur $[t_n; t_{n+1}]$ et déri-

vable sur $]t_n; t_{n+1}[$, il existe $u_n \in]t_n; t_{n+1}[\subset]0; R[$ tel que :

$$f'(u_n) = 0.$$

On construit ainsi une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, -R < u_n < R \text{ et } u_n \neq 0 \text{ et } f'(u_n) = 0 \\ u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{cases}$$

On peut alors appliquer le résultat précédent à f' à la place de f , puisque f' est dSE(0) de même rayon que f , d'où :

$$f'(0) = 0.$$

En réitérant, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

Enfin, comme f est dSE(0), on a :

$$\forall x \in]-R; R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

b) Supposons qu'il existe $f :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, dSE(0) de rayon ≥ 1 , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, f\left(\frac{1}{n}\right) = -f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}.$$

Considérons les applications

$$g :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x) = f(x) - x^3$$

$$h :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto h(x) = f(x) + x^3.$$

Puisque f est dSE(0) de rayon ≥ 1 , g et h le sont aussi. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, g\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ et } h\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

D'après a), il en résulte :

$$\forall x \in]-1; 1[, g(x) = 0 \text{ et } h(x) = 0,$$

d'où : $\forall x \in]-1; 1[, x^3 = -x^3$, contradiction.

On conclut qu'il n'existe pas d'application f convenant.

6.45 Rappelons la définition de la fonction Γ d'Euler :

$$\forall s \in]0; +\infty[, \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \Gamma(1+x) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{x \ln t} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(x \ln t)^n}{n!} e^{-t} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln t)^n}{n!} e^{-t} \right) dt. \end{aligned}$$

Nous allons essayer de permuter intégrale et série.

Soit $x \in]-1; 1[$ fixé. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{(x \ln t)^n}{n!} e^{-t}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$, et intégrable sur $]0; +\infty[$, car $\sqrt{t} f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ et $t^2 f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

• $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et a pour somme $S : t \longmapsto e^{x \ln t} e^{-t}$.

• S est continue par morceaux (car continue) sur $]0; +\infty[$.

• Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n| &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{(x \ln t)^n}{n!} e^{-t} \right| dt \\ &= \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{+\infty} |\ln t|^n e^{-t} dt \\ &= \frac{|x|^n}{n!} \left(\underbrace{\int_0^1 (-\ln t)^n e^{-t} dt}_{\text{notée } A_n} + \underbrace{\int_1^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t} dt}_{\text{notée } B_n} \right). \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} 0 \leq A_n &\leq \int_0^1 (-\ln t)^n dt \\ &= -\ln t \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \Gamma(n+1) = n! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq B_n &\leq \int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!. \end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} |f_n| \leq \frac{|x|^n}{n!} 2n! = 2|x|^n$.

Puisque $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

D'après le théorème du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions, on peut permuter intégrale et série, d'où :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(x \ln t)^n}{n!} e^{-t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} (\ln t)^n e^{-t} dt \right) x^n. \end{aligned}$$

Ceci montre que $x \longmapsto \Gamma(1+x)$ est dSE(0), de rayon $R \geq 1$.

Comme $\Gamma(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty$, on peut préciser :

$$R = 1.$$

6.46 1) Détermination du rayon R :

Essayons d'obtenir une estimation de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$, considérons les

deux suites obtenues en remplaçant, dans l'énoncé, $\frac{1}{n+1}$, par 0, par 1. Autrement dit, considérons les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} v_0 = 0, v_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\ w_0 = 0, w_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + w_n + 1. \end{cases}$$

Une récurrence immédiate montre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq u_n \leq w_n.$$

• Calcul de v_n :

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

D'après le cours, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

On calcule (λ_1, λ_2) par les conditions initiales :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = u_0 = 0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$.

• Calcul de w_n :

Cherchons une suite constante C vérifiant la même relation de récurrence que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le réel C convient si et seulement si $C = C + C + 1$, c'est-à-dire : $C = -1$.

Considérons donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_n = w_n + 1.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} t_{n+2} &= w_{n+2} + 1 = (w_{n+1} + w_n + 1) + 1 \\ &= (w_{n+1} + 1) + (w_n + 1) = t_{n+1} + t_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. D'après le cours, il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \mu_1 r_1^n + \mu_2 r_2^n$.

On calcule (μ_1, μ_2) par les conditions initiales :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = t_0 = w_0 + 1 = 1 \\ \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 = t_1 = w_1 + 1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_1 = \frac{2 - r_2}{r_1 - r_2} \\ \mu_2 = -\frac{2 - r_1}{r_1 - r_2} \end{cases}.$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = t_n - 1 = \mu_1 r_1^n + \mu_2 r_2^n - 1$.

Comme $|r_1| > 1$ et $|r_2| < 1$, et que $\lambda_1 \neq 0$ et $\mu_1 \neq 0$,

on a :
$$\begin{cases} v_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda_1 r_1^n \\ w_n = \mu_1 r_1^n + \mu_2 r_2^n - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mu_1 r_1^n. \end{cases}$$

Il en résulte que les deux séries entières $\sum_{n \geq 0} v_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} w_n z^n$

sont de rayon $\frac{1}{r_1}$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq |u_n| \leq |w_n|$,

on déduit que la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ est de rayon :

$$R = \frac{1}{r_1} = -r_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

2) Détermination de la somme S :

Notons $S :] - R ; R[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Soit $x \in] - R ; R[$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+2} x^{n+2} &= \left(u_{n+1} + u_n + \frac{1}{n+1} \right) x^{n+2} \\ &= x(u_{n+1} x^{n+1}) + x^2(u_n x^n) + \frac{x^{n+2}}{n+1}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+1},$$

les quatre séries entières étant de rayon $\geq R$.

On a donc :

$$S(x) - (u_0 + u_1 x) = x(S(x) - u_0) + x^2 S(x) - x \ln(1 - x),$$

d'où :

$$\begin{aligned} (1 - x - x^2)S(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)x - x \ln(1 - x) \\ &= x - x \ln(1 - x). \end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in] - R ; R[, S(x) = \frac{x - x \ln(1 - x)}{1 - x - x^2}$.

6.47 a) 1) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$.

Une permutation σ ayant exactement k points fixes est définie par l'ensemble de ses k points fixes et par une permutation des $n - k$ autres éléments ne laissant fixe aucun de ces éléments. On a donc :

$$F_{n,k} = \binom{n}{k} F_{n-k,0} = \binom{n}{k} \alpha_{n-k}.$$

2) L'ensemble de toutes les permutations de $\{1, \dots, n\}$ se partitionne en sous-ensembles formés de permutations ayant exactement k points fixes, $0 \leq k \leq n$.

On a donc, par dénombrement :

$$n! = \sum_{k=0}^n F_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_{n-k}.$$

Par le changement d'indice $p = n - k$, on a donc :

$$n! = \sum_{p=0}^n \binom{n}{n-p} \alpha_p = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \alpha_p.$$

b) 1) • On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha_n = F_{n,0} \leq n!$,

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{\alpha_n}{n!} \leq 1$.

Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ est de rayon 1, par majoration,

on déduit : $R \geq 1$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Par produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes :

$$\begin{aligned} S(z) e^z &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} n! z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \end{aligned}$$

d'où :
$$S(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

2) On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$(1 - z)S(z) = e^{-z}.$$

Mais :

$$\begin{aligned} (1 - z)S(z) &= (1 - z) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n}{n!} - \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} \right) z^n.
\end{aligned}$$

Et :

$$(1-z)S(z) = e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n.$$

Par unicité du DSE(0) de $z \mapsto (1-z)S(z)$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\alpha_n}{n!} - \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

En sommant cette relation, on déduit, par télescopage :

$$\frac{\alpha_n}{n!} - \frac{\alpha_0}{0!} = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{p!},$$

puis :

$$\alpha_n = n! \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!}.$$

3) La série $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{p!}$ relève du TSCSA, donc converge, et a pour somme e^{-1} , d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\left| \alpha_n - \frac{n!}{e} \right| &= \left| n! \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!} - n! \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \right| \\
&= \left| n! \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \right| \leq n! \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < \left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right) - \alpha_n < 1,$$

donc : $\alpha_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right).$

Comme $\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} < \alpha_n < \frac{n!}{e} + \frac{1}{2},$

on déduit : $\alpha_n = \frac{n!}{e} + O(1).$

6.48

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} (\zeta(2n) - 1) = \frac{1}{n} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{2n}} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{np^{2n}}.$$

Considérons la suite double $\left(\frac{1}{np^{2n}} \right)_{n \geq 1, p \geq 2}$, qui est à termes ≥ 0 .

• Pour tout $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{np^{2n}}$ converge et a pour somme $-\ln\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$, car $\left| \frac{1}{p^2} \right| \leq \frac{1}{4} < 1$.

• La série de terme général $-\ln\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ converge car $-\ln\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p^2} \geq 0$, exemple de Riemann ($2 > 1$) et théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 .

D'après le théorème d'interversion pour les séries doubles à termes ≥ 0 , on peut permuter les deux symboles de sommation, d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (\zeta(2n) - 1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{np^{2n}} = \sum_{p=2}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Pour calculer cette somme de série, faisons apparaître un télescopage. À cet effet, travaillons sur les sommes partielles. On a, pour $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{p=2}^N -\ln\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) &= \sum_{p=2}^N -\ln \frac{p^2 - 1}{p^2} \\
&= \sum_{p=2}^N (-\ln(p-1) - \ln(p+1) + 2 \ln p) \\
&= -\sum_{p=2}^N \ln(p-1) - \sum_{p=2}^N \ln(p+1) + 2 \sum_{p=2}^N \ln p \\
&= -\sum_{p=1}^{N-1} \ln p - \sum_{p=3}^{N+1} \ln p + 2 \sum_{p=2}^N \ln p \\
&= \ln 2 + \ln \frac{N}{N+1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \ln 2.
\end{aligned}$$

On a donc : $\sum_{p=2}^{\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \ln 2,$

et on conclut : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (\zeta(2n) - 1) = \ln 2.$

6.49

a) 1) • Une récurrence immédiate montre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n > 0.$$

Considérons l'application

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1 - e^{-x}.$$

On a, par une étude immédiate des variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x : \forall x \in [0; +\infty[, \quad f(x) \leq x.$

Il en résulte que la suite récurrente $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Comme de plus $(a_n)_{n \geq 0}$ est minorée par 0, on en déduit que $(a_n)_{n \geq 0}$ converge. Notons ℓ sa limite.

L'étude des variations de $x \mapsto f(x) - x$ montre que f admet un point fixe et un seul, qui est 0.

Comme f est continue en 0, on déduit : $\ell = 0$.

On conclut : $a_n \xrightarrow[n \infty]{} 0$.

2) On a alors : $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n} \sim_{n \infty} -(-a_n) = a_n$.

3) On a donc : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \infty]{} 1$. D'après la règle de d'Alembert, il s'ensuit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est : $R = 1$.

b) On a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n - (1 - e^{-a_n})}{a_n (1 - e^{-a_n})} \\ &= \frac{a_n - \left(a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o_{n \infty}(a_n^2)\right)}{a_n(a_n + o_{n \infty}(a_n))} \xrightarrow[n \infty]{} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $b_{n+1} - b_n \sim_{n \infty} \frac{1}{2}$ et que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2}$ est divergente et à termes ≥ 0 , d'après un théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \sim_{n \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire : $b_n - b_0 \sim_{n \infty} \frac{n}{2}$.

Il s'ensuit : $b_n \sim_{n \infty} \frac{n}{2}$, et enfin : $a_n = \frac{1}{b_n} \sim_{n \infty} \frac{2}{n}$.

c) 1) Comme $R = 1$, il s'agit de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Par théorème d'équivalence pour des séries à termes ≥ 0 , on conclut que la série $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ diverge.

2) Comme $R = 1$, il s'agit de la série $\sum_{n \geq 0} a_n (-1)^n$.

C'est une série alternée, et la valeur absolue du terme général décroît (cf. a)) et tend vers 0 (cf. a)).

D'après le TSCSA, on conclut que la série $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$ converge.

6.50 a) Soit $A > 0$ fixé. Puisque la série $\sum_{n \geq 0} b_n$ divergente

est à termes ≥ 0 , on a : $\sum_{n=0}^N b_n \xrightarrow[N \infty]{} +\infty$,

donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\sum_{n=0}^N b_n \geq A + 1$.

Ayant ainsi fixé N , on a : $\sum_{n=0}^N b_n x^n \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \sum_{n=0}^N b_n$.

Il existe donc $\eta \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall x \in [1 - \eta; 1[, \sum_{n=0}^N b_n x^n \geq \left(\sum_{n=0}^N b_n\right) - 1 \geq A.$$

Comme de plus les b_n sont tous ≥ 0 et que $x \geq 0$, on a :

$$\forall x \in [1 - \eta; 1[, S_b(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n \geq A.$$

On a montré :

$$\forall A > 0, \exists \eta \in]0; 1[, \forall x \in [1 - \eta; 1[, S_b(x) \geq A.$$

On conclut : $S_b(x) \xrightarrow[x \rightarrow +1^-]{} +\infty$.

b) Puisque $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq M,$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M b_n$.

Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est de rayon 1, par majoration, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est de rayon ≥ 1 et sa somme S est définie (au moins) sur $] -1; 1[$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Puisque $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \infty]{} \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

On a, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_a(x)}{S_b(x)} - \ell \right| &= \frac{|S_a(x) - \ell S_b(x)|}{S_b(x)} \\ &= \frac{1}{S_b(x)} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \ell b_n x^n \right| \\ &= \frac{1}{S_b(x)} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \ell b_n) x^n \right| \leq \frac{1}{S_b(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - \ell b_n| x^n \\ &= \frac{1}{S_b(x)} \sum_{n=0}^N |a_n - \ell b_n| x^n + \frac{1}{S_b(x)} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n - \ell b_n| x^n. \end{aligned}$$

D'une part :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{S_b(x)} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n - \ell b_n| x^n \\ &\leq \frac{1}{S_b(x)} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \varepsilon b_n x^n \leq \frac{1}{S_b(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon b_n x^n = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$0 \leq \frac{1}{S_b(x)} \sum_{n=0}^N |a_n - \ell b_n| x^n$$

$$\leq \frac{1}{S_b(x)} \sum_{n=0}^N |a_n - \ell b_n| \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0,$$

car $\sum_{n=0}^N |a_n - \ell b_n|$ est fixé indépendamment de x ,

$$\text{et } S_b(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

Il existe donc $\eta \in]0; 1[$ tel que :

$$\forall x \in [1 - \eta; 1[, \quad 0 \leq \frac{1}{S_b(x)} \left(\sum_{n=0}^N |a_n - \ell b_n| x^n \right) \leq \varepsilon.$$

On a alors : $\forall x \in [1 - \eta; 1[, \quad \left| \frac{S_a(x)}{S_b(x)} - \ell \right| \leq 2\varepsilon.$

$$\text{On conclut : } \frac{S_a(x)}{S_b(x)} - \ell \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0,$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{S_a(x)}{S_b(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell.$$

$$a) \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{n^n}{e^n n!} > 0$$

6.51 pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ fixé :

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!} \frac{e^n n!}{n^n} |x|$$

$$= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} e |x| = |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, on conclut : $R = 1$.

$$b) \text{ D'après la formule de Stirling : } n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n},$$

$$\text{donc : } a_n = \frac{n^n}{e^n n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \text{ noté } b_n.$$

Puisque $a_n \sim b_n$ et que la série $\sum_n a_n$ est divergente à termes > 0 , d'après l'exercice 6.50, on a :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Il reste à trouver un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. À cet effet, nous allons utiliser une comparaison série/intégrale.

Soit $x \in [0; 1[$ fixé. Considérons l'application

$$\varphi_x : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{x^t}{\sqrt{t}}.$$

Il est clair que φ_x est continue et décroissante.

$$\text{De plus : } t^2 \varphi_x(t) = t^{3/2} e^{t \ln x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

par prépondérance classique, car $\ln x < 0$.

Il en résulte, par l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , que φ_x est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Par comparaison série/intégrale, on a donc :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt.$$

On calcule l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{t \ln x}}{\sqrt{t}} dt \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{e^{u^2 \ln x}}{u} 2u du$$

$$= 2 \int_1^{+\infty} e^{u^2 \ln x} du \underset{v=u\sqrt{-\ln x}}{=} \frac{2}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{+\infty} e^{-v^2} dv.$$

Comme $\sqrt{-\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$ et que $v \mapsto e^{-v^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, on a :

$$\int_{\sqrt{-\ln x}}^{+\infty} e^{-v^2} dv \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\text{D'autre part : } \frac{2}{\sqrt{-\ln x}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{2}{\sqrt{1-x}}.$$

D'où :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

On a donc, par théorème d'encadrement pour des équivalents :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\text{On conclut : } S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}.$$

On a, pour tout $n \geq 1$:

6.52
$$n \binom{p+n-1}{n} (\zeta(p+n)-1) = \sum_{k=2}^{+\infty} n \binom{p+n-1}{n} \frac{1}{k^{p+n}}.$$

Nous allons essayer d'appliquer le théorème d'interversion des sommations à la suite double $(u_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 2}$ définie par :

$$u_{n,k} = n \binom{p+n-1}{n} \frac{1}{k^{p+n}}, \text{ qui est à termes dans } \mathbb{R}_+.$$

Montrons que, pour tout $k \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 1} u_{n,k}$ converge et déterminons sa somme.

Rappelons le DSE(0) classique, de rayon 1, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned}
& (1-x)^{-p} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)}{n!} (-x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{p+n-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{n} x^n.
\end{aligned}$$

D'après le cours sur les séries entières, on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad p(1-x)^{-p-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{p+n-1}{n} x^{n-1},$$

d'où :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{px}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{p+n-1}{n} x^n.$$

Comme $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k} \in]-1; 1[$, donc la série $\sum_{n \geq 1} u_{n,k}$ converge et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} &= \frac{1}{k^p} \sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{p+n-1}{n} \left(\frac{1}{k}\right)^n \\
&= \frac{1}{k^p} \frac{p \frac{1}{k}}{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{p+1}} = \frac{p}{(k-1)^{p+1}}.
\end{aligned}$$

• La série $\sum_{k \geq 2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} \right)$ converge, puisque, d'après l'exemple de Riemann ($p+1 > 1$), la série $\sum_{k \geq 2} \frac{p}{(k-1)^{p+1}}$ converge.

D'après le théorème d'interversion des sommations, dans le cas de $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

• pour tout $n \geq 1$, la série $\sum_{k \geq 2} u_{n,k}$ converge

• la série $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} u_{n,k} \right)$ converge

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} u_{n,k}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{p+n-1}{n} \left(\zeta(p+n) - 1 \right) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p}{(k-1)^{p+1}} = p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}} = p \zeta(p+1).
\end{aligned}$$

6.53 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]-1; 1[$. Puisque f est de classe C^∞ sur $[-1; 1]$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral sur le segment joignant 0 et x :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt}_{\text{notée } R_n(x)}.$$

On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$|R_n(x)|^2 \leq \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \right| \left| \int_0^x (f^{(n)}(t))^2 dt \right|.$$

• D'une part :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \right| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{((n-1)!)^2} dt \right| \\
&= \left| - \left[\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)((n-1)!)^2} \right]_0^x \right| = \frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)((n-1)!)^2}.
\end{aligned}$$

• D'autre part :

$$\left| \int_0^x (f^{(n)}(t))^2 dt \right| \leq \int_{-1}^1 (f^{(n)}(t))^2 dt \leq (n!)^2,$$

par hypothèse.

D'où :

$$|R_n(x)|^2 \leq \frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)((n-1)!)^2} (n!)^2 = \frac{|x|^{2n-1} n^2}{2n-1}.$$

Puisque $x \in]-1; 1[$, par prépondérance classique, $\frac{|x|^{2n-1} n^2}{2n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc $R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ceci montre que la série de Taylor de f en 0 converge et a pour somme f .

On conclut : f est dSE(0), de rayon ≥ 1 .

6.54 Il est clair, par la règle de d'Alembert par exemple, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{16^n} \frac{1}{8n+p}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n (8n+p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{8n+p-1} dx.$$

Nous allons essayer de permuter intégrale et série.

Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : [0; 1/\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{2}^p x^{8n+p-1}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; 1/\sqrt{2}]$.

• $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0; 1/\sqrt{2}]$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_\infty = \sqrt{2}^p \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8n+p-1} = \frac{\sqrt{2}}{16^n}.$$

D'après un théorème du cours, on peut donc permuter intégrale et série, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n(8n+p)} &= \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{8n+p-1} dx \\ &= \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{p-1}}{1-x^8} dx. \end{aligned}$$

Notons S la somme du second membre de l'énoncé. On a alors :

$$\begin{aligned} S &= 4\sqrt{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1-x^8} dx - 2\sqrt{2}^4 \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^3}{1-x^8} dx \\ &\quad - \sqrt{2}^5 \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^4}{1-x^8} dx - \sqrt{2}^6 \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^5}{1-x^8} dx \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8} dx \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}u^3 - \sqrt{2}u^4 - \sqrt{2}u^5}{1-u^8} \frac{du}{\sqrt{2}} \\ &= 16 \int_0^1 \frac{4 - 2u^3 - u^4 - u^5}{16 - u^8} du. \end{aligned}$$

Comme 1 est racine évidente du numérateur, on a :

$$\begin{aligned} 4 - 2u^3 - u^4 - u^5 &= (1-u)(4 + 4u + 4u^2 + 2u^3 + u^4) \\ &= (1-u)(2+u^2)(2+2u+u^2) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} 16 - u^8 &= (4 - u^4)(4 + u^4) \\ &= (2 - u^2)(2 + u^2)((2 + u^2)^2 - 4u^2) \\ &= (2 - u^2)(2 + u^2)(2 - 2u + u^2)(2 + 2u + u^2). \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } S = 16 \int_0^1 \frac{1-u}{(2-u^2)(2-2u+u^2)} du.$$

On effectue une décomposition en éléments simples, et on obtient, après quelques calculs élémentaires :

$$\begin{aligned} S &= 16 \int_0^1 \left(\frac{-\frac{1}{4}u}{2-u^2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}u}{2-2u+u^2} \right) du \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} \ln(2-u^2) \right]_0^1 + 4 \underbrace{\int_0^1 \frac{2-u}{2-2u+u^2} du}_{\text{notée } J}. \end{aligned}$$

Par mise sous forme canonique d'un trinôme :

$$2 - 2u + u^2 = (u-1)^2 + 1.$$

On effectue donc le changement de variable $v = u - 1$:

$$J = \int_{-1}^0 \frac{1}{v^2+1} dv - \int_{-1}^0 \frac{v}{v^2+1} dv = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{On obtient : } S = -2 \ln 2 + 4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \pi.$$

Remarque : cette formule de Simon Plouffe permet de calculer efficacement des approximations décimales de π .

6.55 a) 1) Soit $x \in [0; a[$.

D'après l'hypothèse, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \geq 0$,

donc la suite $(S_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante.

De plus, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

D'après l'hypothèse, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n(x) \geq 0$,

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) \leq f(x)$.

Ainsi, la suite $(S_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par $f(x)$, donc converge.

Par différence, comme $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, il en résulte que la suite $(R_n(x))_{n \geq 0}$ converge.

2) Soient $n \in \mathbb{N}, (x, y) \in]0; a[$ tel que : $x < y$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} &= \frac{1}{n!x^{n+1}} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du. \end{aligned}$$

Comme $f^{(n+2)} \geq 0$, $f^{(n+1)}$ est croissante, donc :

$$\forall u \in [0; 1], f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(yu),$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(yu) du = \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}. \end{aligned}$$

3) Soit $x \in [0; a[$.

Si $x = 0$, alors, $R_n(x) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Supposons $x > 0$. Il existe $y \in]0; a[$ tel que $x < y$, par exemple $y = \frac{x+a}{2}$. On a alors, d'après 2) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq R_n(x) \leq R_n(y) \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}.$$

On a vu en a) 1) que la suite $(R_n(y))_{n \geq 0}$ converge, donc est bornée.

D'autre part, puisque $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$, on a : $\frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Il en résulte : $R_n(y) \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

puis, par théorème d'encadrement : $R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

4) On a donc, pour tout $x \in [0; a[$:

$$S_n(x) = f(x) - R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) - 0 = f(x).$$

Ceci montre que, pour tout $x \in [0; a[$, la série de Taylor de f en 0, prise en x converge et a pour somme $f(x)$.

b) Soit $x \in]-a; 0]$. On, a, en utilisant le même changement de variable qu'en a) 2) :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du \right| \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du. \end{aligned}$$

Comme $f^{(n+1)}$ est ≥ 0 et croissante, on déduit :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(0) du \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n!} \left[-\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 f^{(n+1)}(0) \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) \leq R_n(|x|). \end{aligned}$$

D'après a) 4), puisque $|x| \in [0; a[$, on a : $R_n(|x|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Il s'ensuit, par encadrement : $R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

donc : $S_n(x) = f(x) - R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$.

Ceci montre que la série de Taylor de f en 0, prise en x , converge et a pour somme $f(x)$.

c) D'après a) et b), on a :

$$\forall x \in]-a; a[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

donc f est dSE(0), de rayon $\geq a$.

Plan

Les méthodes à retenir	311
Énoncés des exercices	313
Du mal à démarrer ?	318
Corrigés	320

Thèmes abordés dans les exercices

- Calcul des coefficients de Fourier, exponentiels ou trigonométriques, d'une application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ périodique et continue par morceaux
- Développement d'une application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ périodique assez régulière en série de Fourier
- Obtention de certaines sommes de séries numériques convergentes, par exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- Obtention de certaines égalités entre intégrales et sommes de séries
- Obtention de certaines inégalités portant sur des intégrales.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition des coefficients de Fourier, exponentiels ou trigonométriques, d'une application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ périodique et continue par morceaux
- Formule(s) donnant les coefficients de Fourier d'une dérivée
- Théorème de Dirichlet de convergence simple, théorème de Dirichlet de convergence normale
- Théorème de Parseval, formule de Parseval réelle, formule de Parseval complexe.

Les méthodes à retenir

On note

$\mathcal{CM}_T$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, T -périodiques et continues par morceaux

$\mathcal{C}_T$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, T -périodiques et continues.

Pour calculer directement, quand c'est possible, les coefficients de Fourier d'un élément f de $\mathcal{CM}_T$

Appliquer, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la définition des coefficients de Fourier exponentiels de f : $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt$, $n \in \mathbb{Z}$,
ou la définition des coefficients de Fourier trigonométriques de f :

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos n\omega t dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin n\omega t dt, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Tenir compte d'une éventuelle parité ou imparité de f .

Pour calculer ces coefficients, utiliser, en général l'une des démarches suivantes :

- calcul direct

➡ Exercice 7.1 a)

- intégration par parties

➡ Exercices 7.2 a), 7.4 a), 7.7 a), 7.19 a)

- linéarisation

➡ Exercices 7.3 a), 7.6

- intervention de l'exponentielle complexe

➡ Exercices 7.7 a), 7.19 a).

Pour étudier les convergences de la série de Fourier d'un élément f de $\mathcal{CM}_T$, et préciser sa somme

Appliquer l'un des deux théorèmes de Dirichlet :

- le théorème de convergence simple, lorsque f est T -périodique et de classe C^1 par morceaux.

➡ Exercices 7.1 b), 7.19 b)

- le théorème de Dirichlet de convergence normale, lorsque f est T -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.

➡ Exercices 7.2 b), 7.3 b), 7.4 b), 7.6, 7.7, 7.22 c).

Pour obtenir des sommes de séries numériques, après avoir calculé des coefficients de Fourier

Appliquer un des deux théorèmes de Dirichlet ou une formule de Parseval.

➡ Exercices 7.1 c), 7.2 c), 7.3 c), 7.4 c), 7.7 c), 7.19 b), 7.22 c)

Les sommes de séries dont le terme général ressemble à a_n, b_n, c_n proviennent souvent d'un théorème de Dirichlet.

Les sommes de séries dont le terme général ressemble à $a_n^2, b_n^2, |c_n|^2$, proviennent souvent d'une formule de Parseval.

Pour relier entre elles des sommes de séries convergentes du genre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ et } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Séparer, dans une somme partielle, les termes d'indices pairs, d'indices impairs, puis passer aux limites.

➡ Exercices 7.1 c), 7.2 c), 7.7 c).

Pour calculer les coefficients de Fourier d'une fonction, lorsque le calcul direct ne paraît pas faisable

Exprimer la fonction comme somme d'une série de fonctions et montrer que l'on peut permuter intégrale et série par l'une des trois méthodes habituelles (cf. les méthodes à retenir du chapitre 5).

➡ Exercices 7.14, 7.15, 7.16, 7.17 a), 7.23 b)

Ne pas confondre l'indice d'un terme de la sommation donnant f initialement, et l'indice concernant le terme d'une série de Fourier.

Pour obtenir une égalité entre une fonction et une somme de série trigonométrique

Essayer d'appliquer un des deux théorèmes de Dirichlet à une fonction bien choisie.

➡ Exercice 7.6.

Pour obtenir une inégalité portant sur des intégrales de carrés de fonctions

Essayer de se ramener, quand c'est possible, à une inégalité portant sur des sommes de séries numériques, en utilisant une formule de Parseval.

➡ Exercices 7.9, 7.11, 7.13.

Énoncés des exercices

7.1 Exemple de développement en série de Fourier, créneau

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, paire, telle que, pour tout $t \in [0; \pi]$:

$$f(t) = 1 \text{ si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \quad f(t) = 0 \text{ si } t = \frac{\pi}{2}, \quad f(t) = -1 \text{ si } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi.$$

a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .

b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.

c) En déduire les sommes de séries suivantes : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(1)^p}{2p+1}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

7.2 Exemple de développement en série de Fourier, dent de scie continue

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, impaire, telle que :

$$f(t) = t \text{ si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \quad f(t) = \pi - t \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

- a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .
- b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.
- c) En déduire les sommes de séries suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

7.3 Exemple de développement en série de Fourier, courant redressé

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto |\sin t|$.

- a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .
- b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.

- c) En déduire les sommes de séries suivantes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$

7.4 Exemple de développement en série de Fourier, raccord de paraboles

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, 2\pi$ -périodique, impaire, telle que : $\forall t \in [0; \pi], f(t) = t(\pi - t)$.

- a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .
- b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.

- c) En déduire les sommes de séries : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$

7.5 Coefficients de Fourier nuls

Soit $f : [-\pi; \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt = 0$.

Montrer : $f = 0$.

7.6 Exemple de développement en série de Fourier

Montrer qu'il existe une suite réelle $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, |\cos t| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos^2 nt$,

et déterminer une telle suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7.7 Exemple de développement en série de Fourier avec paramètre

Soit $\lambda \in]0; +\infty[$ fixé. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, 2\pi$ -périodique, telle que :

$$\forall t \in]-\pi; \pi], f(t) = \operatorname{ch}(\lambda t).$$

- a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .
- b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.

- c) En déduire les sommes de séries suivantes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 + n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + n^2)^2}.$

7.8 Calcul d'une intégrale par utilisation de $\zeta(2)$

Existence et calcul de $I = \int_1^{+\infty} \frac{x - E(x)}{x^3} dx$.

7.9 Inégalité sur des intégrales

Soient $T \in]0; +\infty[$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, T -périodique, de classe C^1 , telle que :

$$\forall n \in \{-1, 0, 1\}, \int_0^{2\pi} f(t) e^{in\omega t} dt = 0.$$

Montrer : $\|f\|_2 \leq \frac{1}{2} \|f'\|_2$, où : $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, et de même pour $\|f'\|_2$.

7.10 Nullité de certains coefficients de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, continue.

On suppose : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} f(t) e^{i(2k+1)t} dt = 0$. Montrer que f est π -périodique.

7.11 Inégalité sur des intégrales

Soient $T > 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, T -périodique, de classe C^1 par morceaux, continue.

Montrer : $\int_0^T |f|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'|^2 + \frac{1}{T} \left| \int_0^T f \right|^2$.

7.12 Nullité d'une fonction par orthogonalité

On note, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $e_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{int}$, $\varphi_n = e_{n-1} + e_n + e_{n+1}$.

Soit $f \in C_{2\pi}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\varphi_n | f) = 0$, pour le produit scalaire usuel sur $C_{2\pi}$.

Montrer : $f = 0$.

7.13 Inégalité sur des intégrales

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, de classe C^2 par morceaux, de classe C^1 .

Montrer : $4 \int_0^{2\pi} |f|^2 + 2 \int_0^{2\pi} |f''|^2 \geq 5 \int_0^{2\pi} |f'|^2$.

7.14 Série de Fourier d'une série trigonométrique complexe

Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite (indexée par $\mathbb{Z}$) à termes dans $\mathbb{C}$.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $S_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \sum_{k=-p}^p \gamma_k e^{ikt}$.

On suppose que la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application notée f .

Démontrer que f est 2π -périodique, continue, et que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \gamma_n$.

7.15 Série de Fourier d'une série trigonométrique réelle

Soient $(\alpha_n)_{n \geq 0}, (\beta_n)_{n \geq 1}$ deux suites réelles telles que la suite d'applications $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, S_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application notée f .

a) Montrer que f est 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Établir : $(\forall n \geq 0, a_n(f) = \alpha_n)$ et $(\forall n \geq 1, b_n(f) = \beta_n)$.

7.16 Développement en série de Fourier par utilisation d'une série trigonométrique

Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \frac{1}{1+z e^{it}}$.

Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f .

7.17 Développement en série de Fourier par utilisation d'une série trigonométrique

Soit $a \in]0; +\infty[$. On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{\operatorname{ch} a + \cos t}$.

a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et déterminer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f . On pourra utiliser l'exercice 7.15.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^\pi \frac{\cos nt}{\operatorname{ch} a + \cos t} dt = \frac{\pi(-1)^n e^{-na}}{\operatorname{sh} a} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \frac{\sin nt}{\operatorname{ch} a + \cos t} dt = 0.$$

c) Calculer : $I = \int_0^\pi \frac{1}{(\operatorname{ch} a + \cos t)^2} dt$.

7.18 Calcul d'intégrales, connaissant $\zeta(2)$

a) Montrer : $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

(Utiliser l'exercice 7.1 ou l'exercice 7.2.)

b) En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

$$(1) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx, \quad (2) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx, \quad (3) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx,$$

puis de : (4) $\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} dx$, (5) $\int_0^1 \ln x \ln(1+x) dx$, (6) $\int_0^{+\infty} \ln \operatorname{th} x dx$,

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x + e^{2x}} dx, \quad (8) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx.$$

7.19 Exemple de développement en série de Fourier, calcul d'une intégrale

Soient $x \in [0; +\infty[$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que $f(\pi) = 0$ et :

$$\forall t \in]-\pi; \pi[, \quad f(t) = \operatorname{sh} xt.$$

a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f .

b) Étudier la convergence de la série de Fourier de f , et montrer :

$$\forall t \in]-\pi; \pi[, \quad \operatorname{sh} xt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1} n \operatorname{sh} \pi x}{\pi(n^2 + x^2)} \sin nt.$$

c) En déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} dt = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2}}$.

7.20 Utilisation des coefficients de Fourier pour la détermination d'une fonction assez régulière

Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodiques, de classe C^∞ , telles qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$.

7.21 Opérateur de translation dans $\mathcal{C}_{2\pi}$

Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des applications 2π -périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto (f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} f(t)g(t) dt$ et de la norme $\| \cdot \|_2$ associée.

On note, pour $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $\tau_a(f)$ la translatée de f par a :

$$\tau_a f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t - a).$$

a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a \in \mathcal{LC}(\mathcal{C}_{2\pi})$ et calculer $\| \tau_a \|$.

b) Démontrer que, pour toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$, $a \mapsto \tau_a f$ est continue.

7.22 Calcul d'intégrales utilisant des séries de Fourier

Soit $\alpha \in]1; +\infty[$.

a) Montrer :

$$\alpha \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + 1} = \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha-1}} + u^{-\frac{1}{\alpha}}}{1+u} du.$$

b) En déduire :

$$\alpha \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + 1} = \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \frac{2}{\alpha}}{n^2 - \frac{1}{\alpha^2}}.$$

c) Établir :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}x}{\pi(n^2 - x^2)} = \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x},$$

en étudiant, pour $x \in]0; 1[$ fixé, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que $f(t) = \cos xt$ si $t \in]-\pi; \pi]$.

d) Démontrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + 1} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}.$$

e) En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt, \quad x \in]0; 1[\qquad 2) \int_0^{+\infty} t^{x-2} \ln(1+t) dt, \quad x \in]0; 1[$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{e^{bt} + e^{ct}} dt, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad b < a < c$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{\operatorname{ch} ct} dt, \quad (a, c) \in \mathbb{R}^2, \quad |a| < c \qquad 5) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{ch} ct} dt, \quad (a, c) \in \mathbb{R}^2, \quad |a| < c.$$

7.23 Trouver une fonction dont les coefficients de Fourier vérifient des inégalités

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+$, convergeant vers 0.

a) Montrer qu'il existe une extractrice σ telle que la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_{\sigma(n)}$ converge.

b) En déduire qu'il existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, continue, telle que, en notant $a_n(f)$, $b_n(f)$ ($n \in \mathbb{N}$) les coefficients de Fourier trigonométriques de f , il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que : $|a_n(f)| + |b_n(f)| \geq \alpha_n$. (Utiliser l'exercice 7.15.)

Du mal à démarrer ?

7.1 a) • Tracer la courbe représentative de f et montrer $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

• Les b_n sont tous nuls. Pour calculer a_n , appliquer la définition des coefficients de Fourier trigonométriques de f .

b) Appliquer le théorème de Dirichlet de convergence simple.

c) • Appliquer b) en $t = 0$.

• Appliquer la formule de Parseval réelle.

• Séparer en termes d'indices pairs, d'indices impairs, d'abord sur des sommes partielles, puis passer à la limite.

7.2 a) • Tracer la courbe représentative de f et montrer $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

• Les a_n sont tous nuls. Pour calculer b_n , appliquer la définition des coefficients de Fourier trigonométriques de f . Utiliser une intégration par parties.

b) Appliquer le théorème de Dirichlet de convergence normale.

c) • Appliquer b) en $t = \frac{\pi}{2}$.

• Séparer en termes d'indices pairs, d'indices impairs, d'abord sur des sommes partielles, puis passer à la limite.

• Appliquer la formule de Parseval réelle.

• Séparer en termes d'indices pairs, d'indices impairs, d'abord sur des sommes partielles, puis passer à la limite.

7.3 a) • Tracer la courbe représentative de f et montrer $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

• Les b_n sont tous nuls. Pour calculer a_n , appliquer la définition des coefficients de Fourier trigonométriques de f , en n'oubliant pas qu'ici la pulsation est $\omega = 2$. Utiliser une linéarisation.

b) Appliquer le théorème de Dirichlet de convergence normale.

c) • Appliquer b) en $t = 0$, en $t = \frac{\pi}{2}$.

• Appliquer la formule de Parseval réelle.

7.4 a) • Tracer la courbe représentative de f et montrer $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

• Les a_n sont tous nuls. Pour calculer b_n , appliquer la définition des coefficients de Fourier trigonométriques de f . Faire deux intégrations par parties successives, en gardant le facteur $t(\pi - t)$ groupé.

b) Appliquer le théorème de Dirichlet de convergence normale.

c) • Appliquer b) en $t = \frac{\pi}{2}$.

• Appliquer la formule de Parseval réelle.

• Séparer en termes d'indices pairs, d'indices impairs, d'abord sur des sommes partielles, puis passer à la limite.

7.5 Considérer $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodisée de f .

7.6 Développer $t \mapsto |\cos t|$ en série de Fourier, puis exprimer les $\cos 2nt$ à l'aide de $\cos^2 nt$.

7.7 a) • Tracer la courbe représentative de f (pour λ fixé) et montrer $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

• Les b_n sont tous nuls. Pour calculer a_n , appliquer la définition des coefficients de Fourier trigonométriques de f . Utiliser l'exponentielle complexe, ou bien faire deux intégrations par parties successives.

b) Appliquer le théorème de Dirichlet de convergence normale.

c) • Appliquer b) en $t = 0$, en $t = \pi$.

• Appliquer la formule de Parseval réelle.

7.8 1) Existence : Étude en $+\infty$ par majoration.

2) Calcul : Pour $N \in \mathbb{N}^*$, décomposer l'intégrale $\int_1^{N+1} \frac{x - E(x)}{x^3} dx$, à l'aide de la relation de Chasles, en faisant intervenir $I_n = \int_n^{n+1} \frac{x - n}{x^3} dx$. Calculer I_n et terminer.

7.9 Appliquer la formule de Parseval complexe à f et à f' , et utiliser la formule donnant les coefficients de Fourier exponentiels de f' en fonction de ceux de f .

7.10 Considérer l'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t + \pi) - f(t).$$

7.11 Appliquer la formule de Parseval complexe à f et à f' , et utiliser la formule donnant les coefficients de Fourier exponentiels de f' en fonction de ceux de f .

7.12 Noter $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto (e^{it} - 2 + e^{-it})f(t)$,

et montrer : $\forall n \in \mathbb{Z}, (e_n | g) = 0$.

En déduire, convenablement, $g = 0$, puis, convenablement, $f = 0$.

7.13 Appliquer la formule de Parseval complexe à f , à f' , à f'' , et utiliser les formules donnant les coefficients de Fourier exponentiels de f' et de f'' en fonction de ceux de f .

7.14 1) Montrer que f est 2π -périodique, par limite simple.

2) Montrer que f est continue, par limite uniforme.

3) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ fixé :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} S_p(t) e^{-int} dt \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} f(t) e^{-int} dt.$$

7.15 a) • Montrer que f est 2π -périodique, par limite simple.

• Montrer que f est continue, par limite uniforme.

b) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos pt dt \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos pt dt.$$

7.16 Développer $\frac{1}{1+z e^{it}}$ à l'aide de la série géométrique, puis montrer que l'on peut permuter intégrale et série.

7.17 a) Utiliser l'exponentielle complexe pour obtenir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} a} \left(\frac{e^a}{e^{it} + e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{it} + e^{-a}} \right),$$

puis utiliser la série géométrique pour obtenir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} a} + \frac{2}{\operatorname{sh} a} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-na} \cos nt,$$

et enfin montrer que l'on peut permuter intégrale et série.

c) Appliquer la formule de Parseval réelle.

7.18 a) Utiliser le DSE(0) de $x \mapsto \ln(1+x)$. Par continuité et convergence uniforme sur un segment, montrer que l'on peut permuter intégrale et série. Obtenir :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

b) 1) Intégration par parties.

2), 3) Noter

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx, \quad J = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx, \quad K = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

Montrer : $I + J = 2K$, $I = 4J - 4K$. En déduire J, K .

4) Séparer par linéarité.

5) Intégration par parties.

6) Changement de variable $u = \ln x$.

7) Changement de variable $u = e^x$.

8) Changement de variable $u = e^{-x}$.

7.19 a) Pour calculer les b_n , utiliser l'exponentielle complexe, ou bien deux intégrations par parties successives.

b) Appliquer le théorème de Dirichlet de convergence simple.

c) Développer $\frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}$ à l'aide de la série géométrique, montrer que l'on peut permuter intégrale et série par étude de l'intégrale du reste, et obtenir :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

Utiliser enfin b).

7.20 1) Soit f convenant. Utiliser la relation exprimant les coefficients de Fourier exponentiels de $f^{(k)}$ en fonction de ceux de f . En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}, c_n(f) = 0,$$

puis montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c_{-1}(f) e^{-ix} + c_0(f) + c_1(f) e^{ix}.$$

2) Étudier la réciproque.

7.21 a) • Montrer que τ_a est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$.

• Obtenir : $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \|\tau_a(f)\|_2 = \|f\|_2.$

b) Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ fixée, montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $a \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

7.22 a) Relation de Chasles et changement de variable $v = \frac{1}{t}$ dans une des deux intégrales, puis changement de variable $u = t^\alpha$.

b) Utiliser le DSE(0) de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ et montrer que l'intégrale du reste tend vers 0. En déduire que l'on peut permuter intégrale et série.

c) Appliquer le théorème de Dirichlet de convergence normale à f .

d) Utiliser b) et c).

e) 1) Changement de variable $u = t^x$.

2) Intégration par parties.

3) Changement de variable $u = e^{(c-b)t}$.

4) Cas particulier de 3).

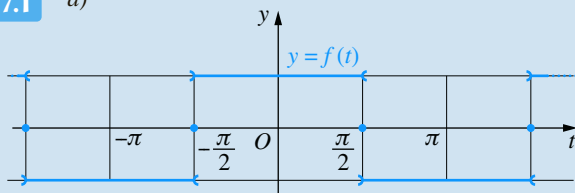
5) Appliquer 4).

7.23 a) Construire $\sigma(0)$ tel que $a_{\sigma(0)} < 1$, puis $\sigma(1)$ tel que $a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} < 1$, etc.

b) Considérer la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \alpha_n$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = \sigma(k)$, $u_n = 0$ sinon, et considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto u_n \cos nt$.

Corrigés des exercices

7.1 a)



Il est clair que f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, et les coefficients de Fourier (trigonométriques) a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$) de f existent.

Puisque f est paire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la parité de f :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nt \, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nt \, dt \right). \end{aligned}$$

On a donc $a_0 = 0$, et, pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \left([\sin nt]_0^{\pi/2} - [\sin nt]_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{4}{\pi n} \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right).$$

On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)}.$$

b) Puisque f est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet de convergence simple, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\tilde{f}$ de f .

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)} \cos(2p+1)t.$$

c) • En remplaçant t par 0 dans le résultat de b), on obtient :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)} = 1, \text{ donc : } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

• Puisque $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, d'après la formule de Parseval réelle, on a :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, dt,$$

$$\text{c'est-à-dire ici : } \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2p+1)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dt = 1,$$

$$\text{d'où : } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

• Soit $N \in \mathbb{N}$. On a, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini, et puisque les séries qui interviennent convergent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

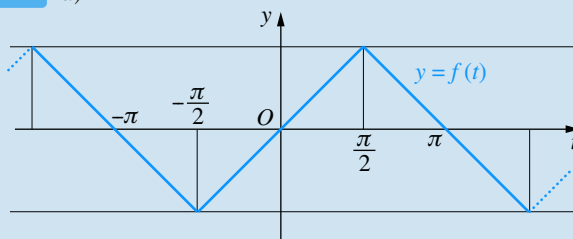
donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Réponse :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7.2 a)



Il est clair que f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (et même, continue sur $\mathbb{R}$), donc $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et les coefficients de Fourier (trigonométriques) a_n, b_n , ($n \in \mathbb{N}$) de f existent.

Puisque f est impaire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'imparité de f :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} t \sin nt \, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin nt \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} t \sin nt \, dt + \int_0^{\pi/2} u \sin(n\pi - nu) \, du \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} t \sin nt \, dt - (-1)^n \int_0^{\pi/2} u \sin nu \, du \right) \\ &= \frac{2}{\pi} (1 + (-1)^n) \int_0^{\pi/2} t \sin nt \, dt. \end{aligned}$$

Il s'ensuit : $\forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p} = 0$,

et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} b_{2p+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \sin(2p+1)t \, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\left[-t \frac{\sin(2p+1)t}{2p+1} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2p+1)t}{2p+1} \, dt \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(2p+1)t}{2p+1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2}. \end{aligned}$$

b) Puisque f est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément, absolument, simplement) sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f .

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2} \sin(2p+1)t$.

Remarque : La convergence normale résulte aussi de :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left| \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2} \sin(2p+1)t \right| \leq \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$$

et de la convergence de la série numérique $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

c) • En remplaçant t par $\frac{\pi}{2}$ dans le résultat de b), on obtient :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

donc : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

• On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini, et puisque les séries qui interviennent convergent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

d'où : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

• Puisque $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on a, d'après la formule de Parseval réelle :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, dt,$$

c'est-à-dire ici :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2p+1)^4} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t))^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} t^2 \, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-t)^2 \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} t^2 \, dt + \int_0^{\pi/2} u^2 \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t^2 \, dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

d'où : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{2\pi^2}{16} \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^4}{96}$.

• Comme en 1), en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs et puisque les séries qui interviennent convergent, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4},$$

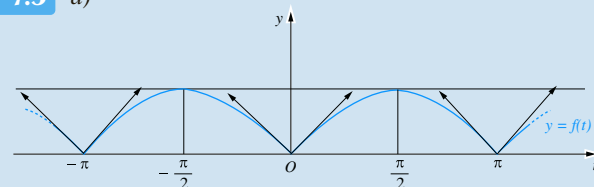
donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{16}{15} \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Réponse : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7.3 a)



L'application $f : t \mapsto |\sin t|$ est π -périodique et continue par morceaux (car continue), donc $f \in \mathcal{CM}_{\pi}$, et les coefficients de Fourier (trigonométriques) a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$) de f existent.

Comme f est paire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos 2nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos 2nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}. \end{aligned}$$

On conclut : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n = -\frac{4}{\pi(4n^2 - 1)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0. \end{cases}$

b) L'application f est π -périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément, absolument, simplement, sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f . D'où :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt) \\ &= \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2nt. \end{aligned}$$

c) • En remplaçant t par 0 dans le résultat de b), on obtient :

$$0 = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2 - 1)},$$

d'où :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

• En remplaçant t par $\frac{\pi}{2}$ dans le résultat de b), on obtient :

$$1 = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2 - 1)} (-1)^n,$$

d'où :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

• Puisque $f \in \mathcal{CM}_\pi$, d'après la formule de Parseval réelle :

$$\frac{a_0^2}{4} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t))^2 dt,$$

c'est-à-dire ici :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2 - 1)^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2nt) dt = \frac{1}{2\pi} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

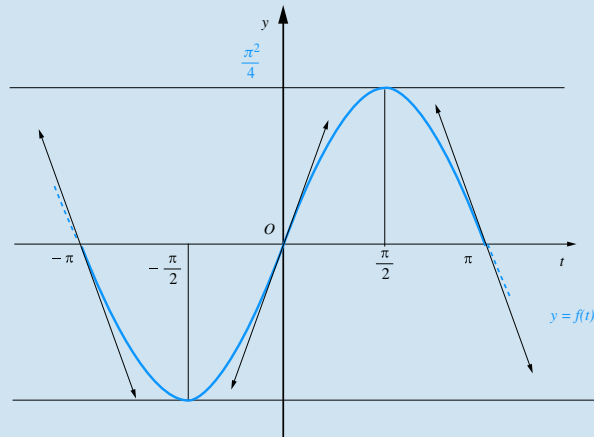
et on conclut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \right) = \frac{\pi^2 - 2}{16}.$$

Réponse :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 2}{16}.$$

7.4 a) Il est clair que f est 2π -périodique (par définition) et continue par morceaux (et même continue) sur $\mathbb{R}$, donc les coefficients de Fourier (trigonométriques) a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$) de f existent (voir schéma ci-après).



De plus, f est impaire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{[2\pi]} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t(\pi - t) \sin nt dt \\ &\stackrel{\text{ipp}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\left[-t(\pi - t) \frac{\cos nt}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\pi + 2t) \frac{\cos nt}{n} dt \right) \\ &= -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi (2t - \pi) \cos nt dt \\ &\stackrel{\text{ipp}}{=} -\frac{2}{\pi n} \left(\left[(2t - \pi) \frac{\sin nt}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \frac{\sin nt}{n} dt \right) \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \int_0^\pi \sin nt dt = -\frac{4}{\pi n^2} \left[\frac{\cos nt}{n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3}. \end{aligned}$$

On conclut :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3}. \end{cases}$$

b) Puisque f est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$), d'après le théorème de convergence normale de Dirichlet, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément, absolument, simplement, sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f . On a donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3} \sin nt. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\forall t \in [0; \pi], t(\pi - t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3} \sin nt.$$

c) 1) En remplaçant t par $\frac{\pi}{2}$ dans le résultat de b), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{4} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2p+1)^3} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8(-1)^p}{\pi(2p+1)^3},\end{aligned}$$

car les termes d'indices pairs sont tous nuls, d'où :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

2) Puisque f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on a, d'après la formule de Parseval :

$$\underbrace{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)}_{\text{noté PM}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} (f(t))^2 dt}_{\text{noté SM}}.$$

Ici :

$$\text{PM} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16(1 - (-1)^n)^2}{\pi^2 n^6} = \frac{32}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$$

car les termes d'indices pairs sont tous nuls, et :

$$\begin{aligned}\text{SM} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (t(\pi - t))^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (t^4 - 2\pi t^3 + t^2 \pi^2) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^5}{5} - 2\pi \frac{t^4}{4} + \pi^2 \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^5}{5} - 2\pi \frac{\pi^4}{4} + \pi^2 \frac{\pi^3}{3} \right) = \pi^4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi^4}{30}.\end{aligned}$$

On a donc : $\frac{32}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^4}{30},$

d'où : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$

3) On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^6} &= \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^6} + \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^6} \\ &= \frac{1}{2^6} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p^6} + \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^6},\end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini, et puisque les séries qui interviennent convergent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{2^6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6},$$

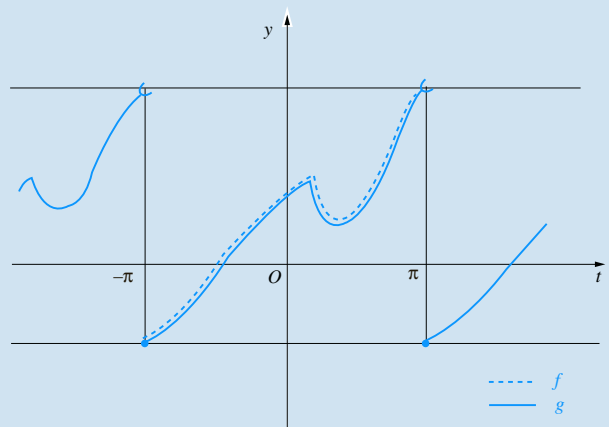
et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^6}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{64}{63} \frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Réponse : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

7.5 Considérons l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, coïncidant avec f sur $[-\pi; \pi[$ et 2π -périodique.



Ainsi, $g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

Les coefficients de Fourier exponentiels de g sont, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = 0.$$

D'après le cours, il en résulte $g = 0$, donc, en particulier :

$$\forall t \in [-\pi; \pi[, \quad f(t) = g(t) = 0.$$

Enfin, comme f est continue en π , on a aussi $f(\pi) = 0$, et on conclut : $f = 0$.

7.6 Nous allons développer $t \mapsto |\cos t|$ en série de Fourier, puis exprimer les $\cos 2nt$ à l'aide de $\cos^2 nt$.

• L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto |\cos t|$ est π -périodique et continue par morceaux (et même continue), donc admet des coefficients de Fourier (trigonométriques), notés a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$).

De plus, f est paire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| \cos 2nt \, dt \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos 2nt \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t) \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{(-1)^n}{2n-1} \right) = -\frac{4(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}.
\end{aligned}$$

On conclut :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0. \end{cases}$$

• Puisque f est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément, absolument, simplement, sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f .

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nt \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} (2 \cos^2 nt - 1) \\
&= \underbrace{\left(\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \right)}_{\text{noté } \alpha_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}}_{\text{noté } \alpha_n} \cos^2 nt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos^2 nt.
\end{aligned}$$

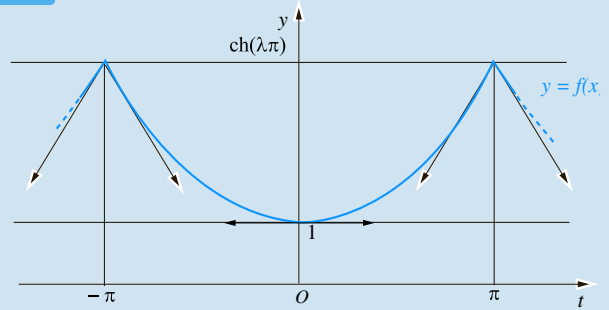
Ceci montre l'existence d'une suite réelle $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convenant.

De plus, en remplaçant t par 0 dans la formule initiale, on dé-

duit : $1 = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$, puis :

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} = \frac{2}{\pi} - \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{4}{\pi} - 1.$$

7.7 a)



Il est clair que f est 2π -périodique (par définition) et continue par morceaux (et même continue) sur $\mathbb{R}$, donc f admet des coefficients de Fourier (trigonométriques) notés a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$).

De plus, f est paire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{[2\pi]} f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{ch } \lambda t \cos nt \, dt.$$

1^{re} méthode : utilisation de l'exponentielle complexe :

On a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(e^{(\lambda+in)t} + e^{(\lambda-in)t} + e^{(-\lambda+in)t} + e^{(-\lambda-in)t} \right) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(\lambda+in)t}}{\lambda+in} + \frac{e^{(\lambda-in)t}}{\lambda-in} + \frac{e^{(-\lambda+in)t}}{-\lambda+in} + \frac{e^{(-\lambda-in)t}}{-\lambda-in} \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{(\lambda+in)\pi}}{\lambda+in} + \frac{e^{(\lambda-in)\pi}}{\lambda-in} + \frac{e^{(-\lambda+in)\pi}}{-\lambda+in} + \frac{e^{(-\lambda-in)\pi}}{-\lambda-in} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}}{\lambda+in} + \frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}}{\lambda-in} - \frac{(-1)^n e^{-\lambda\pi}}{\lambda-in} - \frac{(-1)^n e^{-\lambda\pi}}{\lambda+in} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} (-1)^n (e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}) \left(\frac{1}{\lambda+in} + \frac{1}{\lambda-in} \right) \\
&= \frac{(-1)^n \text{sh } \lambda\pi}{\pi} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + n^2}.
\end{aligned}$$

2^e méthode : Utilisation de deux intégrations par parties :

On a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \text{ch } \lambda t \cos nt \, dt \\
&\stackrel{\text{ipp}}{=} \left[\frac{\text{sh } \lambda t}{\lambda} \cos nt \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\text{sh } \lambda t}{\lambda} (-n \sin nt) \, dt \\
&= \frac{(-1)^n \text{sh } \lambda\pi}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} \int_0^\pi \text{sh } \lambda t \sin nt \, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n \operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda} \\
&\quad + \frac{n}{\lambda} \left(\left[\frac{\operatorname{ch} \lambda t}{\lambda} \sin nt \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch} \lambda t}{\lambda} (n \cos nt) dt \right) \\
&= \frac{(-1)^n \operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda} - \frac{n^2}{\lambda^2} \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch} \lambda t}{\lambda} \cos nt dt.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \operatorname{ch} \lambda t \cos nt dt \\
&= \frac{1}{1 + \frac{n^2}{\lambda^2}} \frac{(-1)^n \operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda} = \frac{(-1)^n \lambda \operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda^2 + n^2},
\end{aligned}$$

et donc : $a_n = \frac{2(-1)^n \lambda \operatorname{sh} \lambda \pi}{\pi(\lambda^2 + n^2)}.$

b) Il est clair que f est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément, absolument, simplement) sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f . On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\
&= \frac{\operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda \pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \lambda \operatorname{sh} \lambda \pi}{\pi(\lambda^2 + n^2)} \cos nt.
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\forall t \in [-\pi; \pi], \quad \operatorname{ch} \lambda t = \frac{\operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda \pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \lambda \operatorname{sh} \lambda \pi}{\pi(\lambda^2 + n^2)} \cos nt.$$

c) 1) En remplaçant t par 0 dans le résultat de b), on obtient :

$$1 = \frac{\operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda \pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \lambda \operatorname{sh} \lambda \pi}{\pi(\lambda^2 + n^2)},$$

d'où : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda \pi} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda \pi} \right).$

2) En remplaçant t par π dans le résultat de b), on obtient :

$$\operatorname{ch} \lambda \pi = \frac{\operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda \pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \lambda \operatorname{sh} \lambda \pi}{\pi(\lambda^2 + n^2)} (-1)^n,$$

d'où : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 + n^2} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda \pi} \left(\operatorname{ch} \lambda \pi - \frac{\operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda \pi} \right).$

3) Puisque f est 2π -périodique et continue par morceaux, d'après la formule de Parseval réelle, on a :

$$\underbrace{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)}_{\text{noté PM}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} (f(t))^2 dt}_{\text{noté SM}}.$$

Et : $\text{PM} = \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda \pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\lambda^2 \operatorname{sh}^2 \lambda \pi}{\pi^2(\lambda^2 + n^2)^2},$

$$\begin{aligned}
\text{SM} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{ch}^2 \lambda t dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 + \operatorname{ch} 2\lambda t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[t + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda t}{2\lambda} \right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi} \left(\pi + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda \pi}{2\lambda \pi} \right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + n^2)^2} \\
&= \left[\frac{1}{2\pi} \left(\pi + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda \pi}{2\lambda \pi} \right) - \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda \pi}{\lambda \pi} \right)^2 \right] \frac{\pi^2}{2\lambda^2 \operatorname{sh}^2 \lambda \pi} \\
&= \frac{\lambda^2 \pi^2 + \lambda \pi \operatorname{sh} \lambda \pi \operatorname{ch} \lambda \pi - 2 \operatorname{sh}^2 \lambda \pi}{4\lambda^4 \operatorname{sh}^2 \lambda \pi}.
\end{aligned}$$

7.8 1) Existence :

L'application $f : x \mapsto \frac{x - E(x)}{x^3}$ est continue sur $[1; +\infty[$,

et : $\forall x \in [1; +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^3}.$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ ($3 > 1$) et le théorème de majoration pour des fonctions ≥ 0 , on conclut que f est intégrable sur $[1; +\infty[$, donc l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} f(x) dx$ existe.

2) Calcul :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a, en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_1^{N+1} \frac{x - E(x)}{x^3} dx &= \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{x - E(x)}{x^3} dx \\
&= \sum_{n=1}^N \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{x - n}{x^3} dx}_{\text{notée } I_n}.
\end{aligned}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{n}{x^3} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{n}{2x^2} \right]_n^{n+1} \\
&= \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{(n+1)^2} - \frac{n}{n^2} \right) \\
&= \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1) - 1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& \int_1^{N+1} \frac{x - E(x)}{x^3} dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^2} \\
&= 1 - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2} \\
&\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Finalement : $\int_1^{+\infty} \frac{x - E(x)}{x^3} dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$

7.9 Puisque f et f' sont T -périodiques et continues par morceaux (car continues), on peut leur appliquer la formule de Parseval, donc :

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \\
\|f'\|_2^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T |f'(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, par hypothèse :

$$c_{-1}(f) = c_0(f) = c_1(f) = 0.$$

De plus, comme f est T -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, d'après le cours :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = in\omega c_n(f),$$

d'où : $c_{-1}(f') = c_0(f') = c_1(f') = 0.$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\|f'\|_2^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| \geq 2} |c_n(f')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| \geq 2} n^2 |c_n(f)|^2 \\
&\geq \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| \geq 2} |c_n(f)|^2 = 4\|f\|_2^2,
\end{aligned}$$

et on conclut : $\|f\|_2 \leq \frac{1}{2} \|f'\|_2.$

7.10 Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto f(t + \pi) - f(t).$$

Ainsi : $g = \tau_{-\pi} f - f.$

Puisque $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, d'après le cours, on a donc $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
c_n(g) &= c_n(\tau_{-\pi} f - f) = c_n(\tau_{-\pi} f) - c_n(f) \\
&= e^{in\pi} c_n(f) - c_n(f) = ((-1)^n - 1) c_n(f).
\end{aligned}$$

En particulier (pour n pair) : $\forall p \in \mathbb{Z}, c_{2p}(g) = 0.$

D'autre part, par hypothèse (pour n impair) :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, c_{2p+1}(f) = 0,$$

donc : $\forall p \in \mathbb{Z}, c_{2p+1}(g) = -2c_{2p+1}(f) = 0.$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0.$

Comme, d'après le cours, l'application

$$\mathcal{C}_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, f \longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$$

est linéaire injective, on déduit $g = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t + \pi) = f(t),$$

et on conclut que f est π -périodique.

7.11 Puisque f est T -périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, f admet des coefficients de Fourier (exponentiels), définis par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

et on a, par la formule de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

De même, puisque f' est T -périodique et continue par morceaux, f' admet des coefficients de Fourier (exponentiels), et on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = in\omega c_n(f),$$

$$\text{et : } \frac{1}{T} \int_0^T |f'|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T |f|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \\
&= |c_0(f)|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f)|^2}{n^2 \omega^2} \leq |c_0(f)|^2 + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 \\
&= \left| \frac{1}{T} \int_0^T f \right|^2 + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \\
&= \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T f \right|^2 + \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{T} \int_0^T |f'|^2 \\
&= \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T f \right|^2 + \frac{T}{4\pi^2} \int_0^T |f'|^2.
\end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \int_0^T |f|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'|^2 + \frac{1}{T} \left| \int_0^T f \right|^2.$$

7.12 On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi_n | f) = (e_{n-1} - 2e_n + e_{n+1} | f) \\ &= (e_{n-1} | f) - 2(e_n | f) + (e_{n+1} | f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} \left(e^{-i(n-1)t} - 2e^{-int} + e^{-i(n+1)t} \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} e^{-int} \underbrace{(e^{it} - 2 + e^{-it})}_{\text{noté } g(t)} f(t) dt. \end{aligned}$$

L'application g est 2π -périodique, continue, et :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e_n | g) = 0.$$

D'après le cours, il en résulte : $g = 0$.

$$\text{Ainsi : } \forall t \in \mathbb{R}, (e^{it} - 2 + e^{-it})f(t) = 0.$$

$$\text{Mais : } \forall t \in \mathbb{R}, e^{it} - 2 + e^{-it} = 2\cos t - 2 = -4\sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$\text{On a donc : } \forall t \in \mathbb{R}, \left(\sin^2 \frac{t}{2} \right) f(t) = 0,$$

$$\text{d'où : } \forall t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}, f(t) = 0.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, l'égalité est encore vraie, par passage à la limite, en les points de $2\pi\mathbb{Z}$, et on conclut : $f = 0$.

7.13 Puisque f est 2π -périodique, de classe C^2 par morceaux et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier de f, f', f'' existent et vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = in c_n(f), \quad c_n(f'') = (in)^2 c_n(f).$$

De plus, comme f, f', f'' sont dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on peut leur appliquer la formule de Parseval :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f''|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f'')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 |c_n(f)|^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{2\pi} |f|^2 - 5 \int_0^{2\pi} |f'|^2 + 2 \int_0^{2\pi} |f''|^2 \\ = 2\pi \left(4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 - 5 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \right. \\ \left. + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 |c_n(f)|^2 \right) \\ = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} (4 - 5n^2 + 2n^4) |c_n(f)|^2. \end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta = -7$ est < 0 , donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, 4 - 5n^2 + 2n^4 > 0,$$

et on déduit l'inégalité demandée.

7.14 1) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $\forall p \in \mathbb{N}, S_p(t + 2\pi) = S_p(t)$.

D'où, en faisant tendre l'entier p vers l'infini, puisque $(S_p)_p$ converge uniformément, donc simplement, vers f :

$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

Ceci montre que f est 2π -périodique.

2) Puisque chaque S_p est continue sur $\mathbb{R}$ et que $(S_p)_p$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, d'après un théorème du cours, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé.

Puisque :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |S_p(t) e^{-int} - f(t) e^{-int}| \leq |S_p(t) - f(t)|,$$

et que $(S_p)_p$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, la suite d'applications $(t \mapsto S_p(t) e^{-int})_{p \geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers l'application $t \mapsto f(t) e^{-int}$.

D'après un théorème du cours, il en résulte :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} S_p(t) e^{-int} dt \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} f(t) e^{-int} dt.$$

Mais, comme la famille $(t \mapsto e^{-ikt})_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ pour le produit scalaire canonique, on a, pour tout $p \geq n$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} S_p(t) e^{-int} dt = \sum_{k=-p}^p \gamma_k \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} e^{ikt} e^{-ipt} dt = \gamma_n.$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} f(t) e^{-int} dt = \gamma_n.$$

7.15 a) On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(t + 2\pi) = S_n(t)$,

d'où, puisque $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.S.} f$: $\forall t \in \mathbb{R}, f(t + 2\pi) = f(t)$, et donc f est 2π -périodique.

• Puisque $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ et que les S_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$.

Puisque $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f$ et que $t \mapsto \cos pt$ est bornée, la suite d'applications $(t \mapsto S_n(t) \cos pt)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $(t \mapsto f(t) \cos pt)$. De plus, les $t \mapsto S_n(t) \cos pt$ ($n \in \mathbb{N}$) sont continues sur le segment $[-\pi; \pi]$.

On peut donc intervertir $\int_{-\pi}^{\pi}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty}$, d'où :

$$\begin{aligned}
a_p(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) \right) \cos pt \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(t) \cos pt) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos pt \, dt \right).
\end{aligned}$$

Mais, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos pt \, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = p = 0 \\ \pi & \text{si } k = p \neq 0 \\ 0 & \text{si } k \neq p \end{cases}$$

$$\text{et } \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos pt \, dt = 0,$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos pt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ \alpha_p & \text{si } n \geq p \end{cases}.$$

Ainsi : $a_p(f) = \alpha_p$.

On obtient de même (pour $p \geq 1$) : $b_p(f) = \beta_p$.

7.16 L'application f est 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$, donc $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, et les coefficients de Fourier exponentiels c_n ($n \in \mathbb{Z}$) de f existent.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $|z e^{it}| = |z| < 1$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1 + z e^{it}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z e^{it})^k,$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où : } c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{1 + z e^{it}} \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-z e^{it})^k \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \right) dt,
\end{aligned}$$

où on a noté, pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto (-1)^k z^k e^{i(k-n)t}$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [-\pi; \pi], |f_k(t)| = |z|^k$.

Comme $|z| < 1$, il en résulte que $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement,

donc uniformément, sur $[-\pi; \pi]$. Puisque chaque f_k est continue sur le segment $[-\pi; \pi]$, on peut alors intervertir $\int_{-\pi}^{\pi}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(t) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} \, dt.
\end{aligned}$$

$$\text{Mais : } \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} \, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}.$$

$$\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \begin{cases} (-1)^n z^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

7.17 a) L'application f est 2π -périodique et continue (car $\text{ch } a > 1 \geq -\cos t$), donc $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f existent. Le but de la question b) étant d'obtenir ces coefficients, nous n'allons pas procéder de la façon directe utilisée dans les exercices 7.1 à 7.4.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{2}{2 \text{ch } a + e^{it} + e^{-it}} = \frac{2e^{it}}{e^{2it} + 2e^{it} \text{ch } a + 1}.$$

Par une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\begin{aligned}
\frac{2X}{X^2 + 2X \text{ch } a + 1} &= \frac{2X}{(X + e^a)(X + e^{-a})} \\
&= \frac{1}{\text{sh } a} \left(\frac{e^a}{X + e^a} - \frac{e^{-a}}{X + e^{-a}} \right),
\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\text{sh } a} \left(\frac{e^a}{e^{it} + e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{it} + e^{-a}} \right).$$

Remarquons que, puisque $a \in]0; +\infty[$, $0 < e^{-a} < 1 < e^a$, d'où, en utilisant des séries géométriques, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\text{sh } a} \left(\frac{1}{1 + e^{-a+it}} - \frac{e^{-a-it}}{1 + e^{-a-it}} \right) \\
&= \frac{1}{\text{sh } a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (e^{-a+it})^n - e^{-a-it} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (e^{-a-it})^n \right) \\
&= \frac{1}{\text{sh } a} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-na+int} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-na-int} \right) \\
&= \frac{1}{\text{sh } a} + \frac{2}{\text{sh } a} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-na} \cos nt.
\end{aligned}$$

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \left| (-1)^n e^{-na} \cos nt \right| \leq e^{-na}$, et que

$0 \leq e^{-a} < 1$, la série d'applications $\sum_{n \geq 1} (t \mapsto (-1)^n e^{-na} \cos t)$

converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'après l'exercice 7.15, on conclut :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & a_n(f) = \frac{2(-1)^n e^{-na}}{\text{sh } a} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & b_n(f) = 0. \end{cases}$$

b) D'après a), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{\text{ch } a + \cos t} \, dt &= \frac{\pi}{2} a_n(f) = \frac{\pi(-1)^n e^{-na}}{\text{sh } a}, \\
\int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{\text{ch } a + \cos t} \, dt &= \frac{\pi}{2} b_n(f) = 0.
\end{aligned}$$

c) Puisque $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on a, d'après la formule de Parseval réelle, et puisque f est paire :

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t))^2 dt. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{1}{(\operatorname{ch} a + \cos t)^2} dt &= \int_0^{\pi} (f(t))^2 dt \\ &= \pi \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 a} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4e^{-2na}}{\operatorname{sh}^2 a} \right) = \frac{\pi}{\operatorname{sh}^2 a} + \frac{2\pi}{\operatorname{sh}^2 a} \frac{e^{-2a}}{1 - e^{-2a}} \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sh}^2 a} \frac{1 + e^{-2a}}{1 - e^{-2a}} = \frac{\pi}{\operatorname{sh}^2 a} \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a} = \frac{\pi \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh}^3 a}. \end{aligned}$$

7.18 a) Remarquer d'abord que $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur $]0; 1]$.

D'après le DSE(0) de $x \mapsto \ln(1+x)$, on a :

$$\forall x \in [0; 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

$$\text{d'où : } \forall x \in]0; 1[, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}.$$

• La série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformément sur $[0; 1]$. En effet, pour tout x de $[0; 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est alternée et $(|f_n(x)|)_{n \geq 1}$ décroît et tend vers 0. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1],$$

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \\ &= \frac{x^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \|R_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

• Puisque chaque f_n est continue sur $[0; 1]$ et que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$, on peut intervertir $\int_0^1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}$, d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}. \end{aligned}$$

• En séparant les termes d'indices pairs ou impairs et puisque les séries envisagées sont absolument convergentes :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1)^{n-1}}{n^2} &= - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

b) 1) À l'aide d'une intégration par parties, puisque $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ sont intégrables sur $]0; 1]$ et que $\ln x \ln(1+x)$ admet une limite finie (0) en 0^+ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx \\ = \left[\ln x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

2), 3) Notons $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}$, $J = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$, $K = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ (qui existent).

$$\text{On a : } I + J = \int_0^1 \frac{2 \ln x}{1-x^2} dx = 2K.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} J &= \int_{[y=\sqrt{x}]} \frac{2 \ln y}{1-y^2} 2y dy \\ &= 4 \int_0^1 \frac{(y+1)-1}{1-y^2} \ln y dy = 4J - 4K. \end{aligned}$$

$$\text{On obtient ainsi } \begin{cases} 2K - J = I \\ 4K - 3J = 0 \end{cases},$$

$$\text{d'où } J = 2I = -\frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad K = \frac{3}{2} I = -\frac{\pi^2}{8}.$$

On conclut :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx &= -\frac{\pi^2}{12}, \\ \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx &= -\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

4) L'application $x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$ est intégrable sur $]0; 1]$, et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1} dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \right) \ln x dx \\ &= \int_0^1 \ln x dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \\ &= [x \ln x - x]_0^1 + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} - 1. \end{aligned}$$

5) Les applications $x \mapsto \ln x \ln(1+x)$ et $x \mapsto (x \ln x - x) \frac{1}{1+x}$ sont intégrables sur $]0; 1]$, et $(x \ln x - x) \ln(1+x)$ admet une limite finie (0) en 0^+ , d'où, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \ln(1+x) dx &= [(x \ln x - x) \ln(1+x)]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 (x \ln x - x) \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} \ln x dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= -\ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \ln x dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= -\ln 2 - [x \ln x - x]_0^1 + \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx + [x - \ln(1+x)]_0^1 \\ &= 2 - 2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

6) L'application $x \mapsto \ln \operatorname{th} x$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et, grâce au changement de variable défini par $u = \operatorname{th} x$:

$$\int_0^{+\infty} \ln \operatorname{th} x dx = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2} du = -\frac{\pi^2}{8}.$$

7) L'application $x \mapsto \frac{x}{e^x + e^{2x}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et, par changements de variable :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x + e^{2x}} dx & \underset{[u = e^x]}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2(1+u)} du \\ & \underset{[v = \frac{1}{u}]}{=} - \int_0^1 \frac{v \ln v}{1+v} dv \\ &= - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+v}\right) \ln v dv \\ &= [-v \ln v + v]_0^1 + \int_0^1 \frac{\ln v}{1+v} dv \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

8) L'application $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et, grâce au changement de variable défini par $u = e^{-x}$:

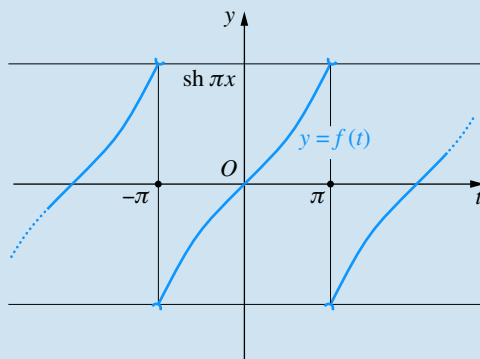
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = - \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du = \frac{\pi^2}{6}.$$

7.19

a) Il est clair que f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f existent.

De plus, f est impaire, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0.$$



On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} xt \sin nt dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\pi} (e^{xt} - e^{-xt})(e^{int} - e^{-int}) dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\pi} (e^{(x+in)t} - e^{(x-in)t} - e^{(-x+in)t} + e^{(-x-in)t}) dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left[\frac{e^{(x+in)t}}{x+in} - \frac{e^{(x-in)t}}{x-in} - \frac{e^{(-x+in)t}}{-x+in} + \frac{e^{(-x-in)t}}{-x-in} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{e^{(x+in)\pi}}{x+in} - \frac{e^{(x-in)\pi}}{x-in} + \frac{e^{(-x+in)\pi}}{x-in} - \frac{e^{(-x-in)\pi}}{x+in} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2i\pi} (e^{\pi x} - e^{-\pi x}) \left(\frac{1}{x+in} - \frac{1}{x-in} \right) \\ &= \frac{2(-1)^{n+1} n \operatorname{sh} \pi x}{\pi(n^2 + x^2)}. \end{aligned}$$

b) Puisque f est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\tilde{f}$ de f . On a donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) &= \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1} n \operatorname{sh} \pi x}{\pi(n^2 + x^2)} \sin nt. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\forall t \in]-\pi; \pi[, \quad \operatorname{sh} xt = \frac{2 \operatorname{sh} \pi x}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + x^2} \sin nt.$$

c) En utilisant une série géométrique, on a, pour tout t de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} &= \frac{2 \cos xt}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^{-t} \cos xt}{1 + e^{-2t}} \\ &= 2e^{-t} \cos xt \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-2t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t), \end{aligned}$$

où on a noté $f_n : t \in [0; +\infty[\mapsto 2(-1)^n e^{-(2n+1)t} \cos xt$.

Considérons, pour $t \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) = \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} - \sum_{k=0}^n f_k(t).$$

On a :

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2(-1)^k e^{-(2k+1)t} \cos xt \\ &= 2(-1)^{n+1} e^{-(2n+3)t} \frac{1}{1 + e^{-2t}} \cos xt, \end{aligned}$$

d'où l'intégrabilité de R_n sur $]0; +\infty[$, et :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} R_n(t) dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} |R_n(t)| dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} 2e^{-(2n+3)t} dt = \frac{2}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On peut donc intervertir $\int_0^{+\infty}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} \cos xt dt.$$

Et, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} \cos xt dt &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} (e^{ixt} + e^{-ixt}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(2n+1+ix)t}}{-(2n+1+ix)} + \frac{e^{-(2n+1-ix)t}}{-(2n+1-ix)} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2n+1-ix)} + \frac{1}{(2n+1+ix)} \right) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

D'autre part, d'après *b*), en remplaçant t par $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{\pi x}{2} &= \frac{2 \operatorname{sh} \pi x}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + x^2} \sin n \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2 \operatorname{sh} \pi x}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2p+1}{(2p+1)^2 + x^2} (-1)^p, \end{aligned}$$

$$\text{d'où, si } x \neq 0: \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 + x^2} = \frac{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi x}{2}}{2 \operatorname{sh} \pi x} = \frac{\pi}{4 \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2}}.$$

Comme la série d'applications $\sum_{p \geq 0} \left(x \mapsto \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 + x^2} \right)$

relève du TSCSA, l'étude du reste montre qu'elle converge uniformément sur $]0; +\infty[$, d'où, en faisant tendre x vers 0 :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Ainsi : } \forall x \in [0; +\infty[, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{4 \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2}},$$

$$\text{et finalement : } \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} dt = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2}}.$$

7.20 1) Soit f convenant.

Puisque f est 2π -périodique et de classe C^∞ , pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ admet des coefficients de Fourier (exponentiels) et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f).$$

Soit $n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, |c_n(f)| = \frac{|c_n(f^{(k)})|}{|in|^k} = \frac{1}{|n|^k} |c_n(f^{(k)})|.$$

En utilisant l'hypothèse :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, |c_n(f^{(k)})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} f^{(k)}(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} |f^{(k)}(t)| dt \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi M = M. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \forall k \in \mathbb{N}, |c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

Comme M et $|n|$ sont fixés (indépendamment de k) et que

$$|n| \geq 2, \text{ on a : } \frac{M}{|n|^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

d'où, puisque $|c_n(f)|$ ne dépend pas de k : $|c_n(f)| = 0$, puis : $c_n(f) = 0$.

Ceci montre : $\forall n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}, c_n(f) = 0$.

D'autre part, puisque f est 2π -périodique et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, f est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement, donc simplement, sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f . On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} \right) \\ &= c_{-1}(f) e^{-ix} + c_0(f) + c_1(f) e^{ix}. \end{aligned}$$

2) Réciproquement, soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ et

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto \alpha e^{-ix} + \beta + \gamma e^{ix}.$$

L'application f est 2π -périodique, de classe C^∞ et on a, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

$$|f^{(n)}(x)| = |\alpha(-i)^n e^{-ix} + \beta 0^n + \gamma i^n e^{ix}| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|,$$

donc f convient.

Finalement, l'ensemble des applications f convenant est :

$$\left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto \alpha e^{-ix} + \beta + \gamma e^{ix}; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$

7.21 a) • Soit $a \in \mathbb{R}$. Il est clair que, pour toute $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, $\tau_a f$ est 2π -périodique et continue, donc $\tau_a f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

• On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$:

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tau_a(\lambda f + g)(t) &= (\lambda f + g)(t - a) \\ &= \lambda f(t - a) + g(t - a) = \lambda \tau_a(f)(t) + \tau_a(g)(t) \\ &= (\lambda \tau_a f + \tau_a g)(t),\end{aligned}$$

donc : $\tau_a(\lambda f + g) = \lambda \tau_a(f) + \tau_a(g)$.

Ceci montre que τ_a est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$.

• On a, pour toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$:

$$\begin{aligned}\|\tau_a f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} (\tau_a f(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t - a))^2 dt \stackrel{u=t-a}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{2\pi-a} (f(u))^2 du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} (f(u))^2 du = \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

donc : $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \|\tau_a f\|_2 = \|f\|_2$.

Il en résulte que τ_a , qui est déjà linéaire, est continue, donc $\tau_a \in \mathcal{LC}(\mathcal{C}_{2\pi})$, et que : $\|\tau_a\| \leq 1$.

La fonction constante 1 est élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $\|1\|_2 = 1, \|\tau_a 1\|_2 = 1$, d'où finalement : $\|\tau_a\| = 1$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ fixée.

Notons $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}_{2\pi}, a \longmapsto \tau_a f$.

On a, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\|\phi(b) - \phi(a)\|_2 &= \|\tau_b f - \tau_a f\|_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tau_b f(t) - \tau_a f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t - b) - f(t - a))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Puisque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique et continue, d'après une étude classique, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |u - v| \leq \eta \implies |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|b - a| \leq \eta$.

On a alors : $\forall t \in \mathbb{R}, |(t - b) - (t - a)| = |a - b| \leq \eta$,

donc : $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t - b) - f(t - a)| \leq \varepsilon$,

$$\text{d'où : } |\phi(b) - \phi(a)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

On a montré :

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \\ |b - a| \leq \eta \implies |\phi(b) - \phi(a)| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci montre que ϕ est uniformément continue, donc est continue.

7.22 a) Pour tout α de $]1; +\infty[$, l'application $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha + 1}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + 1} &= \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + 1} \\ &\stackrel{[v = \frac{1}{t}]}{=} \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha + 1} + \int_0^1 \frac{dv}{v^2 \left(\frac{1}{v^\alpha} + 1 \right)} \\ &= \int_0^1 \frac{1 + t^{\alpha-2}}{1 + t^\alpha} dt \stackrel{[u = t^\alpha]}{=} \int_0^1 \frac{1 + u^{1-\frac{2}{\alpha}}}{1 + u} \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}}{1 + u} du.\end{aligned}$$

$$\text{b) On a : } \forall u \in [0; 1[, \quad \frac{1}{1 + u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n,$$

d'où : $\forall u \in]0; 1[$,

$$\frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}}{1 + u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (u^{n-1+\frac{1}{\alpha}} + u^{n-\frac{1}{\alpha}}).$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n :]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, u \longmapsto (-1)^n (u^{n-1+\frac{1}{\alpha}} + u^{n-\frac{1}{\alpha}}).$$

Ainsi, la série d'applications $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur

$]0; 1[$ et a pour somme

$$S : u \longmapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}}{1 + u}.$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste :

$$R_n = S - \sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k.$$

Puisque S et les f_k sont intégrables sur $]0; 1[$, pour chaque n de $\mathbb{N}$, R_n est intégrable sur $]0; 1[$, et :

$$\begin{aligned}\int_0^1 R_n(u) du &= \int_0^1 (u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}) \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u^k du \\ &= \int_0^1 (u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}) \frac{(-1)^{n+1} u^{n+1}}{1 + u} du,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où : } \left| \int_0^1 R_n(u) du \right| &= \int_0^1 (u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}) \frac{u^{n+1}}{1 + u} du \\ &\leq \int_0^1 (u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}) u^{n+1} du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (u^{n+\frac{1}{\alpha}} + u^{n+1-\frac{1}{\alpha}}) du \\
&= \frac{1}{n+\frac{1}{\alpha}+1} + \frac{1}{n+2-\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{2}{n+1},
\end{aligned}$$

et donc : $\int_0^1 R_n(u) du \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

On peut donc intervertir $\int_0^1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}}{1+u} du &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n (u^{n-1+\frac{1}{\alpha}} + u^{n-\frac{1}{\alpha}}) du \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{n+1-\frac{1}{\alpha}} \right).
\end{aligned}$$

D'après le TSCSA, les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{\alpha}}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1-\frac{1}{\alpha}}$

convergent, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1} + u^{-\frac{1}{\alpha}}}{1+u} du &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{\alpha}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\frac{1}{\alpha}} \\
[p=n+1] \quad &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{\alpha}} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p-\frac{1}{\alpha}} \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{n-\frac{1}{\alpha}} \right) \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{2}{\alpha}}{n^2 - \frac{1}{\alpha^2}}.
\end{aligned}$$

c) L'application f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f existent. De plus, f est paire, donc les b_n sont nuls, et, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos xt \cos nt \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(x+n)t + \cos(x-n)t) \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(x+n)t}{x+n} + \frac{\sin(x-n)t}{x-n} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \sin \pi x}{x+n} + \frac{(-1)^n \sin \pi x}{x-n} \right) = \frac{2(-1)^n x \sin \pi x}{\pi(x^2 - n^2)}.
\end{aligned}$$

Puisque f est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement (donc simplement) sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f , d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x \sin \pi x}{\pi(x^2 - n^2)} \cos nt.$$

En particulier, en remplaçant t par 0 :

$$1 = \frac{\sin \pi x}{\pi x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x \sin \pi x}{\pi(x^2 - n^2)},$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1} x}{\pi(n^2 - x^2)} = \frac{1}{\sin \pi x} \left(1 - \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right) = \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x}.$$

d) D'après b) et c) :

$$\begin{aligned}
\alpha \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + 1} &= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \frac{2}{\alpha}}{n^2 - \frac{1}{\alpha^2}} \\
&= \alpha + \pi \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} - \frac{1}{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

On a prouvé : $\forall \alpha \in]1; +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + 1} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}$.

e) 1) Remarquer d'abord que $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Le changement de variable défini par $u = t^x$ fournit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{\frac{1}{x}}} du,$$

d'où, en utilisant d) : $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

2) Remarquer d'abord que l'application $t \mapsto t^{x-2} \ln(1+t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On a, par intégration par parties, pour tout $(\varepsilon, A) \in]0; +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq A$:

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^A t^{x-2} \ln(1+t) dt &= \left[\frac{t^{x-1}}{x-1} \ln(1+t) \right]_{\varepsilon}^A - \int_{\varepsilon}^A \frac{t^{x-1}}{x-1} \frac{1}{1+t} dt,
\end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^{x-2} \ln(1+t) dt &= \frac{1}{1-x} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{(1-x) \sin \pi x}.
\end{aligned}$$

3) Remarquer d'abord que $t \mapsto \frac{e^{at}}{e^{bt} + e^{ct}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{e^{bt} + e^{ct}} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(a-b)t}}{1 + e^{(c-b)t}} dt \\ &= \int_{[u = e^{(c-b)t}]} \frac{u^{\frac{a-b}{c-b}}}{1+u} \frac{1}{(c-b)u} du \\ &= \frac{1}{c-b} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{a-b}{c-b}-1}}{1+u} du \\ &= \frac{\pi}{(c-b) \sin \pi \frac{a-b}{c-b}}. \end{aligned}$$

4) Il s'agit d'un cas particulier de 3), pour $b = -c$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{\operatorname{ch} ct} dt = \frac{\pi}{2c \sin \left(\pi \frac{a+c}{2c} \right)} = \frac{\pi}{2c \cos \left(\frac{\pi a}{2c} \right)}.$$

5) On applique le résultat de 4) à a et à $-a$, et on utilise un argument de parité :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{ch} ct} dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{ch} ct} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at} + e^{-at}}{\operatorname{ch} ct} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{at}}{\operatorname{ch} ct} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{\operatorname{ch} ct} dt = \frac{\pi}{c \cos \left(\frac{\pi a}{2c} \right)}. \end{aligned}$$

7.23

a) Puisque $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et que les α_n sont tous ≥ 0 , il existe $\sigma(0) \in \mathbb{N}$ tel que : $\alpha_{\sigma(0)} < 1$.

Puisque $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et que $1 - \alpha_{\sigma(0)} > 0$, il existe $\sigma(1) > \sigma(0)$ tel que $\alpha_{\sigma(0)} + \alpha_{\sigma(1)} < 1$.

De proche en proche, on construit une extractrice σ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \alpha_{\sigma(k)} < 1.$$

Puisque la série $\sum_{k \geq 0} \alpha_{\sigma(k)}$ est à termes ≥ 0 et à sommes partielles majorées (par 1), d'après un théorème du cours, la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_{\sigma(n)}$ converge.

b) Considérons la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \alpha_n$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = \sigma(k)$, $u_n = 0$ sinon, et considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto u_n \cos nt.$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |u_n \cos nt| \leq u_n$,

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{\infty} \leq u_n$.

Comme la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge (d'après a)), par théorème de majoration pour des séries à termes ≥ 0 , la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'après l'exercice 7.15, en notant

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos nt,$$

f est 2π -périodique, continue, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f) = u_n, \quad b_n(f) = 0.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n(f)| + |b_n(f)| = u_n$.

En particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N}, |a_{\sigma(k)}(f)| + |b_{\sigma(k)}(f)| = u_{\sigma(k)} = \alpha_{\sigma(k)}.$$

Ainsi, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|a_n(f)| + |b_n(f)| \geq \alpha_n,$$

puisqu'il y a même égalité.

Plan

Les méthodes à retenir	336
Énoncés des exercices	339
Du mal à démarrer ?	347
Corrigés	351

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :

ED : équation différentielle

EDL1 : équation différentielle linéaire du premier ordre

EDL2 : équation différentielle linéaire du deuxième ordre

SDL1 : système différentiel linéaire du premier ordre

SDL2 : système différentiel linéaire du deuxième ordre

SSM : sans second membre

ASM : avec second membre

Thèmes abordés dans les exercices

- Résolution d'EDL1, avec ou sans second membre
- Étude des raccords éventuels
- Étude d'EDL1 matricielles
- Résolution de SDL1, avec ou sans second membre, à coefficients constants
- Résolution d'EDL2, avec ou sans second membre, à coefficients constants ou variables
- Résolution de problèmes de Cauchy
- Étude qualitative de la solution maximale d'un problème de Cauchy
- Recherche de solutions dSE(0) pour une EDL1 ou une EDL2
- Résolution d'équations fonctionnelles, d'équations intégrales
- Étude d'inéquations différentielles
- Étude de propriétés qualitatives de solutions d'une EDL2.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Résolution des EDL1 normalisées, sans second membre (formule du cours), avec second membre (méthode de variation de la constante)
- Définition de la dérivée, théorème limite de la dérivée, pour l'étude des raccords
- Résolution d'un SDL1 à coefficients constants, avec ou sans second membre, réduction des matrices carrées
- Structure et dimension de l'espace des solutions d'une EDL2, avec ou sans second membre, normalisée, à termes continus sur un intervalle, théorème de Cauchy et Lipschitz linéaire, définition et propriétés du wronskien de deux solutions de (E_0)
- Méthode de Lagrange pour trouver une deuxième solution d'une EDL2 SSM
- Méthode de variation des constantes pour trouver une solution d'une EDL2 ASM
- Résolution des EDL2 SSM à coefficients constants (intervention de l'équation caractéristique), résolution des EDL2 à coefficients constants, avec second membre exponentielle-polynôme
- Théorème de Cauchy et Lipschitz non linéaire.

Les méthodes à retenir

Pour résoudre une EDL1 SSM normalisée

$$(E_0) \quad y' + ay = 0,$$

où $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur l'intervalle I , et $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est l'inconnue supposée dérivable sur I

Appliquer le cours : la solution générale de (E_0) sur I est donnée par : $y : I \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \lambda \exp\left(-\int a(x) dx\right), \lambda \in \mathbb{K}$.

Pour résoudre une EDL1 ASM normalisée

$$(E) \quad y' + ay = b,$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur l'intervalle I , et $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est l'inconnue, supposée dérivable sur I

- Résoudre d'abord l'EDL1 SSM associée (E_0) , cf. ci-dessus. D'après le cours, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0) . Il reste donc à chercher une solution particulière de (E) .

- Chercher une solution particulière de (E) .

* Il se peut que (E) admette une solution évidente.

➡ Exercice 8.21

- * Sinon, appliquer la méthode de variation de la constante qui, connaissant une solution y_0 de (E_0) autre que la fonction nulle, consiste à chercher une solution particulière y de (E) sous la forme $y = \lambda y_0$, où λ est la nouvelle fonction inconnue.

➡ Exercice 8.23

- On peut quelquefois grouper des termes de (E) pour faire apparaître une dérivée d'une fonction simple.

➡ Exercice 8.1.

Pour résoudre une EDL1 ASM non normalisée

$$(e) \quad \alpha y' + \beta y = \gamma,$$

où $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{K}$

Résoudre (e) sur des intervalles sur lesquels α ne s'annule pas, puis étudier les raccords, par continuité, par dérivabilité.

➡ Exercice 8.1.

**Pour résoudre un SDL1 SSM,
à coefficients constants (S_0)**

Écrire la matrice A du système.

- Si A est diagonalisable, d'après le cours, la solution générale de (S_0) est donnée par : $X : t \mapsto \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} V_k$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A , comptées avec leur ordre de multiplicité, $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de vecteurs propres respectivement associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}$.

➡ **Exercice 8.4**

- Si A n'est pas diagonalisable, trigonaliser A , en passant éventuellement par les complexes, $A = PTP^{-1}$, où $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{K})$. Noter $Y = P^{-1}X$, se ramener à $Y' = TY$, résoudre en cascade, et revenir à X par $X = PY$. Le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire.

**Pour résoudre un SDL1 ASM,
à coefficients constants (S)**

- Si (S) possède une solution évidente, résoudre le SDL1 SSM associé (S_0), la solution générale de (S) étant la somme d'une solution particulière de (S) et de la solution générale de (S_0).

➡ **Exercice 8.6**

- Si (S) n'a pas de solution évidente, diagonaliser ou trigonaliser la matrice A de (S). Si, par exemple, $A = PDP^{-1}$ où $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{K})$, noter $Y = P^{-1}X$, $C = P^{-1}B$, se ramener à $Y' = DY + C$, résoudre, et revenir à X par $X = PY$. Le calcul de P^{-1} est ici nécessaire, pour exprimer C .

➡ **Exercices 8.5, 8.30.**

**Pour résoudre une EDL2 SSM,
normalisée**

$$(E_0) \quad y'' + ay' + by = 0,$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur l'intervalle I ,
et $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est l'inconnue,
supposée deux fois dérivable sur I

Si a, b sont des constantes, on sait, d'après le cours, exprimer la solution générale de (E_0), en utilisant l'équation caractéristique, cf. Méthodes et exercices MPSI, ch. 10.

Sinon :

- Essayer de trouver deux solutions particulières de (E_0), évidentes ou simples, (y_1, y_2) , formant famille libre. La solution générale de (E_0) sur I est alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

➡ **Exercices 8.8, 8.11, 8.13**

- Sinon, essayer de trouver une solution évidente ou simple y_1 de (E_0) (un polynôme, une exponentielle, ...) ne s'annulant en aucun point de I , puis appliquer la méthode de Lagrange, qui consiste à chercher une deuxième solution particulière de (E_0) sous la forme $y_2 = \lambda y_1$, où λ est une fonction inconnue (non constante). La solution générale de (E_0) est alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

➡ **Exercices 8.12, 8.34**

- Suivant les éventuelles indications de l'énoncé, utiliser un changement de variable et/ou un changement de fonction inconnue, ou toute autre indication permettant de trouver une première solution.

➡ **Exercices 8.7, 8.9 à 8.11, 8.33, 8.36.**

Pour résoudre une EDL2 ASM normalisée

$$(E) \quad y'' + ay' + by = g,$$

où $a, b, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur l'intervalle I ,
et $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est l'inconnue, supposée deux fois dérivable sur I

Résoudre d'abord l'EDL2 SSM associée (E_0) , cf. ci-dessus.

D'après le cours, la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0) .

Il reste donc à trouver une solution particulière de (E_0) .

- Chercher une solution de (E) , évidente ou simple, ou d'une forme suggérée par l'énoncé.
- Si (E_0) est à coefficients constants et si g est une exponentielle-polynôme, chercher une solution de la même forme, cf. Méthodes et exercices MPSI, ch. 10.

- Sinon, appliquer la méthode de variation des constantes, qui consiste, connaissant une base (y_1, y_2) du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des solutions de (E_0) , à chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, où $\lambda_1, \lambda_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions inconnues, supposées dérivables sur I , en imposant $\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0$. On

résout le système d'équations
$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = g \end{cases} \quad \text{d'inconnues}$$

λ_1', λ_2' (où g est le second membre de (E) normalisée). On déduit λ_1, λ_2 , puis $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$.

➡ Exercices 8.15, 8.16.

Pour résoudre une EDL2 ASM, non normalisée

$$(e) \quad \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$$

Résoudre (e) sur des intervalles sur lesquels α ne s'annule pas, puis étudier les raccords, par continuité, par dérivée première, par dérivée seconde.

➡ Exercices 8.8, 8.11.

Pour effectuer un changement de variable $t = \varphi(x)$ dans une ED (E) d'inconnue $y : x \mapsto y(x)$

Il faut aussi changer de fonction inconnue. Poser $z(t) = y(x)$, Calculer $y(x), y'(x), y''(x)$ (si nécessaire) en fonction de $x, z(t), z'(t), z''(t)$, reporter dans (E) , et se ramener à une ED (F) d'inconnue $z : t \mapsto z(t)$. Pour que la méthode ait un intérêt, il faut que (F) soit plus simple que (E) .

Si (E) est une EDL2 à coefficients variables, souvent (F) sera une EDL2 à coefficients constants.

➡ Exercices 8.10, 8.33, 8.38.

Pour calculer la solution maximale d'un problème de Cauchy (C) , quand c'est possible

D'une part, montrer, par application du théorème de Cauchy et Lipschitz, que (C) admet une solution maximale et une seule. D'autre part, calculer une solution y de (C) , en imposant éventuellement une condition du genre : y ne s'annule en aucun point.

➡ Exercices 8.20, 8.27 à 8.29.

Pour étudier qualitativement la solution maximale d'un problème de Cauchy, par exemple pour préciser la nature de l'intervalle de définition de la solution maximale

Souvent, raisonner par l'absurde, et montrer qu'alors on pourrait prolonger strictement y en une solution de (C) , ce qui contredirait la maximalité de y .

➡ Exercices 8.40, 8.47, 8.48, 8.52.

Pour déterminer une ou des solutions d'une ED satisfaisant une condition supplémentaire

Déterminer d'abord toutes les solutions de l'ED, puis, parmi ces solutions, chercher celle (celles) qui satisfait (satisfont) la condition supplémentaire.

➡ **Exercice 8.13.**

Pour résoudre une équation fonctionnelle ou une équation intégrale

Essayer de se ramener à une ED, en utilisant la dérivation.

➡ **Exercices 8.26, 8.37, 8.41.**

Pour trouver des solutions y d'une ED (E) développables en série entière en 0

Supposer que $y : x \mapsto y(x)$ est dSE(0), $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Remplacer, dans (E), $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ (si nécessaire) par des sommes de séries entières, puis identifier en utilisant un argument d'unicité pour le DSE(0) du second membre. En déduire a_n en fonction de n . Réciproquement, considérer la série entière obtenue, montrer que son rayon est > 0 ; sa somme vérifie (E) d'après le calcul direct, si celui-ci a été mené par équivalences logiques successives.

➡ **Exercice 8.35.**

Pour résoudre des exercices abstraits sur des EDL2

Penser à utiliser le théorème de Cauchy et Lipschitz linéaire et/ou à faire intervenir le wronskien de deux solutions de (E).

➡ **Exercices 8.42 b), 8.43, 8.44.**

Énoncés des exercices

8.1 Exemple d'EDL1 non normalisée

Résoudre l'ED (E) $xy' + y = \operatorname{Arctan} x$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

8.2 Étude d'inéquations différentielles linéaires du premier ordre

Soient $a, b : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues, $y, z : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$y' \geq ay + b, \quad z' \leq az + b, \quad y(0) \geq z(0).$$

Montrer : $y \geq z$.

À cet effet, considérer $U = e^{-A}(y - z)$, où A désigne une primitive de a sur $[0; +\infty[$.

8.3 Équation différentielle d'une famille de fonctions

On note, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y_\lambda(x) = \operatorname{sh} x + \frac{\lambda}{\operatorname{ch} x}$.

Former une EDL1 normalisée satisfaite par toutes les y_λ , c'est-à-dire trouver deux applications $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad y'_\lambda + ay_\lambda = b$.

8.4 Exemple de SDL1 SSM, à coefficients constants, à matrice diagonalisable

Résoudre le SDL1 : (S)
$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + z \\ y' = 2x - 3y + 2z \\ z' = -x + 2y \end{cases}$$
 d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables
(la variable sera notée t).

8.5 Exemple de SDL1 ASM, à coefficients constants, à matrice diagonalisable

Résoudre le SDL1 : (S)
$$\begin{cases} x' = -x + y - z + t + 1 \\ y' = -4x + 3y - 4z + 4t + 1 \\ z' = -2x + y - 2z + 2t + 1 \end{cases}$$

d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables (la variable étant notée t).

8.6 Exemple de SDL1 ASM, à coefficients constants, à matrice diagonalisable

Résoudre le SDL1 (S)
$$\begin{cases} x' = -x + y + z - 1 \\ y' = x - y + z - 1 \\ z' = x + y - z - 1 \end{cases}$$
 d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables
(la variable sera notée t).

8.7 Résolution d'une EDL2 SSM par changement de fonction inconnue

Résoudre l'EDL2 : (E₀) $(x^2 + 1)y'' - (3x^2 - 4x + 3)y' + (2x^2 - 6x + 4)y = 0$,
d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, en utilisant le changement de fonction inconnue
 $z = (x^2 + 1)y$.

8.8 Résolution d'une EDL2 SSM par recherche d'une solution polynomiale, étude de raccord

Résoudre l'EDL2 : (e) $x(x^2 + 3)y'' - (4x^2 + 6)y' + 6xy = 0$,
d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, sur tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$. À cet effet,
on pourra chercher des solutions polynomiales.
Préciser la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I$ des solutions de (e) sur I .

8.9 Résolution d'une EDL2 SSM par changement de variable

Résoudre l'EDL2 : (E) $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$, d'inconnue $y :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux
fois dérivable, à l'aide du changement de variable défini par $t = \text{Arcsin } x$.

8.10 Résolution d'une EDL2 SSM par changement de variable puis changement de fonction inconnue

Résoudre l'EDL2 : (E) $x^4 y'' - y = 0$, d'inconnue $y :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable,
en utilisant le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, puis le changement de fonction inconnue
 $u(t) = tz(t)$, où $z(t) = y(x)$.

8.11 Résolution d'une EDL2 SSM par recherche de deux solutions particulières, étude de raccord

Résoudre l'EDL2 : (e) $xy'' + (x - 2)y' - 2y = 0$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois déri-
vable sur I , sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. À cet effet, on pourra chercher une solution particu-
lière polynomiale et une solution particulière de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.12 Résolution d'une EDL2 SSM par solution évidente et méthode de Lagrange

Résoudre l'EDL2 : (E) $x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = 0$
d'inconnue $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

8.13 Résolution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2

Déterminer toutes les applications $y :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables, telles que :

$$\forall x \in]-1; 1[, (1-x^2)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4.$$

À cet effet, on pourra chercher des solutions polynomiales de l'ED.

8.14 Étude d'une EDL2 SSM avec une condition initiale

On considère le problème : (P)
$$\begin{cases} y'' - xy' + y = 0 & \text{(E)} \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

a) Montrer que, si y est solution de (E), alors y est trois fois dérivable et $y^{(3)} = xy''$.

b) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (P).

8.15 Résolution d'une EDL2 ASM, méthode de variation des constantes

Résoudre l'EDL2 : (E) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, d'inconnue $y :]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

8.16 Résolution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2

Résoudre le problème de Cauchy : (P)
$$\begin{cases} y'' + y = \tan^2 x & \text{(E)} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $y :]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

8.17 Résolution d'une EDL4 SSM, à coefficients constants, par deux méthodes

On considère l'EDL4 : (E) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quatre fois dérivable.

a) Résoudre (E) en admettant que les résultats du cours sur les EDL2 SSM à coefficients constants sont aussi valables, de façon analogue, à l'ordre 4.

b) 1) Est-ce que $x \mapsto e^x$ est solution de (E) ?

2) En notant $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)e^{-x}$, montrer que (E) se ramène à une EDL2 d'inconnue z'' et en déduire une résolution de (E).

8.18 Former une EDL2 pour laquelle des fonctions données sont solutions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide ni réduit à un point), $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , telles que l'application w , définie par $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$, ne s'annule en aucun point de I . Montrer qu'il existe un couple unique (p, q) d'applications continues de I dans $\mathbb{R}$ tel que y_1 et y_2 soient solutions sur I de l'EDL2 (E_0) $y'' + py' + qy = 0$, et calculer ce couple (p, q) .

8.19 Obtention de propriétés des solutions d'une EDL2 à l'aide d'une fonction auxiliaire

Montrer que toutes les solutions y de (E) $y'' + e^x y = 0$ sur $[0; +\infty[$ sont bornées. À cet effet, on pourra considérer $U = y^2 + e^{-x} y'^2$.

8.20 Exemple de problème de Cauchy

Trouver toutes les $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :
$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x + y^2} \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

8.21 Étude d'une EDL1

Déterminer l'ensemble $a \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, (f'(x) = f(x) - x^2 + x \text{ et } f(x) > 0), \quad f(1) = a.$$

8.22 Exemple d'inéquation différentielle du premier ordre

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $\forall x \in [0; +\infty[, xf'(x) + 2f(x) \geq 4x^2$.

Démontrer : $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \geq x^2$.

8.23 Exemple d'équation se ramenant à une EDL1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)).$$

8.24 Étude de solutions d'une EDL1 matricielle SSM à coefficients constants

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'ED (E) $X' = AX$, d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dérivable. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $U, V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), & G : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), & H &= F + G. \\ t &\mapsto e^{\alpha t} U & t &\mapsto e^{\beta t} V \end{aligned}$$

Montrer que F et G sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si H est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

8.25 Étude d'un problème de Cauchy linéaire SSM à coefficients constants

Montrer que le problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} x' = -x + y, & y' = -y + z, & z' = -z + x \\ x(0) = 1, & y(0) = j, & z(0) = j^2, \end{cases}$$

d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables, admet une solution et une seule, notée (x, y, z) , et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les points $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ forment, dans le plan complexe, un triangle équilatéral direct.

À cet effet, on pourra considérer $U = x + jy + j^2z$.

8.26 Exemple d'équation intégrale

Trouver toutes les applications $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = 1 + \int_0^x (f(t))^2 dt.$$

8.27 Exemple de résolution d'un problème de Cauchy, équation de Riccati

Déterminer la solution maximale y du problème de Cauchy :

$$(C) \quad y' = -\frac{3}{x}y + xy^2 \quad \text{et} \quad y(2) = \frac{1}{3}.$$

8.28 Exemple de résolution d'un problème de Cauchy, équation incomplète en x

Montrer que le problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' + \cos y = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule, et déterminer celle-ci.

8.29 Exemple d'étude d'un problème de Cauchy

Déterminer l'ensemble des $c \in]0; +\infty[$ tels qu'il existe $y : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$y' = -(c^2 + y^2) \quad \text{et} \quad y(1) = 0.$$
8.30 Résolution d'un SDL1 SSM à coefficients constants, à matrice non diagonalisable

Résoudre le SDL1 : (S) $x' = 2x - y + 2z$, $y' = 10x - 5y + 7z$, $z' = 4x - 2y + 2z$
d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables.

8.31 Étude d'un SD non linéaire

a) Montrer que le problème de Cauchy

$$(C) \quad x' = (t-1)xy - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \quad y' = (2t+1)xy - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

admet une solution maximale et une seule, notée (x, y) .

b) Établir que l'application $z : t \mapsto (2t+1)x(t) - (t-1)y(t)$ est constante et calculer cette constante.

8.32 Recherche de solutions dSE(0) pour une EDL1

On considère l'EDL1 : (E) $(1-x)y' + y = g$, où $g :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est donnée, continue, et $y :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, dérivable.

On note : $(E_0) \quad (1-x)y' + y = 0$.

a) Résoudre (E_0) .

b) On suppose, dans cette question, que g est développable en série entière en 0, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, de rayon ≥ 1 . Montrer que (E) admet au moins une solution y développable en série entière en 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon ≥ 1 , et montrer :

$$a_1 = -a_0 + b_0 \quad \text{et} \quad \left(\forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k b_k \right).$$

c) On suppose, dans cette question : $\forall x \in]-1; 1[, \quad g(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

En utilisant b), déterminer une solution y de (E) sous forme d'une somme de série entière, puis exprimer y à l'aide de fonctions usuelles.

8.33 Résolution d'une EDL2 ASM par changement de variable

Résoudre l'ED (E) $x^2 y'' - 2y = x^2 \ln x$, d'inconnue $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, par le changement de variable $t = \ln x$.

8.34 Résolution d'une EDL2 SSM par recherche d'une solution polynomiale

Résoudre l'ED (E) $x(x^2 - 1)y'' - 2(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$,

d'inconnue $y :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, sachant qu'il existe une solution polynomiale autre que la fonction nulle.

8.35 Recherche des solutions dSE(0) d'une EDL2 ASM

a) Trouver les solutions dSE(0) de l'ED (e) $x^2 y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1$.

b) Exprimer la (ou les) fonction obtenue en a) à l'aide des fonctions usuelles.

8.36 Résolution d'une EDL2 ASM par diverses méthodes

On considère l'ED : (E) $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$,

d'inconnue $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Résoudre (E) par trois méthodes :

1) à l'aide du changement de fonction inconnue $z = e^{-x}y$

2) à l'aide du changement de fonction inconnue $u = y' - y$

3) en cherchant des solutions particulières de l'EDL2 SSM associée (E_0) sous la forme $x \mapsto x^\alpha e^x$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$ est une constante à choisir, puis en appliquant la méthode de variation des constantes.

8.37 Exemple d'équation fonctionnelle se ramenant à une EDL2

Trouver toutes les applications $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(\cos t) = (\cos t)f'(\sin t).$$

8.38 Exemple de SD1 non linéaire se ramenant à des EDL2

Trouver tous les couples (f, g) d'applications de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, telles que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \left(f'(x) = -\frac{g(x)}{x} \quad \text{et} \quad g'(x) = -\frac{f(x)}{x} \right).$$

8.39 Exemple d'EDL2 matricielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. Montrer que toutes les solutions $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de l'EDL $X'' + SX = 0$ sont bornées.

8.40 Étude qualitative des solutions d'un problème de Cauchy

a) Montrer que le problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = 2x + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule, notée f .

b) Montrer que f est de classe C^∞ au voisinage de 0 et former le développement limité à l'ordre 11 en 0 de f .

8.41 Exemple d'équation intégrale, équation de convolution

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t) dt.$$

8.42 Zéros des solutions d'une EDL2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ni vide ni réduit à un point), $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I .

a) Soit $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable telle que $z' + pz > 0$. Montrer que z admet au plus un zéro dans I .

b) Soient $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $q < 0$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, autre que l'application nulle, telle que $y'' + py' + qy = 0$. Montrer que yy' admet au plus un zéro dans I .

8.43 Parité, imparité de solutions d'une EDL2

Soient $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue impaire, $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue paire.

On considère l'ED (E_0) $y'' + py' + qy = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

a) Montrer que, pour toute solution f de (E_0) sur $\mathbb{R}$, l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ symétrisée
 $x \longmapsto f(-x)$
 de f , est aussi solution de (E_0) .

b) 1) Montrer qu'il existe une solution f_1 de (E_0) unique telle que :

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = 0, \quad f_1 \text{ est paire.}$$

2) Montrer qu'il existe une solution f_2 de (E_0) unique telle que :

$$f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 1, \quad f_2 \text{ est impaire.}$$

3) Établir que (f_1, f_2) est une base du $\mathbb{R}$ -ev $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

8.44 Étude de solutions d'une EDL2

On note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions $y :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de l'ED :

$$(E_0) \quad y'' + y' - \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)y = 0.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un plan vectoriel inclus dans $C^\infty(]0; +\infty[, \mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{S}_0 ; y(1) = 2\}$ est une droite affine.

c) Soit $y \in \mathcal{S}$. Calculer la courbure γ_y de la courbe représentative de y en le point d'abscisse 1, en fonction de $y'(1)$.

d) Quelle est la valeur maximale de γ_y lorsque y décrit $\mathcal{S}$? En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

8.45 Étude d'une inéquation différentielle du deuxième ordre

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$, $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad a^2 f(x) \leq f''(x) \leq b^2 f(x).$$

Montrer, pour tout $x \in [0; +\infty[:$

$$f(0) \operatorname{ch}(ax) + f'(0) \frac{\operatorname{sh}(ax)}{a} \leq f(x) \leq f(0) \operatorname{ch}(bx) + f'(0) \frac{\operatorname{sh}(bx)}{b}.$$

8.46 Résolution d'une ED2 non linéaire avec conditions initiales

Trouver tous les couples (I, y) où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux

fois dérivable sur I telle que :
$$\begin{cases} yy'' + y'^2 = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

8.47 Étude qualitative des solutions maximales d'une ED non linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et bornée. Montrer que toute solution maximale de l'ED $(E) \quad y' = f(x, y)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

8.48 Étude qualitative de la solution maximale d'un problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy (C) suivant : $y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ et $y(0) = 0$,

où la variable (réelle) est notée x et la fonction inconnue (à valeurs réelles) est notée y .

1) Montrer que (C) admet une solution maximale et une seule, encore notée y .

Que peut-on dire de l'intervalle de définition I de y ?

Que peut-on dire de toute solution de (C), vis-à-vis de la solution maximale y ?

2) Établir que I est symétrique par rapport à 0 et que y est impaire.

On pourra, à cet effet, considérer $J = \{x \in \mathbb{R}; -x \in I\}$ et $z : \begin{matrix} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -y(-x) \end{matrix}$.

On note encore y la restriction de l'application précédente à $I \cap [0; +\infty[$.

3) Montrer que y est strictement croissante, à valeurs ≥ 0 , majorée.

4) Établir que l'extrémité droite de l'intervalle de définition de y est $+\infty$.

5) Démontrer que y admet en $+\infty$ une limite finie, notée ℓ , et que : $0 < \ell < \frac{\pi}{2}$.

6) Montrer que y est de classe C^∞ et concave sur $[0; +\infty[$.

7) Tracer l'allure de la courbe représentative de y .

On précisera la demi-tangente en O et la concavité.

8) Montrer que y admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 et calculer celui-ci.

8.49 Étude de périodicité pour les solutions d'un SDL1

Soient $T \in]0; +\infty[$, $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ continue, T -périodique. On considère l'ED $(E_0) \quad X' = AX$, d'inconnue $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une solution X de (E) sur $\mathbb{R}$ autre que l'application nulle, et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t+T) = \lambda X(t).$$

8.50 Étude d'une ED matricielle non linéaire

Soient $a \in]0; +\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $X :]-a; a[\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in]-a; a[, \quad X'(t)X(t) = A \\ X(0) = I_n. \end{cases}$$

a) Démontrer : $\forall t \in]-a; a[, \quad X(t)A = AX(t).$

b) On suppose ici, de plus, que A est symétrique. Démontrer que, pour tout $t \in]-a; a[, \quad X(t)$ est symétrique.

8.51 Inégalité sur des intégrales relatives à des solutions d'une EDL2

On note S_0 l'ensemble des applications $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'EDL2 : $(E_0) \quad y'' - x^2 y' + y = 0$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall y \in S_0, \quad \int_{-1}^0 |y'' - y'| \leq \alpha \int_0^1 |y'' + y'|.$

8.52 Étude de périodicité pour des solutions d'une EDL2 SSM

Soient $T \in]0; +\infty[$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T -périodique et continue, (y_1, y_2) une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'EDL2 SSM : $(E_0) \quad y'' + fy = 0$.

a) Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C}^4$ unique tel que :

$$\forall k \in \{1, 2\}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_k(x+T) = \alpha_k y_1(t) + \beta_k y_2(t).$$

b) Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Du mal à démarrer ?

8.1 Remarque : $xy' + y = (xy)'$.

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction obtenue.

8.2 Calculer U' et montrer : $U' \geq 0$.

8.3 Calculer y'_λ et obtenir une relation simple liant y_λ et y'_λ .

8.4 Il s'agit d'un SDL1 SSM, à coefficients constants. Montrer que la matrice de (S) est diagonalisable et la diagonaliser. Appliquer enfin la formule du cours donnant la solution générale.

8.5 Il s'agit d'un SDL1 ASM, à coefficients constants. Montrer que la matrice A de (S) est diagonalisable et la diagonaliser : $A = PDP^{-1}$, avec les notations usuelles.

Noter $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B(t)$ le second membre, $U = P^{-1}X$,

$C = P^{-1}B$, et se ramener à la résolution de l'équation $U' = DU + C$.

8.6 Il s'agit d'un SDL1 ASM, à coefficients constants. Montrer que la matrice A de (S) est diagonalisable et déterminer valeurs propres et sous-espaces propres. Remarque une solution évidente de (S).

8.7 1^{re} méthode : Calculer z, z', z'' en fonction de x, y, y', y'' et grouper convenablement des termes dans l'équation (E) pour faire apparaître z'', z', z . Se ramener à une EDL2 SSM à coefficients constants.

2^e méthode : Calculer y, y', y'' en fonction de x, z, z', z'' et reporter dans (E).

8.8 Il s'agit d'une EDL2 SSM non normalisée. Chercher une solution polynomiale en cherchant d'abord son degré. Obtenir ainsi deux solutions polynomiales formant famille libre. En déduire la solution générale de (E) sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Étudier le raccord en 0.

8.9 Noter $t = \arcsin x$ (donc $x = \sin t$) et $y(x) = z(t)$. Calculer $y(x), y'(x), y''(x)$ en fonction de $x, z(t), z'(t), z''(t)$ et reporter dans (E). Se ramener à une EDL2 SSM à coefficients constants, d'inconnue z .

8.10 Noter $t = \frac{1}{x}$ et $z(t) = y(x)$. Calculer $y(x), y'(x), y''(x)$ en fonction de $x, z(t), z'(t), z''(t)$ et reporter dans (E). Se ramener ainsi à une EDL2 (F) d'inconnue z . Noter $u = tz$, calculer z, z', z'' en fonction de t, u, u', u'' et reporter dans (F). Se ramener ainsi à une EDL2 à coefficients constants, d'inconnue u .

8.11 Chercher une éventuelle solution polynomiale, en cherchant d'abord son degré. Chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé à trouver. Montrer que la famille des deux fonctions obtenues est libre et en déduire la solution générale de (e) sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Étudier le raccord en 0.

8.12 Il s'agit d'une EDL2 SSM normalisable sur $]0; +\infty[$. Remarque la solution évidente $y_1 : x \mapsto x$. Chercher une deuxième solution par la méthode de Lagrange.

8.13 Chercher une solution polynomiale de (E), en cherchant d'abord son degré. Obtenir deux solutions de (E) formant famille libre. En déduire la solution générale de (E). Enfin, traduire les conditions imposées en 0.

8.14 a) Exprimer y'' en fonction de x, y, y' .

b) Si y convient, résoudre l'EDL1 SSM d'inconnue y'' et tenir compte de $y''(0) = 0$. En déduire y .

Ne pas oublier d'étudier la réciproque.

8.15 Il s'agit d'une EDL2 ASM, normalisée sur l'intervalle $I =] -\pi/2; \pi/2[$. Résoudre l'EDL2 SSM (E_0) associée, puis appliquer la méthode de variation des constantes.

8.16 Résoudre (E) en utilisant la méthode de variation des constantes, puis traduire la condition en 0.

8.17 a) Il s'agit d'une EDL4 SSM, à coefficients constants. Former l'équation caractéristique et en déduire (par généralisation du résultat à l'ordre 2) la solution générale de (E).

b) 2) Noter $z = ye^x$, donc $y = e^{-x}z$, reporter dans (E), et se ramener à une EDL2 (F) d'inconnue z'' . Résoudre (F), en déduire z , puis y . Contrôler la cohérence des réponses obtenues en a) et en b).

8.18 Résoudre le système d'inconnues p, q formé par les deux équations vérifiées par y_1, y_2 .

8.19 Calculer U' .

8.20 1) Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz.

2) Montrer que, si y ne s'annule en aucun point, l'ED se ramène à : $y' = \left(\frac{x}{y}\right)'$. En déduire une solution du problème de Cauchy. Conclure.

8.21 Résoudre l'EDL1 (E) $y' = y - x^2 - x$, d'inconnue $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Traduire ensuite les conditions imposées.

8.22 Considérer $U : x \mapsto x^2 f(x) - x^4$, calculer U' .

8.23 Résoudre l'EDL1 SSM $y' - \frac{2}{x-a}y = 0$.

En déduire le changement de fonction inconnue :

$$g : \mathbb{R} - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^2}.$$

Déterminer g , puis f , et utiliser le raccord en a .

Ne pas oublier d'étudier la réciproque.

8.24 1) Un sens est immédiat.

2) Réciproquement, si H est solution de (E), dériver, prendre les valeurs en 0 et déduire $AU = \alpha U$ et $AV = \beta V$, puis conclure.

8.25 D'après un exercice de Première année (Méthodes et exercices MPSI, ex. 2.27 a)), les points $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ forment, dans le plan complexe, un triangle équilatéral direct si et seulement si : $x(t) + jy(t) + j^2 z(t) = 0$. Considérer $U = x + jy + j^2 z$, calculer U' , et déduire $U = 0$.

8.26 1) Soit f convenant. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ et satisfait un problème de Cauchy (C). Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz pour déduire que (C) admet une solution maximale et une seule. Chercher une solution de (C) ne s'annulant en aucun point. En déduire f .

2) Étudier la réciproque.

8.27 1) Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution maximale y de (C).

2) Chercher une solution y de l'ED ne s'annulant en aucun point, en utilisant le changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$.

Conclure.

8.28 1) Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution maximale de (C).

2) Chercher une solution y de l'ED telle que $\cos y$ ne s'annule en aucun point. En déduire la solution maximale.

Conclure.

8.29 Pour $c \in]0; +\infty[$ fixé, résoudre l'ED (E)

$$y' = -(c^2 + y^2),$$

d'inconnue $y : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et traduire ensuite $y(1) = 0$.

Conclure.

8.30 Il s'agit d'un SDL1 SSM, à coefficients constants. La matrice A du système n'est pas diagonalisable, mais est trigonalisable. Obtenir $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$, $T \in \text{T}_{3,s}(\mathbb{R})$ telles que :

$A = PTP^{-1}$. Noter $U = P^{-1}X$, se ramener à $U' = TU$, résoudre en cascade, puis revenir à X .

8.31 a) Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz.

b) Calculer z' .

8.32 b) Noter $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (de rayon > 0), reporter dans (E), obtenir une relation entre a_{n+1} , a_n , b_n . En considérant $u_n = n(n-1)a_n$, déduire a_n en fonction de n .

Réciproquement, montrer que la série entière ainsi définie est de rayon ≥ 1 .

$$c) \text{ Obtenir : } \forall x \in]-1; 1[, \quad y(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2(1-2^{-n})}{n(n-1)} x^n.$$

Rappeler les DSE(0) des fonctions $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, et

$t \mapsto -\ln(1-t)$, et déduire, par primitivation, la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{t^{n+1}}{n(n+1)}$, puis $y(x)$.

8.33 Noter $t = \ln x$, $z(t) = y(x)$. Calculer $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ en fonction de x , $z(t)$, $z'(t)$, $z''(t)$, et reporter dans (E). Se ramener ainsi à une EDL2, à coefficients constants, avec second membre exponentielle-polynôme, que l'on sait résoudre. Revenir à y .

8.34 1) Chercher une éventuelle solution polynomiale en cherchant d'abord le degré. Obtenir $y_1 : x \mapsto x^2 - 1$.

2) Chercher une deuxième solution de (E) par la méthode de Lagrange.

3) Conclure.

8.35 a) Noter $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (de rayon > 0), reporter dans (E), obtenir une relation de récurrence sur les a_n et déduire a_n .

Réciproquement, montrer que la série entière obtenue $\sum_{p \geq 0} -\frac{x^{2p}}{(2p+3)!}$, est de rayon infini.

b) Exprimer $y(x)$, obtenu ci-dessus, à l'aide de $\text{sh } x$.

Ne pas oublier l'examen du cas $x = 0$.

8.36 1) Noter $z = e^{-x}y$, d'où $y = e^x z$. Calculer y , y' , y'' en fonction de x , z , z' , z'' , reporter dans (E) et se ramener à une EDL1 d'inconnue z' . Résoudre, déduire z' puis z , puis y .

2) Noter $u = y' - y$, donc $u' = y'' - y'$. Dans (E), grouper des termes pour faire apparaître u et u' . Se ramener à une EDL1 d'inconnue u . Résoudre, déduire u , puis une EDL1 sur y , puis y .

3) Chercher des solutions particulières de (E_0) sous la forme $y : x \mapsto x^\alpha e^x$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Obtenir $y_1 : x \mapsto \frac{e^x}{x}$ et $y_2 : x \mapsto e^x$. Appliquer la méthode de variation des constantes.

8.37 Il ne s'agit pas d'une ED, puisque l'équation fait intervenir les valeurs de f et f' en deux points variables différents.

1) Soit f convenant. Noter $x = \sin t$, montrer que f est deux fois dérivable sur $] -1 ; 1[$, et déduire que f satisfait une EDL2 SSM, à coefficients constants. Résoudre celle-ci et déduire f .

2) Étudier la réciproque.

8.38 1) Soit (f, g) convenant. Montrer que f et g sont deux fois dérivables et vérifient une EDL2 SSM d'Euler (1). Noter $t = \ln x$, $u(t) = f(x)$. Calculer $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ en fonction de x , $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$, et reporter dans (1). Se ramener ainsi à une EDL2 SSM, à coefficients constants, d'inconnue u . Déduire u , puis f , puis g .

2) Étudier la réciproque.

8.39 Utiliser le théorème spectral pour se ramener à des EDL2 SSM, à coefficients constants.

8.40 a) Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz.

b) • Montrer, par récurrence sur n , que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur I .

• Utiliser le théorème de Taylor et Young pour l'existence de $DL_{11}(0)$ de f .

• Calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ et en déduire que le $DL_{11}(0)$ de f est de la forme :

$$f(x) = x^2 + a_5 x^5 + \dots + a_{11} x^{11} + \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^{11}).$$

Reporter dans l'ED et en déduire les valeurs des coefficients $a_5, \dots, a_{11}$.

8.41 Montrer d'abord que, si f convient, alors f est de classe C^2 . Remplacer ensuite le problème par un problème équivalent, à l'aide de dérivations.

Se ramener à l'ED $y'' + xy' + 3y = 0$ avec les conditions $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$. Effectuer le changement de fonction inconnue $z = e^{x^2/2}y$.

8.42 a) Considérer $u = z e^P$, où P est une primitive de p sur I . Calculer u' .

b) En notant $z = yy'$, montrer d'abord $z' + pz \geq 0$. Établir $z' + pz > 0$, par un raisonnement par l'absurde utilisant le théorème de Cauchy et Lipschitz linéaire. Appliquer enfin a).

8.43 b) 1) et 2) Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz linéaire.

8.44 a) • Montrer que S_0 est un plan vectoriel.

• Montrer que, pour toute $y \in S_0$, y est de classe C^∞ , par un raisonnement par récurrence.

b) Exploiter l'application

$$\theta : S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad y \longmapsto (y(1), y'(1)),$$

qui, d'après le cours, est une bijection linéaire.

c) Se rappeler que la courbure γ_y de la courbe représentative de y en le point d'abscisse 1 est donnée par :

$$\gamma_y = \frac{y''(1)}{(1 + (y'(1))^2)^{3/2}}.$$

d) Montrer que $y'(1)$ décrit tous les réels, et étudier l'application

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \gamma(t) = \frac{6-t}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

8.45 • Noter $g = f'' - a^2 f$ et calculer f en fonction de g , à l'aide de la méthode de variation des constantes. Obtenir :

$$\forall x \in [0; +\infty[,$$

$$f(x) = \frac{1}{a} \int_0^x g(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt + f(0) \operatorname{ch} ax + f'(0) \frac{\operatorname{sh} ax}{a}.$$

En déduire la première inégalité demandée.

• Pour la deuxième inégalité, appliquer le résultat précédent à des éléments convenablement modifiés.

8.46 1) Soit (I, y) convenant. Déduire $\frac{y^2}{2} = Ax + B$, où A, B sont des constantes, puis $y^2 = 2x + 1$.

Par un raisonnement rigoureux, utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = \sqrt{2x+1}.$$

2) Étudier la réciproque.

8.47 Soient y une solution maximale de $y' = f(x, y)$, $I =]\alpha; \beta[$ l'intervalle de définition de y , où α, β vérifient $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Reasonner par l'absurde : supposer $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut prolonger alors y convenablement en β , pour contredire la maximalité de y . En déduire : $\beta = +\infty$.

8.48 1) Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz.

2) Montrer que z est solution du problème de Cauchy (C).

3) Remarquer : $\forall x \in I \cap [0; +\infty[, \quad y'(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$,

et déduire : $\forall x \in I \cap [0; +\infty[, \quad y(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

4) Raisonner par l'absurde : supposer $I \cap [0; +\infty[= [0; b[$, où $b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut prolonger convenablement y en b , pour contredire la maximalité de y .

5) Pour obtenir l'inégalité stricte $\ell < \frac{\pi}{2}$, raisonner par l'absurde.

6) α) Montrer, par récurrence sur n , que y est de classe C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

β) Montrer : $y'' \leq 0$.

8) Appliquer le théorème de Taylor-Young pour obtenir l'existence du $DL_5(0)$ de y . Se rappeler que y est impaire. Procéder par coefficients indéterminés.

8.49 L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'application qui, à tout $X \in S_0$, associe $t \mapsto X(t+T)$, est un endomorphisme de S_0 . Se rappeler que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie (≥ 1) admet au moins une valeur propre (et un vecteur propre associé).

8.50 a) Montrer d'abord que, pour tout $t \in]-a; a[$, $X(t)$ est inversible. Considérer

$$Y :]-a; a[\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \longmapsto Y(t) = X(t)A - AX(t).$$

Calculer Y' . Montrer que Y est solution du problème de Cauchy linéaire : $Y' = -AX^{-1}YX^{-1}$ et $Y(0) = 0$,

et déduire : $Y = 0$.

b) Considérer le problème de Cauchy (non linéaire) :

$$(C) \quad Z' = AZ^{-1} \quad \text{et} \quad Z(0) = I_n.$$

Montrer que la solution maximale de (C) est un prolongement de X . Considérer :

$$U :]-a; a[\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \longmapsto U(t) = {}^tX(t)$$

et calculer $U'U$. En déduire $X = U$.

8.51 L'ensemble S_0 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. Montrer que les applications $N_1, N_2 : S_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $y \in S_0$, par :

$$N_1(y) = \int_{-1}^0 |y'' - y'|, \quad N_2(y) = \int_0^1 |y'' + y'|$$

sont des normes sur S_0 .

Appliquer enfin le théorème d'équivalence des normes en dimension finie.

8.52 a) Noter, pour $k \in \{1, 2\}$:

$$z_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto y_k(x+T).$$

Montrer que z_k est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$. En déduire l'existence et l'unicité de (α_k, β_k) .

b) Noter $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, $x \longmapsto \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$.

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, Y(x+T) = AY(x)$.

Montrer, de même qu'en a), l'existence de $B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, Y(x-T) = BY(x)$.

En utilisant le wronskien de (y_1, y_2) , obtenir : $BA = I_2$.

Corrigés des exercices

8.1 Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad xy' + y = \operatorname{Arctan} x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (xy)' = \operatorname{Arctan} x$$

$$\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad xy = \int \operatorname{Arctan} x \, dx + C \quad (F).$$

En primitivant par parties :

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Arctan} x \, dx &= x \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Donc (F) est équivalente à :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad xy(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

En prenant la valeur en 0, on a nécessairement $C = 0$. D'où :

$$(F) \iff \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad y(x) = \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2).$$

1) Si y convient, comme

$$\frac{1}{2x} \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

on a alors $y(0) = 0$.

2) Réciproquement, considérons $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$y(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il est clair que y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et, d'après l'étude précédente, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$.

$$\text{De plus : } \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad y'(x) = \frac{1}{2x^2} \ln(1+x^2),$$

$$\text{donc : } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Ainsi, y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, continue en 0, et y' admet une limite finie (égale à $\frac{1}{2}$) en 0. D'après le théorème limite de la dérivée, y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie (E) sur $\mathbb{R}$.

On conclut que (E) admet une solution et une seule :

$$y(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

8.2 Puisque a est continue sur $[0; +\infty[$, a admet des primitives sur $[0; +\infty[$. Notons A une primitive de a sur $[0; +\infty[$, et $U = e^{-A}(y-z)$.

Par opérations, U est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} U' &= e^{-A}(y' - z') - a e^{-A}(y - z) \\ &= e^{-A}((y' - z') - a(y - z)) \\ &= e^{-A}(\underbrace{(y' - ay)}_{\geq b} - \underbrace{(z' - az)}_{\leq b}) \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que U est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

$$\text{Comme } U(0) = e^{-A(0)}(\underbrace{y(0) - z(0)}_{\geq 0}) \geq 0,$$

on déduit $U \geq 0$, et on conclut : $y \geq z$.

8.3 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, y_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y'_\lambda(x) &= \operatorname{ch} x - \frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \frac{\lambda}{\operatorname{ch} x} \\ &= \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} (y_\lambda(x) - \operatorname{sh} x) \\ &= -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} y_\lambda(x) + \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'_\lambda(x) + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} y_\lambda(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x},$$

On conclut que les applications $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$a(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad b(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x},$$

conviennent.

8.4 Il s'agit d'un SDL1 SSM, à coefficients constants.

$$\text{La matrice de (S) est : } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique (par exemple en développant par rapport à la première colonne) et on obtient :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3 \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 2\lambda + 3) = -(\lambda + 3)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont -3 (simple) et 1 (double).

Déterminons les sous-espaces propres.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

• $X \in \text{SEP}(A, -3) \iff AX = -3X$

$$\iff \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 2x \end{cases},$$

donc : $\text{SEP}(A, -3) = \text{Vect } V_1$, où : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• $X \in \text{SEP}(A, 1) \iff AX = X \iff x - 2y + z = 0$,

donc $\text{SEP}(A, 1) = \text{Vect}(V_2, V_3)$,

où $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, par exemple.

Puisque χ_A est scindé que $\mathbb{R}$ et que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée, d'après le cours, A est diagonalisable.

D'après le cours, la solution générale de (S) est donnée par :

$$\begin{aligned} t \mapsto X(t) &= \sum_{k=1}^3 C_k e^{\lambda_k t} V_k \\ &= C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-3t} + (C_2 + 2C_3) e^t \\ y(t) = 2C_1 e^{-3t} + C_3 e^t \\ z(t) = -C_1 e^{-3t} - C_2 e^t \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

8.5 Il s'agit d'un SDL1 ASM, à coefficients constants.

La matrice de (S) est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On calcule le polynôme caractéristique de A (par exemple par $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$) et on obtient :

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 1)\lambda(\lambda - 1).$$

Il en résulte que A admet trois valeurs propres simples, qui sont $-1, 0, 1$, et, comme A est d'ordre trois, d'après le cours, on conclut que A est diagonalisable.

On calcule des vecteurs propres associés, et on obtient, par

exemple, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $A = PDP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme (S) est un système avec second membre et que (S) n'admet pas de solution évidente (on pourrait cependant chercher une solution où x, y, z seraient des polynômes de degrés ≤ 2), on calcule P^{-1} et on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 4t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} X' &= AX + B \iff X' = PDP^{-1}X + B \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}B. \end{aligned}$$

Notons $U = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $C = P^{-1}B = \begin{pmatrix} 2t+3 \\ 2 \\ t-1 \end{pmatrix}$.

Alors :

$$\begin{aligned} X' &= AX + B \iff U' = DU + C \\ &\iff \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t+3 \\ 2 \\ t-1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} u' = -u + 2t + 3 \\ v' = 2 \\ w' = w + (t-1). \end{cases} \end{aligned}$$

La résolution de chacune de ces trois EDL1 ASM à coefficients constants est immédiate, et on obtient :

$$\begin{aligned} X' &= AX + B \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u(t) = 2t + 1 + C_1 e^{-t} \\ v(t) = 2t + C_2 \\ w(t) = -t + C_3 e^t \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Enfin :

$$X = PU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t+1+C_1 e^{-t} \\ 2t+C_2 \\ -t+C_3 e^t \end{pmatrix},$$

donc la solution générale de (S) est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = t + C_2 + C_3 e^t \\ y(t) = 1 + C_1 e^{-t} + 2C_3 e^t \\ z(t) = 1 + C_1 e^{-t} - C_2 \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

8.6 Il s'agit d'un système différentiel linéaire à coefficients constants. En notant

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(x, y, z) est solution du système différentiel proposé si et seulement si X est solution de l'équation différentielle (matricielle) :

$$X' = AX + B.$$

La matrice A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et un calcul élémentaire (ou la calculatrice) fournit :

$$A = PDP^{-1},$$

où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

La solution générale de l'ED sans second membre $X' = AX$ est, d'après le cours :

$$X : t \mapsto \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3.$$

D'autre part, l'ED avec second membre $X' = AX + B$ admet la solution évidente $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Finalement, la solution générale du système différentiel proposé est :

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = 1 + \lambda e^t + \mu e^{-2t} + \nu e^{-2t} \\ y(t) = 1 + \lambda e^t - \mu e^{-2t} \\ z(t) = 1 + \lambda e^t - \nu e^{-2t} \end{cases}, \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3.$$

8.7 Comme le suggère l'énoncé, pour $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, considérons $z = (x^2 + 1)y$, qui est deux fois dérivable.

1^{re} méthode :

Comme (E) commence par $(x^2 + 1)yz''$, calculons z' et zz'' . On a :

$$z = (x^2 + 1)y, \quad z' = 2xy + (x^2 + 1)y',$$

$$zz'' = 2y + 4xy' + (x^2 + 1)yz'',$$

d'où :

$$(x^2 + 1)yz'' - (3x^2 - 4x + 3)y' + (2x^2 - 6x + 4)y$$

$$= (zz'' - 2y - 4xy') - (3x^2 - 4x + 3)y' + (2x^2 - 6x + 4)y$$

$$= zz'' - 3(x^2 + 1)y' + (2x^2 - 6x + 2)y$$

$$= zz'' - 3(z' - 2xy) + (2x^2 - 6x + 2)y$$

$$= zz'' - 3z' + 2z.$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si z est solution de :

$$(F) \quad zz'' - 3z' + 2z = 0.$$

L'ED (F) est une EDL2 SSM à coefficients constants. L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet deux solutions réelles 1 et 2, donc, d'après le cours, la solution générale de (F) est :

$$z : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\lambda e^x + \mu e^{2x}}{x^2 + 1}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2^e méthode :

On a $y = \frac{z}{x^2 + 1}$, d'où l'on calcule y' et yz'' en fonction de z, z', zz'' . On reporte dans (E), des termes se simplifient, et on retrouve (F) de la première méthode.

8.8 L'ED (e) est une EDL2 SSM, non normalisée. L'ED normalisée associée, sur un intervalle I ne contenant pas 0 est :

$$(E) \quad y'' - \frac{4x^2 + 6}{x(x^2 + 3)}y' + \frac{6}{x^2 + 3}y = 0.$$

• Cherchons une (ou des) solution particulière de (e) sous forme de polynôme : $y(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Le terme de degré $n + 1$ dans le premier membre de (e) doit être nul :

$$n(n-1)a_n - 4na_n + 6a_n = 0,$$

d'où, puisque $a_n \neq 0$: $n^2 - 5n + 6 = 0$,

donc $n = 2$ ou $n = 3$.

Notons donc $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a alors, en calculant y' et yz'' et en reportant dans le premier membre de (e), avec des notations classiquement abusives :

$$x(x^2 + 3)yz'' - (4x^2 + 6)y' + 6xy$$

$$= x(x^2 + 3)(6ax + 2b) - (4x^2 + 6)(3ax^2 + 2bx + c)$$

$$+ 6x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$= 2cx^2 + (-6b + 6d)x - 6c.$$

Ainsi, y est solution de (E) sur I si et seulement si : $c = 0$, $d = b$. Deux solutions polynomiales particulières sont donc :

$$y_1 : x \mapsto x^3, \quad y_2 : x \mapsto x^2 + 1,$$

obtenues pour (a, b, c, d) égal à $(1, 0, 0, 0)$, à $(0, 1, 0, 1)$ respectivement.

Il est clair que la famille (y_1, y_2) est libre.

D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}_I$ des solutions de (E) sur I est donc :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^3 + b(x^2 + 1); (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

• Étudions le raccord en 0.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, tel que $0 \in I$.

Notons

$$y : I - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} ax^3 + b(x^2 + 1) & \text{si } x < 0 \\ \alpha x^3 + \beta(x^2 + 1) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

pour $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ fixé.

$$\text{On a : } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} b \quad \text{et} \quad y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \beta,$$

donc y est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\beta = b$.

Supposons $\beta = b$ et notons $y(0) = b$.

Alors, y est continue sur I , dérivable sur $I - \{0\}$ et :

$$y'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2bx & \text{si } x < 0 \\ 3\alpha x^2 + 2bx & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Comme : } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \quad \text{et} \quad y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

d'après le théorème limite de la dérivée, y est de classe C^1 sur I .

L'application y est de classe C^2 sur $I - \{0\}$ et :

$$y''(x) = \begin{cases} 6ax + 2b & \text{si } x < 0 \\ 6\alpha x + 2b & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Comme : } y''(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 2b \quad \text{et} \quad y''(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2b,$$

d'après le théorème limite de la dérivée (appliqué à y'), y est de classe C^2 sur I .

De plus, y satisfait (e) en le point 0.

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}_I$ des solutions de (e) sur I est :

$$\mathcal{S}_I = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{R}; \right. \\ \left. x \longmapsto \begin{cases} ax^3 + b(x^2 + 1) & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \alpha x^3 + b(x^2 + 1) & \text{si } x > 0 \end{cases} ; (a, \alpha, b) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

• Pour tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}_I$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et : $\dim(\mathcal{S}_I) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \notin I \\ 3 & \text{si } 0 \in I. \end{cases}$

8.9 L'ED (E) est une EDL2 SSM, non normalisée, mais normalisable sur $] -1; 1[$.

Comme le suggère l'énoncé, utilisons le changement de variable $t = \text{Arcsin } x$, donc $x = \sin t$, et notons

$z :] -\pi/2; \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto z(t) = y(x)$ la nouvelle fonction inconnue. Par composition, z est deux fois dérivable et on a, avec des notations classiquement abusives :

$$y(x) = z(t),$$

$$y'(x) = z'(t) \frac{dt}{dx} = z'(t) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$yz''(x) = zz''(t) \frac{1}{1-x^2} + z'(t) \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$\text{d'où : } (E) \iff z'' + z = 0 \quad (F).$$

L'ED (F) est une EDL2 SSM, à coefficients constants.

D'après le cours, la solution générale de (F) est :

$$z : t \longmapsto A \cos t + B \sin t, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme $t = \text{Arcsin } x$, on a : $\sin t = x$, $\cos t = \sqrt{1-x^2}$.

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $] -1; 1[$ est :

$$\mathcal{S} = \{ y :] -1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto A\sqrt{1-x^2} + Bx ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

Remarque :

Au lieu de la méthode proposée dans l'énoncé (changement de variable $t = \text{Arcsin } x$, suggéré par la présence de $1-x^2$ devant y''), on aurait pu remarquer que $x \longmapsto x$ est solution évidente de (E), puis trouver une deuxième solution par la méthode de Lagrange.

8.10 Il s'agit d'une EDL2 SSM, non normalisée, mais normalisable sur $]0; +\infty[$.

Comme le suggère l'énoncé, effectuons le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, donc aussi un changement de fonction inconnue $z(t) = y(x)$, où z est deux fois dérivable. On a, avec des notations classiquement abusives :

$$y(x) = z(t), \quad y'(x) = z'(t) \frac{dt}{dx} = -z'(t) \frac{1}{x^2},$$

$$y''(x) = z''(t) \frac{1}{x^4} + z'(t) \frac{2}{x^3}.$$

$$\text{D'où : } x^4 y''(x) - y(x) = z''(t) + \frac{2}{t} z'(t) - z(t).$$

Ainsi, y est solution de (E) sur $]0; +\infty[$ si et seulement si z est solution sur $]0; +\infty[$ de :

$$(F) \quad z'' + \frac{2}{t} z' - z = 0.$$

Comme le suggère l'énoncé, effectuons le changement de fonction inconnue défini par $u(t) = tz(t)$.

L'application u est deux fois dérivable et :

$$z = \frac{1}{t} u, \quad z' = -\frac{1}{t^2} u + \frac{1}{t} u', \quad z'' = \frac{2}{t^3} u - \frac{2}{t^2} u' + \frac{1}{t} u'',$$

$$\text{d'où : } z'' + \frac{2}{t} z' - z = \frac{1}{t} u'' - \frac{1}{t} u.$$

Ainsi, z est solution de (F) sur $]0; +\infty[$ si et seulement si u est solution sur $]0; +\infty[$ de : (G) $u'' - u = 0$.

L'ED (G) est une EDL2 SSM, à coefficients constants.

L'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ admet deux solutions réelles 1 et -1 . D'après le cours, la solution générale de (G) est donc :

$$u : t \mapsto a e^t + b e^{-t}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Par le changement de fonction inconnue $u = tz$, la solution générale de (F) sur $]0; +\infty[$ est :

$$z : t \mapsto \frac{1}{t}(a e^t + b e^{-t}), \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Enfin, par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on conclut que l'ensemble S des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ est :

$$S = \{y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto x(a e^{\frac{1}{x}} + b e^{-\frac{1}{x}}); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

8.11 Il s'agit d'une EDL2 SSM, non normalisée sur $\mathbb{R}$, mais normalisable sur I si $0 \notin I$.

Cherchons, selon l'indication de l'énoncé, une solution de (e) sous la forme d'un polynôme $y : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Le coefficient du terme en x^n du premier membre de (e) doit être nul : $na_n - 2a_n = 0$, d'où, puisque $a_n \neq 0$: $n = 2$.

Cherchons donc une solution particulière de (e) sous la forme $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a alors, avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned} xy'' + (x-2)y' - 2y &= x2a + (x-2)(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) \\ &= -(2a+b)x - 2(b+c). \end{aligned}$$

Pour que y soit solution de (e) sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que $2a + b = 0$ et $b + c = 0$, c'est-à-dire : $b = -2a$ et $c = 2a$.

Ainsi, par exemple (en prenant $a = 1$), l'application $y_1 : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est solution de (e) sur $\mathbb{R}$.

• Cherchons, selon l'indication de l'énoncé, une solution particulière de la forme $y : x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On a, avec des notations classiquement abusives :

$$y = e^{\alpha x}, \quad y' = \alpha e^{\alpha x}, \quad yz'' = \alpha^2 e^{\alpha x},$$

puis :

$$\begin{aligned} xy'' + (x-2)y' - 2y &= x\alpha^2 e^{\alpha x} + (x-2)\alpha e^{\alpha x} - 2e^{\alpha x} \\ &= ((\alpha^2 + \alpha)x - 2(\alpha + 1))e^{\alpha x} = (\alpha + 1)(\alpha x - 2)e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

En choisissant $\alpha = -1$, l'application $y_2 : x \mapsto e^{-x}$ est solution de (e) sur $\mathbb{R}$.

• Il est clair que, pour tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, la famille $(y_1|_I, y_2|_I)$ est libre. D'après le cours, si $0 \notin I$, l'ensemble S_I des solutions de (e) sur I est donc :

$$S_I = \{y : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda(x^2 - 2x + 2) + \mu e^{-x}; \\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• Étudions le raccord en 0.

Soit I un intervalle ouvert contenant 0, et soient

$(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1(x^2 - 2x + 2) + \mu_1 e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2(x^2 - 2x + 2) + \mu_2 e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{On a : } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 2\lambda_1 + \mu_1 \text{ et } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2\lambda_2 + \mu_2,$$

donc y est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si :

$$2\lambda_2 + \mu_2 = 2\lambda_1 + \mu_1.$$

Supposons cette condition réalisée, et notons $y(0) = 2\lambda_1 + \mu_1$.

Alors, y est continue sur I , de classe C^1 sur $I - \{0\}$, et, pour tout $x \in I - \{0\}$:

$$y'(x) = \begin{cases} \lambda_1(2x - 2) - \mu_1 e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2(2x - 2) - \mu_2 e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{On a : } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -2\lambda_1 - \mu_1$$

$$\text{et } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -2\lambda_2 - \mu_2 = -2\lambda_1 - \mu_1,$$

donc, d'après le théorème limite de la dérivée, y est de classe C^1 sur I et $y'(0) = -2\lambda_1 - \mu_1$.

L'application y est de classe C^2 sur $I - \{0\}$ et, pour tout

$$x \in I - \{0\} : y''(x) = \begin{cases} 2\lambda_1 + \mu_1 e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda_2 + \mu_2 e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{On a : } y''(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 2\lambda_1 + \mu_1$$

$$\text{et } y''(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2\lambda_2 + \mu_2 = 2\lambda_1 + \mu_1,$$

donc, d'après le théorème limite de la dérivée (appliqué à y'), y est de classe C^2 sur I et $y''(0) = 2\lambda_1 + \mu_1$.

Enfin, il est immédiat que y vérifie (e) en 0.

On conclut que, si $0 \in I$, l'ensemble S_I des solutions de (e) sur I est :

$$S_I = \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x) = \begin{cases} \lambda_1(x^2 - 2x + 2) + \mu_1 e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda_1 + \mu_1 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2(x^2 - 2x + 2) + (2\lambda_1 + \mu_1 - 2\lambda_2)e^{-x} & \text{si } x > 0; \end{cases} \right. \\ (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

et donc S_I est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

8.12 Il s'agit d'une EDL2 SSM, normalisable sur $]0; +\infty[$.

- Une solution évidente est $y_1 : x \mapsto x$.
- Cherchons une deuxième solution par la méthode de Lagrange, c'est-à-dire sous la forme $y : x \mapsto x\lambda(x)$, où λ est une fonction inconnue, supposée deux fois dérivable. On a, avec des notations classiquement abusives : $y = x\lambda$, $y' = \lambda + x\lambda'$, $y'' = 2\lambda' + x\lambda''$,
donc :

$$\begin{aligned} x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y \\ &= x^2(x+1)(2\lambda' + x\lambda'') - x(x^2+4x+2)(\lambda + x\lambda') \\ &\quad + (x^2+4x+2)x\lambda \\ &= x^3(x+1)\lambda'' + (2x^2(x+1) - x^2(x^2+4x+2))\lambda' \\ &\quad = x^2(x(x+1)\lambda'' - (x^2+2x)\lambda'). \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si λ est solution de : (F) $(x+1)\lambda'' - (x+2)\lambda' = 0$.

Une solution particulière (autre que la solution nulle) de cette EDL1 SSM (d'inconnue λ') est donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda'(x) &= \exp\left(\int \frac{x+2}{x+1} dx\right) = \exp\left(\int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx\right) \\ &= \exp(x + \ln(x+1)) = (x+1)e^x. \end{aligned}$$

Une fonction λ convenant est donnée par :

$$\lambda(x) = \int (x+1)e^x dx = xe^x.$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y_2 :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^x.$$

- Puisque (E) est une EDL2 SSM normalisée, à coefficients continus sur l'intervalle $]0; +\infty[$, d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

D'après le cours sur la méthode de Lagrange, la famille (y_1, y_2) est libre.

On a vu plus haut : $y_1 \in \mathcal{S}$, $y_2 \in \mathcal{S}$.

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ est :

$$\mathcal{S} = \{y :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 e^x; (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

8.13 Il s'agit de résoudre une EDL2 SSM, normalisée, avec conditions en un point.

- Comme le suggère l'énoncé, cherchons d'éventuelles solutions polynomiales de

$$(E) \quad (1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Notons $y : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, une fonction polynomiale, où

$n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Si y est solution de (E), alors le terme de degré n du premier membre est nul, donc :

$$-n(n-1)a_n + 2na_n - 2a_n = 0,$$

c'est-à-dire : $(-n^2 + 3n - 2)a_n = 0$,

donc : $n = 1$ ou $n = 2$.

Considérons donc $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fixé. On a, avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' + 2xy' - 2y \\ &= (1-x^2)2a + 2x(2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) \\ &= 2(a-c). \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si : $c = a$. En particulier, les deux applications :

$$y_1 : x \mapsto x \quad \text{et} \quad y_2 : x \mapsto x^2 + 1$$

sont solutions de (E) (on peut d'ailleurs contrôler ceci par un calcul direct). Comme, d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $] -1; 1[$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, et que (y_1, y_2) est libre, on déduit :

$$\mathcal{S} = \left\{ y :] -1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \alpha x + \beta(x^2 + 1); (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Avec ces notations, on a :

$$\forall x \in] -1; 1[, y'(x) = \alpha + 2\beta x,$$

donc : $y(0) = \beta$ et $y'(0) = \alpha$, puis :

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = 4. \end{cases}$$

On conclut qu'il y a une solution et une seule, l'application :

$$y :] -1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 4x + 3.$$

8.14 a) Soit y une solution de (E).

Alors, y est deux fois dérivable et $y'' = xy' - y$. Comme $xy' - y$ est dérivable, y'' est dérivable, donc y est trois fois dérivable et : $y^{(3)} = (xy' - y)' = xy''$.

b) • Soit y une solution de (P).

D'après a), y est trois fois dérivable et $y^{(3)} = xy''$. Ainsi, y'' vérifie une EDL1 SSM. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, yz''(x) = \lambda \exp\left(\int x dx\right) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Mais $yz''(0) = 0$, donc $\lambda = 0$, puis $yz'' = 0$. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \alpha x + \beta$.

Puis : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 = y'' - xy' + y = \beta$,

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \alpha x$.

• Réciproquement, il est évident que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \alpha x$ est solution de (P).

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (P) est :

$$\mathcal{S} = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \alpha x; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

8.15 Il s'agit d'une EDL2 ASM, normalisée sur l'intervalle $I =]-\pi/2; \pi/2[$.

La solution générale de l'EDL2 SSM associée

$$(E_0) \quad y'' + y = 0$$

est $y : x \longmapsto A \cos x + B \sin x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Cherchons une solution particulière de (E), par la méthode de variation des constantes, sous la forme

$$y : x \longmapsto A(x) \cos x + B(x) \sin x,$$

où A, B sont des fonctions inconnues, supposées dérivables. On a, par la méthode :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad & \begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \\ \iff \forall x \in I, \quad & \begin{cases} A'(x) = -\tan x \\ B'(x) = 1 \end{cases} \\ \iff \forall x \in I, \quad & \begin{cases} A(x) = \ln \cos x \\ B(x) = x. \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y : x \longmapsto \cos x \ln \cos x + x \sin x.$$

On conclut que la solution générale de (E) sur I est :

$$y : x \longmapsto \cos x \ln \cos x + x \sin x + A \cos x + B \sin x, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

8.16 L'ED (E) est une EDL2 ASM, normalisée sur l'intervalle $I =]-\pi/2; \pi/2[$.

1) Résolution de (E) :

La solution générale de l'EDL2 SSM associée

$$(E_0) \quad y'' + y = 0$$

est : $y : x \longmapsto A \cos x + B \sin x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Cherchons une solution particulière de (E), par la méthode de variation des constantes, sous la forme

$$y : x \longmapsto A(x) \cos x + B(x) \sin x,$$

où A, B sont des fonctions inconnues, supposées dérivables. On a, par la méthode :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad & \begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \tan^2 x \end{cases} \\ \iff \forall x \in I, \quad & \begin{cases} A'(x) = -\tan^2 x \sin x = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \\ B'(x) = \tan^2 x \cos x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}. \end{cases} \end{aligned}$$

Calculons $A(x)$ et $B(x)$ par primitivation (à une constante additive près), en utilisant, par exemple, les règles de Bioche :

$$\begin{aligned} A(x) &= - \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx \quad u = \cos x \int \frac{1-u^2}{u^2} du = -\frac{1}{u} - u \\ &= -\frac{1}{\cos x} - \cos x = -\frac{1 + \cos^2 x}{\cos x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \quad v = \sin x \int \frac{v^2}{1-v^2} dv \\ &= \int \left(-1 + \frac{1}{1-v^2} \right) dv = -v + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| \\ &= -\sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}. \end{aligned}$$

On en déduit une solution particulière de (E) :

$$\begin{aligned} y : x \longmapsto y(x) &= -\frac{1 + \cos^2 x}{\cos x} \cos x \\ &+ \left(-\sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \sin x \\ &= -2 + \frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \end{aligned}$$

puis la solution générale de (E) :

$$y : x \longmapsto -2 + \frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + A \cos x + B \sin x, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2) Résolution de (P) :

Traduisons les conditions en 0.

- On a : $y(0) = 0 \iff -2 + A = 0 \iff A = 2$.
- On calcule $y'(x)$, pour tout $x \in I$:

$$y'(x) = \frac{1}{2} \cos x \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \sin x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) - A \sin x + B \cos x,$$

$$\text{d'où :} \quad y'(0) = 0 \iff B = 0.$$

Finalement, le problème (P) admet une solution et une seule :

$$\begin{aligned} y :]-\pi/2; \pi/2[, \\ x \longmapsto -2 + \frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + 2 \cos x. \end{aligned}$$

8.17 a) Il s'agit d'une EDL4 SSM, à coefficients constants.

On forme l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} r^4 - 2r^2 + 1 = 0 &\iff (r^2 - 1)^2 = 0 \\ &\iff (r - 1)^2 (r + 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

dont les solutions sont -1 (double) et 1 (double).

D'après le cours, généralisé à l'ordre 4, la solution générale de (E) est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$y(x) = (Ax + B)e^x + (Cx + D)e^{-x}, \quad (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4.$$

b) 1) L'application $y_1 : x \mapsto e^x$ est solution évidente de (E).

2) En notant, selon l'énoncé, $z = y y_1^{-1}$, comme y_1 est solution de (E), la fonction constante égale à 1 sera solution de la nouvelle équation.

On a, avec des notations classiquement abusives :

$$y = z e^x, \quad y' = (z' + z) e^x, \quad y'' = (z'' + 2z' + z) e^x$$

$$y^{(3)} = (z^{(3)} + 3z'' + 3z' + z) e^x$$

$$y^{(4)} = (z^{(4)} + 4z^{(3)} + 6z'' + 4z' + z) e^x,$$

donc :

$$(E) \quad y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \iff (F) \quad z^{(4)} + 4z^{(3)} + 4z'' = 0.$$

En notant $u = z''$, on a :

$$(F) \iff (G) \quad u'' + 4u' + 4u = 0.$$

L'ED (G) est une EDL2 SSM, à coefficients constants. L'équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$ admet une solution double réelle -2 , donc la solution générale de (G) est : $u : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Comme $u = zz''$, en primitivant deux fois, la solution générale de (F) est :

$$z : x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{-2x} + (\gamma x + \delta), \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Enfin, comme $y = z e^x$, la solution générale de (E) est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{-x} + (\gamma x + \delta) e^x, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

On retrouve bien le même résultat qu'en a).

8.18 On a, pour toutes applications $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \end{cases} \iff (S) \quad \begin{cases} p y_1' + q y_1 = -y_1'' \\ p y_2' + q y_2 = -y_2'' \end{cases}.$$

Comme $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ ne s'annule en aucun point de I , pour tout $x \in I$, le système linéaire (S) d'inconnue $(p(x), q(x))$ est de Cramer, donc admet une solution et une seule. On a donc :

$$(S) \iff \left(p = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{w} \text{ et } q = \frac{y_1' y_2'' - y_1'' y_2'}{w} \right).$$

Ces formules montrent l'existence et l'unicité de (p, q) . De plus, comme y_1 et y_2 sont de classe C^2 sur I , par opérations, p et q sont continues sur I .

On conclut qu'il existe un couple (p, q) et un seul convenant, et il est donné par les formules ci-dessus.

8.19 Soit y une solution de (E). Avec des notations classiquement abusives, l'application $U = y^2 + e^{-x} y'^2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} U' &= 2yy' - e^{-x} y'^2 + e^{-x} 2y'y'' \\ &= 2y'e^{-x}(e^x y + y'') - e^{-x} y'^2 = -e^{-x} y'^2 \leq 0, \end{aligned}$$

donc U est décroissante.

On a donc : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad U(x) \leq U(0)$.

Il en résulte : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad y^2(x) \leq U(x) \leq U(0)$,

puis : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad 0 \leq |y(x)| \leq \sqrt{U(0)}$.

Ceci montre que y est bornée.

8.20 1) L'application

$$F : U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{y}{x + y^2}$$

est de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et $(2, 1) \in U$. D'après le théorème de Cauchy et Lipschitz, le problème de Cauchy

$$(C) \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{x + y^2} \\ y(2) = 1 \end{cases} \text{ admet une solution maximale et une}$$

seule, notée encore y , et l'intervalle de définition I de y est ouvert.

Ceci montre l'unicité d'une éventuelle solution de (C) sur $]0; +\infty[$.

2) • Supposons $]0; +\infty[\subset I$ et $\forall x \in]0; +\infty[, \quad y(x) \neq 0$. On a alors, avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned} y' = \frac{y}{x + y^2} &\iff y'x + y'y^2 = y \iff y'y^2 = y - xy' \\ &\iff y' = \frac{y - xy'}{y^2} \iff y' = \left(\frac{x}{y} \right)'. \end{aligned}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{x}{y} + C$,

d'où : $y^2 - Cy - x = 0$.

De plus : $y(2) = 1 \iff 1 - C - 2 = 0 \iff C = -1$.

On obtient : $y^2 + y - x = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1 + 4x > 0$, donc pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$y(x) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x}}{2} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

Comme $y(2) = 1$, ceci nous amène à considérer la fonction obtenue ci-dessus avec le signe $+$ devant la racine carrée.

3) Réciproquement, considérons l'application :

$$y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4x}).$$

Il est clair que y est dérivable sur $]0; +\infty[$, que y est solution de $y' = \frac{y}{x + y^2}$, sur $]0; +\infty[$ (d'après 2)), et que $y(2) = 1$.

Finalement, il y a une solution et une seule :

$$y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4x}).$$

8.21 1) Résolvons l'EDL1 (E) $y' = y - x^2 + x$, d'inconnue $y : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

La solution générale de l'EDL1 SSM associée

$$(E_0) y' = y$$

est : $y : x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$y : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

On a, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} y'(x) - (y(x) - x^2 + x) &= (2\alpha x + \beta) - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma - x^2 + x) \\ &= (1 - \alpha)x^2 + (2\alpha - \beta - 1)x + (\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Il suffit donc que :

$$1 - \alpha = 0, \quad 2\alpha - \beta - 1 = 0, \quad \beta - \gamma = 0,$$

c'est-à-dire : $\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1$.

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y : x \mapsto x^2 + x + 1.$$

D'après le cours, la solution générale de (E) est donc :

$$y : x \mapsto x^2 + x + 1 + \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considérons donc, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application :

$$f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x + 1 + \lambda e^x,$$

qui est dérivable sur $[0; +\infty[$.

2) Si $\lambda < 0$, alors $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, contradiction avec la deuxième condition de l'énoncé.

On a donc nécessairement : $\lambda \geq 0$.

Alors : $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = 2x + 1 + \lambda e^x > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Il en résulte que $f > 0$ si et seulement si $f(0) > 0$.

Et : $f(0) = 1 + \lambda$.

Ainsi, f convient si et seulement si : $1 + \lambda > 0$.

Enfin : $a = f(1) = 3 + \lambda e$, donc : $\lambda = \frac{a-3}{e}$,

puis : $\lambda > -1 \iff \frac{a-3}{e} > -1 \iff a > 3 - e$.

On conclut que l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ demandé est : $]3 - e; +\infty[$.

8.22 Considérons l'application

$$U : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto U(x) = x^2 f(x) - x^4,$$

suggérée par l'expression $xf'(x) + 2f(x) - 4x^2$ de l'énoncé.

Cette application U est dérivable et, on a, pour tout $x \in [0; +\infty[: U'(x) = x(xf'(x) + 2f(x) - 4x^2) \geq 0$.

Il en résulte que U est croissante. Comme de plus, $U(0) = 0$, on déduit : $U \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0; +\infty[, x^2 f(x) \geq x^4.$$

En simplifiant par x^2 , on déduit :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \geq x^2.$$

Comme f est continue en 0, l'inégalité est encore vraie en 0, et on conclut : $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \geq x^2$.

8.23 1) Soit f convenant. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\},$$

$$f'(x) - \frac{2}{x-a} f(x) = -\frac{2}{x-a} f(a) - f'(a).$$

La solution générale de l'EDL1 SSM $y' - \frac{2}{x-a} y = 0$, sur $I_1 =]-\infty; a[$ ou $I_2 =]a; +\infty[$, est donnée par :

$$y : x \mapsto \lambda \exp\left(\int \frac{2}{x-a} dx\right) = \lambda(x-a)^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conformément à la méthode de variation de la constante, considérons l'application

$$g : \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{(x-a)^2},$$

qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{a\}$. On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}, f(x) = (x-a)^2 g(x),$$

d'où, en dérivant et en reportant l'expression de $f'(x)$ dans l'égalité initiale :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}, (x-a)^2 g'(x) = -\frac{2}{x-a} f(a) - f'(a),$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}, g'(x) = -\frac{2}{(x-a)^3} f(a) - \frac{f'(a)}{(x-a)^2}.$$

Par primitivation sur $] -\infty; a[$ et sur $]a; +\infty[$, on déduit qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; a[, g(x) = \frac{\alpha}{(x-a)^2} + \frac{\beta}{x-a} + \gamma \\ \forall x \in]a; +\infty[, g(x) = \frac{\lambda}{(x-a)^2} + \frac{\mu}{x-a} + \nu, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; a[, f(x) = \alpha + \beta(x-a) + \gamma(x-a)^2 \\ \forall x \in]a; +\infty[, f(x) = \lambda + \mu(x-a) + \nu(x-a)^2. \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \alpha \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \lambda \\ f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \beta \quad \text{et} \quad f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \mu, \end{cases}$$

d'où, puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$\alpha = \lambda \text{ et } \beta = \mu,$$

puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta(x-a) + \gamma(x-a)^2 & \text{si } x \leq a \\ \alpha + \beta(x-a) + \nu(x-a)^2 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

2) Réciproquement, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'application obtenue ci-dessus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} \beta + \gamma(x-a) & \text{si } x < a \\ \beta + \nu(x-a) & \text{si } x > a, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\beta + 2\gamma(x-a) + \beta) & \text{si } x < a \\ \frac{1}{2}(\beta + 2\nu(x-a) + \beta) & \text{si } x > a, \end{cases}$$

donc f convient.

On conclut que l'ensemble des applications convenant est :

$$\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} \alpha + \beta(x-a) + \gamma(x-a)^2 & \text{si } x \leq a \\ \alpha + \beta(x-a) + \nu(x-a)^2 & \text{si } x \geq a \end{cases}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

8.24 Remarquons d'abord que F, G, H sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1) Si F et G sont solutions de (E) $X' = AX$, alors :

$$H' = (F + G)' = F' + G' = AF + AG = A(F + G) = AH,$$

donc H est solution de (E).

2) Réciproquement, supposons que H est solution de (E). On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha e^{\alpha t} U + \beta e^{\beta t} V = A(e^{\alpha t} U + e^{\beta t} V),$$

d'où aussi, en dérivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha^2 e^{\alpha t} U + \beta^2 e^{\beta t} V = A(\alpha e^{\alpha t} U + \beta e^{\beta t} V).$$

En prenant les valeurs en 0, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha U + \beta V = A(U + V) = AU + AV \\ \alpha^2 U + \beta^2 V = A(\alpha U + \beta V) = \alpha AU + \beta AV, \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} (AU - \alpha U) + (AV - \beta V) = 0 \\ \alpha(AU - \alpha U) + \beta(AV - \beta V) = 0. \end{cases}$$

Comme $\alpha \neq \beta$, on déduit, par exemple en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - \beta L_1$:

$$\begin{cases} AU - \alpha U = 0 \\ AV - \beta V = 0. \end{cases}$$

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F'(t) = \alpha e^{\alpha t} U = e^{\alpha t} AU = A(e^{\alpha t} U) = AF(t),$$

donc F est solution de (E), et, de même, G est solution de (E).

8.25 D'après le cours, le problème de Cauchy linéaire proposé admet une solution et une seule, notée (x, y, z) .

Considérons $U = x + jy + j^2 z$. L'application U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} U' &= x' + jy' + j^2 z' \\ &= (-x + y) + j(-y + z) + j^2(-z + x) \\ &= (j^2 - 1)x + (1 - j)y + (j - j^2)z \\ &= (1 - j)((-1 + j)x + y + jz) \\ &= (1 - j)(j^2 x + y + jz) \\ &= (1 - j)j^2(x + jy + j^2 z) = (j^2 - 1)U. \end{aligned}$$

Par résolution de l'EDL1 SSM obtenue ci-dessus, il existe $U_0 \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, U(t) = e^{(j^2 - 1)t} U_0$.

De plus :

$$U_0 = U(0) = x(0) + jy(0) + j^2 z(0) = 1 + j^2 + j = 0,$$

d'où : $\forall t \in \mathbb{R}, U(t) = 0$.

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) + jy(t) + j^2 z(t) = 0$.

D'après un exercice de Première année (Méthodes et Exercices MPSI, ex. 2.27 a)), les points $x(t), y(t), z(t)$ forment, dans le plan complexe, un triangle équilatéral direct.

8.26 1) Soit f convenant. Puisque f est continue, l'application $x \longmapsto \int_0^x (f(t))^2 dt$, est de classe C^1 , donc f est de classe C^1 sur $] -1; 1[$. On a alors, en dérivant :

$$\forall x \in] -1; 1[, f'(x) = (f(x))^2,$$

et, d'autre part : $f(0) = 1$.

• Considérons le problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Puisque l'application $(x, y) \longmapsto y^2$ est de classe C^1 sur l'ouvert $U =] -1; 1[\times \mathbb{R}$ et que $(0, 1) \in U$, d'après le théorème de Cauchy et Lipschitz, (C) admet une solution maximale et une seule.

• D'autre part, cherchons une solution y de (C) ne s'annulant en aucun point. On a :

$$y' = y^2 \iff \frac{y'}{y^2} = 1$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in] -1; 1[, -\frac{1}{y(x)} = x + \lambda$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in] -1; 1[, y(x) = -\frac{1}{x + \lambda}.$$

Puis : $y(0) = 1 \iff -\frac{1}{\lambda} = 1 \iff \lambda = -1$.

Ainsi, $y_0 :] - \infty ; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-x}$

est solution de (C), nécessairement maximale, puisque $y_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

D'après le cours, f est restriction de y_0 , d'où :

$$\forall x \in] - 1 ; 1[, f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

2) Réciproquement, $f :] - 1 ; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est continue sur $] - 1 ; 1[$, et, pour tout $x \in] - 1 ; 1[$:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x (f(t))^2 dt &= 1 + \int_0^x \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= 1 + \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^x = 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{1}{1-x} = f(x), \end{aligned}$$

donc f convient.

Finalement, il y a une application et une seule convenant :

$$f :] - 1 ; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

8.27 1) Existence et unicité de y :

Puisque l'application $F : (x, y) \mapsto -\frac{3}{x}y + xy^2$

est de classe C^1 sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times \mathbb{R} \text{ de } \mathbb{R}^2$, et que $\left(2, \frac{1}{3}\right) \in U$, d'après le théorème de Cauchy et Lipschitz, le

problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = -\frac{3}{x}y + xy^2 \\ y(2) = \frac{1}{3} \end{cases}$ admet une so-

lution maximale et une seule, notée y , et l'intervalle de définition I de y est ouvert.

Remarquons : $2 \in I$ et $I \subset]0; +\infty[$.

2) Calcul de y :

• Cherchons une solution particulière y de (C) ne s'annulant en aucun point.

Soient J un intervalle ouvert tel que $2 \in J$ et $J \subset]0; +\infty[$, et $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall x \in J, y(x) \neq 0.$$

Notons $z : J \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{y(x)}$, qui est dérivable sur J .

On a, avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned} y' = -\frac{3}{x}y + xy^2 &\iff -\frac{z'}{z^2} = -\frac{3}{xz} + \frac{x}{z^2} \\ &\iff z' = \frac{3}{x}z - x \end{aligned} \quad (\text{F}).$$

Il s'agit maintenant d'une EDL1 ASM. La solution générale de l'EDL1 SSM associée $z' = \frac{3}{x}z - x$ est donnée par :

$$z(x) = \lambda \exp\left(\int \frac{3}{x} dx\right) = \lambda e^{3 \ln x} = \lambda x^3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante, sous la forme $z : x \mapsto z(x) = \lambda(x)x^3$, où λ est la nouvelle fonction inconnue, supposée dérivable. On a, avec des notations classiquement abusives :

$$z' = \frac{3}{x}z - x \iff \lambda' x^3 = -x$$

$$\iff \lambda' = -\frac{1}{x^2} \iff \lambda = \frac{1}{x}.$$

Une solution particulière de (F) est donc :

$$z : x \mapsto \frac{1}{x}x^3 = x^2.$$

D'après le cours, la solution générale de (F) est donc :

$$z : x \mapsto x^2 + \lambda x^3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction

$$y : x \mapsto \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{x^2 + \lambda x^3}$$

est une solution de l'ED de l'énoncé. Et, pour cette fonction :

$$y(2) = \frac{1}{3} \iff \frac{1}{4 + 8\lambda} = \frac{1}{3} \iff \lambda = -\frac{1}{8}.$$

Considérons donc la fonction

$$y_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 - \frac{1}{8}x^3} = \frac{8}{8x^2 - x^3}.$$

D'après ce qui précède, y_1 est solution de (C) sur l'intervalle $]0; 8[$. De plus : $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 8^-} +\infty$, donc y_1 est nécessairement la solution maximale de (C).

On conclut que la solution maximale de (C) est :

$$y :]0; 8[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{8}{8x^2 - x^3}.$$

8.28 1) L'application

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\cos y$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^2$, donc, d'après le théorème de Cauchy et Lipschitz, le problème de Cauchy

(C) $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule,

notée y , et l'intervalle de définition de y est ouvert.

2) Cherchons des solutions de $y' + \cos y = 0$ telles que $\cos y$ ne s'annule pas. On a alors, avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned}
y' + \cos y &= 0 \iff \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\cos y} \\
\iff x &= \int -\frac{dy}{\cos y} \stackrel{t=\tan(y/2)}{=} -\int \frac{2 \frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= -2 \int \frac{dt}{1-t^2} = -2 \operatorname{Arctg} t + C, \text{ si } |t| < 1, C \in \mathbb{R} \\
\iff t &= \operatorname{th} \frac{C-x}{2} = -\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} - \frac{C}{2} \right) \\
\iff \tan \frac{y}{2} &= -\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} - \frac{C}{2} \right) \\
\iff y &= -2 \operatorname{Arctan} \left[\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} - \frac{C}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Et :

$$y(\pi) = 0 \iff -2 \operatorname{Arctan} \left[\operatorname{th} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \right] = 0 \iff C = \pi.$$

Considérons donc l'application

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto -2 \operatorname{Arctan} \left(\operatorname{th} \frac{x-\pi}{2} \right).$$

Cette application y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait (C). De plus, il est évident, puisque y est définie sur $\mathbb{R}$, que y est solution maximale de (C).

Finalement, la solution maximale de (C) est y définie ci-dessus.

8.29 Soit $c \in]0; +\infty[$.

Résolvons l'ED (E) $y' = -(c^2 + y^2)$. On a, avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned}
\text{(E)} \iff \frac{dy}{c^2 + y^2} &= -dx \\
\iff \int \frac{dy}{c^2 + y^2} &= -x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\
\iff \frac{1}{c} \operatorname{Arctan} \frac{y}{c} &= -x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\
\iff y &= c \tan (c(-x + \lambda)).
\end{aligned}$$

De plus, pour cette fonction y :

$$\begin{aligned}
y(1) = 0 &\iff \tan (c(-1 + \lambda)) = 0 \\
\iff c(\lambda - 1) &= k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff \lambda = 1 + \frac{k\pi}{c}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$y = c \tan \left(c \left(-x + 1 + \frac{k\pi}{c} \right) \right) = c \tan (c(-x + 1)).$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\text{Déf } (y) \supset [0; 1] &\iff \forall x \in [0; 1], c(-x + 1) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\
&\iff [0; c] \subset \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\iff c \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[.
\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble cherché est : $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

8.30 Il s'agit d'un SDL1 SSM, à coefficients constants. La ma-

$$\text{trice de (S) est : } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire (polynôme caractéristique) montre que les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 0 (double), et que les sous-espaces propres sont :

$$\operatorname{SEP}(A, -1) = \operatorname{Vect}(V_1), \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{SEP}(A, 0) = \operatorname{Vect}(V_2), \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que A n'est pas diagonalisable.

Notons $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple (n'importe quel vecteur hors

de $\operatorname{Vect}(V_1, V_2)$ conviendra), et :

$$P = (V_1 \quad V_2 \quad V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, P est inversible et un calcul élémentaire (ou la calcula-

$$\text{trice) donne : } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En notant $T = P^{-1}AP$, on obtient, après calcul du produit des

$$\text{trois matrices : } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est triangulaire supérieure.

Autrement dit, nous avons trigonalisé A .

Notons $U = P^{-1}X$, donc $X = PU$. On a :

$$(S) \iff X' = AX \iff U' = TU.$$

$$\text{Notons } U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \text{ On a :}$$

$$(S) \iff \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} u' = -u - w \\ v' = 3w \\ w' = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} w(t) = C_3 \\ v(t) = 3C_3 t + C_2 \\ u(t) = C_1 e^{-t} - C_3. \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = PU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} - C_3 \\ C_2 + 3C_3 t \\ C_3 \end{pmatrix}$$

On conclut que la solution générale de (S) est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + 3C_3 t + (C_2 - C_3) \\ y(t) = -C_1 e^{-t} + 6C_3 t + (2C_2 + C_3) \\ z(t) = -2C_1 e^{-t} + 3C_3 \end{cases} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

8.31 a) L'application $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$(t, x, y) \longmapsto$

$$\left((t-1)xy - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, (2t+1)xy - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y \right)$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$, et $(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, donc, d'après le théorème de Cauchy et Lipschitz, le problème de Cauchy (C) admet une solution maximale et une seule, notée (x, y) , et l'intervalle de définition de cette solution maximale est ouvert.

b) L'application $z : t \longmapsto (2t+1)x(t) - (t-1)y(t)$

est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} z'(t) &= (2t+1)x'(t) + 2x(t) - (t-1)y'(t) - y(t) \\ &= (2t+1) \left((t-1)x(t)y(t) - \frac{2}{3}x(t) + \frac{1}{3}y(t) \right) + 2x(t) \\ &\quad - (t-1) \left((2t+1)x(t)y(t) - \frac{4}{3}x(t) + \frac{2}{3}y(t) \right) - y(t) \\ &= \left(-\frac{2}{3}(2t+1) + 2 + \frac{4}{3}(t-1) \right) x(t) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3}(2t+1) - \frac{2}{3}(t-1) - 1 \right) y(t) = 0. \end{aligned}$$

Comme $z' = 0$ sur l'intervalle I , on déduit que z est constante sur I . Et : $z(0) = x(0) + y(0) = 2$.

On conclut que z est constante égale à 2.

8.32 a) D'après le cours, la solution générale de (E_0) est donnée, pour $x \in]-1; 1[$, par :

$$y(x) = \lambda \exp \left(- \int \frac{1}{1-x} dx \right) = \lambda(1-x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $y :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application dSE(0),

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{de rayon } \geq 1.$$

D'après le cours, on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

On a alors, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} (1-x)y'(x) + y(x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - (n-1) a_n) x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du DSE(0) de g , y est solution de (E) sur $] -1; 1[$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) a_{n+1} - (n-1) a_n = b_n \quad (1).$$

• Supposons que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (1). La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du premier ordre, à coefficients variables, avec second membre. En multipliant par n , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) n a_{n+1} - n(n-1) a_n = n b_n.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n(n-1) a_n$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = n b_n$,

d'où, par sommation et télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \underbrace{u_0}_{=0} + \sum_{k=0}^{n-1} k b_k,$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad a_n = \frac{u_n}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k b_k.$$

De plus, d'après (1) (pour $n = 0$) : $a_1 + a_0 = b_0$.

Réciproquement, considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1 = -a_0 + b_0$ et :

$$\forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k b_k.$$

Il est clair que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (1).

De plus, pour tout $x \in]-1; 1[$ et tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &\leq \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k |b_k| \right) |x|^n \\ &\leq \frac{1}{n(n-1)} (n-1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k| \right) |x|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k x^k|. \end{aligned}$$

Puisque la série entière $\sum_{k \geq 0} b_k x^k$ est de rayon ≥ 1 , pour tout $x \in]-1; 1[$ fixé, la série numérique $\sum_{k \geq 0} |b_k x^k|$ converge, donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k x^k| \right)_{n \geq 2}$ est bornée.

Il en résulte que la suite $(|a_n x^n|)_{n \geq 2}$ est bornée.

Ceci montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est ≥ 1 .

D'après les calculs faits plus haut (par équivalence logique), la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est solution de (E).

On conclut que (E) admet au moins une solution y dSE(0), $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon ≥ 1 , définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ (quelconque, par exemple $a_0 = 0$), $a_1 = -a_0 + b_0$, et :

$$\forall n \geq 2, a_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k b_k.$$

c) • L'application $g : x \mapsto -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ est dSE(0), de rayon 2 (≥ 1), et :

$$\forall x \in]-1; 1[, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

En appliquant b), et en choisissant, par exemple, $a_0 = 0$, on a : $a_1 = b_0 = 0$ et :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, a_n &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{1}{k 2^k} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{n(n-1)} (1 - 2^{-n}). \end{aligned}$$

Une solution y de (E) sur $] -1; 1[$ est donc :

$$y :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n(n-1)} (1 - 2^{-n}) x^n.$$

• Nous allons exprimer la somme de cette dernière série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Rappelons : $\forall t \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$

et : $\forall t \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t).$

En primitivant, on obtient :

$$\forall t \in]-1; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n(n+1)} = \int_0^t -\ln(1-u) du$$

$$\begin{aligned} &= \left[-u \ln(1-u) \right]_0^t - \int_0^t \frac{u}{1-u} du \\ &= -t \ln(1-t) - \int_0^t \left(-1 + \frac{1}{1-u} \right) du \\ &= -t \ln(1-t) + t + \ln(1-t) = (1-t) \ln(1-t) + t. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n(n-1)} (1 - 2^{-n}) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)n} (1 - 2^{-(n+1)}) x^{n+1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)} (x^{n+1} - (2^{-1}x)^{n+1}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^{-1}x)^{n+1}}{(n+1)n}, \\ &\quad \text{car } x \in]-1; 1[\text{ et } 2^{-1}x \in]-1; 1[, \\ &= 2((1-x) \ln(1-x) + x) - 2\left(\left(1 - \frac{x}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\right) \\ &= 2(1-x) \ln(1-x) - (2-x) \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x. \end{aligned}$$

8.33 Il s'agit d'une EDL2 ASM, normalisable sur $]0; +\infty[$.

Effectuons, comme le suggère l'énoncé, le changement de variable $t = \ln x$, donc aussi le changement de fonction inconnue $z(t) = y(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(t), \quad y'(x) = z'(t) \frac{dt}{dx} = z'(t) \frac{1}{x}, \\ y''(x) &= z''(t) \frac{1}{x^2} - z'(t) \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (e) sur $]0; +\infty[$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - z'(t) - 2z(t) = t e^{2t} \quad (\text{F}).$$

Il s'agit maintenant d'une EDL2 ASM à coefficients constants, avec second membre du type polynôme-exponentielle. Considérons l'EDL2 SSM associée :

$$(\text{F}_0) \quad z'' - z' - 2z = 0.$$

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet deux solutions réelles, -1 et 2 . D'après le cours, la solution générale de (E_0) est :

$$z : t \longmapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{2t}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque le coefficient 2 de e^{2t} du second membre est racine simple de l'équation caractéristique, cherchons une solution de (F) de la forme :

$$z : t \longmapsto (at^2 + bt + c) e^{2t}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

On a :

$$z(t) = (at^2 + bt + c) e^{2t},$$

$$z'(t) = (2(at^2 + bt + c) + (2at + b))e^{2t}$$

$$z''(t) = (4(at^2 + bt + c) + 4(2at + b) + 2a)e^{2t}.$$

En reportant dans (F) et en identifiant (polynômes en t), on obtient, après quelques lignes de calcul élémentaire, que z est solution de (F) si et seulement si :

$$a = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{9}.$$

Ainsi, une solution, de (F) est :

$$z : t \mapsto \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{9}t\right)e^{2t}.$$

La solution générale de (F) est donc :

$$z : t \mapsto \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{9}t\right)e^{2t} + \alpha e^{-t} + \beta e^{2t}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

En remplaçant t par $\ln x$, on conclut que la solution générale de (E) sur $]0; +\infty[$ est :

$$y : x \mapsto \left(\frac{1}{6}(\ln x)^2 - \frac{1}{9}\ln x\right)x^2 + \frac{\alpha}{x} + \beta x^2, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

8.34 Il s'agit d'une EDL2 SSM, normalisée, à coefficients variables.

1) Recherche d'une éventuelle solution polynomiale :

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$,

$$y : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Si y est solution de (E) sur $]1; +\infty[$, alors le terme de degré $n+1$ dans le premier membre doit être nul, donc :

$$n(n-1)a_n - 2na_n + 2a_n = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire : } (n^2 - 3n + 2) \underbrace{a_n}_{\neq 0} = 0,$$

donc : $n = 1$ ou $n = 2$.

Cherchons donc une solution éventuelle de (E) sous la forme $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a alors, avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned} x(x^2 - 1)y'' - 2(x^2 - 1)y' + 2xy &= x(x^2 - 1)2a - 2(x^2 - 1)(2ax + b) + 2x(ax^2 + bx + c) \\ &= (2a + 2c)x + 2b. \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si :

$$2a + 2c = 0, \quad 2b = 0,$$

c'est-à-dire : $b = 0$ et $c = -a$.

En particulier, l'application

$$y_1 :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 1$$

est solution de (E).

2) Recherche d'une deuxième solution de (E) par la méthode de Lagrange :

D'après la méthode de Lagrange, on cherche une seconde solution de (E) sous la forme $y : x \mapsto (x^2 - 1)\lambda(x)$, où $\lambda :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est la nouvelle fonction inconnue, supposée dérivable. On a, avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 1)\lambda, \quad y' = (x^2 - 1)\lambda' + 2x\lambda, \\ y'' &= (x^2 - 1)\lambda'' + 4x\lambda' + 2\lambda, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} x(x^2 - 1)y'' - 2(x^2 - 1)y' + 2xy &= x(x^2 - 1)((x^2 - 1)\lambda'' + 4x\lambda' + 2\lambda) \\ &\quad - 2(x^2 - 1)((x^2 - 1)\lambda' + 2x\lambda) + 2x(x^2 - 1)\lambda \\ &= x(x^2 - 1)^2\lambda'' + (4x^2(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)^2)\lambda' \\ &\quad + \underbrace{(2x(x^2 - 1) - 4x(x^2 - 1) + 2x(x^2 - 1))\lambda}_{=0} \\ &= x(x^2 - 1)^2\lambda'' + 2(x^2 - 1)(x^2 + 1)\lambda' \\ &= (x^2 - 1)(x(x^2 - 1)\lambda'' + 2(x^2 + 1)\lambda'). \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si λ est solution de :

$$(F) \quad x(x^2 - 1)\lambda'' + 2(x^2 + 1)\lambda' = 0.$$

Une solution, autre que la fonction nulle, de cette EDL1 en λ' , SSM, est donnée par :

$$\lambda'(x) = \exp\left(-\int \frac{2(x^2 + 1)}{x(x^2 - 1)} dx\right).$$

Pour calculer l'intégrale, effectuons d'abord le changement de variable $t = x^2$:

$$\int \frac{2(x^2 + 1)}{x(x^2 - 1)} dx \underset{t=x^2}{=} \int \frac{t+1}{t(t-1)} dt.$$

Effectuons ensuite une décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \int \frac{t+1}{t(t-1)} dt &= \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t-1}\right) dt \\ &= -\ln t + 2\ln(t-1). \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \lambda'(x) = \exp(\ln(x^2) - 2\ln(x^2 - 1)) = \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Pour calculer λ , on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \int \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} dx = \int \left(-\frac{1}{2}x\right) \left(\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx \\ &= -\frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

On obtient une deuxième solution particulière de (E) :

$$y_2 :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto (x^2 - 1)\lambda(x) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2 - 1}{4} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

D'après le cours sur la méthode de Lagrange, la famille (y_1, y_2) est libre.

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]1; +\infty[$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \right. \\ \left. x \longmapsto a(x^2 - 1) + b \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2 - 1}{4} \ln \frac{x+1}{x-1} \right); (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

8.35

a) • Soit $y : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction dSE(0), de rayon > 0 . On a, pour tout $x \in]-R; R[$ avec des notations classiquement abusives :

$$\begin{aligned} & x^2 y'' + 6xy' + (6 - x^2)y \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\ & \quad + 6x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (6 - x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 6n a_n x^n \\ & \quad + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 6n a_n x^n \\ & \quad + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\ &= 6a_0 + 12a_1 x \\ & \quad + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)a_n + 6n a_n + 6a_n - a_{n-2}) x^n \\ &= 6a_0 + 12a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n^2 + 5n + 6)a_n - a_{n-2}) x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du DSE(0) de la fonction constante égale à -1 , on a :

y est solution de (E)

$$\begin{aligned} & \iff \begin{cases} 6a_0 = -1, \quad 12a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2, \quad \underbrace{(n^2 + 5n + 6)a_n - a_{n-2}}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{6}, \quad a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+3)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci revient à $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, en réitérant :

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{a_{2p-2}}{(2p+3)(2p+2)} \\ &= \frac{1}{(2p+3)(2p+2)} \frac{1}{(2p+1)(2p)} \cdots \frac{1}{5 \cdot 4} a_0 \\ &= \frac{1}{(2p+3) \cdots 4} \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{(2p+3)!}. \end{aligned}$$

• Réciproquement, la série entière $\sum_{p \geq 0} -\frac{1}{(2p+3)!} x^{2p}$ est de rayon infini et sa somme, d'après les calculs précédents, est solution de (e) sur $\mathbb{R}$.

On conclut que (e) admet une solution et une seule dSE(0), l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{x^{2p}}{(2p+3)!},$$

et de plus, le rayon est infini.

b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p+3)!} = -\frac{1}{x^3} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+3}}{(2p+3)!} \\ &= -\frac{1}{x^3} (\text{sh } x - x). \end{aligned}$$

D'autre part, $f(0)$ est le terme constant de la série entière définissant f .

On conclut :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{x - \text{sh } x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{6} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

8.36

Il s'agit d'une EDL2 ASM, normalisable sur $]0; +\infty[$, à coefficients variables.

I) Effectuons le changement de fonction inconnue $z = e^{-x} y$, d'où $y = e^x z$. On a :

$$y = e^x z, \quad y' = e^x (z' + z), \quad y'' = e^x (z'' + 2z' + z).$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si z est solution de :

$$(F) \quad x e^x (z'' + 2z' + z) - 2(x-1)e^x (z' + z) + (x-2)e^x z = x e^x,$$

$$\text{et :} \quad (F) \iff x z'' + 2z' = x.$$

En notant $v = z'$, on a : (F) $\iff x v' + 2v = x$ (G).

Il s'agit d'une EDL1 ASM. La solution générale de l'EDL1 SSM associée (G₀) $x v' + 2v = 0$

$$\text{est :} \quad v : x \longmapsto \lambda \exp \left(-\int \frac{2}{x} dx \right) = \frac{\lambda}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (G) sous forme d'un polynôme de degré 1 : $v : x \mapsto \alpha x + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; +\infty[, \quad xv' + 2v &= x \\ \iff \forall x \in]0; +\infty[, \quad \alpha x + 2(\alpha x + \beta) &= x \\ \iff 3\alpha &= 1, \quad 2\beta = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $v : x \mapsto \frac{1}{3}x$ est solution de (G).

La solution générale de (G) est donc :

$$v : x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{\lambda}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par $v = z'$, la solution générale de (F) est :

$$z : x \mapsto \frac{1}{6}x^2 - \frac{\lambda}{x} + \mu, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale de (E) est obtenue par $y = e^x z$:

$$y : x \mapsto \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{\lambda}{x} + \mu \right) e^x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2) En notant $u = y' - y$, on a : $u' = yz'' - y'$, donc :

$$\begin{aligned} \text{(E)} \quad xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y &= x e^x \\ \iff x(y'' - y') - x(y' - y) + 2(y' - y) &= x e^x \\ \iff xu' - (x-2)u &= x e^x \quad \text{(H)}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une EDL1 ASM. La solution générale de l'EDL1 SSM associée (H₀) $xu' - (x-2)u = 0$ est :

$$u : x \mapsto \lambda \exp \left(\int \frac{x-2}{x} dx \right) = \lambda \frac{e^x}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (H) par la méthode de variation de la constante, sous la forme $u : x \mapsto \lambda(x) \frac{e^x}{x^2}$, où λ est la nouvelle fonction inconnue, supposée dérivable. On a alors, avec des notations classiquement abusives :

$$\text{(H)} \iff \lambda' \frac{e^x}{x} = x e^x \iff \lambda' = x^2 \iff \lambda(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{(I)}.$$

Une solution de (H) est donc :

$$u : x \mapsto \lambda(x) \frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{3}x e^x.$$

La solution générale de (H) est donc :

$$u : x \mapsto \frac{1}{3}x e^x + \lambda \frac{e^x}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On résout ensuite : (I) $y' - y = u = \frac{1}{3}x e^x + \lambda \frac{e^x}{x^2}$.

Il s'agit d'une EDL1 ASM. La solution générale de l'EDL1 SSM associée $y' - y = 0$ est : $y : x \mapsto \mu e^x$, $\mu \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (I) par la méthode de variation de la constante, sous la forme $y : x \mapsto \mu(x) e^x$, où μ est la nouvelle fonction inconnue, supposée dérivable. On a :

$$\begin{aligned} y' - y &= \frac{1}{3}x e^x + \lambda \frac{e^x}{x^2} \iff \mu' e^x = \frac{1}{3}x e^x + \lambda \frac{e^x}{x^2} \\ \iff \mu' &= \frac{1}{3}x + \frac{\lambda}{x^2} \iff \mu(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{\lambda}{x}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y : x \mapsto \left(\frac{x^2}{6} - \frac{\lambda}{x} \right) e^x.$$

La solution générale de (E) est donc :

$$y : x \mapsto \frac{x^2}{6} e^x - \lambda \frac{e^x}{x} + \mu e^x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3) L'EDL2 SSM associée est :

$$\text{(E}_0\text{)} \quad xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = 0.$$

Cherchons une solution particulière y de (E₀) sous la forme $y : x \mapsto x^\alpha e^x$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$ est à trouver. On a :

$$\begin{aligned} y &= x^\alpha e^x, \quad y' = (x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}) e^x, \\ y'' &= (x^\alpha + 2\alpha x^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}) e^x, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y &= (x^{\alpha+1} + 2\alpha x^\alpha + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}) e^x \\ &\quad - 2(x-1)(x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}) e^x + (x-2)x^\alpha e^x \\ &= x^{\alpha-1} e^x (x^2 + 2\alpha x + \alpha(\alpha-1) - 2(x-1)(x+\alpha) + (x-2)x) \\ &= x^{\alpha-1} e^x \alpha(\alpha+1). \end{aligned}$$

En prenant $\alpha = 0$ ou $\alpha = -1$, on obtient une solution particulière de (E₀). Ainsi, les deux applications

$$y_1 : x \mapsto \frac{e^x}{x}, \quad y_2 : x \mapsto e^x$$

sont solutions de (E₀).

On cherche maintenant une solution de (E) par la méthode de variation des constantes, sous la forme :

$$y : x \mapsto u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

où $u_1, u_2 :]0; +\infty[$ sont les fonctions inconnues, supposées dérivables et liées par une certaine condition. On a, par la méthode :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 &= 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 &= \frac{x e^x}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} u'_1 \frac{e^x}{x} + u'_2 e^x &= 0 \\ u'_1 \frac{x e^x - e^x}{x^2} + u'_2 e^x &= e^x \end{cases} \\ \iff \begin{cases} u'_1 + x u'_2 &= 0 \\ (x-1)u'_1 + x^2 u'_2 &= x^2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} u'_1 + x u'_2 &= 0 \\ x(u'_1 + x u'_2) - u'_1 &= x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} u'_1 + u'_2 x &= 0 \\ u'_1 &= -x^2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} u'_1 &= -x^2 \\ u'_2 &= x \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 &= -\frac{x^3}{3} \\ u_2 &= \frac{x^2}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$y : x \mapsto u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \\ = -\frac{x^3}{3} \frac{e^x}{x} + \frac{x^2}{2} e^x = \frac{x^2 e^x}{6}.$$

On conclut que la solution générale de (E) est :

$$y : x \mapsto \frac{x^2 e^x}{6} + \lambda \frac{e^x}{x} + \mu e^x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

8.37 1) Soit f convenant. Par le changement de variable $x = \sin t$, on a :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad f(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} f'(x),$$

d'où :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(\sqrt{1-x^2}) \quad (1).$$

Puisque f est dérivable sur $[-1; 1]$, le second membre est dérivable sur $] -1; 1[$, donc f est deux fois dérivable sur $] -1; 1[$. On, a alors, en dérivant dans l'équation de l'énoncé, pour tout $t \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$:

$$-\sin t f'(\cos t) = -\sin t f'(\cos t) + \cos^2 t f''(\sin t).$$

Mais, en remplaçant t par $\pi/2 - t$ dans l'énoncé, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(\sin t) = \sin t f'(\cos t)$.

d'où, pour tout $t \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$:

$$\cos^2 t f''(\sin t) - \sin t f'(\sin t) + f(\sin t) = 0,$$

ou encore, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0 \quad (E).$$

Il s'agit maintenant d'une EDLS2 SSM, à coefficients variables, normalisée sur $] -1; 1[$. On remarque que $y_1 : x \mapsto x$ est solution évidente. Vu les rôles analogues de $\cos t$ et $\sin t$, on peut conjecturer que $y_2 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ soit solution de (E). Un calcul simple montre que y_2 est solution de (E) sur $] -1; 1[$. D'après le cours, la solution générale de (E) sur $] -1; 1[$ est donc : $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ceci montre qu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 \sqrt{1-x^2}.$$

Puisque f est continue sur $[-1; 1]$, on a aussi :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 \sqrt{1-x^2}.$$

Comme f est dérivable en 1 et que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ne l'est pas, on a nécessairement $\alpha_2 = 0$, et donc :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad f(x) = \alpha_1 x.$$

2) La réciproque est évidente.

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ des applications convenant est :

$$\mathcal{S} = \{f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \alpha x; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

8.38 1) Soit (f, g) convenant.

$$\text{Puisque : } \forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{g(x)}{x}$$

et que g est dérivable, f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

De même, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Comme : } \forall x \in]0; +\infty[, \quad xf'(x) = -g(x),$$

on déduit, en dérivant :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad xf''(x) + f'(x) = -g'(x) = \frac{f(x)}{x},$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad x^2 f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0 \quad (1).$$

Ainsi, f satisfait une EDL2 SSM. Il s'agit d'une ED d'Euler. Effectuons le changement de variable $t = \ln x$, $x = e^t$, d'où le changement de fonction inconnue $f(x) = u(t)$. On a :

$$f(x) = u(t), \quad f'(x) = u'(t) \frac{1}{x}, \quad f''(x) = u''(t) \frac{1}{x^2} - u'(t) \frac{1}{x^2},$$

$$\text{d'où : } (1) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad u''(t) - u(t) = 0 \quad (2).$$

Il s'agit maintenant d'une EDL2 SSM à coefficients constants. La solution générale de (2) est :

$$u : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

d'où la solution générale de (1) :

$$f : x \mapsto \alpha x + \frac{\beta}{x}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On déduit, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g(x) = -xf'(x) = -x\left(\alpha - \frac{\beta}{x^2}\right) = -\alpha x + \frac{\beta}{x}.$$

2) Réciproquement, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on vérifie aisément que le couple (f, g) d'applications de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, défini, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x}, \quad g(x) = -\alpha x + \frac{\beta}{x},$$

convient.

Finalement, l'ensemble des couples (f, g) convenant est donné par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \begin{cases} f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x} \\ g(x) = -\alpha x + \frac{\beta}{x} \end{cases}; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

8.39 Puisque $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après le cours, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+^*) \quad \text{telles que : } S = \Omega \Delta \Omega^{-1}.$$

Pour $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, notons

$Y = \Omega^{-1}X$, qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$X'' + SX = 0 \iff \Omega Y'' + (\Omega \Delta \Omega^{-1}) \Omega Y = 0 \\ \iff Y'' + DY = 0.$$

Notons $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y$. Alors :

$$Y'' + DY = 0 \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, y_k'' + \lambda_k y_k = 0$$

$$\iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, \exists (A_k, B_k) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_k(t) = A_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + B_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t).$$

Comme $\cos$ et $\sin$, sont bornées sur $\mathbb{R}$, chaque y_k est bornée sur $\mathbb{R}$, donc Y est bornée sur $\mathbb{R}$, puis, comme $X = \Omega Y$, et que Ω ne dépend pas de t , X est bornée sur $\mathbb{R}$.

8.40 a) L'application

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x + y^2$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc, d'après le théorème de Cauchy et Lipschitz, le problème de Cauchy (C) admet une solution maximale et une seule, notée f , et l'intervalle de définition de f est ouvert.

b) 1) Montrons, par récurrence sur n , que f est de classe C^n sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Puisque f est dérivable sur I , f est de classe C^0 sur I .
- Si f est de classe C^n sur I , alors, comme :

$$\forall x \in I, f'(x) = 2x + (f(x))^2,$$

f' est de classe C^n sur I , donc f est de classe C^{n+1} sur I .

Ceci montre, par récurrence sur n , que f est de classe C^n sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On conclut que f est de classe C^∞ sur I .

2) Puisque f est de classe C^∞ sur I , d'après le théorème de Taylor-Young, f admet un développement limité à tout ordre en 0, en particulier, f admet un $DL_{11}(0)$.

On a déjà $f(0) = 0$ (par hypothèse), et on a :

$$f' = 2x + f^2, \quad f'' = 2 + 2ff', \quad f^{(3)} = 2f'^2 + 2ff'', \\ f^{(4)} = 6f'f'' + 2ff^{(3)},$$

d'où :

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a donc déjà :

$$f(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^4) = x^2 + o(x^4).$$

Le $DL_{11}(0)$ de f est donc de la forme :

$$f(x) = x^2 + a_5 x^5 + \dots + a_{11} x^{11} + o(x^{11}),$$

où $a_5, \dots, a_{11}$ sont des réels à calculer.

D'après le théorème de Taylor-Young, puisque f est de classe C^∞ , on peut dériver terme à terme :

$$f'(x) = 2x + 5a_5 x^4 + \dots + 11a_{11} x^{10} + o(x^{10}).$$

D'autre part :

$$2x + (f(x))^2 \\ = 2x + (x^2 + a_5 x^5 + \dots + a_{11} x^{11} + o(x^{10}))^2 \\ = 2x + (x^4 + 2a_5 x^7 + 2a_6 x^8 + 2a_7 x^9 + (2a_8 + a_5^2) x^{10} + o(x^{10})).$$

Par unicité de $DL_{10}(0)$ de f' , on déduit :

$$5a_5 = 1, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = 0, \quad 2a_5 = 8a_8, \quad 2a_6 = 9a_9, \\ 2a_7 = 10a_{10}, \quad 2a_8 + a_5^2 = 11a_{11},$$

d'où :

$$a_5 = \frac{1}{5}, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = 0, \quad a_8 = \frac{1}{4} a_5 = \frac{1}{20}, \quad a_9 = \frac{2}{9} a_6 = 0, \\ a_{10} = \frac{2}{10} a_7 = 0, \quad a_{11} = \frac{1}{11} (2a_8 + a_5^2) = \frac{7}{550}.$$

On conclut au $DL_{11}(0)$ de f :

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{20} x^8 + \frac{7}{550} x^{11} + o_{x \rightarrow 0}(x^{11}).$$

8.41 Si f convient, alors le second membre, dans l'énoncé, est C^1 , donc f est C^1 , puis, en réitérant, f est C^2 .

On a alors :

f convient

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1 - 2x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt \\ \iff \begin{cases} f(0) = -1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xf(x) - 2 \int_0^x f(t) dt + xf(x) \end{cases} \\ \iff \begin{cases} f(0) = -1, \quad f'(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -xf'(x) - 3f(x). \end{cases}$$

Autrement dit, la question revient à la résolution d'un problème de Cauchy linéaire :

$$(C) \begin{cases} y(0) = -1, \quad y'(0) = 0 \\ yz'' + xy' + 3y = 0 \end{cases} \quad (E).$$

La présence de $y'' + xy'$ incite à considérer une nouvelle fonction inconnue : $z = e^{x^2/2} y$. On a alors :

$$y = e^{-x^2/2} z, \quad y' = -xe^{-x^2/2} z + e^{-x^2/2} z', \\ y'' = (x^2 - 1)e^{-x^2/2} z - 2xe^{-x^2/2} z' + e^{-x^2/2} z''.$$

$$D'où : \quad y'' + xy' + 3y = e^{x^2/2} (z'' - xz' + 2z).$$

Pour l'EDL2 SSM (F) $z'' - xz' + 2z = 0$, cherchons une solution sous forme polynomiale.

Si $z : x \longmapsto a_n x^n + \dots + a_0$ est solution de (E), où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, alors le terme de degré n du premier membre de (E) doit être nul : $-na_n + 2a_n = 0$ d'où : $n = 2$.

Cherchons donc une solution sous la forme : $z : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. En reportant dans (F), on obtient facilement $b = 0$, $a = 1$, $c = -1$.

Ainsi, une solution particulière de (F) est :

$$z : x \mapsto x^2 - 1,$$

et une solution particulière de (E) est :

$$y : x \mapsto (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$$

De plus : $y(0) = -1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = (3x - x^3)e^{-x^2/2},$$

donc : $y'(0) = 0$.

Ainsi, y est solution de (C).

D'après le cours, le problème de Cauchy linéaire (C) admet une solution et une seule.

On conclut qu'il y a une application et une seule convenant :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$$

8.42 a) L'application continue p admet au moins une primitive P sur I . Notons $u = ze^P$. L'application u est dérivable sur I et :

$$u' = z'e^P + zp e^P = \underbrace{(z' + pz)}_{> 0} e^P > 0.$$

Il en résulte que u est strictement croissante sur I , donc u admet au plus un zéro dans I .

Comme $z = ue^{-P}$ et que e^{-P} ne s'annule en aucun point, on conclut que z admet au plus un zéro.

b) Notons $z = yy'$. L'application z est dérivable sur I et :

$$z' = (yy')' = yy'' + y'^2 = y(-py' - qy) + y'^2,$$

$$\text{donc : } z' + pz = y'^2 - \underbrace{q}_{< 0} y^2 \geq 0.$$

Montrons $z' + pz > 0$, en raisonnant par l'absurde.

Supposons qu'il existe $a \in I$ tel que : $(z' + pz)(a) = 0$.

$$\text{On a alors : } \underbrace{(y'(a))^2}_{\geq 0} + \underbrace{(-q(a))}_{> 0} \underbrace{(y(a))^2}_{\geq 0} = 0,$$

donc $y'(a) = 0$ et $y(a) = 0$. Mais alors, y et la fonction constante nulle sont solutions sur I du problème de Cauchy li-

$$\text{néaire : } \begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(a) = 0, y'(a) = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, il en résulte $y = 0$, ce qui est exclu par l'énoncé.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $z' + pz > 0$.

On peut alors appliquer le résultat de a) et conclure que z admet au plus un zéro dans I .

8.43 a) Soit f une solution de (E_0) .

L'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = f(-x), g'(x) = -f'(-x), g''(x) = f''(-x),$$

d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & g''(x) + p(x)g'(x) + q(x)g(x) \\ &= f''(-x) - p(x)f'(-x) + q(x)f(-x) \\ &= f''(-x) + p(-x)f'(-x) + q(-x)f'(-x) \\ &= (f'' + pf' + qf)(-x) = 0, \end{aligned}$$

et on conclut que g est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

b) 1) D'après le théorème de Cauchy et Lipschitz linéaire, il existe une solution f_1 et une seule de (E_0) telle que :

$$f_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad f_1'(0) = 0.$$

Montrons que f_1 est paire.

Considérons la symétrisée g_1 de f_1 .

D'après a), g_1 est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$g_1(0) = f_1(0) = 1, g_1'(0) = -f_1'(0) = 0.$$

Ainsi, f_1 et g_1 sont solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy linéaire : (E_0) , $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

D'après le théorème de Cauchy linéaire, on a donc $g_1 = f_1$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(-x) = f_1(x)$,

donc f_1 est paire.

2) D'après le théorème de Cauchy linéaire, il existe une solution et une seule f_2 de (E_0) telle que :

$$f_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_2'(0) = 1.$$

Montrons que f_2 est impaire.

Considérons la symétrisée g_2 de f_2 . D'après a), g_2 est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$g_2(0) = f_2(0) = 0, g_2'(0) = -f_2'(0) = -1.$$

Ainsi, f_2 et $-g_2$ sont solutions du problème de Cauchy :

$$(E_0), y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, on a donc $-g_2 = f_2$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, -f_2(-x) = f_2(x)$,

donc f_2 est impaire.

3) • Montrons que (f_1, f_2) est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$.

On a alors aussi, par dérivation : $\alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2' = 0$.

En prenant les valeurs en 0, on a :

$$\begin{cases} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(0) = 0 \\ (\alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2')(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que (f_1, f_2) est libre.

• D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. D'autre part, on vient de voir que (f_1, f_2) est une famille libre dans $\mathcal{S}_0$.

On conclut : (f_1, f_2) est une base de $\mathcal{S}_0$.

8.44 a) • Puisque (E_0) est une EDL2 SSM, normalisée, à coefficients continus sur l'intervalle $]0; +\infty[$, d'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) sur $]0; +\infty[$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel.

• Soit $y \in \mathcal{S}_0$. Montrons, par récurrence sur n , que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, y est de classe C^n sur $]0; +\infty[$.

Puisque y est deux fois dérivable, y est de classe C^1 .

Si, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, y est de classe C^n , alors l'application $x \mapsto -y'(x) + \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)y(x)$ est C^{n-1} , donc y'' est C^{n-1} , y est C^{n+1} .

Ceci montre, par récurrence sur n , que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, y est de classe C^n sur $]0; +\infty[$.

On conclut : $\mathcal{S}_0 \subset C^\infty(]0; +\infty[; \mathbb{R})$.

b) D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application

$$\theta : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad y \longmapsto (y(1), y'(1))$$

est une bijection linéaire. Comme

$$\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{S}_0; y(1) = 2\} = \theta^{-1}(\{2\} \times \mathbb{R}),$$

$\mathcal{S}$ est l'image réciproque par θ de la droite affine $\{2\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$. Il en résulte que $\mathcal{S}$ est une droite affine.

c) La courbure de γ_y au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$\gamma_y = \frac{y''(1)}{(1 + (y'(1))^2)^{3/2}}.$$

Ici :

$$\begin{aligned} y(1) &= 2, \quad y''(1) = -y'(1) + (1 + 1 + 1)y(1) \\ &= -y'(1) + 6, \end{aligned}$$

$$\text{donc :} \quad \gamma_y = \frac{6 - y'(1)}{(1 + y'(1)^2)^{3/2}}.$$

d) D'après le théorème de Cauchy linéaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathcal{S}_0$ unique telle que :

$$y(1) = 2 \quad \text{et} \quad y'(1) = t.$$

La valeur maximale de γ_y est donc la valeur maximale (si elle existe) de l'application

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \gamma(t) = \frac{6 - t}{(1 + t^2)^{3/2}}.$$

L'application γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, après un calcul élémentaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\gamma'(t) = (1 + t^2)^{-5/2}(2t^2 - 18t - 1).$$

On en déduit le tableau des variations de γ :

t	$-\infty$	t_1		t_2		$+\infty$	
$\gamma'(t)$		+	0	-	0	+	
$\gamma(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	0

$$t_1 = \frac{9 - \sqrt{83}}{2}, \quad t_2 = \frac{9 + \sqrt{83}}{2}.$$

La valeur maximale de γ est donc atteinte en t_1 :

$$\gamma(t_1) = \frac{6 - t_1}{(1 + t_1^2)^{3/2}} \simeq 6,027 \dots$$

8.45 • Notons $g = f'' - a^2 f$. Nous allons calculer f en fonction de g , par résolution de l'EDL2 $(E) \quad y'' - a^2 y = g$. La solution générale de l'EDL2 SSM associée $(E_0) \quad y'' - a^2 y = 0$ est (puisque $a \neq 0$) :

$$y : x \longmapsto \lambda \operatorname{ch} ax + \mu \operatorname{sh} ax, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons une solution particulière de (E) par la méthode de variation des constantes, sous la forme :

$$y : x \longmapsto u(x) \operatorname{ch} ax + v(x) \operatorname{sh} ax,$$

où u, v sont des fonctions inconnues, dérivables, satisfaisant une certaine condition.

On a, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{cases} u'(x) \operatorname{ch} ax + v'(x) \operatorname{sh} ax = 0 \\ u'(x) a \operatorname{sh} ax + v'(x) a \operatorname{ch} ax = g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{a} g(x) \operatorname{sh} ax \\ v'(x) = \frac{1}{a} g(x) \operatorname{ch} ax. \end{cases}$$

La solution générale de (E) est donc donnée par :

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{a} \operatorname{ch} ax \int_0^x g(t) \operatorname{sh} at \, dt + \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax \int_0^x g(t) \operatorname{ch} at \, dt \\ &\quad + \lambda \operatorname{ch} ax + \mu \operatorname{sh} ax, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On a alors, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\operatorname{sh} ax \int_0^x g(t) \operatorname{sh} at \, dt + \operatorname{ch} ax \int_0^x g(t) \operatorname{sh} at \, dt \\ &\quad + \lambda a \operatorname{sh} ax + \mu a \operatorname{ch} ax. \end{aligned}$$

$$\text{D'où :} \quad \begin{cases} y(0) = f(0) \\ y'(0) = f'(0) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = f(0) \\ \mu a = f'(0). \end{cases}$$

On conclut que, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{a} \operatorname{ch} ax \int_0^x g(t) \operatorname{sh} at \, dt \\ &\quad + \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax \int_0^x g(t) \operatorname{ch} at \, dt + f(0) \operatorname{ch} ax + f'(0) \frac{\operatorname{sh} ax}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^x g(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) \, dt + f(0) \operatorname{ch} ax + f'(0) \frac{\operatorname{sh} ax}{a}. \end{aligned}$$

• Comme, par hypothèse, $g \geq 0$, et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \forall t \in [0; x], \operatorname{sh}(a(x-t)) \geq 0,$$

on déduit :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \geq f(0) \operatorname{ch} ax + f'(0) \frac{\operatorname{sh} ax}{a}.$$

• En appliquant le résultat précédent à $(b, a, -f, -g)$ à la place de (a, b, f, g) , on déduit l'autre inégalité demandée.

8.46 1) Soit (I, y) convenant. On a :

$$yy'' + y'^2 = 0 \iff (yy')' = 0$$

$$\iff \exists A \in \mathbb{R}, \left(\frac{y^2}{2}\right)' = yy' = A$$

$$\iff \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{y^2}{2} = Ax + B.$$

De plus, comme $\frac{y^2}{2} = Ax + B$, et $yy' = A$, on a :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 1/2 \\ A = 1. \end{cases}$$

D'où : $\forall x \in I, (y(x))^2 = 2x + 1.$

Il s'ensuit : $\forall x \in I, x \geq -\frac{1}{2},$

donc, puisque I est ouvert : $I \subset]-1/2; +\infty[.$

Comme : $\forall x \in I, (y(x))^2 = 2x + 1 \neq 0,$

y ne s'annule en aucun point de I . Ainsi, l'application y est continue sur l'intervalle I et ne s'annule en aucun point de I , donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y est de signe strict fixe. Comme de plus $y(0) = 1 > 0$, on déduit $y > 0$, d'où :

$$\forall x \in I, y(x) = \sqrt{2x+1}.$$

2) Réciproquement, pour tout intervalle ouvert I tel que $0 \in I \subset]-1/2; +\infty[$, l'application

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{2x+1}$$

est deux fois dérivable sur I et un calcul simple montre que : $yy'' + y'^2 = 0.$

Finalement, l'ensemble des couples (I, y) convenant est défini par : I est un intervalle ouvert quelconque tel que $0 \in I \subset]-1/2; +\infty[$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{2x+1}.$

8.47 Soit y une solution maximale de (E) $y' = f(x, y).$

D'après le cours, l'intervalle de définition I de y est ouvert. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que : $I =]\alpha; \beta[.$ Nous allons montrer $\beta = +\infty$, en raisonnant par l'absurde. Supposons $\beta \in \mathbb{R}$. Il existe $a \in]\alpha; \beta[.$ On a, pour tout $x \in]a; \beta[:$

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t) dt = y(a) + \int_a^x f(t, y(t)) dt$$

Puisque f est de classe C^1 et bornée sur $\mathbb{R}^2$, l'application $t \mapsto f(t, y(t))$ est continue et bornée sur l'intervalle borné $[a; \beta[$, donc est intégrable sur $[a; \beta[.$ Il en résulte que l'application $x \mapsto \int_a^x f(t, y(t)) dt$, admet une limite finie ℓ lorsque $x \rightarrow \beta^-$. D'après la formule vue plus haut, on déduit : $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow \beta^-} y(a) + \ell.$

Considérons l'application $Y :]\alpha; \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$Y(x) = \begin{cases} y(x) & \text{si } \alpha < x < \beta \\ y(a) + \ell & \text{si } x = \beta. \end{cases}$$

Alors, Y est continue sur $]\alpha; \beta[$, de classe C^1 sur $]\alpha; \beta[$ et :

$$y'(x) = f(x, y(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \beta^-} f(\beta, y(a) + \ell).$$

D'après le théorème limite de la dérivée, on déduit que Y est de classe C^1 sur $]\alpha; \beta[$ et que :

$$y'(\beta) = f(\beta, y(a) + \ell) = f(\beta, Y(\beta)).$$

Ainsi, Y est solution de (E) sur $]\alpha; \beta[$, ce qui contredit la maximalité de y .

Ce raisonnement par l'absurde montre : $\beta = +\infty$.

De même : $\alpha = -\infty$.

On conclut que y est définie sur $\mathbb{R}$.

8.48 1) L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{1+x^2+y^2},$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^2$, et $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, donc, d'après le théorème de Cauchy et Lipschitz (non linéaire) le problème de Cauchy (C) admet une solution maximale et une seule, encore notée y , l'intervalle de définition de y est ouvert, et toute solution de (C) est restriction de y .

2) Notons $J = \{x \in \mathbb{R}; -x \in I\}$ le symétrisé de I , et $z : J \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z(x) = -y(-x)$ la symétrisée de y .

L'application z est dérivable sur J (par composition, puisque y est dérivable sur I), on a $z(0) = -y(0) = 0$,

et, pour tout $x \in J :$

$$\begin{aligned} z'(x) = y'(-x) &= \frac{1}{1+(-x)^2 + (y(-x))^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2 + (z(x))^2}. \end{aligned}$$

Ceci montre que z est solution de (C) sur J .

Il en résulte que z est restriction de la solution maximale y , c'est-à-dire : $J \subset I$ et $\forall x \in J, z(x) = y(x).$

• En notant $I =]\alpha; \beta[$ où $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} J \subset I &\iff]-\beta; -\alpha[\subset]\alpha; \beta[\\ &\iff (\alpha \leq -\beta \text{ et } -\alpha \leq \beta) \iff \beta = -\alpha. \end{aligned}$$

On déduit : $I =] - \alpha ; \alpha [$, donc I est symétrique par rapport à 0.

• Et : $\forall x \in I, y(x) = z(x) = -y(-x)$,

donc y est impaire.

3) • L'application y est dérivable sur l'intervalle I et :

$$\forall x \in I, y'(x) = \frac{1}{1+x^2+(y(x))^2} > 0,$$

donc y est strictement croissante sur I .

• On a de plus $y(0) = 0$, donc y est à valeurs ≥ 0 (sur $I \cap [0; +\infty[$).

• On a, pour tout $x \in I \cap [0; +\infty[$:

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2+(y(x))^2} \leq \frac{1}{1+x^2},$$

d'où, en intégrant, pour tout $x \in I \cap [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + \int_0^x y'(t) dt \\ &\leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan } x \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui montre que y est majorée.

4) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $b \in]0; +\infty[$ tel que : $I \cap [0; +\infty[= [0; b[$.

Puisque y est croissante et majorée, y admet en b^- une limite finie, notée L .

Considérons l'application

$$Y : [0; b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} y(x) & \text{si } x \neq b \\ L & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Puisque y est continue sur $[0; b[$ et que $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} L$, Y est continue sur $[0; b]$.

D'autre part, Y , qui coïncide avec y sur $[0; b[$, est dérivable sur $[0; b[$ et :

$$\forall x \in [0; b[, y'(x) = Y'(x) = \frac{1}{1+x^2+(y(x))^2}.$$

Puisque y est continue sur $[0; b[$ (car dérivable), par opérations, Y' est continue sur $[0; b[$, donc Y est de classe C^1 sur $[0; b[$.

Enfin :

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2+(y(x))^2} \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \frac{1}{1+b^2+L^2},$$

donc Y' admet en b^- une limite finie.

D'après le théorème limite de la dérivée, on déduit que Y est de classe C^1 sur $[0; b]$ et que $Y'(b) = \frac{1}{1+b^2+L^2}$.

Mais alors, Y est solution de (C) sur $[0; b]$, ce qui contredit la maximalité de y .

Ce raisonnement par l'absurde montre que l'extrémité droite de I n'est pas un réel, donc est $+\infty$.

5) Puisque y est croissante et majorée, y admet en $+\infty$ une limite finie notée ℓ .

De plus, comme on l'a vu en 3), pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$0 \leq y(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

On déduit, par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$:

$$0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}.$$

On a, par exemple : $\ell \geq y(1) > 0$, donc $\ell > 0$.

Si $\ell = \frac{\pi}{2}$, alors, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement obtenu plus haut, on déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+(y(t))^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt,$$

contradiction, car $t \mapsto \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2+(y(t))^2}$ est continue, à valeurs ≥ 0 et n'est pas l'application nulle. On a donc $\ell \neq \frac{\pi}{2}$.

Finalement : $0 < \ell < \frac{\pi}{2}$.

6) a) Récurrence.

• Puisque y est dérivable, donc continue, $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ est continue, donc y' est continue, y est C^1 .

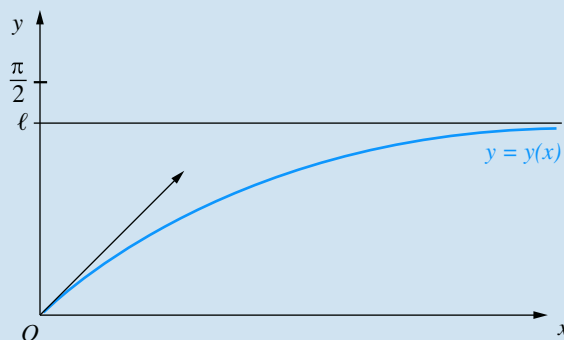
• Si y est C^n , pour un $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ est C^n , y' est C^n , y est C^{n+1} .

On conclut : y est de classe C^∞ sur $[0; +\infty[$.

β) Ainsi, y est C^2 et : $y'' = -\frac{2x+2yy'}{(1+x^2+y^2)^2} \leq 0$, car $x \geq 0, y \geq 0, y' \geq 0$.

On conclut que y est concave sur $[0; +\infty[$.

7) On a : $y'(0) = \frac{1}{1+0^2+0^2} = 1$.



8) Puisque y est de classe C^∞ sur $[0; +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$), d'après le théorème de Taylor-Young, y admet un développement limité à tout ordre, y' aussi, et on passe du premier au second par dérivation terme à terme.

En particulier, y admet un $DL_5(0)$. De plus, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, et y est impaire (sur $\mathbb{R}$).

Le $DL_5(0)$ de y est donc de la forme :

$$y(x) = x + ax^3 + bx^5 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5), \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

et on a : $y'(x) = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + o(x^4)$.

On reporte dans l'équation différentielle, présentée de préférence sous forme d'un produit que d'un quotient :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+x^2+y^2} \iff (1+x^2+y^2)y' = 1 \\ &\iff \left(1+x^2+(x+ax^3+bx^5+o(x^5))^2\right) \\ &\quad (1+3ax^2+5bx^4+o(x^4)) = 1 \\ &\iff (1+2x^2+2ax^4+o(x^4)) \\ &\quad (1+3ax^2+5bx^4+o(x^4)) = 1 \\ &\iff 1+(3a+2)x^2+(5b+8a)x^4+o(x^4) = 1 \\ &\iff \begin{cases} 3a+2=0 \\ 5b+8a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ b=\frac{16}{15}, \end{cases} \end{aligned}$$

en utilisant l'unicité du $DL_4(0)$ de l'application nulle.

On conclut que y admet le $DL_5(0)$ suivant :

$$y(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5).$$

8.49 Notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, $\mathcal{S}_0$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

• Considérons, pour $X \in \mathcal{S}_0$, l'application translatée de X par T :

$$X_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad t \longmapsto X_1(t) = X(t+T).$$

Il est clair que X_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad X_1'(t) &= X'(t+T) \\ &= A(t+T)X(t+T) = A(t)X_1(t), \end{aligned}$$

donc $X_1 \in \mathcal{S}_0$.

On peut donc considérer l'application :

$$\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_0, \quad X \longmapsto \phi(X) = X_1.$$

• L'application ϕ est linéaire car, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et toutes $X, Y \in \mathcal{S}_0$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\phi(\alpha X + Y))(t) &= (\alpha X + Y)(t+T) \\ &= \alpha X(t+T) + Y(t+T) = \alpha \phi(X)(t) + \phi(Y)(t) \\ &= (\alpha \phi(X) + \phi(Y))(t), \end{aligned}$$

donc : $\phi(\alpha X + Y) = \alpha \phi(X) + \phi(Y)$.

• Ainsi, ϕ est un endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{S}_0$, et celui-ci est de dimension finie supérieure ou égale à 1 (car égale à n).

D'après le cours (conséquence du théorème de d'Alembert), ϕ admet au moins une valeur propre et un vecteur propre associé. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{S}_0$ tels que : $\phi(X) = \lambda X$. Ainsi, X est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$, autre que l'application nulle, et telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t+T) = \lambda X(t).$$

8.50 a) Remarquons d'abord que, puisque A est inversible et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t)X(t) = A$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ est inversible.

Considérons l'application

$$Y :]-a; a[\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \longmapsto Y(t) = X(t)A - AX(t).$$

Puisque X est dérivable sur $] -a; a[$, par opérations, Y est dérivable sur $] -a; a[$ et :

$$\begin{aligned} Y' &= (XA - AX)' = X'A - AX' \\ &= (AX^{-1})A - A(AX^{-1}) = AX^{-1}(AX - XA)X^{-1} \\ &= -AX^{-1}YX^{-1}. \end{aligned}$$

D'après le cours, le problème de Cauchy linéaire :

$$Y' = -AX^{-1}YX^{-1}, \quad Y(0) = 0$$

d'inconnue $Y :] -a; a[\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ supposée dérivable, admet une solution et une seule.

Comme Y et l'application constante nulle conviennent, on a donc $Y = 0$, d'où : $XA - AX = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in] -a; a[, \quad X(t)A = AX(t).$$

b) Considérons le problème de Cauchy non linéaire

$$(C) \quad z' = AZ^{-1}, \quad Z(0) = I_n,$$

d'inconnue Z , à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Puisque l'application :

$$]-a; a[\times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad (t, Z) \longmapsto AZ^{-1}$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $] -a; a[\times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, (C) admet une solution maximale et une seule. D'après le cours, comme X est solution de (C), la solution maximale est un prolongement de X .

Considérons l'application

$$U :] -a; a[\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \longmapsto U(t) = {}^tX(t).$$

Puisque X est dérivable sur $] - a ; a[$, par opération, U l'est aussi, et on a :

$$\begin{aligned} U'U &= (X)'X = (X')'X = (AX^{-1})'X \\ &= {}^tX^{-1} {}^tA {}^tX = {}^tX^{-1} {}^t(XA) \stackrel{a)}{=} {}^tX^{-1} {}^t(A X) \\ &= {}^tX^{-1} {}^tX {}^tA = {}^tA = A. \end{aligned}$$

De plus : $U(0) = {}^tX(0) = {}^tI_n = I_n$ et :

$$\forall t \in] - a ; a[, U(t) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, X et U sont solutions de (C) sur $] - a ; a[$, d'où, d'après le cours : $\forall t \in] - a ; a[, U(t) = X(t)$,

c'est-à-dire : $\forall t \in] - a ; a[, {}^tX(t) = X(t)$.

On conclut que, pour tout $t \in] - a ; a[$, la matrice $X(t)$ est symétrique.

8.51 Puisque (E_0) est une EDL2 SSM, normalisée, à coefficients continus sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, d'après le cours, S_0 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. Nous allons montrer que les applications $N_1, N_2 : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $y \in S_0$, par :

$$N_1(y) = \int_{-1}^0 |y'' - y'|, \quad N_2(y) = \int_0^1 |y'' + y'|,$$

sont des normes sur S_0 . Comme S_0 est un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie (égale à 2), il en résultera que N_1 et N_2 sont équivalentes, d'où, en particulier, le résultat demandé.

1) Étude de N_1 :

• On a, pour toutes $y_1, y_2 \in S_0$:

$$\begin{aligned} N_1(y_1 + y_2) &= \int_{-1}^0 |(y_1 + y_2)'' - (y_1 + y_2)'| \\ &= \int_{-1}^0 |(y_1'' - y_1') + (y_2'' - y_2')| \\ &\leq \int_{-1}^0 |y_1'' - y_1'| + \int_{-1}^0 |y_2'' - y_2'| = N_2(y_1) + N_2(y_2). \end{aligned}$$

• On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute $y \in S_0$:

$$\begin{aligned} N_1(\alpha y) &= \int_{-1}^0 |(\alpha y)'' - (\alpha y)'| \\ &= |\alpha| \int_{-1}^0 |y'' - y'| = |\alpha| N_1(y). \end{aligned}$$

• Soit $y \in S_0$ telle que $N_1(y) = 0$.

Comme $y'' = x^2 y' - y$ et que y est deux fois dérivable, y'' est dérivable, donc, en particulier, y est de classe C^2 .

Ainsi, $\int_{-1}^0 |y'' - y'| = 0$, et $|y'' - y'|$ est continue et ≥ 0 , d'où : $\forall x \in [-1 ; 0], y''(x) - y'(x) = 0$.

Par résolution de cette EDL1 d'inconnue y' , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [-1 ; 0], y'(x) = \lambda e^x$,

puis il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [-1 ; 0], y(x) = \lambda e^x + \mu.$$

On a alors, pour tout $x \in [-1 ; 0]$:

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) - x^2 y'(x) + y(x) \\ &= \lambda e^x - x^2 \lambda e^x + (\lambda e^x + \mu) = -\lambda x^2 e^x + 2\lambda e^x + \mu. \end{aligned}$$

En remplaçant x par 0, on déduit $\mu = -2\lambda$, puis :

$$\forall x \in [-1 ; 0], \lambda(-x^2 e^x + 2e^x - 2) = 0,$$

donc $\lambda = 0$, d'où : $\forall x \in [-1 ; 0], y(x) = 0$.

En particulier, y est solution de (E_0) sur $[-1 ; 1]$ et $y(0) = 0, y'(0) = 0$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, le problème de Cauchy linéaire

$$(C) \quad \begin{cases} y'' - x^2 y' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $y : [-1 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, admet une solution et une seule. Comme y et la fonction constante nulle sont solutions de (C), on déduit : $y = 0$.

Ceci montre que N_1 est une norme sur S_0 .

2) On montre, de même, que N_2 est une norme sur S_0 .

3) Puisque N_1 et N_2 sont des normes sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel S_0 qui est de dimension finie (égale à 2), d'après le cours, N_1 et N_2 sont équivalentes, donc, en particulier, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall y \in S_0, N_1(y) \leq \alpha N_2(y),$$

d'où le résultat demandé.

8.52 a) Notons, pour $k \in \{1, 2\}$:

$$z_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto y_k(x + T).$$

Soit $k \in \{1, 2\}$. L'application z_k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z_k''(x) + f(x)z_k(x) &= y_k''(x + T) + f(x)y_k(x + T) \\ &= y_k''(x + T) + f(x + T)y_k(x + T) \\ &= (yz_k'' + fy_k)(x + T) = 0, \end{aligned}$$

donc z_k est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Comme (y_1, y_2) est une base du $\mathbb{R}$ -ev S_0 des solutions de (E_0) , il existe $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z_k = \alpha_k y_1 + \beta_k y_2$,

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, y_k(x + T) = \alpha_k y_1(x) + \beta_k y_2(x)$.

b) Notons

$$Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{C}), x \mapsto Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Y(x+T) &= \begin{pmatrix} y_1(x+T) \\ y_2(x+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1(x) + \beta_1 y_2(x) \\ \alpha_2 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = AY(x). \end{aligned}$$

Mais, de la même façon, puisque f est aussi $-T$ -périodique, il existe $B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Y(x-T) = BY(x).$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$Y(x) = Y((x+T)-T) = BY(x+T) = BAY(x),$$

$$\text{c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R}, (BA - I_2)Y(x) = 0.$$

En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (BA - I_2)Y'(x) = 0.$$

En groupant les colonnes en matrices carrées d'ordre deux, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (BA - I_2) \begin{pmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Comme (y_1, y_2) est une base de $\mathcal{S}_0$, d'après le cours, le wronskien $w = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ n'est pas la fonction nulle, d'où $BA - I_2 = 0$, et on conclut que A est inversible.

Fonctions de plusieurs variables réelles

CHAPITRE 9

Plan

Les méthodes à retenir	378
Énoncés des exercices	382
Du mal à démarrer ?	385
Corrigés	387

Thèmes abordés dans les exercices

- Étude de limite ou de continuité pour une fonction de plusieurs variables réelles
- Existence et calcul éventuel des dérivées partielles premières, des dérivées partielles successives
- Détermination de la classe d'une fonction de plusieurs variables réelles
- Étude de C^1 -difféomorphismes, de C^k -difféomorphismes, de C^∞ -difféomorphismes, d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$
- Recherche d'extrémums locaux, d'extrémums globaux, pour une fonction réelle de deux ou de plusieurs variables réelles
- Résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre (EDP1), du second ordre (EDP2)
- Étude de fonctions définies implicitement
- Étude de formes différentielles.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de la continuité d'une fonction f de plusieurs variables réelles, lien entre la continuité de f et la continuité des fonctions partielles de f
- Définition et propriétés algébriques des dérivées partielles premières, des dérivées partielles successives, en particulier le théorème de composition des fonctions de classe C^1 , de classe C^k , de classe C^∞
- Définition et caractérisation (faisant intervenir le jacobien) des C^1 -difféomorphismes, des C^k -difféomorphismes, des C^∞ -difféomorphismes d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$
- Définition de la notion d'extrémum local, pour une fonction f de plusieurs variables réelles, lien avec le notion de point critique de f lorsque f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, intervention de $s^2 - rt$ lorsque f est de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$
- Résolution de l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial x} = g$, f inconnue, g donnée
- Énoncé du théorème des fonctions implicites
- Notion de forme différentielle exacte, de primitive d'une forme différentielle exacte
- Notion de forme différentielle fermée, notion d'ouvert étoilé, liens entre exact et fermée.

Les méthodes à retenir

**Pour étudier
l'existence et la valeur
de la limite en un point
ou pour étudier la continuité
en un point
d'une fonction
de deux variables réelles
ou de plusieurs variables réelles**

* *Cas de deux variables réelles :*

Essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux.

- S'il s'agit d'une forme indéterminée, se ramener d'abord, par changement de variables par translation à une étude en $(0,0)$.
Former les fonctions partielles $f(\cdot, 0)$ et $f(0, \cdot)$.
- Si l'une de ces deux fonctions partielles n'a pas de limite en 0, ou si ces deux fonctions ont des limites en 0 différentes, alors f n'a pas de limite en $(0,0)$.
- Si $f(\cdot, 0)$ et $f(0, \cdot)$ admettent une même limite finie ℓ en 0, envisager des fonctions composées du type $x \mapsto f(x, x)$, $x \mapsto f(x, \lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ou plus compliquées en tenant compte de l'exemple proposé. Si ces diverses fonctions (d'une variable) ont la même limite ℓ en 0, on peut essayer d'établir que f admet ℓ pour limite en $(0,0)$, en formant $|f(x, y) - \ell|$ et en essayant de majorer cette expression par une expression plus simple et de limite 0 lorsque (x, y) tend vers $(0,0)$. À cet effet, il peut être intéressant de faire un changement de variables, par exemple en coordonnées polaires.

➡ Exercices 9.1, 9.8, 9.9

* *Cas de plusieurs variables réelles :*

Essayer d'adapter les méthodes précédentes.

➡ Exercices 9.19, 9.20.

**Pour étudier
l'existence et la valeur
des dérivées partielles premières
d'une fonction f
de deux variables réelles
ou de plusieurs variables réelles**

* *Cas de deux variables réelles :*

- Essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux, en particulier le théorème de composition des applications de classe C^1 .
- En un point litigieux (c'est-à-dire en lequel les théorèmes généraux ne s'appliquent pas) (x_0, y_0) , pour étudier l'existence et la valeur de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, former la fonction partielle $f(\cdot, y_0) : x \mapsto f(x, y_0)$ et étudier sa dérivabilité en x_0 . On a ainsi, sous réserve d'existence : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (f(\cdot, y_0))'(x_0)$, et de même : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (f(x_0, \cdot))'(y_0)$.
- Pour montrer que f n'est pas de classe C^1 , on peut essayer de raisonner par l'absurde, en utilisant une fonction composée.

➡ Exercice 9.1.

* *Cas de plusieurs variables réelles :*

Essayer d'adapter les méthodes précédentes.

Pour montrer qu'une application
 $\phi : U \longrightarrow V$
est un C^1 -difféomorphisme
(ou un C^k -difféomorphisme,
ou un C^∞ -difféomorphisme)
d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$
sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

Commencer par montrer que ϕ est de classe C^1 sur U et bijective. Ensuite :

- montrer que ϕ^{-1} est de classe C^1 sur V , si ϕ^{-1} est exprimable

➡ **Exercice 9.11**

- montrer que le jacobien de ϕ en tout point (x, y) de U n'est pas nul.

➡ **Exercice 9.10.**

Pour étudier
l'existence et la valeur
des dérivées partielles secondes
(ou successives)
d'une fonction
de deux variables réelles
ou de plusieurs variables réelles

- Essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux, en particulier le théorème de composition des applications de classe C^2 (ou C^n , ou C^∞), et calculer successivement les dérivées partielles premières, puis les dérivées partielles secondes (puis successives).

➡ **Exercices 9.2, 9.3**

- En un point litigieux (c'est-à-dire en lequel les théorèmes généraux ne s'appliquent pas), étudier successivement les dérivées partielles premières, puis les dérivées partielles secondes (ou successives), comme indiqué plus haut.

Pour montrer
qu'une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$
est de classe C^∞
sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$

- Essayer d'abord d'appliquer les théorèmes généraux.
- Essayer de se ramener à l'intervention d'une fonction d'une variable réelle. Se rappeler que toute fonction développable en série entière en 0 est de classe C^∞ au voisinage de 0.

➡ **Exercice 9.23.**

Pour résoudre une équation
aux dérivées partielles
du premier ordre (EDP1)
d'inconnue $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1
sur un ouvert (convexe) U de $\mathbb{R}^2$

- On sait résoudre les deux EDP1 : $\frac{\partial f}{\partial x} = g$, $\frac{\partial f}{\partial y} = h$,
 où $g, h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont données (continues), par primitivation. Par exemple, la solution générale de l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ est $f : (x, y) \mapsto \int g(x, y) dx + \varphi(y)$, où φ est une fonction quelconque de classe C^1 (sur un intervalle à préciser).
- On essaiera de se ramener à cette EDP1 simple par un changement de variables (et donc aussi un changement de fonction inconnue) donné (ou suggéré) par l'énoncé.

➡ **Exercice 9.13.**

Pour résoudre une équation
aux dérivées partielles
du deuxième ordre (EDP2)
d'inconnue $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2
sur un ouvert (convexe) de $\mathbb{R}^2$

- On sait résoudre les trois EDP2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = h, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k,$$

où $g, h, k : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont données (continues), par deux primitivations successives.

➡ **Exercice 9.4**

Pour déterminer les extrémums locaux d'une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ou C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$

- Essayer de se ramener à l'une de ces EDP2 par un changement de variables (et donc aussi un changement de fonction inconnue) donné (ou suggéré) par l'énoncé.

➡ **Exercice 9.14.**

- Si l'on cherche les solutions d'une forme particulière d'une EDP, on peut essayer de se ramener à une ED.

- Commencer par déterminer les points critiques de f , c'est-à-dire les points en lesquels les deux dérivées partielles premières de f s'annulent simultanément. En effet, d'après le cours, si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et si f admet un extrémum local en un point (x_0, y_0) de U , alors (x_0, y_0) est un point critique de f .

- Si, de plus, f est de classe C^2 sur U , calculer les trois dérivées partielles secondes de f en tout point de U , en déduire les valeurs de $r = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $s = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $t = f''_{yy}(x_0, y_0)$, et former $s^2 - rt$. Si $s^2 - rt > 0$, alors f n'admet pas d'extrémum local en (x_0, y_0) (point-col)

Si $s^2 - rt < 0$ alors f admet un extrémum local en (x_0, y_0) , un minimum si $r > 0$ (ou $t > 0$), un maximum si $r < 0$ (ou $t < 0$).

Si $s^2 - rt = 0$, étudier le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ pour (x, y) voisin de (x_0, y_0) , par exemple en utilisant des chemins particuliers.

➡ **Exercices 9.5, 9.15.**

Pour déterminer les extrémums globaux d'une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, où $X \subset \mathbb{R}^2$

- Essayer de montrer que f est bornée et atteint ses bornes, par utilisation du théorème de continuité sur un compact.

➡ **Exercice 9.16**

- Si f atteint une de ses bornes en un point (x_0, y_0) intérieur à X et si f est de classe C^1 sur l'intérieur X° de X , alors $f|_{X^\circ}$ admet un extrémum local en (x_0, y_0) , donc (x_0, y_0) est un point critique de $f|_{X^\circ}$.

➡ **Exercice 9.16**

- Si f atteint une de ses bornes en un point du bord de X , essayer de se ramener à une recherche d'extrémum global pour une fonction d'une variable réelle.

➡ **Exercice 9.24**

- Dans certains cas simples, l'étude peut être résolue par l'utilisation d'inégalités classiques.

➡ **Exercice 9.17.**

Pour montrer qu'une égalité $f(x, y) = 0$ définit implicitement localement y en fonction de x , ou qu'une égalité $f(x, y, z) = 0$ définit implicitement localement z en fonction de (x, y) , et pour obtenir un développement limité de la fonction implicite

- Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique.

➡ **Exercices 9.6, 9.7**

- Montrer que la fonction implicite φ est de classe suffisante, en appliquant le théorème des fonctions implicites, donc, d'après le théorème de Taylor-Young, φ admet un développement limité, et déterminer celui-ci par la méthode des coefficients indéterminés.

➡ **Exercice 9.6.**

Pour montrer qu'une égalité $f(x,y) = 0$ définit globalement y comme fonction de x , puis pour étudier la fonction $\varphi : x \mapsto y$

- Montrer que, pour tout x fixé, l'équation $f(x,y) = 0$ (d'inconnue y) admet une solution et une seule, en étudiant les variations de la fonction $y \mapsto f(x,y)$.
- Pour étudier $\varphi : x \mapsto y$, montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique localement et que la fonction implicite locale est restriction de φ .

➡ **Exercice 9.25.**

Pour étudier une forme différentielle ω sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, définie, pour tout $(x,y) \in U$, par : $\omega(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy$

1) Si ω est fermée sur U , c'est-à-dire si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, et si U est étoilé, alors ω admet des primitives sur U .

Chercher les applications $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad (2).$$

Intégrer par exemple dans (1) par rapport à x , et obtenir (si x varie dans un intervalle) : $F(x,y) = \int P(x,y) dx + G(y)$,

où G est de classe C^1 à une variable.

En reportant dans (2), se ramener à une ED $G'(y) = S(y)$, où S est une fonction à calculer (à une variable : y). Intégrer dans cette égalité par rapport à y , et obtenir ainsi (si y varie dans un intervalle) :

$$G(y) = \int S(y) dy + H, \text{ où } H \text{ est une constante.}$$

2) Si ω est fermée sur U et si U n'est pas étoilé, il se peut que ω ne soit pas exacte sur U . Recouvrir U par une réunion d'un nombre fini d'ouverts étoilés (si c'est possible), intégrer ω sur chacun de ces ouverts étoilés, puis étudier le raccord des primitives obtenues.

3) Si ω n'est pas fermée sur U , chercher, si l'énoncé l'indique, un facteur intégrant pour ω , c'est-à-dire une application φ non nulle (et, si possible, ne s'annulant en aucun point), de classe C^1 , telle que la forme différentielle ω_1 définie sur U par :

$$\omega_1(x,y) = \varphi(x,y) \omega(x,y)$$

soit fermée sur U , ou soit fermée sur un ouvert U_1 inclus dans U et différant peu de U . La détermination de φ se ramène à la résolution d'un système de deux EDP1. L'énoncé donnera une indication sur φ permettant de se ramener à la résolution d'une ED.

La nouvelle forme différentielle ω_1 est alors fermée sur U (ou U_1) et on est ramené au 1) ou au 2) pour ω_1 au lieu de ω .

➡ **Exercice 9.18.**

Énoncés des exercices

9.1 Étude de continuité et de caractère C^1 pour une fonction de deux variables réelles

Étudier la continuité et le caractère C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par : $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

9.2 Fonction harmonique

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, (x,y) \longmapsto P(x + iy)$.

Montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

9.3 Laplacien d'une fonction radiale

Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

On note $U = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \longmapsto f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

Montrer que g est de classe C^2 sur U et que, pour tout $(x,y,z) \in U$, on a, en notant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : \Delta g(x,y,z) = f''(\rho) + \frac{2}{\rho} f'(\rho)$, où Δ désigne le laplacien.

9.4 Résolution d'une EDP2 avec condition

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f''_{xy}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,x) = 0.$$

9.5 Exemples de recherche d'extrémums locaux de fonctions numériques de deux variables réelles

Déterminer les extrémums locaux des applications f suivantes, pour lesquelles on donne l'ensemble de départ et l'image $f(x,y)$ de (x,y) :

$$a) \mathbb{R}^2, 4x + 2y - x^2 - y^2 - 2x^3 \quad b) \mathbb{R}^2, xy + x^3y^2.$$

9.6 Exemple de fonction implicite de deux variables réelles, développement limité

a) Montrer qu'il existe un voisinage V de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ unique tels que : φ est de classe C^∞ sur V , $\varphi(0,0) = 1$, et, pour tout $(x,y) \in V$, $\varphi(x,y)$ est solution de l'équation $z^5 + xz^2 + yz - 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.

b) Former le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.

9.7 Fonction implicite d'une variable réelle

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $f(0,0) = 0$, $f'_x(0,0) \neq -1$, $f'_y(0,0) \neq 0$.

Montrer que la relation $f(f(x,y),y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(0,0)$.

9.8 Exemples d'étude de limite pour des fonctions de deux variables réelles

Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite finie en $(0,0)$ pour les fonctions f de deux variables réelles définies par les formules suivantes :

$$a) \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} \quad b) \frac{x^2y}{x^2 - xy + y^2} \quad c) \frac{x^3y^4}{x^4 + y^6} \quad d) \frac{xy^4}{x^4 + y^6} \quad e) \frac{e^{xy} - 1}{e^x - 1}.$$

9.9 Limite pour une fonction de deux variables réelles

L'application $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{(e^x - 1) \ln(1+y) - (e^y - 1) \ln(1+x)}{x^2 + y^2}$
a-t-elle une limite en $(0,0)$?

9.10 Exemple de C^1 -difféomorphisme à deux variables

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^3 + 3x e^y, y - x^2)$
est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

9.11 Exemple de C^∞ -difféomorphisme à deux variables

On note $U =]0; +\infty[^2$ et $\phi : (x,y) \mapsto \left(x^3 y^2, \frac{1}{x^2 y}\right)$.

Montrer que ϕ est un C^∞ -difféomorphisme de U sur U .

9.12 Étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , telle que f'_x et f'_y soient 1-périodiques par rapport à la première variable, et que : $f''_{x^2} = f''_{y^2}$. Montrer que l'application

$$J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto J(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 ((f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2) dx$$

est constante.

9.13 Exemple d'EDP1

Trouver toutes les applications $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

en utilisant les coordonnées polaires.

9.14 Exemple d'EDP2

On note $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > |x|\}$. Trouver toutes les applications $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

sur U telles que : $\forall (x,y) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}},$

en utilisant le changement de variables défini par : $u = x + y, v = y - x$.

9.15 Extrémums locaux d'une fonction numérique de deux variables réelles

Déterminer les extrémums locaux de

$$f : U =]-\pi/2; \pi/2[^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \tan x \operatorname{th} y - \operatorname{th} x \tan y.$$

9.16 Exemple de recherche de borne supérieure pour une fonction numérique de deux variables réelles

Déterminer $\sup_{(x,y) \in [0; +\infty[^2, x+y \leq \pi} \sin x \sin y \sin(x+y).$

9.17 Exemple d'extrémums liés

Calculer la borne supérieure et la borne inférieure de $xy + z^2$, lorsque $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

9.18 Étude d'une forme différentielle à deux variables

On note ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\omega(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) dx - 2xy dy$.

a) Montrer que ω n'est fermée sur aucun ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

b) Trouver un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$, un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ (autre que l'application nulle) de classe C^1 sur I , tels que : $\forall (x, y) \in U$, $x^2 - y^2 \in I$ et que la forme différentielle ω_1 définie sur U par $\omega_1(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)\omega(x, y)$ soit exacte sur U , et calculer alors les primitives de ω_1 sur U .

9.19 Limite pour une fonction de trois variables réelles

Existence et valeur éventuelle de la limite en $(0, 0, 0)$

$$\text{de } f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz}.$$

9.20 Limite pour une fonction de trois variables réelles

On note $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 - z^2 \neq 0\}$.

L'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \frac{x^4 + y^4 - z^4}{x^2 + y^2 - z^2}$ admet-elle une limite (finie ou infinie) en $(0, 0, 0)$?

9.21 Dérivabilité par rapport à une variable complexe

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 .

On note : $U = \{x + iy ; (x, y) \in \Omega\}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \Omega$, par : $g(x + iy) = f(x, y)$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) \forall (x, y) \in \Omega, f'_x(x, y) + i f'_y(x, y) = 0$$

(2) pour tout $z_0 \in U$, l'application $z \mapsto \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite finie $h(z_0)$ lorsque $z \rightarrow z_0$.

9.22 Différentielle de $X \mapsto X^{-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Établir que l'application $f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto X^{-1}$ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

9.23 Classe C^∞ pour une fonction de deux variables réelles

$$\text{Démontrer que l'application } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

9.24 Exemple de recherche de borne supérieure pour une fonction numérique de deux variables réelles

Déterminer $\sup_{(x, y) \in [0; +\infty[^2, x+y \leq 2} x^2 y^2 (x^2 + y^2).$

9.25 Exemple de fonction implicite globale

- a) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, l'équation $y^3 - 2xy + x^3 = 0$, d'inconnue $y \in [\sqrt{x}; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée $\varphi(x)$.
- b) Établir que, φ est continue en 0. Est-ce que φ est dérivable en 0 ?
- c) Démontrer que φ est de classe C^1 sur $]0; 1]$.

Du mal à démarrer ?

9.1 Seul le point (0,0) pose problème.

- Pour montrer la continuité en $(0,0)$, majorer convenablement $|f(x,y) - f(0,0)|$.
- Pour montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, montrer que $x \mapsto f(x,x)$ n'est pas dérivable en 0.

9.2 Décomposer P sur la base canonique, et examiner le cas de X^k .

9.3 Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)$ à l'aide de $f'(\rho)$, x , ρ , puis $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z)$ à l'aide de $f''(\rho)$, $f'(\rho)$, $f(\rho)$, x , ρ , et en déduire $\Delta g(x,y,z)$.

9.4 Résoudre l'EDP2 $f''_{xy} = 0$ et traduire ensuite la deuxième condition.

9.5 a) Déterminer les points critiques de f , puis, en ces points, calculer $s^2 - rt$.

b) Déterminer les points critiques de f , puis étudier, par exemple, $f(x,x) - f(0,0)$ et $f(x,-x) - f(0,0)$.

9.6 a) Appliquer le théorème des fonctions implicites.

b) Utiliser le théorème de Taylor-Young pour l'existence de $DL_2(0,0)$ de f , et calculer celui-ci par coefficients indéterminés.

9.7 Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique.

9.8 a) Étudier $f(x,0)$ et $f(x,x)$.

b) Mettre le trinôme sous forme canonique.

c) Noter $X = x^2$ et $Y = |y|^3$, puis $\rho = (X^2 + Y^2)^{1/2}$, et majorer convenablement $|f(x,y)|$.

d) Étudier, par exemple, $f(x, x^{2/3})$.

e) Montrer que l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, et exprimer f à l'aide de φ .

9.9 Utiliser, par exemple, des développements limités.

9.10 Pour montrer que f est bijective, se ramener à une équation d'inconnue x , et montrer, par étude de variations d'une fonction, que cette équation admet une solution et une seule.

Utiliser le théorème de caractérisation des C^1 -difféomorphismes.

9.11 Montrer que ϕ est bijective, en exprimant sa réciproque. Appliquer ensuite la définition d'un C^∞ -difféomorphisme.

9.12 Appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int_0^1$, pour montrer que J est de classe C^1 et exprimer J' .

9.13 En notant $\phi : (\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ et $g = f \circ \phi$, calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}$.

L'EDP1 proposée se ramène à une EDP1 d'inconnue g , plus simple à résoudre. Revenir à f .

9.14 En notant $\phi : (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ et $g = f \circ \phi^{-1}$, calculer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g , puis calculer deux des dérivées partielles successives de f en fonction des dérivées partielles de g .

L'EDP2 de l'énoncé se ramène à une EDP2 d'inconnue g , plus simple à résoudre. Revenir à f .

9.15 Déterminer les points critiques de f : il y en a un seul, $(0,0)$. Étudier, par exemple, $f(x, x^2)$.

9.16 En notant $T = \{(x,y) \in [0; +\infty[^2; x+y \leq \pi\}$ et $f : T \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$, montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure, et montrer que celle-ci est atteinte à l'intérieur de T . Déterminer les points critiques de f sur l'intérieur de T .

9.17 Utiliser l'inégalité classique :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

On peut ici résoudre la question sans faire intervenir de dérivée partielle.

9.18 a) En notant P et Q les coefficients de ω , calculer $\frac{\partial P}{\partial y}$,
et $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

b) En notant P_1 et Q_1 les coefficients de ω_1 , calculer $\frac{\partial P_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$, et traduire la condition de fermeture de ω_1 par une EDL1 d'inconnue φ . Résoudre cette EDL1, d'où φ et ω_1 .

Pour déterminer les primitives de ω_1 sur U , résoudre une des deux EDP1 puis reporter dans l'autre EDP1.

9.19 Noter $X = y + z$, $Y = z + x$, $Z = x + y$, puis majorer convenablement $|f(x, y, z)|$.

9.20 Étudier $f(x, 0, 0)$ et $f(x, x, \sqrt{2}x + x^4)$.

9.21 Utiliser la formule de Taylor-Young.

9.22 a) $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

b) • Utiliser la formule :

$$\forall X \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} {}^t\text{com}(X)$$

pour montrer que $f : X \rightarrow X^{-1}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

• Pour déterminer $d_X f$, calculer, pour H assez petite, $(X + H)^{-1} - X^{-1}$, en faisant apparaître $X - (X + H)$.

9.23 Considérer

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que φ est développable en série entière en 0, de rayon infini, donc φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exprimer f à l'aide de φ .

9.24 1^{re} méthode Étude d'extrémum pour une fonction numérique de deux variables réelles :

En notant $C = \{(x, y) \in [0; +\infty[^2; x + y \leq 2\}$

et $f : C \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 y^2 (x^2 + y^2)$, montrer que f admet une borne supérieure et que celle-ci est atteinte. Déterminer les points critiques de f sur l'intérieur de C et en déduire que la borne supérieure de f est atteinte sur le bord de C . Étudier la restriction de f au bord de C .

2^e méthode : Se ramener à une étude d'extrémum pour une fonction numérique d'une seule variable réelle :

Considérer, pour $y \in [0; 2]$ fixé, l'application

$$h : [0; 2 - y] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, y),$$

déterminer $\sup_{x \in [0; 2 - y]} h(x)$, puis étudier l'expression obtenue, en fonction de y . Il pourra alors être commode de poser $t = y - 1$.

9.25 a) L'étude du cas $x = 0$ est immédiate. Si $x \neq 0$, étudier

$$f_x : [\sqrt{x}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto y^3 - 2xy + x^3.$$

b) 1) Calculer $f_x(2\sqrt{x})$, et déduire la continuité de φ en 0.

2) Montrer $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

c) Utiliser le théorème des fonctions implicites et montrer que, pour tout $x_0 \in]0; 1]$, φ est de classe C^∞ au voisinage de x_0 .

Corrigés des exercices

9.1 • D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

• On a :

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{|x| + |y|} \leq \frac{|xy|}{|x| + |y|} \leq |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0,$$

donc : $f(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0,0)$,

ce qui montre que f est continue en $(0,0)$.

Il en résulte que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Considérons l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = f(x,x).$$

On a :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x^2)}{2x|x|} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} \pm \frac{1}{2}.$$

Ainsi, g n'est pas dérivable en 0.

Si f était de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, par composition, g serait de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, contradiction.

On conclut : f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

9.2 Rappelons qu'une application $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est dite harmonique si et seulement si son laplacien est nul, le laplacien de f étant :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Vu la linéarité du laplacien, décomposons le polynôme P sur la base canonique :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Notons, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$e_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x,y) \longmapsto (x + iy)^k.$$

Ainsi : $f = \sum_{k=0}^n a_k e_k.$

Puisque Δ est linéaire, on a : $\Delta f = \sum_{k=0}^n a_k \Delta e_k.$

Et, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial e_k}{\partial x}(x,y) = k(x + iy)^{k-1}, \quad \frac{\partial e_k}{\partial y}(x,y) = ik(x + iy)^{k-1},$$

puis : $\frac{\partial^2 e_k}{\partial x^2}(x,y) = k(k-1)(x + iy)^{k-2},$

$$\frac{\partial^2 e_k}{\partial y^2}(x,y) = -k(k-1)(x + iy)^{k-2},$$

d'où : $\Delta e_k(x,y) = 0$, et enfin : $\Delta f = 0$.

On conclut que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

9.3 Puisque $(x,y,z) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est de classe C^2 sur U et à valeurs > 0 , et que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$, par composition, l'application

$g : (x,y,z) \longmapsto f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ est de classe C^2 sur U .

On a, en notant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, pour tout $(x,y,z) \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = f'(\rho) \frac{x}{\rho},$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) &= f''(\rho) \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + f'(\rho) \frac{1}{\rho} + f'(\rho) x \frac{-1}{\rho^2} \frac{x}{\rho} \\ &= f''(\rho) \frac{x^2}{\rho^2} + f'(\rho) \frac{1}{\rho} - f'(\rho) \frac{x^2}{\rho^3}, \end{aligned}$$

et de même par rapport à y ou à z .

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \Delta g(x,y,z) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ &= f''(\rho) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^2} + 3f'(\rho) \frac{1}{\rho} - f'(\rho) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^3} \\ &= f''(\rho) + \frac{2}{\rho} f'(\rho). \end{aligned}$$

9.4 1) Soit f convenant. Par résolution de l'EDP2 $f''_{xy} = 0$,

il existe $A, B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = A(x) + B(y).$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x,x) = 0 \iff A(x) + B(x) = 0,$$

et donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = A(x) - A(y).$

2) Réciproquement, pour toute application $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto A(x) - A(y)$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et convient.

On conclut que les applications cherchées sont les

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto A(x) - A(y),$$

où $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

9.5

Dans chacun des deux exemples, f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

a) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 4 - 2x - 6x^2 \\ f'_y(x, y) = 2 - 2y, \end{cases}$$

donc f admet deux points critiques exactement :

$$A(-1, 1), B(2/3, 1).$$

D'après le cours, si f admet un extrémum local, comme f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, celui-ci est en un point critique de f .

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f''_{xx}(x, y) = -2 - 12x, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{yy}(x, y) = -2.$$

• En A : $r = 10, s = 0, t = -2, s^2 - rt = 20 > 0$, donc f n'a pas d'extrémum local en A (il s'agit d'un point-col).

• En B : $r = -10, s = 0, t = -2, s^2 - rt = -20 < 0, t < 0$, donc f admet un maximum local en B .

Finalement, f admet un extrémum local et un seul, en $(2/3, 1)$, c'est un maximum local, et $f(2/3, 1) = 71/27$.

b) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = y + 3x^2y^2 = y(1 + 3x^2y) \\ f'_y(x, y) = x + 2x^3y = x(1 + 2x^2y), \end{cases}$$

$$\text{d'où l'on déduit : } \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Ainsi, f admet un point critique et un seul : $(0, 0)$.

Comme :

$$\begin{cases} f(x, x) - f(0, 0) = x^2 + x^5 > 0 & \text{si } x \in]0; 1] \\ f(x, -x) - f(0, 0) = -x^2 + x^5 < 0 & \text{si } x \in]0; 1], \end{cases}$$

f n'a pas d'extrémum local en $(0, 0)$.

Finalement, f n'a pas d'extrémum local.

9.6

a) L'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto z^5 + xz^2 + yz - 1$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, $f(0, 0, 1) = 0$, et, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f'_z(x, y, z) = 5z^4 + 2xz + y$,

donc $f'_z(0, 0, 1) = 5 \neq 0$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ unique tels que : φ est de classe C^∞ sur V , $\varphi(0, 0) = 1$, et, pour tout $(x, y) \in V$, $\varphi(x, y)$ est une solution de l'équation $z^5 + xz^2 + yz - 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.

b) Puisque φ est de classe C^∞ sur V , d'après le théorème de Taylor-Young, φ admet, en particulier, un développement limité à l'ordre 2 en $(0, 0)$. Celui-ci est de la forme :

$$\varphi(x, y) = 1 + \alpha x + \beta y + ax^2 + bxy + cy^2 + o_{(x, y) \rightarrow (0, 0)}(x^2 + y^2),$$

où $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à calculer.

En reportant dans la relation définissant $\varphi(x, y)$, on a, pour tout $(x, y) \in V$:

$$\begin{aligned} 0 &= z^5 + xz^2 + yz - 1 \\ &= (1 + 5(\alpha x + \beta y) + 5(ax^2 + bxy + cy^2) + 10((\alpha x + \beta y)^2) \\ &\quad + x(1 + 2(\alpha x + \beta y)) + y(1 + (\alpha x + \beta y)) - 1 + o(x^2 + y^2) \\ &= ((5\alpha + 1)x + (5\beta + 1)y) \\ &\quad + ((5a + 10\alpha^2 + 2\alpha)x^2 + (5b + 20\alpha\beta + 2\beta + \alpha)xy \\ &\quad + (5c + 10\beta^2 + \beta)y^2) + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité à l'ordre 2 de la fonction nulle, on obtient :

$$\begin{cases} 5\alpha + 1 = 0 \\ 5\beta + 1 = 0 \\ 5a + 10\alpha^2 + 2\alpha = 0 \\ 5b + 20\alpha\beta + 2\beta + \alpha = 0 \\ 5c + 10\beta^2 + \beta = 0 \end{cases}$$

et on déduit :

$$\alpha = -\frac{1}{5}, \quad \beta = -\frac{1}{5}, \quad a = 0, \quad b = -\frac{1}{25}, \quad c = -\frac{1}{25}.$$

On conclut :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 1 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{1}{25}xy - \frac{1}{25}y^2 + o_{(x, y) \rightarrow (0, 0)}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

9.7 Notons $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(f(x, y), y)$.

• L'application F est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$

• $F(0, 0) = f(0, 0) = 0$

• On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F'_y(x, y) = f'_x(f(x, y), y)f'_y(x, y) + f'_y(f(x, y), y)1,$$

donc : $F'_y(0, 0) = f'_x(0, 0)f'_y(0, 0) + f'_y(0, 0)$

$$= \underbrace{(f'_x(0, 0) + 1)}_{\neq 0} \underbrace{f'_y(0, 0)}_{\neq 0} \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, la relation $F(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(0, 0)$.

9.8

a) On a : $f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et :

$$f(x, x) = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \neq 0,$$

donc f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

b) On a, par mise d'un trinôme sous forme canonique, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2.$$

En particulier, f est définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$:

$$|f(x, y)| = \frac{x^2|y|}{\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2} \leq \frac{|y|}{3/4} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

On conclut : $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$.

c) En notant $X = x^2$ et $Y = |y|^3$, on a :

$$|f(x, y)| = \frac{|x|^3 y^4}{x^4 + y^6} = \frac{X^{3/2} Y^{4/3}}{X^2 + Y^2}.$$

Puis, en notant $\rho = (X^2 + Y^2)^{1/2}$:

$$\frac{X^{3/2} Y^{4/3}}{X^2 + Y^2} \leq \frac{\rho^{3/2} \rho^{4/3}}{\rho^2} = \rho^{5/6} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

On conclut : $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$.

d) Soit $\alpha > 0$ fixé à choisir.

$$\text{On a : } f(x, x^\alpha) = \frac{x^{1+4\alpha}}{x^4 + x^{6\alpha}}.$$

Pour $\alpha = \frac{2}{3}$, de sorte que $6\alpha = 4$, on a :

$$f(x, x^{2/3}) = \frac{x^{11/3}}{2x^4} = \frac{1}{2x^{1/3}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.$$

On conclut : f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

e) Ici : $\text{Def}(f) = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Comme $\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 = \varphi(0)$,

φ est continue en 0, puis φ est continue sur $\mathbb{R}$.

On a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$:

$$f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{e^x - 1} = y \frac{e^{xy} - 1}{xy} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{y \varphi(xy)}{\varphi(x)}.$$

D'autre part, le résultat obtenu est aussi vrai lorsque $y = 0$ (et $x \neq 0$).

$$\text{Ainsi : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{y \varphi(xy)}{\varphi(x)}.$$

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule en aucun point, par opérations, on conclut :

$$f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

9.9

On a, par développements limités en 0 :

$$\begin{cases} e^x - 1 = x(1 + \varepsilon_1(x)), & \text{où } \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \ln(1 + x) = x(1 + \varepsilon_2(x)), & \text{où } \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & (e^x - 1) \ln(1 + y) - (e^y - 1) \ln(1 + x) \\ &= xy \left((1 + \varepsilon_1(x))(1 + \varepsilon_2(y)) - (1 + \varepsilon_1(y))(1 + \varepsilon_2(x)) \right) \\ &= xy (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(y) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(y) \\ & \quad - \varepsilon_1(y) - \varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(y)\varepsilon_2(x)) \\ &= xy \varepsilon(x, y), \end{aligned}$$

$$\text{où : } \varepsilon(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{xy \varepsilon(x, y)}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| |\varepsilon(x, y)| \\ &\leq \frac{1}{2} |\varepsilon(x, y)| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

9.10

Il est clair que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x, y) est :

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3e^y & 3xe^y \\ -2x & 1 \end{pmatrix},$$

qui est inversible car :

$$\det(J_f(x, y)) = 3x^2 + 3e^y + 6x^2e^y > 0.$$

Montrons que f est bijective.

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) = (X, Y) &\iff \begin{cases} X = x^3 + 3xe^y \\ Y = y - x^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3e^y x e^{x^2} + x^3 - X = 0 \\ Y = x^2 + Y. \end{cases} \end{aligned}$$

L'application $\varphi : x \mapsto 3e^x x e^{x^2} + x^3 - X$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$; il existe donc $x \in \mathbb{R}$, unique, tel que $\varphi(x) = 0$.

Ceci montre que le système d'équations précédent, d'inconnue (x, y) , admet une solution et une seule, et donc que f est bijective.

Finalement, f est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

9.11 • $U =]0; +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et, d'après les théorèmes généraux, ϕ est de classe C^∞ sur U .

• Montrons que ϕ est une bijection de U sur U et explicitions ϕ^{-1} .

Il est d'abord clair que : $\forall (x, y) \in U, \phi(x, y) \in U$.

Soit $(u, v) \in U$. On a, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= (u, v) \\ \iff \begin{cases} x^3 y^2 = u \\ \frac{1}{x^2 y} = v \end{cases} &\iff \begin{cases} x^3 y^2 = u \\ x^2 y = \frac{1}{v} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{1}{v x^2} \\ x^3 \frac{1}{v^2 x^4} = u \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{u v^2} \\ y = u^2 v^3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Considérons donc l'application

$$\psi : U \longrightarrow U, (u, v) \longmapsto \left(\frac{1}{u v^2}, u^2 v^3 \right).$$

Nous venons de montrer :

$$\forall (x, y) \in U, \forall (u, v) \in U,$$

$$(u, v) = \phi(x, y) \iff (x, y) = \psi(u, v).$$

Ainsi, ϕ est bijective et $\psi = \phi^{-1}$.

• D'après les théorèmes généraux,

$$\phi^{-1} : (u, v) \longmapsto \left(\frac{1}{u v^2}, u^2 v^3 \right)$$

est de classe C^∞ sur U .

On conclut que ϕ est un C^∞ -difféomorphisme de U sur U .

9.12 Considérons l'application

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{1}{2} (f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)).$$

Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, par opérations, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En particulier :

• pour tout $x \in [0; 1]$, $F(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$

• pour tout $y \in \mathbb{R}$, $F(\cdot, y)$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0; 1]$

• $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe sur $[0; 1] \times \mathbb{R}$

• pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$

• pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\cdot, y)$ est continue par morceaux sur $[0; 1]$

• $\frac{\partial F}{\partial y}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $[0; 1] \times \mathbb{R}$,

car $\frac{\partial F}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc bornée sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int_0^1$, J est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} J'(y) &= \int_0^1 F_y'(x, y) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2f_x'(x, y)f_{xy}''(x, y) + 2f_y'(x, y)f_{yy}''(x, y)) dx \\ &= \int_0^1 (f_x' f_y')'_x(x, y) dx = [f_x' f_y']_{x=0}^{x=1} = 0, \end{aligned}$$

car f_x' et f_y' sont 1-périodiques en x .

Ceci montre que J est constante sur $\mathbb{R}$.

9.13 L'application $\phi : (\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ est un C^1 -difféomorphisme de l'ouvert $U =]0; \frac{\pi}{2}[\times]0; +\infty[$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

L'application $f \mapsto f \circ \phi$ est donc une bijection de $C^1((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R})$ sur $C^1(U, \mathbb{R})$.

Soient $f \in C^1((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R})$, $g = f \circ \phi$. On a, pour tout (θ, ρ) de U , par dérivation d'une fonction composée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \rho}(\theta, \rho) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de l'EDP (équation aux dérivées partielles) de l'énoncé si et seulement si g est solution de l'EDP :

$$\forall (\theta, \rho) \in U, \quad \frac{\partial g}{\partial \rho}(\theta, \rho) = \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Comme, pour $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ fixé, ρ décrit l'intervalle $]0; +\infty[$, la solution générale de l'EDP ci-dessus est $g : (\theta, \rho) \mapsto \cos \theta \ln \rho + A(\theta)$, où $A \in C^1([0; \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$.

Puisque $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \text{Arctan} \frac{y}{x}$, on conclut que la solution générale de l'EDP proposée est :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \ln(x^2 + y^2) + C\left(\frac{y}{x}\right),$$

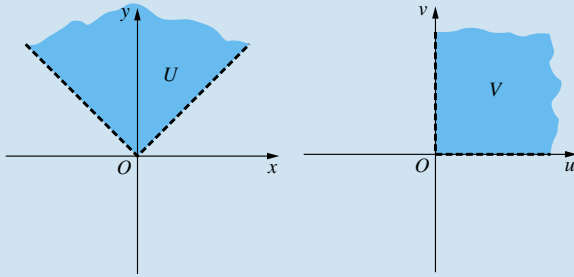
où $C \in C^1([0; +\infty[, \mathbb{R})$.

9.14 L'application $\phi_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe C^2 sur l'ouvert U , et :

$$\phi_1(U) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + v > |u - v|\} =]0; +\infty[^2.$$

En notant $V = \phi_1(U)$ et $\phi : U \xrightarrow{(x, y) \mapsto (x+y, y-x)} V$, U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et ϕ est un C^2 -difféomorphisme de U sur V , c'est-à-dire :

ϕ est de classe C^2 , ϕ est bijective, ϕ^{-1} est de classe C^2 .



Soient $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $g = f \circ \phi^{-1}$. On a, avec des notations abusives classiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \\ = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \right) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) \\ = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) \\ = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}. \end{cases}$$

Ainsi, f est solution de l'EDP de l'énoncé si et seulement si :

$$\forall (u, v) \in V, \quad -4 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{uv}}.$$

Pour $v \in]0; +\infty[$ fixé, on « intègre » par rapport à u (u décrit l'intervalle $]0; +\infty[$) :

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} + a(v),$$

où $a \in C^1([0; +\infty[, \mathbb{R})$.

Puis, pour $u \in]0; +\infty[$ fixé, on intègre par rapport à v (v décrit l'intervalle $]0; +\infty[$) :

$$g(u, v) = -\sqrt{u}\sqrt{v} + A(v) + B(u),$$

où A est une primitive de a , et $B \in C^2([0; +\infty[, \mathbb{R})$.

La solution générale de l'EDP de l'énoncé est :

$$f : (x, y) \mapsto -\sqrt{y^2 - x^2} + A(y - x) + B(x + y),$$

où $A, B \in C^2([0; +\infty[, \mathbb{R})$.

9.15 • L'application f est de classe C^1 sur l'ouvert $U =]-\pi/2; \pi/2[^2$, donc, si f admet un extrémum local, c'est nécessairement en un point critique.

• Recherche des points critiques de f :

On a, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \frac{1}{\cos^2 x} \text{th } y - \frac{1}{\text{ch}^2 x} \tan y \\ f'_y(x, y) = \tan x \frac{1}{\text{ch}^2 y} - \text{th } x \frac{1}{\cos^2 y}. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{(S)} \quad \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\text{sh } y}{\text{ch } y} = \frac{1}{\text{ch}^2 x} \frac{\sin y}{\cos y} \\ \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\text{ch}^2 y} = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \frac{1}{\cos^2 y} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \text{ch}^2 x \text{ sh } y \cos y = \cos^2 x \sin y \text{ ch } y \\ \sin x \text{ ch } x \cos^2 y = \cos x \text{ sh } x \text{ ch}^2 y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\text{ch } x \cos y)(\text{ch } x \text{ sh } y) = (\cos x \text{ ch } y)(\cos x \sin y) \\ (\text{ch } x \cos y)(\sin x \cos y) = (\cos x \text{ ch } y)(\text{sh } x \text{ ch } y) \end{cases} \\ &\implies (\text{ch } x \text{ sh } y)(\text{sh } x \text{ ch } y) = (\sin x \cos y)(\cos x \sin y) \\ &\iff \text{sh } 2x \text{ sh } 2y = \sin 2x \sin 2y. \end{aligned}$$

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors :

$$\text{(S)} \implies \left| \frac{\sin 2x}{\text{sh } 2x} \right| \left| \frac{\sin 2y}{\text{sh } 2y} \right| = 1.$$

Mais, on sait (par étude de variations de fonctions, par exemple) que : $\forall t \in]0; +\infty[, |\sin t| < t < \operatorname{sh} t$,

d'où ici : $\left| \frac{\sin 2x}{\operatorname{sh} 2x} \right| < 1$ et $\left| \frac{\sin 2y}{\operatorname{sh} 2y} \right| < 1$, contradiction.

Ceci montre : $x = 0$ ou $y = 0$.

Si $x = 0$, alors :

$$(S) \iff \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} = \frac{\sin y}{\cos y} \iff \operatorname{th} y = \tan y.$$

Mais on sait (par étude de variations de fonctions, par exemple) que : $\forall t \in]0; \pi/2[, 0 < \operatorname{th} t < t < \tan t$.

Il s'ensuit : $y = 0$.

Ainsi, f admet un point critique et un seul, le point $(0,0)$.

• Étude en $(0,0)$:

On a :

$$\begin{aligned} f(x, x^2) &= \tan x \operatorname{th}(x^2) - \operatorname{th} x \tan(x^2) \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)(x^2 + o(x^4)) \\ &\quad - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)(x^2 + o(x^4)) \\ &= \frac{2}{3}x^5 + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{3}x^5. \end{aligned}$$

Il en résulte, au voisinage de 0 :

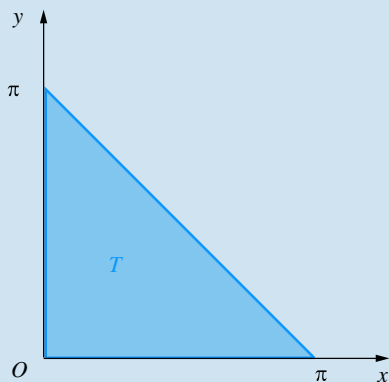
$$\begin{cases} f(x, x^2) > 0 & \text{pour } x > 0 \\ f(x, x^2) < 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

On déduit que f n'a pas d'extrémum local en $(0,0)$.

Finalement, f n'a pas d'extrémum local.

9.16 • Existence de la borne supérieure :

Notons $T = \{(x, y) \in [0; +\infty[^2; x + y \leq \pi\}$.



Il est clair que T est fermé borné, donc compact.

D'autre part, l'application

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \sin x \sin y \sin(x + y)$$

est continue sur T .

D'après le cours, il en résulte que f est bornée et atteint ses bornes. Notons $M = \sup_{(x,y) \in T} f(x, y)$.

Comme f s'annule en tout point du bord de T et que, par exemple, $f(\pi/4, \pi/4) > 0$, f atteint M en un point de l'intérieur T° de T . Comme f est de classe C^1 sur T° , ce point est un point critique de f .

• Recherche des points critiques de f :

On a, pour tout $(x, y) \in T^\circ$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \underbrace{\sin y}_{\neq 0} (\cos x \sin(x + y) + \sin x \cos(x + y)) = 0 \\ \underbrace{\sin x}_{\neq 0} (\cos y \sin(x + y) + \sin y \cos(x + y)) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sin(2x + y) = 0 \\ \sin(x + 2y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y \equiv 0 \pmod{\pi} \\ x + 2y \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv y \pmod{\pi} \\ x \equiv 0 \pmod{\pi/3} \end{cases} \iff x = y = \pi/3. \end{aligned}$$

• On conclut :

$$\sup_{(x,y) \in [0; +\infty[^2; x+y \leq \pi} f(x, y) = f(\pi/3, \pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

9.17 Rappelons : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

On a alors :

$$\bullet \quad xy + z^2 \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

atteint (au moins) en $(x, y, z) = (0, 0, 3)$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad xy + z^2 &\geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{2}z^2 = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}z^2 \geq -\frac{9}{2}, \end{aligned}$$

atteint (au moins) en $(x, y, z) = (3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}, 0)$.

On conclut que les bornes inférieures et supérieures demandées sont, respectivement : $-9/2, 9$.

9.18 a) Notons P, Q les coefficients de ω :

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad Q(x, y) = -2xy,$$

qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On a, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -2y,$$

et donc : $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \iff y = 0$.

Comme la droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$ ne contient aucun ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, on conclut que ω n'est fermée sur aucun ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

b) Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall (x, y) \in U, x^2 - y^2 \in I$, et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Notons ω_1 la forme différentielle définie sur U par :

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y) &= \varphi(x^2 - y^2)\omega(x, y) \\ &= (x^2 + y^2 - 1)\varphi(x^2 - y^2)dx - 2xy\varphi(x^2 - y^2)dy.\end{aligned}$$

Notons P_1, Q_1 les coefficients de ω_1 :

$$\begin{aligned}P_1(x, y) &= (x^2 + y^2 - 1)\varphi(x^2 - y^2), \\ Q_1(x, y) &= -2xy\varphi(x^2 - y^2),\end{aligned}$$

qui sont de classe C^1 sur U .

On a, pour tout (x, y) de U :

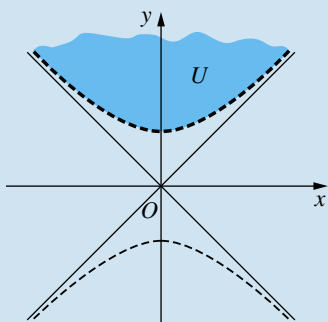
$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) = -(x^2 + y^2 - 1)2y\varphi'(x^2 - y^2) + 2y\varphi(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) = -4x^2y\varphi'(x^2 - y^2) - 2y\varphi(x^2 - y^2), \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned}(\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y)) \\ \iff (\forall (x, y) \in U, \quad 2y(x^2 - y^2 + 1)\varphi'(x^2 - y^2) &+ 4y\varphi(x^2 - y^2) = 0) \\ \iff (\forall t \in I, \quad (t + 1)\varphi'(t) + 2\varphi(t) &= 0).\end{aligned}$$

Une solution (autre que 0) de l'équation différentielle précédente est donnée par :

$$\varphi(t) = e^{-\int \frac{2}{t+1} dt} = e^{-2\ln|t+1|} = \frac{1}{(t+1)^2}.$$



Choisissons

$$\begin{aligned}U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 + 1 < 0 \text{ et } y > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \sqrt{x^2 + 1}\}, \\ I &=]-\infty; -1[, \quad \varphi : t \mapsto \frac{1}{(t+1)^2}.\end{aligned}$$

La forme différentielle ω_1 , définie par :

$$\omega_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2}dx - \frac{2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2}dy,$$

est fermée sur l'ouvert U , et l'ouvert U est étoilé (intérieur d'un arc d'hyperbole).

D'après le théorème de Poincaré, ω_1 est exacte sur U . D'ailleurs, nous allons expliciter les primitives de ω_1 sur U .

Une application $F_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de ω_1 sur U si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2} & (1) \\ \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2} & (2) \end{cases}$$

Pour y fixé, x varie dans un intervalle, d'où, en « intégrant » (2) par rapport à y :

$$F_1(x, y) = -\frac{x}{x^2 - y^2 + 1} + A(x),$$

où A est de classe C^1 (sur $] -\sqrt{y^2 - 1}; \sqrt{y^2 - 1}[$).

En reportant dans (1) :

$$\begin{aligned}(1) \iff -\frac{1}{x^2 - y^2 + 1} + \frac{2x^2}{(x^2 - y^2 + 1)^2} + A'(x) &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2} \iff A'(x) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, les primitives de ω_1 sur U sont les applications

$$F : (x, y) \mapsto -\frac{x}{x^2 - y^2 + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

9.19 • En notant $X = y + z$, $Y = z + x$, $Z = x + y$, on a :

$$\begin{aligned}2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz) &= (x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,\end{aligned}$$

donc :

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 0 \iff X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

$$\iff \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Ainsi, f est définie sur $U = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

• Avec les mêmes notations, on a, pour tout $(x, y, z) \in U$:
 $x + y + z = \frac{1}{2}(X + Y + Z)$, donc :

$$x = \frac{1}{2}(-X + Y + Z), \quad y = \frac{1}{2}(X - Y + Z),$$

$$z = \frac{1}{2}(X + Y - Z),$$

d'où :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4} \frac{(-X + Y + Z)(X - Y + Z)(X + Y - Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Il en résulte :

$$|f(x, y, z)| \leq \frac{1}{4} \frac{(|X| + |Y| + |Z|)^3}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\leq \frac{1}{4} \frac{(3(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2})^3}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{27}{4} (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}.$$

Comme $(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} 0$,

on conclut, par encadrement : $f(x, y, z) \xrightarrow{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} 0$.

9.20 On a : $f(x, 0, 0) = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et :

$$f(x, x, \sqrt{2}x + x^4) = \frac{2x^4 - (\sqrt{2}x + x^4)^4}{2x^2 - (\sqrt{2}x + x^4)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - (4x^4 + o(x^4))}{2x^2 - (2x^2 + 2\sqrt{2}x^5 + o(x^5))}$$

$$= \frac{-2x^4 + o(x^4)}{-2\sqrt{2}x^5 + o(x^5)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty,$$

donc f n'a pas de limite, ni finie ni infinie, en $(0, 0, 0)$.

9.21 (1) $\implies$ (2) :

On suppose : $\forall (x, y) \in \Omega, f'_x(x, y) + i f'_y(x, y) = 0$.

Soient $z_0, z \in U$, tels que $z \neq z_0$, $(x_0, y_0), (x, y) \in \Omega$ tels que $z_0 = x_0 + i y_0, z = x + i y$. On a, en utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 0 pour une fonction de deux variables réelles, de classe C^1 :

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

$$= \frac{1}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \left[(x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \right]$$

$$= \frac{1}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \left[((x - x_0) + i(y - y_0)) f'_x(x_0, y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \right]$$

$$= f'_x(x_0, y_0) + o(1) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f'_x(x_0, y_0).$$

Ceci montre que $\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite finie $h(z_0)$ lorsque $z \rightarrow z_0$, et :

$$h(z_0) = f'_x(x_0, y_0) = -i f'_y(x_0, y_0).$$

(2) $\implies$ (1) :

On suppose qu'il existe une application $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z_0 \in U$, on ait

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} h(z_0).$$

On a, en utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 0 pour une fonction de deux variables réelles de classe C^1 :

$$\frac{1}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \left[(x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \right]$$

$$= \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} h(z_0).$$

En particulier, pour $y = y_0$ et x variable :

$$\frac{(x - x_0) f'_x(x_0, y_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} h(z_0),$$

donc : $h(z_0) = f'_x(x_0, y_0)$,

et, pour $x = x_0$ et y variable :

$$\frac{(y - y_0) f'_y(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} h(z_0),$$

donc : $h(z_0) = -i f'_y(x_0, y_0)$.

Il en résulte : $f'_x(x_0, y_0) = -i f'_y(x_0, y_0)$,

c'est-à-dire : $f'_x(x_0, y_0) + i f'_y(x_0, y_0) = 0$.

9.22 a) Puisque

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) ; \det(X) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R}^*),$$

$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $\det$. D'après le cours, il en résulte que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) 1) Puisque, pour toute $X \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} {}^t \text{com}(X),$$

les coefficients de X^{-1} s'expriment comme fonctions rationnelles des coefficients de X , alors les coefficients de X^{-1} sont des fonctions de classe C^1 , donc f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $X \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Puisque $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), (||H|| \leq \varepsilon \implies X + H \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})).$$

On a, pour toute $H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $||H|| \leq \varepsilon$:

$$f(X + H) - f(X) = (X + H)^{-1} - X^{-1}$$

$$= (X + H)^{-1}(X - (X + H))X^{-1} = -(X + H)^{-1}HX^{-1},$$

d'où :

$$\begin{aligned} f(X + H) - f(X) + X^{-1}HX^{-1} \\ = (X^{-1} - (X + H)^{-1})HX^{-1}. \end{aligned}$$

Notons $L_X : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), H \longmapsto -X^{-1}HX^{-1}$.

Il est clair que L_X est linéaire.

D'autre part, comme l'application f est continue sur $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{on a : } (X + H)^{-1} \xrightarrow{H \rightarrow 0} X^{-1},$$

$$\text{donc : } (X^{-1} - (X + H)^{-1})HX^{-1} = \underset{H \rightarrow 0}{o} (||H||).$$

$$\text{On obtient : } f(X + H) = f(X) + L_X(H) + \underset{H \rightarrow 0}{o} (||H||).$$

On conclut que, pour tout $X \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, L_X est la différentielle de f en X . Autrement dit :

$$\forall X \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), d_X f(H) = L_X(H).$$

9.23

Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

$$\text{On a : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = y\varphi(xy).$$

Par composition, il suffit donc de prouver que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; ainsi, dans cet exemple, on se ramène à l'étude d'une fonction d'une variable réelle.

$$\text{On sait : } \forall t \in \mathbb{R}, e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!},$$

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

Comme de plus $\varphi(0) = 1$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

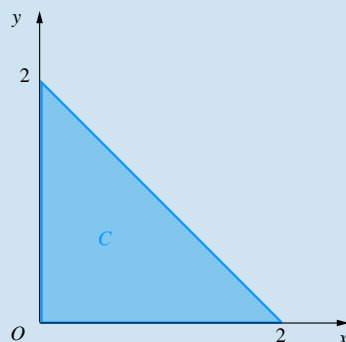
Ceci montre que φ est développable en série entière en 0, de rayon infini, donc φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, puis, par composition, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

9.24

1^{re} méthode : Étude d'extrémum pour une fonction numérique de deux variables réelles :

$$\text{Notons } C = \{(x, y) \in [0; +\infty[^2; x + y \leq 2\},$$

$$f : C \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y^2 (x^2 + y^2).$$



• Existence de la borne supérieure de f :

Il est clair que C est fermé borné dans $\mathbb{R}^2$, donc C est compact. D'autre part, par les théorèmes généraux, f est continue sur C . D'après le cours, il en résulte que f est bornée et atteint ses bornes. En particulier, la borne supérieure demandée existe et est atteinte.

• Recherche des points critiques :

Notons C° l'intérieur de C , c'est-à-dire :

$$C^\circ = \{(x, y) \in [0; +\infty[^2; x > 0, y > 0, x + y < 2\}.$$

L'application f est de classe C^1 sur l'ouvert C° , donc, si f admet un extrémum local en un point (x, y) de C° , alors (x, y) est un point critique de f .

On a, pour tout $(x, y) \in C^\circ$:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 y^2 + 2x y^4 = 0 \\ 2x^4 y + 4x^2 y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x y^2 (2x^2 + y^2) = 0 \\ 2x^2 y (x^2 + 2y^2) = 0 \end{cases} \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0),$$

ce qui est exclu.

Ceci montre que f n'a pas de point critique dans C° , donc f n'a pas d'extrémum local dans C° .

Comme on a vu plus haut que le maximum de f est atteint, il en résulte que ce maximum n'est pas atteint dans C° , donc est atteint au bord de C .

• Étude de f au bord de C :

$$\text{Comme : } \begin{cases} f(1, 1) = 2 > 0 \\ \forall x \in [0; 2], f(x, 0) = 0 \\ \forall y \in [0; 2], f(0, y) = 0, \end{cases}$$

le maximum de f est atteint en un point du segment

$$S = \{(x, y) \in [0; +\infty[^2; x + y = 2\}.$$

Il est clair que, lorsque (x, y) décrit S , le produit $p = xy = x(2 - x)$ décrit $[0; 1]$.

On a, pour tout $(x, y) \in S$:

$$f(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2) = p^2 (4 - 2p) = 4p^2 - 2p^3.$$

L'application $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto 4p^2 - 2p^3$ est dérivable et, pour tout $p \in [0; 1]$:

$$g'(p) = 8p - 6p^2 = 2p(4 - 3p) \geq 0,$$

donc g est croissante sur $[0; 1]$.

Il s'ensuit : $\sup_{p \in [0; 1]} g(p) = g(1) = 2$.

On conclut que $\sup_{(x, y) \in [0; +\infty]^2 : x+y \leq 2} x^2 y^2 (x^2 + y^2)$,

existe, est égale à 2, et est atteinte en $(1, 1)$ et en ce point seulement.

2^e méthode : Se ramener à une étude d'extrémum pour une fonction numérique d'une variable réelle :

• Pour $y \in [0; 2]$ fixé, considérons l'application :

$$h : [0; 2 - y] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto h(x) = f(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2) = x^4 y^2 + x^2 y^4.$$

L'application h est dérivable sur $[0; 2 - y]$ et :

$$\forall x \in [0; 2 - y], \quad h'(x) = 4x^3 y^2 + 2xy^4 = 2xy^2(2x^2 + y^2) \geq 0,$$

donc h est croissante sur $[0; 2 - y]$.

Il en résulte que h admet une borne supérieure et que celle-ci est atteinte en $2 - y$:

$$\sup_{x \in [0; 2-y]} h(x) = h(2 - y) = (2 - y)^2 y^2 ((2 - y)^2 + y^2).$$

• Par commodité, notons $t = y - 1$ et :

$$\begin{aligned} k : [-1; 1] &\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto k(t) = h(2 - y) \\ &= (1 + t)^2 (1 - t)^2 ((1 + t)^2 + (1 - t)^2) \\ &= 2(1 - t^2)^2 (1 + t^2). \end{aligned}$$

L'application k est dérivable sur $[-1; 1]$ et, par simple calcul, pour tout $t \in [-1; 1]$:

$$k'(t) = -2t(1 - t^2)(1 + 3t^2) \leq 0,$$

donc k est croissante sur $[-1; 0]$ et décroissante sur $[0; 1]$.

Il en résulte que k atteint sa borne supérieure en $t = 0$, c'est-à-dire pour $y = 1$, et alors $x = 2 - y = 1$.

On conclut que $\sup_{(x, y) \in [0; +\infty]^2 : x+y \leq 2} x^2 y^2 (x^2 + y^2)$ existe, est égale à 2, et est atteinte en $(1, 1)$ et en ce point seulement.

9.25

a) Soit $x \in [0; 1]$.

• Si $x = 0$, il est clair que l'équation proposée admet une solution et une seule, et $\varphi(0) = 0$.

• Supposons $x \neq 0$. Considérons

$$f_x : [\sqrt{x}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto y^3 - 2xy + x^3.$$

L'application f_x est dérivable sur $[\sqrt{x}; +\infty[$ et, pour tout $y \in [\sqrt{x}; +\infty[$:

$$(f_x)'(y) = 3y^2 - 2x \geq 3x - 2x = x > 0,$$

donc f_x est strictement croissante sur $[\sqrt{x}; +\infty[$.

De plus : $f_x(\sqrt{x}) = -x\sqrt{x} + x^3 = -x^{3/2}(1 - x^{3/2}) \leq 0$ et $f_x(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$.

Puisque f_x est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{x}; +\infty[$, il en résulte que l'équation $y^3 - 2xy + x^3 = 0$, d'inconnue $y \in [\sqrt{x}; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée $\varphi(x)$.

b) 1) On a, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f_x(2\sqrt{x}) = 4x\sqrt{x} + x^3 \geq 0,$$

donc : $\varphi(x) \leq 2\sqrt{x}$.

Comme : $\forall x \in [0; 1], \quad \sqrt{x} \leq \varphi(x) \leq 2\sqrt{x}$,

on déduit, par théorème d'encadrement :

$$\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = \varphi(0),$$

et on conclut que φ est continue en 0.

2) On a, pour tout $x \in]0; 1]$:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{\varphi(x)}{x} \geq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty,$$

donc φ n'est pas dérivable en 0.

c) Notons $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^3 - 2xy + x^3$.

Soit $x_0 \in]0; 1]$ fixé.

• L'application F est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

• On a $f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$, par définition de φ .

• On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'_y(x, y) = 3y^2 - 2x$, donc :

$$F'_y(x_0, \varphi(x_0)) = 3(\varphi(x_0))^2 - 2x_0 \geq 3x_0 - 2x_0 = x_0 > 0,$$

donc : $F'_y(x_0, \varphi(x_0)) \neq 0$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle ouvert I_{x_0} centré en x_0 , un intervalle ouvert J_{x_0} centré en $\varphi(x_0)$, et une application $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow J_{x_0}$ unique, tels que :

$$\forall (x, y) \in I_{x_0} \times J_{x_0}, \quad (f(x, y) = 0 \iff y = \varphi_{x_0}(x))$$

et φ_{x_0} est de classe C^1 sur I_{x_0} .

D'après l'unicité de $\varphi(x)$, pour $x \in]0; 1]$ vue en a), il en résulte : $\forall x \in I_{x_0}, \quad \varphi_{x_0}(x) = \varphi(x)$.

Ainsi, φ est de classe C^1 au voisinage de tout point de $]0; 1]$, donc φ est de classe C^1 sur $]0; 1]$.

Plan

Les méthodes à retenir	398
Énoncés des exercices	400
Du mal à démarrer ?	406
Corrigés	410

Thèmes abordés dans les exercices

- Étude d'intersections, de sommes, de sommes directes de sev d'un ev
- Montrer qu'une famille, finie ou infinie, est libre, est liée
- Détermination d'une base duale, d'une base préduale
- Obtention de formules de décomposition, à l'aide de formes linéaires
- Manipulation de projecteurs en dimension finie
- Obtention de factorisations de matrices
- Utilisation de décomposition en blocs pour des matrices
- Calculs sur des normes de matrices
- Étude de suites de matrices, de séries de matrices, calcul de e^A .

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de famille libre, famille liée, famille génératrice, finie ou infinie
- Définition et propriétés des sommes de sev, des sommes directes de sev
- Théorème d'isomorphisme pour les applications linéaires, et, en dimension finie, théorème du rang
- Interpolation de Lagrange
- Définition et propriétés des formes linéaires, des hyperplans
- En dimension finie, base duale d'une base de E , base préduale d'une base de E^*
- Trace d'une matrice carrée : définition, propriétés, cas d'un projecteur en dimension finie
- Manipulation des blocs
- Définition d'une norme sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, norme d'algèbre, continuité des opérations
- Convergence et somme de la série $\sum_{k \geq 0} A^k$, lorsque $\|A\| < 1$
- Définition et propriétés de l'exponentielle d'une matrice carrée.

Les méthodes à retenir

K désigne un corps commutatif.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On abrège espace vectoriel en ev, sous-espace vectoriel en sev.

**Pour obtenir des relations
(souvent des inclusions)
entre sev**

Essayer de passer par les éléments.

➡ **Exercice 10.1.**

**Pour montrer
qu'une famille infinie est libre**

Montrer que toute sous-famille finie est libre

➡ **Exercices 10.2 a), 10.14.**

**Pour montrer
qu'une famille infinie est liée**

Montrer qu'il existe une sous-famille finie liée.

➡ **Exercice 10.2 b).**

**Pour déterminer
la base préduale $(u_1, \dots, u_n)$
d'une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ du dual E^*
d'un ev E de dimension finie**

Résoudre le système d'équations

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \varphi_i(u_j) = \delta_{ij},$$

où $u_1, \dots, u_n$ sont les inconnues, et où δ_{ij} est le symbole de

$$\text{Kronecker, } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En considérant les coordonnées de $u_1, \dots, u_n$ dans une base fixée $(e_1, \dots, e_n)$ de E , résoudre n systèmes linéaires à n inconnues et n équations, ayant le même premier membre.

➡ **Exercice 10.8**

En groupant ces systèmes linéaires, on peut se ramener à une équation matricielle ${}^tQP = I_n$, où P est la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)^*$ à $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et Q celle de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(u_1, \dots, u_n)$.

➡ **Exercice 10.10**

Dans certains exemples simples, quelques éléments de $(e_1, \dots, e_n)$ peuvent être évidents.

➡ **Exercice 10.9.**

**Pour montrer qu'une forme
linéaire ψ est linéairement décom-
posable sur une famille libre
 $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ du dual E^* d'un ev E**

- Essayer éventuellement de montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une base de E^*

➡ **Exercices 10.25, 10.26.**

- Amener, par un calcul élémentaire, des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que $\psi = \sum_{k=1}^p \alpha_k \varphi_k$.
- Utiliser le résultat du cours : ψ se décompose linéairement sur la famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ du dual E^* d'un ev E de dimension finie si et seulement si $\bigcap_{k=1}^p \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\psi)$.

➡ **Exercice 10.24.**

Pour obtenir un résultat en liaison avec la dualité, en dimension finie

Penser à faire intervenir une base duale ou une base préduale.

➡ **Exercice 10.7.**

Pour étudier un ou des projecteurs en dimension finie

Se rappeler que, pour un projecteur en dimension finie, la trace est égale au rang. La trace, qui est linéaire, pourra être manipulée en liaison avec une sommation. Le rang, qui est un entier naturel, est ≥ 0 .

➡ **Exercices 10.11, 10.18, 10.41 d).**

Pour obtenir une factorisation d'une matrice en deux matrices de formats ou de rangs imposés

Essayer d'utiliser le théorème du cours caractérisant les matrices $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$ telles que $\text{rg}(A) = r$: il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que $A = P J_{n,p,r} Q$, où on a noté $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$.

➡ **Exercices 10.17, 10.19, 10.32, 10.33, 10.35, 10.42.**

Pour manipuler des matrices décomposées en blocs

Essayer d'amener des combinaisons linéaires, des produits de matrices décomposées en blocs.

➡ **Exercices 10.12, 10.23 b), 10.30 à 10.32, 10.34, 10.35, 10.37, 10.38.**

Pour obtenir des égalités portant sur des déterminants de matrices décomposées en blocs

Partir d'une égalité convenable de matrices décomposées en blocs (souvent issues de produits de matrices) et passer aux déterminants.

➡ **Exercices 10.30, 10.37.**

Énoncés des exercices

10.1 Une formule sur somme et intersection de sev

Soient E un K -ev, A, B, C des sev de E .

Montrer : $A + (B \cap (A + C)) = A + (C \cap (A + B))$.

10.2 Famille infinie libre, famille infinie liée

Étudier la liberté des familles d'applications suivantes, pour les lois usuelles :

$$a) \left(f_a : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x+a} \right)_{a \in]0; +\infty[}$$

$$b) (f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \operatorname{ch}(x-a))_{a \in \mathbb{R}}.$$

10.3 Étude de l'existence d'une factorisation d'une matrice

Existe-t-il $A \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = C$, où C désigne successivement les

$$\text{matrices : } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

10.4 Séparation de vecteurs par une forme linéaire

Soient E un K -ev de dimension finie ≥ 1 , $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ telle que : $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

10.5 Utilisation de formes linéaires sur un espace de polynômes

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\text{unique tel que : } \forall P \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}], P'(0) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k).$$

10.6 Famille des évaluations sur un ensemble fini

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini à n éléments. On note $F = K^X$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $E_i : F \longrightarrow K, f \longmapsto f(x_i)$, appelée *évaluation* en x_i . Montrer que la famille $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F^* .

10.7 Déterminant d'une famille de p formes linéaires prises en p points

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un K -ev de dimension finie, $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$. Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que : $\det((\varphi_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}) \neq 0$.

10.8 Exemple de détermination d'une base préduale dans un ev de dimension 3

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E , $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ les éléments de E^* définis, pour tout $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ de E , par :

$$\varphi_1(x) = x_1 + x_2, \quad \varphi_2(x) = x_2 + x_3, \quad \varphi_3(x) = x_1 + x_3.$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* et en déterminer la base préduale.

10.9 Exemple de détermination d'une base préduale dans un ev de dimension 4

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les éléments de E^* définis, pour tout $P \in E$, par :

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = P'(0), \quad \varphi_4(P) = P'(1).$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* , et en déterminer la base préduale.

10.10 Exemple de détermination d'une base préduale dans un ev de dimension 3

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les éléments de E^* définis, pour tout $P \in E$, par :

$$\varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P'(1), \quad \varphi_3(P) = \int_0^1 P(x) dx.$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* et en déterminer la base préduale.

10.11 Projecteurs de somme nulle, en dimension finie

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $p_1, \dots, p_N$ des projecteurs de E .

Montrer :
$$\sum_{i=1}^N p_i = 0 \iff (\forall i \in \{1, \dots, N\}, p_i = 0).$$

10.12 Étude d'inverse pour une matrice triangulaire par blocs

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_p(K)$.

a) Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.

b) Lorsque A et C sont inversibles, exprimer M^{-1} sous forme de blocs.

10.13 Calcul de l'exponentielle d'une matrice antisymétrique d'ordre 2

Soient $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $e^{A(t)}$.

10.14 Exemple de famille infinie libre

Montrer que la famille $(f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x - a|^{3/2})_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

10.15 Base de polynômes avec conditions sur les degrés

Soit E un sev de dimension finie de $K[X]$.

a) Montrer que E admet au moins une base formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

b) Montrer que E admet au moins une base formée de polynômes de degrés tous égaux.

10.16 Formes linéaires et trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(K)$, l'application $\mathbf{M}_n(K) \longrightarrow K$, $X \longmapsto \text{tr}(AX)$ est un élément de $\mathbf{M}_n(K)^*$, puis montrer que l'application $\theta : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathbf{M}_n(K)^*$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \forall X \in \mathbf{M}_n(K), (\theta(A))(X) = \text{tr}(AX)$$

est un isomorphisme de K -ev.

10.17 Matrices de rang 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg}(H) = 1$.

a) 1) Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que : $H = UV^t$.

2) En déduire : $H^2 = \text{tr}(H)H$.

b) Montrer : $\det(I_n + H) = 1 + \text{tr}(H)$.

c) 1) Établir que $I_n + H$ est inversible si et seulement si $\text{tr}(H) \neq -1$ et que, dans ces conditions :

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \text{tr}(H)} H.$$

2) Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}(HA^{-1}) \neq -1$.

Montrer que $A + H$ est inversible et que : $(A + H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \text{tr}(HA^{-1})} A^{-1} H A^{-1}$.

10.18 Projecteurs et coefficients irrationnels

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$.

On note $M = A + \sqrt{2}B + \sqrt{3}C$ et on suppose $M^2 = M$. Montrer : $B = C = 0$.

10.19 Factorisation d'une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $r = \text{rg}(A)$.

Montrer : $\exists U \in \mathbf{M}_{n,r}(K)$, $\exists V \in \mathbf{M}_{r,p}(K)$, $A = UV$.

10.20 Rang d'une matrice décomposée en blocs

a) 1) Montrer que, si une matrice M est décomposée en blocs de colonnes, $M = (U \mid V)$, alors :

$$\text{rg}(M) \leq \text{rg}(U) + \text{rg}(V).$$

2) Montrer que, si une matrice M est décomposée en blocs de lignes, $M = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$, alors :

$$\text{rg}(M) \leq \text{rg}(R) + \text{rg}(S).$$

3) En déduire que, si une matrice M est décomposée en quatre blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, (où A et D ne sont pas nécessairement carrées), alors : $\text{rg}(M) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B) + \text{rg}(C) + \text{rg}(D)$.

b) Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq n$ et $p \leq n$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$, où $A \in \mathbf{M}_{m,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{m,n-p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n-m,p}(K)$.

Déduire de a) que, si M est inversible, alors : $\text{rg}(A) \geq m + p - n$.

10.21 Normes subordonnées à $\|\cdot\|_1$ et à $\|\cdot\|_\infty$

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On note : $\|A\|_\ell = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$, $\|A\|_c = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right)$,

et, pour tout $X = (x_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$: $\|X\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j|$, $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq p} |x_j|$.

Montrer : $\|A\|_\ell = \sup_{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$, $\|A\|_c = \sup_{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.

10.22 Comparaison de normes subordonnées, réelles, complexes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{On note : } |||A|||_{\mathbb{R}} = \sup_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, \quad |||A|||_{\mathbb{C}} = \sup_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}.$$

Établir : $|||A|||_{\mathbb{R}} = |||A|||_{\mathbb{C}}$.

10.23 Endomorphismes d'image et de noyau imposés

Soient E un K -ev, F, G deux sev de E supplémentaires dans E . On note :

$$\mathcal{G} = \left\{ f \in \mathcal{L}(E) ; \operatorname{Im}(f) = F \text{ et } \operatorname{Ker}(f) = G \right\}.$$

a) Établir que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

b) On suppose ici que E est de dimension finie. On note $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, qui est une base de E .

Montrer que l'application $\theta : f \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathcal{G}, \circ)$ sur $(H, \cdot)$, où $H = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K) ; M \in \operatorname{GL}_p(K) \right\}$.

10.24 Intersection de noyaux de formes linéaires

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un K -ev de dimension finie, $f, \varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$. Montrer :

$$f \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \iff \bigcap_{i=1}^p \operatorname{Ker}(\varphi_i) \subset \operatorname{Ker}(f).$$

10.25 Intervention de formes linéaires sur un espace de polynômes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(a_k)$$

$$(ii) \int_{-1}^1 \left(\prod_{k=1}^n (x - a_k) \right) dx = 0.$$

10.26 Étude de formes linéaires sur un espace de polynômes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{K}_n[X]$, $a \in \mathbb{K}$.

a) On note, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$: $\varphi_j : E \longrightarrow \mathbb{K}, P \longmapsto P^{(j)}(a)$.

Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

b) Soient $k \in \{0, \dots, n\}$, $\varphi \in E^*$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \forall P \in \mathbb{K}_{n-k}[X], \varphi((X-a)^k P) = 0$$

$$(ii) \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{K}^k, \forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i P^{(i)}(a).$$

10.27 Égalité de sommes de carrés de formes linéaires

a) Soient E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \psi_1, \dots, \psi_q \in E^*$. Montrer :

$$\left(\forall x \in E, \sum_{i=1}^p (\varphi_i(x))^2 = \sum_{j=1}^q (\psi_j(x))^2 \right) \implies \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_q).$$

À cet effet, on pourra utiliser le résultat de l'exercice 10.24.

b) Le résultat de a) subsiste-t-il lorsque le corps $\mathbb{R}$ est remplacé par $\mathbb{C}$?

10.28 Hyperplans de $M_n(K)$ rencontrant $GL_n(K)$

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Montrer que tout hyperplan de $M_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

10.29 Lien entre $(AB)^2 = 0$ et $(BA)^2 = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A-t-on : $\forall A, B \in M_n(K), (AB)^2 = 0 \implies (BA)^2 = 0$?

On étudiera successivement les cas $n = 1, n = 2, n \geq 3$.

10.30 Lien entre les polynômes caractéristiques de AB et de BA

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, $A \in M_{p,q}(K)$, $B \in M_{q,p}(K)$. Montrer :

$$(-X)^q \det(AB - XI_p) = (-X)^p \det(BA - XI_q).$$

10.31 Rang d'une matrice triangulaire par blocs, un bloc diagonal étant égal à l'identité

a) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $B \in M_{n,p}(K)$, $C \in M_p(K)$. Montrer: $\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \text{rg}(C)$.

b) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $R \in M_{n,p}(K)$, $S \in M_{p,n}(K)$. Montrer :

$$p + \text{rg}(I_n + RS) = n + \text{rg}(I_p + SR).$$

10.32 Rang d'une matrice diagonale par blocs

a) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(K)$, $B \in M_p(K)$. Montrer :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rg}(A) + \text{rg}(B).$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont équivalentes, alors A et B sont équivalentes.

c) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(K)$, $U, V \in M_p(K)$. Montrer que, si A et B sont équivalentes et si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ sont équivalentes, alors U et V sont équivalentes.

10.33 Déformation d'un endomorphisme, pour une image et un noyau imposés

Soient E un K -ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E tel que $\dim(F) \leq \text{rg}(f)$, G un supplémentaire de F dans E . Montrer qu'il existe $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que :

$$\text{Im}(u \circ f \circ v) = F \quad \text{et} \quad \text{Ker}(u \circ f \circ v) = G.$$

10.34 Caractérisation de matrices inversibles par blocs

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$, $D \in \mathbf{M}_p(K)$.

Montrer que M est inversible si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est inversible, et calculer alors M^{-1} sous forme de matrice décomposée en blocs.

10.35 Étude des matrices X telles que $AXB = 0$

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{m,n}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$.

On note : $E = \{X \in \mathbf{M}_{n,p}(K) ; AXB = 0\}$.

Montrer que E est un K -ev et déterminer sa dimension.

10.36 Factorisation d'une matrice carrée non inversible

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$ non inversible. Montrer qu'il existe $B, C \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que : $A = BC$, B est inversible, C est nilpotente.

10.37 Déterminant d'une matrice par blocs

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C \in \mathbf{M}_n(K)$, $D \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que $CD = DC$. Montrer :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

10.38 Étude de rang pour une matrice par blocs

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

où $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$, $D \in \mathbf{M}_p(K)$.

Montrer : $\text{rg}(M) = n \iff D = CA^{-1}B$.

À cet effet, on pourra utiliser le résultat de l'exercice 10.32.

10.39 Intervention d'une série matricielle géométrique

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme telle que : $\forall X, Y \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$. Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\|A\| < 1$.

a) Montrer : $\forall t \in [0; 1]$, $I_n - tA \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) Établir : $\det(I_n - A) > 0$.

10.40 Réunion de plusieurs sev

Soient K un corps commutatif infini, E un K -ev, $p \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_p$ des sev de E tels que

$$\bigcup_{i=1}^p F_i = E. \text{ Démontrer qu'il existe } i \in \{1, \dots, p\} \text{ tel que } F_i = E.$$

10.41 Projecteur associé à un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(E)$

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $e = \text{Id}_E$, G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(E)$,

$n = \text{Card}(G)$. On note : $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$.

a) Montrer : $\forall h \in G$, $p \circ h = p$. b) En déduire que p est un projecteur de E .

c) Établir : $\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) = \text{Im}(p)$. d) Déduire : $\dim \left(\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$.

10.42 Étude de $\det(xA + B)$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application

$$P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto P(x) = \det(xA + B).$$

- Montrer que P est une application polynomiale, de degré $\leq n$.
- Établir : 1) $\deg(P) \leq \operatorname{rg}(A)$ 2) $\operatorname{val}(P) \geq n - \operatorname{rg}(B)$.

10.43 Un début de théorie ergodique

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $e = \operatorname{Id}_E$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$g_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k. \text{ On suppose que la suite } (g_p)_{p \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée.}$$

- Montrer : $(e - f) \circ g_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$.
- Établir que $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ admet au moins une valeur d'adhérence, et que toute valeur d'adhérence de $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est un projecteur.
- Montrer que $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge (on pourra utiliser l'exercice 1.22), et conclure que $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un projecteur.

Du mal à démarrer ?

10.1 Montrer deux inclusions, en passant par les éléments.

10.2 Se rappeler que, dans un ev, une famille infinie est dite libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre, et qu'une famille infinie est liée si et seulement si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une sous-famille finie liée.

a) Pour montrer que $(f_a)_{a \in [0; +\infty[}$ est libre, utiliser l'unicité d'une décomposition en éléments simples.

b) Pour montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est liée, établir, par exemple, que (f_{-1}, f_0, f_1) est liée.

10.3 Dans les deux premiers exemples, il existe des matrices A, B très simples convenant. Pour le troisième exemple, si (A, B) convient, raisonner sur les rangs et obtenir une contradiction.

10.4 Utiliser un théorème du cours sur la dualité en dimension finie.

10.5 Considérer les formes linéaires :

$$\varphi_k : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto P(a_k), \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto P'(0).$$

10.6 1) Vérifier, pour tout $i \in \{1, \dots, n\} : E_i \in F^*$.

2) Montrer que $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, en exploitant, pour $j \in \{1, \dots, n\}$ fixé, l'application $f_j : x_i \longmapsto \delta_{ij}$.

3) Conclure.

10.7 1) Si le déterminant proposé n'est pas nul, montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre en revenant à la définition.

2) Réciproquement, si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre, utiliser le théorème de la base incomplète, puis envisager une base préduale.

10.8 1) Vérifier : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E^*$.

2) Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre, en revenant à la définition.

3) En déduire que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* .

4) La base préduale (u_1, u_2, u_3) est définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \varphi_i(u_j) = \delta_{ij}.$$

Résoudre trois systèmes linéaires ayant le même premier membre.

10.9 1) Vérifier : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in E^*$.

2) Partant d'une combinaison linéaire nulle, exploiter, par exemple, des polynômes simples s'annulant en 0 et 1 et dont la dérivée s'annule en 0 ou en 1, pour montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est libre.

3) En déduire que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* .

4) La base préduale (P_1, P_2, P_3, P_4) est définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2, \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij}.$$

Les polynômes P_3 et P_4 ont pu être déterminés en 2).

Pour calculer P_1 et P_2 , résoudre deux systèmes linéaires ayant le même premier membre.

10.10 1) Vérifier : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E^*$.

2) Partant d'une combinaison linéaire nulle, l'appliquer, par exemple, à 1, X , X^2 et en déduire que les coefficients sont tous nuls, pour montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre.

3) En déduire que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* .

4) La base préduale (P_1, P_2, P_3) est définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij}.$$

En notant, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $P_i = a_{i1} + a_{i2}X + a_{i3}X^2$, se ramener à un produit de deux matrices carrées d'ordre 3, égal à I_3 .

10.11 Utiliser le théorème du cours sur le rang et la trace d'un projecteur en dimension finie.

10.12 a) Passer par les déterminants.

b) Noter $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ et résoudre un système de quatre équations matricielles.

10.13 Remarque : $(A(t))^2 = -t^2 I_2$, se rappeler la définition de $e^{A(t)}$ sous forme de somme d'une série matricielle, et se rappeler les développements en série entière de $\cos$ et $\sin$.

10.14 Se rappeler que dans un ev, une famille infinie est dite libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Remarque que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R} - \{a\}$, mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

10.15 a) Récurrence sur $n = \dim(E)$. Partant d'une base $(P_1, \dots, P_{n+1})$ telle que $\deg(P_1) \leq \dots \leq \deg(P_{n+1})$, construire une base $(Q_1, \dots, Q_{n+1})$ telle que $Q_{n+1} = P_{n+1}$ et que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\deg(Q_i) < \deg(P_{n+1})$, puis utiliser l'hypothèse de récurrence.

b) Partant d'une base $(P_1, \dots, P_n)$ telle que $\deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$, construire une base $(S_1, \dots, S_n)$ telle que $S_n = P_n$ et que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\deg(S_i) = \deg(P_n)$.

10.16 1) Montrer que, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(K)$, l'application

$$\varphi_A : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow K, \quad X \longmapsto \text{tr}(AX)$$

est élément de $\mathbf{M}_n(K)^*$.

2) Montrer que θ est linéaire, injective (en utilisant les matrices élémentaires), puis conclure.

10.17 a) 1) *1^{re} méthode : Utilisation de J_1 :*

Utiliser une décomposition de H faisant intervenir la matrice

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}.$$

• *2^e méthode : Considération des éléments de H :*

Remarque qu'il existe $U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que les colonnes de H soient colinéaires à U .

2) Utiliser : ${}^t V U \in \mathbb{C}$.

b) 1) *1^{re} méthode : Utilisation de la multilinéarité et de l'alternance du déterminant :*

Noter $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et développer $\det(I_n + H)$ par multilinéarité et alternance.

2) *2^e méthode : Utilisation d'une trigonalisation de H :*

Montrer que H est semblable à une matrice triangulaire dont la diagonale est formée de $n - 1$ fois 0 et de $\text{tr}(H)$, et en déduire $\det(I_n + H)$.

c) 1) En notant $M = I_n + H$, former une équation de degré 2, satisfaite par M , et en déduire M^{-1} .

2) Appliquer 1) à HA^{-1} à la place de H .

10.18 Se rappeler le théorème du cours sur rang et trace d'un projecteur en dimension finie, et montrer que, si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$ est tel que $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$, alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

10.19 Utiliser le théorème du cours faisant intervenir la matrice $J_{n,p,r}$.

10.20 a) 1) Se rappeler que le rang d'une matrice est égal à la dimension du sev engendré par les colonnes de cette matrice.

2) Appliquer 1) en transposant.

3) Combiner 1) et 2).

b) Utiliser a) et $\text{rg}(M) = n$.

10.21 1) • Montrer :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad \|AX\|_1 \leq \|A\|_\ell \|X\|_1.$$

• Considérer la matrice-colonne élémentaire E_j , où j est tel que

$$\|A\|_\ell = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

2) • Montrer :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \|AX\|_{\infty} \leq \|A\|_c \|X\|_{\infty}.$$

• Considérer la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$, où :

$$\varepsilon_j = \begin{cases} \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} & \text{si } a_{i_0 j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{i_0 j} = 0, \end{cases}$$

i_0 étant tel que $\|A\|_c = \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j}|$.

10.22 Une inégalité est immédiate.

Pour l'autre inégalité, pour toute $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$, noter $X = U + iV$, où $U, V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et calculer $\|X\|_2^2$ et $\|AX\|_2^2$.

10.23 a) Attention : $\mathcal{G}$ va être un groupe pour la loi $\circ$, mais $\mathcal{G}$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

Montrer successivement le caractère interne de la loi, l'existence d'un neutre, qui est le projecteur sur F parallèlement à G , l'associativité, l'existence, pour chaque élément, d'un symétrique, en utilisant le théorème d'isomorphisme.

b) • Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{G}$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$.

• Réciproquement, montrer que, pour toute matrice

$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de H , où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, l'endomorphisme f de E , représenté par A dans $\mathcal{B}$, est élément de $\mathcal{G}$.

Construire ainsi deux applications θ et φ , réciproques l'une de l'autre, et montrer que θ est un morphisme du groupe $(\mathcal{G}, \circ)$ sur $(H, \cdot)$. Conclure.

10.24 1) Le sens $\Rightarrow$ est facile.

2) Réciproquement, supposer $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(f)$.

Noter $r = \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et se ramener au cas où, par exemple, $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_p$ se décomposent linéairement sur $\varphi_1, \dots, \varphi_r$.

10.25 1) Un sens est facile.

2) Réciproquement, supposer

$$\int_{-1}^1 \left(\prod_{k=1}^n (x - a_k) \right) dx = 0.$$

Considérer les formes linéaires :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto \int_{-1}^1 P(x) dx,$$

$$\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto P(a_k), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre et montrer, en raisonnant par l'absurde, que $(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée.

10.26 a) • Vérifier : $\forall j \in \{0, \dots, n\}, \varphi_j \in E^*$.

• Montrer que $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n}$ est libre en revenant à la définition et en utilisant les $P_k = (X - a)^k, 0 \leq k \leq n$.

• En déduire que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

b) Pour $\varphi \in E^*$ fixée quelconque, décomposer φ sur la base $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ et traduire (i) par équivalences logiques successives.

10.27 a) Montrer : $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{j=1}^q \text{Ker}(\psi_j)$,

et utiliser le résultat de l'exercice 10.24.

b) Considérer, par exemple : $E = \mathbb{C}, p = 2, q = 1$, $\varphi_1 : x \mapsto x, \varphi_2 : x \mapsto ix, \psi_1 : x \mapsto 0$.

10.28 Soit H un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$. Raisonner par l'absurde : supposer $H \cap \mathbf{GL}_n(K) = \emptyset$.

Montrer que H contient alors toutes les matrices nilpotentes, en raisonnant par l'absurde.

Construire deux matrices nilpotentes dont la somme est inversible.

Conclure.

10.29 1) Cas $n = 1$: Évident.

2) Cas $n = 2$: Se rappeler :

$$\forall M \in \mathbf{M}_2(K), \quad M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0.$$

3) Cas $n \geq 3$: Construire un contreexemple pour $n = 3$, et le compléter par des 0 pour $n \geq 3$.

10.30 Faire apparaître $AB - XI_p$ et $BA - XI_q$ dans des produits par blocs de matrices carrées d'ordre $p + q$.

10.31 a) Remarquer, par exemple :

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

b) Faire apparaître $I_n + RS$ et $I_p + SR$ dans des produits par blocs de matrices carrées d'ordre $n + p$, et utiliser le résultat de a).

10.32 a) Utiliser le théorème du cours faisant intervenir les matrices $J_{\dots}$.

10.33 Il suffit de trouver un couple $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $u \circ f \circ v = p$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G . Utiliser le théorème du cours sur les matrices $J_{\dots}$.

10.34 1^{re} méthode : Recherche de l'inverse par résolution d'un système :

En notant $N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, résoudre $MN = I_{n+p}$.

2^e méthode : Utilisation d'une factorisation par blocs :

Remarquer :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

10.35 1) Montrer que E est un K -ev.

2) Utiliser le théorème du cours faisant intervenir les matrices $J_{m,n,a}$ et $J_{p,q,b}$, où $a = \operatorname{rg}(A)$, $b = \operatorname{rg}(B)$ (et, pour la commodité, $a \leq b$). Utiliser des décompositions en neuf blocs.

10.36 Noter $r = \operatorname{rg}(A) < n$ et considérer une matrice nilpotente simple $M_r \in \mathbf{M}_{r+1}(K)$ de rang r , et $N_r = \begin{pmatrix} M_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$.

10.37 Remarquer, pour D inversible et $CD = DC$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

10.38 Remarquer :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & -I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}.$$

10.39 a) Se rappeler que, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M\| < 1$, la série $\sum_{k \geq 0} M^k$ converge et que sa somme vérifie :

$$(I_n - M) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} M^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} M^k \right) (I_n - M) = I_n.$$

b) Considérer l'application

$$f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \det(I_n - tA).$$

10.40 Récurrence sur p .

Si $F_1, \dots, F_{p+1}$ sont des sev de E tels que :

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} F_i = E, \quad F_{p+1} \neq E, \quad \bigcup_{i=1}^p F_i \neq E,$$

considérer $x, y \in E$ tels que $x \notin F_{p+1}$ et $y \notin \bigcup_{i=1}^p F_i$, et envisager la droite affine passant par y et dirigée par x .

10.41 a) Remarquer que, pour tout $h \in G$, l'application $g \longmapsto g \circ h$ est une permutation de G , donc :

$$\sum_{g \in G} g \circ h = \sum_{g \in G} g.$$

b) Calculer p^2 en utilisant a), pour l'un des deux facteurs.

c) 1) Montrer que, pour tout $x \in \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - e)$, on a : $p(x) = x$.

2) Réciproquement, montrer que, pour tout $x \in \operatorname{Im}(p)$, on a $g(x) = (g \circ p)(x)$, et que, comme en a), $g \circ p = p$.

d) Se rappeler le théorème sur rang et trace pour un projecteur en dimension finie.

10.42 a) Développer le déterminant.

b) 1) En notant $r = \operatorname{rg}(A)$, utiliser le théorème du cours faisant intervenir $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Par définition, pour $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$, $\operatorname{val}(P)$ est le degré du terme de plus bas degré de P , et $\operatorname{val}(0) = +\infty$.

Considérer le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, et :

$$S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad y \longmapsto \det(yB + A).$$

10.43 a) Développer $(e - f) \circ g_p$ et utiliser le fait que la suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

b) • Utiliser un théorème du cours sur la compacité pour obtenir l'existence d'une valeur d'adhérence.

• Si h est une valeur d'adhérence, montrer $f \circ h = h$, puis :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^k \circ h = h,$$

puis :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad g_p \circ h = h,$$

et déduire $h \circ h = h$.

c) • Soient h, k deux valeurs d'adhérence.

Montrer $k \circ h = h$ et $k \circ h = k$.

• Utiliser le résultat de l'exercice 1.22 pour conclure.

Corrigés des exercices

10.1 1) Soit $x \in A + (B \cap (A + C))$.

Il existe $a \in A, b \in B \cap (A + C)$ tels que : $x = a + b$.

On a alors $b \in B$, et il existe $a' \in A, c \in C$ tels que : $b = a' + c$.

On déduit : $x = a + b = (a + a') + c$.

D'une part : $a + a' \in A$.

D'autre part, $c \in C$ et $c = (-a') + b \in A + B$,

donc $c \in C \cap (A + B)$.

On obtient : $x \in A + (C \cap (A + B))$.

Ceci montre :

$$A + (B \cap (A + C)) \subset A + (C \cap (A + B)).$$

2) En appliquant le résultat de 1) au couple (B, C) à la place de (C, B) , on obtient l'autre inclusion.

On conclut :

$$A + (B \cap (A + C)) = A + (C \cap (A + B)).$$

Remarque : On peut aussi montrer que les deux sev étudiés sont égaux à $(A + B) \cap (A + C)$.

10.2 a) Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in]0; +\infty[$ deux à deux

distincts, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0$.

On a alors : $\forall x \in [0; +\infty[, \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x + a_k} = 0$.

En réduisant au même dénominateur, on obtient une égalité de fonctions polynomiales sur la partie infinie $[0; +\infty[$ de $\mathbb{R}$, donc une égalité de polynômes, puis, en revenant aux fractions rationnelles :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x + a_k} = 0.$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples de la fraction nulle, on déduit :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 0.$$

Ceci montre que la famille $(f_a)_{a \in]0; +\infty[}$ est libre.

b) Remarquons, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \text{ch}(x - a) = \text{ch } a \text{ ch } x - \text{sh } a \text{ sh } x,$$

donc f_a se décompose linéairement sur les deux applications ch et sh .

Il en résulte que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$, qui a une infinité d'éléments (donc strictement plus de 2), est liée.

De façon explicite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (f_{-1} + f_1)(x) &= \text{ch}(x + 1) + \text{ch}(x - 1) \\ &= 2 \text{ch } 1 \text{ ch } x = (2 \text{ch } 1) f_0(x), \end{aligned}$$

donc : $f_{-1} - 2 \text{ch } 1 f_0 + f_1 = 0$,

ce qui montre que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est liée.

10.3 1) Il est clair que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

conviennent.

2) Il est clair que $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

conviennent.

3) S'il existe (A, B) convenant, on a alors :

$$3 = \text{rg}(C) = \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \leq 2,$$

contradiction.

Ceci montre qu'il n'existe pas (A, B) convenant.

10.4 Puisque $x - y \neq 0$ et puisque E est de dimension finie, d'après le cours, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x - y) = 1$, et on a alors $\varphi(x) = \varphi(y) + 1$, donc $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

10.5 Notons $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\varphi_k : E \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto P(a_k).$$

Comme $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts, d'après le cours sur l'interpolation polynomiale, $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base du dual E^* de E .

D'autre part, l'application $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto P'(0)$

est linéaire, donc $\psi \in E^*$.

Il existe donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique tel que :

$$\psi = \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k,$$

c'est-à-dire tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P'(0) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k).$$

10.6 1) D'abord, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, E_i \in F^*$, car E_i est une application de F dans K et E_i est linéaire :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in K, \forall f, g \in F, E_i(\alpha f + g) &= (\alpha f + g)(x_i) \\ &= \alpha f(x_i) + g(x_i) = \alpha E_i(f) + E_i(g). \end{aligned}$$

2) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ tel que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i = 0$.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ fixé. Considérons l'application

$$f_j : X \longrightarrow K, \quad x_i \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On a : $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(x_i) = \alpha_j.$

Ceci montre que $(E_1, \dots, E_n)$ est libre dans F^* .

3) Puisque X est fini et a n éléments, $F = K^X$ est de dimension finie égale à n , donc F^* est aussi de dimension finie et égale à n . Comme, d'après 2), $(E_1, \dots, E_n)$ est une famille libre de n éléments de F^* , on conclut que c'est une base de F^* .

10.7 1) Supposons qu'il existe $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que :

$$\det((\varphi_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}) \neq 0.$$

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i = 0$.

On a alors : $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i(x_j) = 0,$

donc $\sum_{i=1}^p \alpha_i L_i = 0$, en notant L_i la ligne numéro i du déterminant envisagé.

Comme ce déterminant n'est pas nul, il en résulte :

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0.$$

Ceci montre que $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre.

2) Réciproquement, supposons $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ libre.

D'après le théorème de la base incomplète, puisque E^* est de dimension finie et que $\dim(E^*) = \dim(E) = n$, il existe $\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n \in E^*$ telles que la famille $B_1 = (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$ soit une base de E^* . Considérons la base préduale $B = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ de B_1 . On a alors :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{ij},$$

donc, en particulier :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{ij},$$

et donc : $\det((\varphi_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}) \neq 0.$

10.8 1) Il est clair que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont bien des formes linéaires, donc : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E^*$.

2) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0$$

$$\iff \forall x \in E, \quad \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \alpha_3 \varphi_3(x) = 0$$

$$\iff \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\alpha_1(x_1 + x_2) + \alpha_2(x_2 + x_3) + \alpha_3(x_1 + x_3) = 0$$

$$\iff \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_3)x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)x_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)x_3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_1 \\ \alpha_2 = -\alpha_1 \\ -2\alpha_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre.

3) Puisque $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre et de cardinal 3 dans E^* qui est de dimension 3 (égale à celle de E), on conclut que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* .

4) Notons $B = (u_1, u_2, u_3)$ la base préduale de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de E^* .

En notant $u_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(u_1) = 1 \\ \varphi_2(u_1) = 0 \\ \varphi_3(u_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \\ -2x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 1/2 \\ x_3 = -1/2. \end{cases}$$

D'où : $u_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3.$

On calcule de même u_2 et u_3 , par permutation circulaire ou par résolution de systèmes linéaires ayant le même premier membre, et on obtient facilement :

$$u_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3, \quad u_3 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3.$$

10.9 1) Il est clair que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, donc : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in E^*$.

2) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi_i = 0$. On a donc :

$$\forall P \in E, \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi_i(P) = 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\forall P \in E, \quad \alpha_1 P(0) + \alpha_2 P(1) + \alpha_3 P'(0) + \alpha_4 P'(1) = 0.$$

On remarque que $X^2(X-1)$ est zéro de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

En notant $P_4 = X^2(X-1)$, on a, en effet :

$$P_4(0) = 0, \quad P_4(1) = 0, \quad P_4'(0) = 0, \quad P_4'(1) = 1,$$

d'où l'on déduit $\alpha_4 = 0$.

De même, en notant $P_3 = X(X-1)^2$, on a :

$$P_3(0) = 0, P'_3(0) = 1, P_3(1) = 0, P'_3(1) = 0,$$

d'où : $\alpha_3 = 0$.

Ces deux polynômes nous serviront plus loin.

On obtient alors : $\forall P \in E, \alpha_1 P(0) + \alpha_2 P(1) = 0$.

En appliquant ceci à X , à $X-1$, on déduit :

$$\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0.$$

Ceci montre que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est libre dans E^* .

3) Comme $\dim(E^*) = \dim(E) = 4$, il en résulte que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* .

4) Nous avons déjà obtenu, plus haut, deux polynômes de la base préduale $\mathcal{B}$ de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$.

Ainsi, $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$

$$\text{où } P_3 = X(X-1)^2 = X^3 - 2X^2 + X$$

$$\text{et } P_4 = X^2(X-1) = X^3 - X^2.$$

En notant $P_i = aX^3 + bX^2 + cX + d$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ est inconnu, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \varphi_1(P_1) = 1 \\ \varphi_2(P_1) = 0 \\ \varphi_3(P_1) = 0 \\ \varphi_4(P_1) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} P_1(0) = 1 \\ P_1(1) = 0 \\ P'_1(0) = 0 \\ P'_1(1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \\ a = 2 \\ b = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient : $P_1 = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

De même, après résolution d'un système linéaire ayant les mêmes premiers membres que le précédent, on obtient :

$$P_2 = -2X^3 + 3X^2.$$

10.10

1) Il est immédiat que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, donc : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E^*$.

2) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0$. On a donc :

$$\forall P \in E, \alpha_1 P(1) + \alpha_2 P'(1) + \alpha_3 \int_0^1 P(x) dx = 0.$$

En appliquant cette égalité à $P = 1$, $P = X$, $P = X^2$ successivement, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2} = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{3} = 0. \end{cases}$$

Par combinaison linéaire ou par substitution, on déduit facilement : $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

Ceci montre que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre dans E^* .

3) Comme $\dim(E^*) = \dim(E) = 3$, on conclut que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* .

4) Notons (P_1, P_2, P_3) la base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. En notant, pour $i \in \{1, 2, 3\}$: $P_i = a_{i1} + a_{i2}X + a_{i3}X^2$, on a :

$$\begin{aligned} &\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \varphi_j(P_i) = \delta_{ij} \\ &\iff \begin{cases} \varphi_1(P_1) = 1 \\ \varphi_2(P_1) = 0 \\ \varphi_3(P_1) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi_1(P_2) = 0 \\ \varphi_2(P_2) = 1 \\ \varphi_3(P_2) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi_1(P_3) = 0 \\ \varphi_2(P_3) = 0 \\ \varphi_3(P_3) = 1 \end{cases} \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{notée } A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1/3 \end{pmatrix}}_{\text{notée } M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un calcul d'inverse de matrice carrée d'ordre 3 inversible

$$\text{fournit : } A = M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

On conclut que la base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est la base (P_1, P_2, P_3) définie par :

$$P_1 = -2 + 6X - 3X^2, P_2 = \frac{1}{2} - 2X + \frac{3}{2}X^2, P_3 = 3 - 6X + 3X^2.$$

10.11 Un sens est trivial.

Réciproquement, supposons $\sum_{i=1}^N p_i = 0$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, comme E est de dimension finie et puisque p_i est un projecteur de E , on a : $\text{rg}(p_i) = \text{tr}(p_i)$.

$$\text{D'où : } 0 = \text{tr}\left(\sum_{i=1}^N p_i\right) = \sum_{i=1}^N \text{tr}(p_i) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\text{rg}(p_i)}_{\geq 0}.$$

Il en résulte : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \text{rg}(p_i) = 0$,

donc : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, p_i = 0$.

10.12 a) Puisque

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C),$$

on a :

$$\det(M) \neq 0 \iff (\det(A) \neq 0 \text{ et } \det(C) \neq 0),$$

donc M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.

b) On suppose A et C inversibles, donc, d'après a), M est inversible.

Décomposons M^{-1} en blocs inconnus, de même que pour M :
 $M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. Alors :

$$MM^{-1} = I_{n+p} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} AX + BZ = I_n \\ AY + BT = 0 \\ CZ = 0 \\ CT = I_p \end{cases} \iff \begin{cases} Z = 0 \\ T = C^{-1} \\ AX = I_n \\ AY = -BC^{-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Z = 0 \\ T = C^{-1} \\ X = A^{-1} \\ Y = -A^{-1}BC^{-1} \end{cases} \iff A \text{ inversible}$$

$$\text{On conclut : } M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

10.13 On a :

$$(A(t))^2 = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} = -t^2 I_2,$$

donc :

$$\begin{aligned} e^{A(t)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A(t))^k \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} (A(t))^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} (A(t))^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} (-t^2)^p I_2 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} (-t^2)^p A(t) \\ &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p}}{(2p)!} \right) I_2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) A(1) \\ &= (\cos t) I_2 + (\sin t) A(1). \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } e^{A(t)} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

10.14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts,

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0.$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Supposons $\lambda_i \neq 0$. On a alors :

$$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$

Remarquons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R} - \{a\}$, mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Alors, d'une part f_{a_i} n'est de classe C^2 sur aucun intervalle ouvert contenant a_i , et, d'autre part, d'après l'égalité précédente, par opérations, f_{a_i} est de classe C^2 sur un intervalle ouvert assez petit, contenant a_i , contradiction.

Ceci montre : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$.

On conclut : la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

10.15 a) Récurrence sur $n = \dim(E)$.

- La propriété est évidente pour $n = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour n .

Soit E un sev de $K[X]$, de dimension $n + 1$. Alors, E admet au moins une base $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_{n+1})$. En réordonnant $\mathcal{B}$, on peut se ramener au cas où :

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \deg(P_i) \leq \deg(P_{n+1}).$$

Considérons la famille $\mathcal{C} = (Q_1, \dots, Q_{n+1})$ définie par $Q_{n+1} = P_{n+1}$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$Q_i = \begin{cases} P_i & \text{si } \deg(P_i) < \deg(P_{n+1}) \\ P_i - \alpha_i P_{n+1} & \text{si } \deg(P_i) = \deg(P_{n+1}), \end{cases}$$

où α_i est tel que $\deg(P_i - \alpha_i P_{n+1}) < \deg(P_{n+1})$.

À cet effet, il suffit de prendre pour α_i le quotient des termes de plus haut degré de P_i et P_{n+1} .

Par construction, les polynômes $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ se décomposent linéairement sur $P_1, \dots, P_{n+1}$.

Réciproquement, comme $P_{n+1} = Q_{n+1}$ et que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $P_i = Q_i$ ou $P_i = Q_i + \alpha_i Q_{n+1}$, les polynômes $P_1, \dots, P_{n+1}$ se décomposent linéairement sur $Q_1, \dots, Q_{n+1}$.

Il en résulte : $\text{Vect}(\mathcal{C}) = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Comme $\dim(E) = n + 1$ et que $\mathcal{C}$ engendre E et a $n + 1$ éléments, on conclut que $\mathcal{C}$ est une base de E .

Considérons $F = \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_n)$, qui est un sev de dimension n de $\mathbb{R}[X]$. D'après l'hypothèse de récurrence, F admet au moins une base $\mathcal{F} = (R_1, \dots, R_n)$ formée de polynômes de degrés deux à deux différents.

Notons $\mathcal{G} = (R_1, \dots, R_n, P_{n+1})$.

Comme $E = F \oplus P_{n+1}K[X]$ et que $\mathcal{F}$ est une base de F , il est clair que $\mathcal{G}$ est une base de E .

Enfin, comme : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, R_i \in \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_n)$

et que $(Q_1, \dots, Q_n)$ sont tous de degrés $< \deg(P_{n+1})$, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \deg(R_i) < \deg(P_{n+1}).$$

Finalement, $\mathcal{G}$ est une base de E formée de polynômes de degrés deux à deux différents.

Ceci montre le résultat voulu, par récurrence sur n .

b) Notons $n = \dim(E)$. D'après a), E admet au moins une base formée de polynômes de degrés deux à deux différents. En

réordonnant, E admet au moins une base $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_n)$ telle que :

$$\deg(P_1) < \dots < \deg(P_n).$$

Notons, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$S_i = \begin{cases} P_i + P_n & \text{si } i < n \\ P_n & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Il est clair qu'alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \deg(S_i) = \deg(P_n).$$

Par construction, les polynômes $S_1, \dots, S_n$ se décomposent linéairement sur $P_1, \dots, P_n$.

Réciproquement, comme :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, P_i = \begin{cases} S_i - S_n & \text{si } i < n \\ S_n & \text{si } i = n, \end{cases}$$

$P_1, \dots, P_n$ se décomposent linéairement sur $S_1, \dots, S_n$.

Comme $\dim(E) = n$ et que la famille $\mathcal{C} = (S_1, \dots, S_n)$ a n éléments et engendre E , on conclut que $\mathcal{C}$ est une base de E .

Finalement, E admet au moins une base formée de polynômes de degrés tous égaux.

10.16 1) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$.

L'application $\varphi_A : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow K, X \longmapsto \text{tr}(AX)$

est linéaire car :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in K, \forall X, Y \in \mathbf{M}_n(K), \\ \varphi_A(\alpha X + Y) &= \text{tr}(A(\alpha X + Y)) = \text{tr}(\alpha AX + AY) \\ &= \alpha \text{tr}(AX) + \text{tr}(AY) = \alpha \varphi_A(X) + \varphi_A(Y). \end{aligned}$$

Ainsi : $\varphi_A \in \mathbf{M}_n(K)^*$.

2) Considérons l'application $\theta : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathbf{M}_n(K)^*$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \forall X \in \mathbf{M}_n(K), \theta(A)(X) = \text{tr}(AX).$$

Autrement dit, avec les notations de 1) ci-dessus :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \theta(A) = \varphi_A.$$

• Montrons que θ est linéaire.

Soient $\alpha \in K, A, B \in \mathbf{M}_n(K)$.

On a, pour toute $X \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$\begin{aligned} \theta(\alpha A + B)(X) &= \text{tr}((\alpha A + B)X) \\ &= \text{tr}(\alpha AX + BX) = \alpha \text{tr}(AX) + \text{tr}(BX) \\ &= \alpha \theta(A)(X) + \theta(B)(X) = (\alpha \theta(A) + \theta(B))(X), \end{aligned}$$

donc : $\theta(\alpha A + B) = \alpha \theta(A) + \theta(B)$,

ce qui montre la linéarité de θ .

• Montrons que θ est injective.

Soit $A \in \text{Ker}(\theta)$. On a $\theta(A) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall X \in \mathbf{M}_n(K), \text{tr}(AX) = 0.$$

Notons $A = (a_{ij})_{ij}$. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$.

On a, en utilisant les matrices élémentaires :

$$0 = \text{tr} AE_{ij} = \text{tr} \begin{pmatrix} & a_{1i} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & a_{ni} & \end{pmatrix} = a_{ji},$$

car la colonne numéro i de A a été ainsi déplacée en colonne numéro j .

On a donc : $A = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(\theta) = \{0\}$, donc θ est injective.

• Puisque $\theta : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathbf{M}_n(K)^*$ est linéaire, injective, et que $\mathbf{M}_n(K)$ et $\mathbf{M}_n(K)^*$ sont de dimensions finies égales, on conclut que θ est un isomorphisme de K -ev.

10.17 a) 1^{re} méthode : Utilisation de J_1 :

D'après le cours, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$H = P J_1 Q, \text{ où } J_1 = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix} (1 \quad (0)),$$

$$\text{on a : } H = P \begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix} (1 \quad (0)) Q.$$

$$\text{En notant } U = P \begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix} \text{ et } V = {}^t Q \begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix},$$

on a donc : $U, V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $H = U {}^t V$.

• 2^e méthode : Considération des éléments de H :

Puisque $\text{rg}(H) = 1$, il existe $U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que les colonnes de H soient colinéaires à U , donc il existe $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{aligned} H &= (v_1 U \mid \dots \mid v_n U) \\ &= \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \dots & v_n u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 u_n & \dots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \quad \dots \quad v_n). \end{aligned}$$

$$\text{En notant } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \text{ on a : } H = U {}^t V.$$

2) De 1), on déduit :

$$\begin{aligned} H^2 &= (U {}^t V)(U {}^t V) = U \underbrace{({}^t V U)}_{\in \mathbb{C}} V \\ &= ({}^t V U) U {}^t V = ({}^t V U) H. \end{aligned}$$

En notant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, on a :

$$H = U^t V \\ = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \quad \dots \quad v_n) = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \dots & v_n u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 u_n & \dots & v_n u_n \end{pmatrix}$$

et :

$${}^t V U = (v_1 \quad \dots \quad v_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n,$$

donc : $\text{tr}(H) = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n = {}^t V U$.

On conclut : $H^2 = \text{tr}(H)H$.

b) 1) *1^{re} méthode : Utilisation de la multilinéarité et de l'alternance du déterminant :*

En notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a, par multilinéarité du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(I_n + H) &= \begin{vmatrix} 1 + u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & 1 + u_2 v_2 & & u_2 v_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & 1 + u_n v_n \end{vmatrix} \\ &= \det_{\mathcal{B}}(e_1 + v_1 U, e_2 + v_2 U, \dots, e_n + v_n U) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) + (v_1 \det_{\mathcal{B}}(U, e_2, \dots, e_n) \\ &\quad + \dots + v_n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{n-1}, U)), \end{aligned}$$

car les autres déterminants, contenant deux fois la colonne U , sont nuls.

Et, comme $U = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$, on a, par multilinéarité et alternance du déterminant, pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, U, e_{k+1}, \dots, e_n) \\ = u_k \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_k, \dots, e_n) = u_k. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\det(I_n + H) = 1 + \sum_{k=1}^n v_k u_k = 1 + \text{tr}(H).$$

2) *2^e méthode : Utilisation d'une trigonalisation de H :*

Puisque $H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, d'après le cours, H est trigonalisable.

D'autre part, puisque $\text{rg}(H) = 1$, on a, d'après le théorème du rang : $\dim \text{Ker}(H) = n - \text{rg}(H) = n - 1$, donc 0 est valeur propre de H , d'ordre $\geq n - 1$.

En notant λ la dernière valeur propre de H , on a :

$$\text{tr}(H) = (n - 1) \cdot 0 + 1 \cdot \lambda = \lambda,$$

d'où : $\lambda = \text{tr}(H)$.

Ainsi, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $H = P T P^{-1}$, où T est

de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & \ddots & (*) & \\ \vdots & (0) & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & \text{tr}(H) \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \det(I_n + H) &= \det(I_n + P T P^{-1}) \\ &= \det(P(I_n + T)P^{-1}) = \det(I_n + T) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 0 & \ddots & (*) & \\ \vdots & (0) & 1 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 + \text{tr}(H) \end{vmatrix} = 1 + \text{tr}(H). \end{aligned}$$

c) 1) • D'après le résultat de b), $I_n + H$ est inversible si et seulement si $1 + \text{tr}(H) \neq 0$, c'est-à-dire $\text{tr}(H) \neq -1$.

• Supposons $\text{tr}(H) \neq -1$. Notons $M = I_n + H$.

On a alors $H = M - I_n$, d'où, d'après a) :

$$(M - I_n)^2 = \text{tr}(H)(M - I_n),$$

$$\text{donc : } M^2 - (2 + \text{tr}(H))M = -\underbrace{(1 + \text{tr}(H))}_{\neq 0} I_n.$$

Ceci montre que M est inversible et que :

$$\begin{aligned} M^{-1} &= -\frac{1}{1 + \text{tr}(H)} (M - (2 + \text{tr}(H))I_n) \\ &= -\frac{1}{1 + \text{tr}(H)} \left(- (1 + \text{tr}(H))I_n + H \right) \\ &= I_n - \frac{1}{1 + \text{tr}(H)} H. \end{aligned}$$

2) On a : $A + H = (I_n + H A^{-1})A$

et $\text{rg}(H A^{-1}) \leq \text{rg}(H) = 1$.

Le cas $H A^{-1} = 0$ étant d'étude immédiate, on peut supposer $\text{rg}(H A^{-1}) = 1$, et on peut alors appliquer le résultat de 1) à $H A^{-1}$ à la place de H .

On déduit que $I_n + H A^{-1}$ est inversible et que :

$$(I_n + H A^{-1})^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \text{tr}(H A^{-1})} H A^{-1}.$$

d'où :

$$\begin{aligned} (A + H)^{-1} &= (I_n + H A^{-1})^{-1} A^{-1} \\ &= A^{-1} (I_n + H A^{-1})^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \text{tr}(H A^{-1})} A^{-1} H A^{-1}. \end{aligned}$$

10.18 Puisque A, B, C, M sont des matrices de projecteurs, leurs traces sont égales à leurs rangs et sont des entiers naturels. D'où :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(M) &= \operatorname{tr}(A + \sqrt{2}B + \sqrt{3}C) \\ &= \operatorname{tr}(A) + \sqrt{2}\operatorname{tr}(B) + \sqrt{3}\operatorname{tr}(C),\end{aligned}$$

donc :

$$\underbrace{(\operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(M))}_{\text{noté } \alpha} + \underbrace{\operatorname{tr}(B)}_{\text{noté } \beta} \sqrt{2} + \underbrace{\operatorname{tr}(C)}_{\text{noté } \gamma} \sqrt{3} = 0.$$

On a donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$ et $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$.

Montrons : $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$.

On a en faisant passer $\gamma\sqrt{3}$ dans le second membre, puis en élevant au carré : $\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2} = 3\gamma^2$,

$$\text{d'où, si } \alpha\beta \neq 0 : \sqrt{2} = \frac{3\gamma^2 - \alpha^2 - 2\beta^2}{2\alpha\beta} \in \mathbb{Q},$$

contradiction, car on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Il en résulte : $\alpha\beta = 0$.

De même, on obtient : $\alpha\gamma = 0$ et $\beta\gamma = 0$. Si $\alpha \neq 0$, il en résulte $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, puis $\alpha = 0$, contradiction.

On a donc $\alpha = 0$.

Comme $\beta\gamma = 0$, on a $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

On conclut : $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$.

Ici : $\operatorname{tr}(B) = 0$ et $\operatorname{tr}(C) = 0$,

donc : $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{tr}(B) = 0$ et $\operatorname{rg}(C) = \operatorname{tr}(C) = 0$,

et on conclut : $B = 0$ et $C = 0$.

10.19 D'après le cours, puisque $r = \operatorname{rg}(A)$,

il existe $P \in \mathbf{GL}_m(K)$, $Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que :

$$A = PJ_{n,p,r}Q, \text{ où : } J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que : $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & \\ 0_{n-r,r} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}$,

d'où la décomposition de A en produit :

$$A = \underbrace{P \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}}_{\text{notée } U} \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix} Q}_{\text{notée } V},$$

et on a bien : $U \in \mathbf{M}_{n,r}(K)$, $V \in \mathbf{M}_{r,p}(K)$.

10.20 a) 1) En notant $U_1, \dots, U_p$ les colonnes de U , et $V_1, \dots, V_q$ les colonnes de V , on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect}(U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q) \\ = \operatorname{Vect}(U_1, \dots, U_p) + \operatorname{Vect}(V_1, \dots, V_q),\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Vect}(U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q) \\ \leq \dim \operatorname{Vect}(U_1, \dots, U_p) + \dim \operatorname{Vect}(V_1, \dots, V_q),\end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\operatorname{rg}(M) \leq \operatorname{rg}(U) + \operatorname{rg}(V)$.

2) On applique 1) en transposant :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(M) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}^t \right) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} {}^tR & {}^tS \end{pmatrix} \\ &\leq \operatorname{rg}({}^tR) + \operatorname{rg}({}^tS) = \operatorname{rg}(R) + \operatorname{rg}(S).\end{aligned}$$

3) On combine les deux résultats précédents :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(M) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \leq \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \\ &\leq (\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(C)) + (\operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(D)).\end{aligned}$$

b) D'après a) et puisque M est inversible, on a :

$$n = \operatorname{rg}(M) \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(C).$$

Comme $B \in \mathbf{M}_{m,n-p}(K)$ et $C \in \mathbf{M}_{n-m,p}(K)$, on a, en particulier : $\operatorname{rg}(B) \leq n - p$ et $\operatorname{rg}(C) \leq n - m$,

d'où : $n \leq \operatorname{rg}(A) + (n - p) + (n - m)$,

et on conclut : $\operatorname{rg}(A) \geq m + p - n$.

10.21 1) • On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^p \|A\|_\ell |x_j| = \|A\|_\ell \sum_{j=1}^p |x_j| = \|A\|_\ell \|X\|_1.\end{aligned}$$

d'où : $\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}, \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leq \|A\|_\ell$.

• Puisque $\|A\|_\ell = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$, il existe un indice

$j \in \{1, \dots, p\}$ tel que : $\|A\|_\ell = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Considérons la matrice-colonne $X = E_j$, dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à la ligne numéro j , et qui est égal à 1.

On a : $\|X\|_1 = 1$ et $AX = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, donc :

$$\|AX\|_1 = \sum_{j=1}^p |a_{ij}| = \|A\|_\ell,$$

d'où :
$$\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \|A\|_\ell.$$

Autrement dit, le majorant $\|A\|_\ell$ obtenu ci-dessus, est atteint.

On conclut :
$$\sup_{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \|A\|_\ell.$$

2) • On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \|AX\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| |x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}| \|X\|_\infty \right) \\ &= \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty = \|A\|_c \|X\|_\infty. \end{aligned}$$

d'où : $\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}, \quad \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\|_c.$

• Puisque $\|A\|_c = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right)$, il existe un indice

$i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que : $\|A\|_c = \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j}|.$

Considérons la colonne $X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ définie, pour

tout $j \in \{1, \dots, p\}$, par :

$$\varepsilon_j = \begin{cases} \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} & \text{si } a_{i_0 j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{i_0 j} = 0. \end{cases}$$

On a $\|X\|_\infty = 1$, car chaque terme de X est de module 1, et donc aussi $X \neq 0$.

On a :
$$\|AX\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij} \varepsilon_j| \right) \geq \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j} \varepsilon_j|.$$

Mais, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$: $|a_{i_0 j} \varepsilon_j| = |a_{i_0 j}|$,

comme on le voit en séparant les cas $a_{i_0 j} \neq 0$, $a_{i_0 j} = 0$.

D'où :
$$\|AX\|_\infty \geq \sum_{j=1}^p |a_{i_0 j}| = \|A\|_c.$$

Ainsi, il existe $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que : $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \geq \|A\|_c.$

Autrement dit, compte tenu de l'inégalité obtenue au point précédent, le majorant obtenu au point précédent est atteint.

On conclut :
$$\sup_{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) - \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \|A\|_c.$$

10.22 1) L'inégalité $\|A\|_\mathbb{R} \leq \|A\|_\mathbb{C}$ est immédiate, puisque $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\} \subset \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}.$

2) Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}.$

Il existe $U, V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $X = U + iV$. On a :

$$\begin{aligned} \|X\|_2^2 &= (U + iV)^*(U + iV) = {}^t(U - iV)(U + iV) \\ &= {}^tUU + {}^tVV + i({}^tUV - {}^tVU) = \|U\|_2^2 + \|V\|_2^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et, puisque A, U, V sont réelles :

$$\begin{aligned} \|AX\|_2^2 &= \|A(U + iV)\|_2^2 = \|AU + iAV\|_2^2 \\ &= \|AU\|_2^2 + \|AV\|_2^2 \leq \|A\|_\mathbb{R}^2 \|U\|_2^2 + \|A\|_\mathbb{R}^2 \|V\|_2^2 \\ &= \|A\|_\mathbb{R}^2 (\|U\|_2^2 + \|V\|_2^2) = \|A\|_\mathbb{R}^2 \|X\|_2^2. \end{aligned}$$

Ceci montre :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}, \quad \|AX\|_2 \leq \|A\|_\mathbb{R} \|X\|_2.$$

Par définition de $\|A\|_\mathbb{C}$, il en résulte :

$$\|A\|_\mathbb{C} \leq \|A\|_\mathbb{R}.$$

Finalement, on conclut : $\|A\|_\mathbb{R} = \|A\|_\mathbb{C}.$

10.23 a) 1) Caractère interne de la loi :

Montrons que la loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{G}$.

Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{G}$.

• * On a : $\text{Im}(f_2 \circ f_1) \subset \text{Im}(f_2) = F.$

* Soit $z \in F$. On a : $z \in F = \text{Im}(f_2)$, donc il existe $y \in E$ tel que : $z = f_2(y)$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe $u \in F$, $v \in G$ tels que $y = u + v$. On a alors :

$$z = f_2(y) = f_2(u + v) = f_2(u) + f_2(v).$$

Mais $u \in F = \text{Im}(f_1)$, donc il existe $x \in E$ tel que $u = f_1(x)$, et, d'autre part, $v \in G = \text{Ker}(f_2)$, donc $f_2(v) = 0$.

D'où : $z = f_2(f_1(x)) = f_2 \circ f_1(x) \in \text{Im}(f_2 \circ f_1).$

Ceci montre : $F \subset \text{Im}(f_2 \circ f_1).$

On conclut : $\text{Im}(f_2 \circ f_1) = F.$

• * On a : $\text{Ker}(f_2 \circ f_1) \supset \text{Ker}(f_1) = G.$

* Soit $x \in \text{Ker}(f_2 \circ f_1)$; On a $f_2(f_1(x)) = 0$, donc :

$$f_1(x) \in \text{Im}(f_1) \cap \text{Ker}(f_2) = F \cap G = \{0\},$$

d'où $x \in \text{Ker}(f_1) = G.$

Ceci montre : $\text{Ker}(f_2 \circ f_1) \subset G.$

On conclut : $\text{Ker}(f_2 \circ f_1) = G.$

On a obtenu : $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{G}.$

2) Neutre :

Considérons le projecteur p sur F parallèlement à G . On a :

$$p \in \mathcal{L}(E), \text{Im}(p) = F, \text{Ker}(p) = G, \text{donc : } p \in \mathcal{G}.$$

Soit $f \in \mathcal{G}$.

• Comme : $\forall x \in E, f(x) \in \text{Im}(f) = F$,

on a : $\forall x \in E, p(f(x)) = f(x)$,

ce qui montre : $p \circ f = f$.

• On a : $\forall x \in E, x - p(x) \in \text{Ker}(p) = G = \text{Ker}(f)$,

donc : $\forall x \in E, f(x - p(x)) = 0$,

c'est-à-dire : $\forall x \in E, f(x) = f(p(x))$,

ce qui montre : $f = f \circ p$.

Ainsi, p est neutre pour $\circ$ dans $\mathcal{G}$.

3) Associativité :

Il est connu que la loi $\circ$ est associative.

4) Symétries :

Soit $f \in \mathcal{G}$. Puisque F est un supplémentaire de $G = \text{Ker}(f)$ dans E , d'après le théorème d'isomorphisme, l'application

$$f' : F \longrightarrow \text{Im}(f) = F, x \longmapsto f(x)$$

est un isomorphisme de K -ev.

Considérons $g : E \longrightarrow E, x \longmapsto f'^{-1}(p(x))$,

où p a été défini plus haut.

• Il est clair que g est linéaire.

On a : $\text{Im}(g) = f'^{-1}(p(E)) = f'^{-1}(F) = F$.

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(g) &\iff g(x) = 0 \iff f'^{-1}(p(x)) = 0 \\ &\iff p(x) = 0 \iff x \in G, \end{aligned}$$

donc : $\text{Ker}(g) = G$.

Ceci montre : $g \in \mathcal{G}$.

• On a, pour tout $x \in E$:

$$(f \circ g)(x) = f(f'^{-1}(p(x))) = f'(f'^{-1}(p(x))) = p(x),$$

donc : $f \circ g = p$.

• Soit $x \in E$.

Comme $f(x) \in \text{Im}(f) = F$, on a : $p(f(x)) = f(x)$, puis :

$$g(f(x)) = f'^{-1}(p(f(x))) = f'^{-1}(f(x)).$$

Mais $f = f \circ p$, donc :

$$f'^{-1}(f(x)) = f'^{-1}(f(p(x))) = f'^{-1}(f'(p(x))) = p(x).$$

Ainsi : $g \circ f = p$.

Ceci montre : $g \circ f = f \circ g = p$,

donc f admet g pour symétrique dans $(\mathcal{G}, \circ)$.

Finalement : $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe.

b) • Pour tout $f \in \mathcal{G}$, comme $\text{Im}(f) = F$ et $\text{Ker}(f) = G$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où M est la matrice de l'endomorphisme f' induit par f sur F .

De plus :

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}(f) = \dim(F) = p.$$

Il en résulte $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, donc $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.

On peut donc considérer l'application

$$\theta : \mathcal{G} \longrightarrow H, f \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

• Réciproquement, considérons l'application φ qui, à une matrice A de H , associe l'endomorphisme f de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

Avec ces notations, puisque $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, on a : $\text{Im}(f) = F$ et $\text{Ker}(f) = G$, donc : $f \in \mathcal{G}$.

• Il est clair que θ et φ sont des applications réciproques l'une de l'autre, donc sont bijectives.

• De plus, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \forall f_1, f_2 \in \mathcal{G}, \theta(f_2)\theta(f_1) &= \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_2 M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta(f_2 \circ f_1). \end{aligned}$$

Ainsi, θ est un isomorphisme de $(\mathcal{G}, \circ)$ sur $(H, \cdot)$.

• Comme $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe, par transport de structure, $(H, \cdot)$ est un groupe.

Finalement, l'application $\theta : f \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{G}, \circ)$ sur le groupe $(H, \cdot)$.

10.24 1) Supposons $f \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. Il existe

$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$ tel que $f = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i$. On a alors, pour tout

$$x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) : f(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i(x) = 0,$$

et donc : $x \in \text{Ker}(f)$.

Ceci montre : $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(f)$.

2) Réciproquement, supposons :

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(f).$$

Notons $r = \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. Quitte à permuter $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, on peut supposer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre et que $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_p$ se décomposent linéairement sur $\varphi_1, \dots, \varphi_r$.

Pour tout $k \in \{r+1, \dots, p\}$, d'après I) appliqué à φ_k à la place de f , on a : $\bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(\varphi_k)$.

Il en résulte : $\bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i)$.

D'après le cours, puisque $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre dans E^* , la forme linéaire f , qui s'annule sur $\bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(\varphi_i)$, est combinaison linéaire de $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, donc :

$$f \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p).$$

10.25 (i) $\implies$ (ii) :

Il suffit d'appliquer (i) à $P = \prod_{k=1}^n (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_{-1}^1 \left(\prod_{k=1}^n (x - a_k) \right) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{P(a_k)}_{=0} = 0.$$

(ii) $\implies$ (i) :

On suppose : $\int_{-1}^1 \left(\prod_{k=1}^n (x - a_k) \right) dx = 0$.

Notons : $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \int_{-1}^1 P(x) dx$,

et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto P(a_k).$$

Il est clair que $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des éléments du dual de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'autre part, d'après le cours sur l'interpolation polynomiale, puisque $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts, la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.

Montrons, en raisonnant par l'absurde, que la famille $(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée. Supposons $(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre. Alors, cette famille de $n+1$ éléments est libre dans $\mathbb{R}_n[X]^*$, qui est de dimension $n+1$, donc cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$. D'après le cours, il existe une base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, prédual de $(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

On a donc : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \varphi_k(P_0) = 0$,

c'est-à-dire : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P_0(a_k) = 0$.

Comme $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$P_0 = \alpha \prod_{k=1}^n (X - a_k)$. D'après l'hypothèse (ii) :

$$\varphi(P_0) = \alpha \varphi \left(\prod_{k=1}^n (X - a_k) \right) = 0.$$

Mais, d'autre part : $\varphi(P_0) = 1$, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre que la famille $(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée.

Comme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre, il en résulte qu'il existe

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\varphi = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k$, c'est-à-dire :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(a_k),$$

ce qui montre (i).

10.26 a) Notons, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$:

$$\varphi_j : E \longrightarrow \mathbb{K}, P \longmapsto P^{(j)}(a).$$

Il est clair que : $\forall j \in \{0, \dots, n\}, \varphi_j \in E^*$.

Montrons que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

• Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j = 0$.

On a alors :

$$\forall P \in E, 0 = \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j \right)(P) = \sum_{j=0}^n \alpha_j P^{(j)}(a).$$

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$.

En appliquant ceci à $P_k = (X - a)^k \in E$, puisque les $P^{(j)}(a)$ sont tous nuls si $j \neq k$ et que $P_k^{(k)}(a) = k! \neq 0$, on déduit :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \alpha_k = 0.$$

Ceci montre que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est libre.

• Comme $\dim(E^*) = \dim(E) = n+1$ et que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est libre dans E^* , on conclut que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

b) Soit $\varphi \in E^*$ fixée quelconque. Puisque $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , il existe $(\gamma_0, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ unique tel que :

$$\varphi = \sum_{i=0}^n \gamma_i \varphi_i.$$

Puisque $\left((X - a)^q \right)_{0 \leq q \leq n-k}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-k}[X]$, on a, par linéarité :

$$(i) \quad \forall P \in \mathbb{K}_{n-k}[X], \varphi((X - a)^k P) = 0$$

$$\iff \forall q \in \{0, \dots, n-k\}, \varphi((X - a)^k (X - a)^q) = 0$$

$$\iff \forall r \in \{k, \dots, n\}, \varphi((X - a)^r) = 0$$

$$\iff \forall r \in \{k, \dots, n\}, \sum_{i=0}^n \gamma_i \varphi_i((X - a)^r) = 0.$$

Mais :

$$\forall r \in \{k, \dots, n\}, \forall i \in \{0, \dots, n\},$$

$$\varphi_i((X - a)^r) = ((X - a)^r)^{(i)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < r \text{ ou } i > r \\ r! & \text{si } i = r. \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \Longleftrightarrow \forall r \in \{k, \dots, n\}, r! \gamma_r = 0 \\
 & \Longleftrightarrow \forall r \in \{k, \dots, n\}, \gamma_r = 0 \\
 & \Longleftrightarrow \varphi \in \text{Vect}(\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}) \\
 & \Longleftrightarrow \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{K}^k, \varphi = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \varphi_i \\
 & \Longleftrightarrow \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{K}^k, \\
 & \forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i P^{(i)}(a).
 \end{aligned}$$

10.27 a) Supposons :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^p (\varphi_i(x))^2 = \sum_{j=1}^q (\psi_j(x))^2.$$

• Montrons : $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{j=1}^q \text{Ker}(\psi_j).$

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i).$

On a donc : $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \varphi_i(x) = 0,$

d'où : $\sum_{i=1}^p (\varphi_i(x))^2 = 0,$

puis, d'après l'hypothèse : $\sum_{j=1}^q \underbrace{(\psi_j(x))^2}_{\geq 0} = 0.$

Il en résulte : $\forall j \in \{1, \dots, q\}, \psi_j(x) = 0,$

donc : $x \in \bigcap_{j=1}^q \text{Ker}(\psi_j).$

Ceci montre : $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) \subset \bigcap_{j=1}^q \text{Ker}(\psi_j).$

Vu les rôles symétriques des deux familles $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et $(\psi_1, \dots, \psi_q)$, on a aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité :

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{j=1}^q \text{Ker}(\psi_j).$$

• D'après l'exercice 10.24, on a donc, pour toute $\varphi \in E^*$:

$$\begin{aligned}
 \varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) & \Longleftrightarrow \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(\varphi) \\
 & \Longleftrightarrow \bigcap_{j=1}^q \text{Ker}(\psi_j) \subset \text{Ker}(\varphi) \Longleftrightarrow \varphi \in \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_q),
 \end{aligned}$$

ce qui montre : $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_q).$

b) Le résultat de a) ne subsiste pas lorsque le corps $\mathbb{R}$ est remplacé par $\mathbb{C}$, comme le montre l'exemple suivant :

$$E = \mathbb{C}, \quad p = 2, \quad q = 1,$$

$$\varphi_1 : x \mapsto x, \quad \varphi_2 : x \mapsto ix, \quad \psi_1 : x \mapsto 0.$$

Dans cet exemple :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^p (\varphi_i(x))^2 = x^2 + (ix)^2 = 0 = \sum_{j=1}^q (\psi_j(x))^2,$$

et cependant :

$$\text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) = \text{Vect}(\varphi_1) \neq \{0\} = \text{Vect}(\psi_1).$$

10.28 Soit H un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$. Raisonnons par l'absurde : supposons : $H \cap \mathbf{GL}_n(K) = \emptyset.$

1) Montrons que H contient toutes les matrices nilpotentes.

Soit $N \in \mathbf{M}_n(K)$, nilpotente.

Raisonnons par l'absurde : supposons $N \notin H.$

D'après le cours, puisque $N \notin H$ et que H est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$, on a : $\mathbf{M}_n(K) = H \oplus KN.$

En particulier, il existe $M \in H$ et $\alpha \in K$ tels que : $I_n = M + \alpha N.$ Alors : $M = I_n - \alpha N.$

Puisque N est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$ d'où :

$$\begin{cases} (I_n - \alpha N) \left(\sum_{p=0}^{k-1} (\alpha N)^p \right) = I_n - \alpha^k N^k = I_n \\ \left(\sum_{p=0}^{k-1} (\alpha N)^p \right) (I_n - \alpha N) = I_n - \alpha^k N^k = I_n, \end{cases}$$

d'où : $I_n - \alpha N \in \mathbf{GL}_n(K).$

Ainsi : $M \in H \cap \mathbf{GL}_n(K)$, contradiction.

Ceci montre que H contient toutes les matrices nilpotentes.

2) Considérons les matrices suivantes de $\mathbf{M}_n(K)$:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & (0) & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que N_1 et N_2 sont nilpotentes.

D'après 1) : $N_1 \in H$ et $N_2 \in H$, puis, comme H est un sev : $N_1 + N_2 \in H.$

$$\text{Mais : } N_1 + N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & (0) & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

qui est inversible, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre que tout hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$ rencontre $\mathbf{GL}_n(K)$.

10.29 1) Cas $n = 1$:

Il est évident que la réponse, pour $n = 1$, est oui.

2) Cas $n = 2$:

Rappelons la formule suivante, que l'on peut montrer par un calcul élémentaire, ou bien par application du théorème de Cayley et Hamilton :

$$\forall M \in \mathbf{M}_2(K), \quad M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0 \quad (1).$$

Soient $A, B \in \mathbf{M}_2(K)$ telles que $(AB)^2 = 0$.

Alors, AB n'est pas inversible, d'où, d'après (1) appliquée à $M = AB$: $-\text{tr}(AB)AB = 0$ (2).

Si $AB = 0$, alors :

$$(BA)^2 = (BA)(BA) = B(\underbrace{AB})A = 0.$$

Supposons $AB \neq 0$.

On a alors, d'après (2) : $\text{tr}(AB) = 0$.

D'où, en appliquant (1) à $M = BA$, et puisque l'on a $\text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) = 0$ et $\det(BA) = \det(AB) = 0$:

$$(BA)^2 - \text{tr}(BA)BA + \det(BA)I_2 = 0,$$

et donc : $(BA)^2 = 0$.

La réponse, pour $n = 2$, est donc : oui.

3) Cas $n \geq 3$:

Donnons un contreexemple pour le cas $n = 3$, ce contreexemple se généralisant à l'ordre n , pour $n \geq 3$, en complétant partout par des 0.

$$\text{Pour } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a :}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{puis : } (AB)^2 = 0 \text{ et } (BA)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

La réponse, pour $n \geq 3$, est donc : non.

10.30 Faisons apparaître $AB - XI_p$ et $BA - XI_q$ dans des produits par blocs de matrices carrées d'ordre $p + q$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -XI_p & A \\ -B & I_q \end{pmatrix}}_{\text{notée } M} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - XI_p & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & -XI_q \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -XI_p & A \\ -B & I_q \end{pmatrix}}_M = \begin{pmatrix} -XI_p & A \\ 0 & BA - XI_q \end{pmatrix}.$$

En, passant aux déterminants, on obtient :

$$\begin{cases} \det(M)1^p 1^q = \det(AB - XI_p)1^q \\ 1^p (-X)^q \det(M) = (-X)^p \det(BA - XI_q), \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} (-X)^q \det(AB - XI_p) &= (-X)^q \det(M) \\ &= (-X)^p \det(BA - XI_q), \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat demandé.

10.31 a) On a, par exemple :

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ est triangulaire, à éléments diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc cette matrice est inversible, d'où, d'après le cours :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

D'autre part, il est clair (par la méthode de Gauss, par exemple)

$$\text{que } \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \text{rg}(C).$$

$$\text{On conclut : } \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \text{rg}(C).$$

b) On a, à l'aide de produits par blocs :

$$\begin{pmatrix} I_n & R \\ -S & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ S & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + RS & R \\ 0 & I_p \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & R \\ -S & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -R \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -S & I_p + SR \end{pmatrix}.$$

Les matrices carrées $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ S & I_p \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_n & -R \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ sont inversibles (comme en I)), donc, d'après le cours :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & R \\ -S & I_p \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n + RS & R \\ 0 & I_p \end{pmatrix},$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & R \\ -S & I_p \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -S & I_p + SR \end{pmatrix}.$$

D'après a) et le résultat analogue pour des matrices triangulaires inférieures par blocs (se démontrant comme en a), ou par transposition à partir du résultat de a)), on a :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n + RS & R \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = p + \operatorname{rg}(I_n + RS),$$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -S & I_p + SR \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(I_p + SR).$$

On conclut : $p + \operatorname{rg}(I_n + RS) = n + \operatorname{rg}(I_p + SR)$.

10.32 a) Notons $a = \operatorname{rg}(A)$, $b = \operatorname{rg}(B)$. D'après le cours, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $R, S \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que : $A = PJ_{n,a}Q$, $B = RJ_{p,b}S$, où

$$J_{n,a} = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K), J_{p,b} = \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_p(K).$$

On a alors, en faisant des produits de matrices diagonales par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PJ_{n,a}Q & 0 \\ 0 & RJ_{p,b}S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n,a} & 0 \\ 0 & J_{p,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ sont inversibles.

On a donc :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} J_{n,a} & 0 \\ 0 & J_{p,b} \end{pmatrix} = a + b = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B).$$

b) On suppose que les matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont équivalentes. D'après a), on a alors : $2 \operatorname{rg}(A) = 2 \operatorname{rg}(B)$, donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$, et on conclut que les matrices A et B sont équivalentes.

c) On suppose que A et B sont équivalentes et que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ sont équivalentes. On a alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$, et, d'après a) : $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(U) = \operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(V)$.

Il s'ensuit : $\operatorname{rg}(U) = \operatorname{rg}(V)$, donc les matrices U et V sont équivalentes.

10.33 Il suffit de trouver un couple $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $u \circ f \circ v = p$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G . Notons $r = \operatorname{rg}(f)$, $d = \dim(F) = \operatorname{rg}(p)$.

Le K -ev E , de dimension finie, admet au moins une base $\mathcal{B}$. Notons A, P_1 les matrices respectives de f, p dans $\mathcal{B}$.

D'après le cours, il existe $P, Q, R, S \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que $A = PJ_rQ$ et $P_1 = RJ_dS$, où :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K), J_d = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

Soient $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ quelconque. Notons U, V les matrices respectives de u, v dans $\mathcal{B}$.

On a :

$$u \circ f \circ v = p \iff UAV = P_1 \iff UPJ_rQV = RJ_dS \iff (R^{-1}UP)J_r(QVS^{-1}) = J_d.$$

Choisissons : $U = RJ_rP^{-1}$ et $V = Q^{-1}J_dS$.

On a alors : $(R^{-1}UP)J_r(QVS^{-1}) = J_rJ_rJ_d = J_d$, car $d \leq r$.

Ainsi, il existe $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ convenant.

10.34 1^{re} méthode : Recherche de l'inverse par résolution d'un système :

Cherchons l'éventuel inverse de M sous forme de matrice décomposée en blocs, dans le même format que pour M . Soit

$N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. On a :

$$MN = I_{n+p} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} AX + BZ = I_n & (1) \\ AY + BT = 0 & (2) \\ CX + DZ = 0 & (3) \\ CY + DT = I_p & (4) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) ont pour inconnues X et Z , les équations (2) et (4) ont pour inconnues Y et T .

Puisque A est inversible :

$$\begin{cases} (2) \\ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} Y = -A^{-1}BT \\ (D - CA^{-1}B)T = I_p \end{cases} \quad (5).$$

Si $D - CA^{-1}B$ n'est pas inversible, l'équation (5) n'a pas de solution (en T), donc M n'est pas inversible.

Supposons $D - CA^{-1}B$ inversible.

Alors :

$$\begin{cases} (2) \\ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} Y = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ T = (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}.$$

D'autre part, puisque A est inversible :

$$\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases} \iff \begin{cases} X + A^{-1}BZ = A^{-1} \\ CX + DZ = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X + A^{-1}BZ = A^{-1} \\ (D - CA^{-1}B)Z = -CA^{-1} [L_2 \leftarrow L_2 - CL_1] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Z = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ X = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \end{cases}.$$

On conclut que la matrice carrée M est inversible si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est inversible et que, dans ce cas, en tant $E = (D - CA^{-1}B)^{-1}$, on a :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BECA^{-1} & -A^{-1}BE \\ -ECA^{-1} & E \end{pmatrix}.$$

2^e méthode : Utilisation d'une factorisation par blocs :

On remarque (cf. aussi l'exercice 10.38) :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_p \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}^M \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices autour de M sont triangulaires et à termes diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc ces deux matrices sont inversibles. Il en résulte que M est inversible si et seulement si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ est inversible, ce qui revient, puisque A est supposée inversible, à ce que $D - CA^{-1}B$ soit inversible.

On a alors, en notant $E = (D - CA^{-1}B)$ pour la commodité :

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}^{-1}$$

donc :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_p \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BECA^{-1} & -A^{-1}BE \\ -ECA^{-1} & E \end{pmatrix}.$$

10.35 I) • On a $E \subset \mathbf{M}_{n,p}(K)$ et $0 \in E$.

• On a, pour tout $\alpha \in K$ et tous $X, Y \in E$:

$$A(\alpha X + Y)B = \alpha \underbrace{AXB}_{=0} + \underbrace{AYB}_{=0} = 0,$$

donc $\alpha X + Y \in E$.

On conclut : E est un K -ev.

2) D'après le cours, il existe des matrices $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $R, S \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que : $A = PJ_{m,n,a}Q$ et $B = RJ_{p,q,b}S$, où on a noté : $a = \text{rg}(A)$, $b = \text{rg}(B)$,

$$J_{m,n,a} = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m,n}(K),$$

$$J_{p,q,b} = \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,q}(K).$$

On peut supposer, par exemple $a \leq b$, et décomposer en neuf blocs :

$$J_{m,n,a} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{p,q,b} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, quelconque. On a :

$$X \in E \iff AXB = 0$$

$$\iff (PJ_{m,n,a}Q)X(RJ_{p,q,b}S) = 0$$

$$\iff J_{m,n,a}(QXR)J_{p,q,b} = 0.$$

Décomposons QXR en blocs :

$$QXR = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{pmatrix}.$$

On obtient, par produit par blocs de trois matrices :

$$J_{m,n,a}(QXR)J_{p,q,b} = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $X \in E \iff (U_1 = 0 \text{ et } V_1 = 0)$.

Ainsi, l'application $X \mapsto QXR$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur le K -ev des matrices décomposées en neuf blocs et telles que les deux premiers blocs soient nuls.

Il en résulte : $\dim(E) = np - ab$.

Le résultat est identique lorsque $a \geq b$.

On conclut : $\dim(E) = np - \text{rg}(A) \text{rg}(B)$.

10.36 Notons $r = \text{rg}(A) < n$ et :

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{r+1}(K),$$

$$N_r = \begin{pmatrix} M_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

Il est clair que M_r est nilpotente, donc N_r est nilpotente.

Comme $\text{rg}(A) = r = \text{rg}(N_r)$, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que : $A = PN_rQ$. On a alors :

$$A = (\underbrace{PQ}_{\text{notée } B})(\underbrace{Q^{-1}N_rQ}_{\text{notée } C}).$$

Alors, B, C sont dans $\mathbf{M}_n(K)$, B est inversible car P et Q le sont, et C est nilpotente, car :

$$C^{r+1} = (Q^{-1}N_rQ)^{r+1} = Q^{-1}N_r^{r+1}Q = Q^{-1}0Q = 0.$$

Le couple (B, C) convient.

10.37 On a l'égalité matricielle suivante, par produit par blocs, pour D inversible et $CD = DC$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

En passant aux déterminants, on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det(D) \det(D^{-1}) = \det(AD - BC),$$

$$\text{donc : } \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

10.38 On a l'égalité matricielle suivante, par produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & -I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$,

sont triangulaires, à termes diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc ces deux matrices sont inversibles.

Il en résulte, d'après le cours :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}.$$

D'après l'exercice 10.32 :

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix} &= \text{rg}(A) + \text{rg}(CA^{-1}B - D) \\ &= n + \text{rg}(CA^{-1}B - D). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) = n &\iff n = n + \text{rg}(CA^{-1}B - D) \\ &\iff \text{rg}(CA^{-1}B - D) = 0 \\ &\iff CA^{-1}B - D = 0 \iff D = CA^{-1}B. \end{aligned}$$

10.39 a) Soit $t \in [0; 1]$.

Puisque $\|tA\| = |t| \|A\| \leq \|A\| < 1$, d'après le cours, la série $\sum_{k \geq 0} (tA)^k$ converge dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, et on a :

$$(I_n - tA) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (tA)^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (tA)^k \right) (I_n - tA) = I_n,$$

$$\text{donc } I_n - tA \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et : } (I_n - tA)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (tA)^k.$$

b) L'application $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \det(I_n - tA)$ est continue sur l'intervalle $[0; 1]$, et, d'après a) :

$$\forall t \in [0; 1], f(t) \neq 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe strict fixe sur $[0; 1]$.

Comme $f(0) = \det(I_n) = 1$, on conclut :

$$\forall t \in [0; 1], f(t) > 0.$$

En particulier : $\det(I_n - A) = f(1) > 0$.

10.40 Récurrence sur p .

• La propriété est évidente pour $p = 1$.

• Supposons-la vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \dots, F_{p+1}$ des sev de E tels que $\bigcup_{i=1}^{p+1} F_i = E$. Si $F_{p+1} = E$, alors le résultat voulu est acquis.

Supposons donc $F_{p+1} \neq E$. Il existe alors $x \in E$ tel que $x \notin F_{p+1}$. Comme $E = \bigcup_{i=1}^{p+1} F_i$, on a alors $x \in \bigcup_{i=1}^p F_i$. Si $\bigcup_{i=1}^p F_i = E$, alors, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $F_i = E$, donc, a fortiori, il existe $i \in \{1, \dots, p+1\}$ tel que $F_i = E$, d'où le résultat voulu.

Supposons donc $\bigcup_{i=1}^p F_i \neq E$.

Il existe alors $y \in E$ tel que $y \notin \bigcup_{i=1}^p F_i$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, y \notin F_i.$$

L'idée consiste maintenant à remarquer que la droite affine passant par y et dirigée par x ne rencontre les F_i qu'en un nombre fini de points.

Puisque K est infini, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+2} \in K$ deux à deux distincts. Les $p+2$ vecteurs $y + \lambda_k x$, pour $k \in \{1, \dots, p+2\}$ sont dans $E = \bigcup_{i=1}^{p+1} F_i$. Il existe donc $i \in \{1, \dots, p+1\}$ et $k, \ell \in \{1, \dots, p+2\}$ distincts, tels que : $y + \lambda_k x \in F_i$ et $y + \lambda_\ell x \in F_i$.

$$\text{Comme } y = \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_k} (\lambda_\ell (y + \lambda_k x) - \lambda_k (y + \lambda_\ell x)) \in F_i,$$

on a nécessairement $i \notin \{1, \dots, p\}$, donc $i = p+1$.

$$\text{Comme } x = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_\ell} (y + \lambda_k x) - (y + \lambda_\ell x) \in F_i,$$

on a nécessairement $i \neq p+1$.

On aboutit à une contradiction.

Ceci montre : $\exists i \in \{1, \dots, p+1\}, F_i = E$,

et établit le résultat voulu, par récurrence sur p .

10.41 a) On a, pour tout $h \in G$:

$$p \circ h = \frac{1}{n} \left(\sum_{g \in G} g \right) \circ h = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ h = \frac{1}{n} \sum_{k \in G} k = p,$$

car l'application $g \mapsto g \circ h$ est une permutation de G .

b) On déduit :

$$p^2 = p \circ \left(\frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} p \circ g = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} p = \frac{1}{n} np = p,$$

donc p est un projecteur de E .

c) 1) Soit $x \in \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e)$.

On a alors : $\forall g \in G, (g - e)(x) = 0$,

c'est-à-dire : $\forall g \in G, g(x) = x$,

$$\text{d'où : } p(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} x = \frac{1}{n} nx = x,$$

et donc : $x \in \text{Im}(p)$.

Ceci montre : $\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) \subset \text{Im}(p)$.

2) Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(p)$. Puisque p est un projecteur, on a alors : $p(x) = x$. D'où :

$$\forall g \in G, g(x) = g(p(x)) = g \circ p(x).$$

Mais, comme en a) (de l'autre côté), on a :

$$\forall g \in G, g \circ p = p.$$

D'où : $\forall g \in G, g(x) = p(x) = x$,

et donc : $\forall g \in G, x \in \text{Ker}(g - e)$.

Ceci montre : $\forall g \in G, \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(g - e)$,

et donc : $\text{Im}(p) \subset \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e)$.

On conclut à l'égalité : $\text{Im}(p) = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e)$.

d) D'après c) et puisque p est un projecteur en dimension finie :

$$\begin{aligned} \dim \left(\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - e) \right) &= \dim \text{Im}(p) = \text{rg}(p) \\ &= \text{tr}(p) = \text{tr} \left(\frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}(g). \end{aligned}$$

Remarque : Il en résulte que $\sum_{g \in G} \text{tr}(g)$ est un entier naturel multiple de n .

10.42 a) Il est clair, par exemple par développement par rapport à une rangée et par récurrence, que

$$P : x \mapsto \det(xA + B)$$

est une application polynomiale, de degré $\leq n$.

b) 1) Notons $r = \text{rg}(A)$. D'après le cours, il existe $Q, R \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = QJ_rR$, où on a noté $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{M}_n(\mathbb{C})$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \det(xA + B) = \det(xQJ_rR + B) \\ &= \det(Q(xJ_r + Q^{-1}BR^{-1})R) \\ &= \det(Q) \det(xJ_r + Q^{-1}BR^{-1}) \det(R). \end{aligned}$$

En notant $Q^{-1}BR^{-1} = (\alpha_{ij})_{ij}$, la matrice carrée $xJ_r + Q^{-1}BR^{-1}$ est à termes constants (vis-à-vis de x), sauf les r premiers de la diagonale, qui sont les $x + \alpha_{ii}$.

En développant ce déterminant, il est clair qu'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré $\leq r$.

On a donc : $\deg(P) \leq r = \text{rg}(A)$.

2) On a, pour tout $x \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{1}{x^n} P(x) = \det \left(\frac{1}{x} (xA + B) \right) = \det \left(\frac{1}{x} B + A \right).$$

Notons $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto \det(yB + A)$.

D'après a), appliqué à (B, A) au lieu de (A, B) , S est une fonction polynomiale de degré $\leq \text{rg}(B)$.

En notant $P = a_0 + \dots + a_n X^n$, on a, pour tout $y \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} y^n P \left(\frac{1}{y} \right) &= y^n \left(a_0 + \frac{a_1}{y} + \dots + \frac{a_n}{y^n} \right) \\ &= a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n, \end{aligned}$$

donc le degré de la fonction polynomiale $y \mapsto y^n P \left(\frac{1}{y} \right)$ est :

$n - \text{val}(P)$, où $\text{val}(P)$ désigne la valuation de P .

On déduit : $n - \text{val}(P) \leq \text{rg}(B)$,

et on conclut : $\text{val}(P) \geq n - \text{rg}(B)$.

10.43 a) On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$(e - f) \circ g_p = \frac{1}{p} (e - f) \circ (e + f + \dots + f^{p-1}) = \frac{1}{p} (e - f^p).$$

Comme $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est supposée bornée, il en résulte :

$$\frac{1}{p} (e - f^p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

On conclut : $(e - f) \circ g_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$.

b) • Puisque $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ qui est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, d'après le cours sur la compacité, la suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ admet au moins une valeur d'adhérence.

• Soit h une valeur d'adhérence de $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Il existe donc une extractrice σ telle que : $g_{\sigma(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} h$.

* D'après a), et par suite extraite :

$$(e - f) \circ g_{\sigma(p)} \xrightarrow[p_{\infty}]{} 0.$$

Mais, puisque E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ l'est aussi, donc, par continuité des opérations dans $\mathcal{L}(E)$:

$$(e - f) \circ g_{\sigma(p)} \xrightarrow[p_{\infty}]{} (e - f) \circ h.$$

On a donc : $(e - f) \circ h = 0$, c'est-à-dire : $f \circ h = h$.

Une récurrence immédiate permet de déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k \circ h = h.$$

* On alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} g_p \circ h &= \frac{1}{p}(e + f + \dots + f^{p-1}) \circ h \\ &= \frac{1}{p}(h + f \circ h + \dots + f^{p-1} \circ h) \\ &= \frac{1}{p}(h + \dots + h) = \frac{1}{p}ph = h. \end{aligned}$$

En particulier : $\forall p \in \mathbb{N}^*, g_{\sigma(p)} \circ h = h$.

En passant à la limite lorsque l'entier p tend vers l'infini, on déduit : $h \circ h = h$.

Ceci montre que toute valeur d'adhérence de $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est un projecteur.

c) • Soient h, k deux valeurs d'adhérence de la suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Il existe une extractrice σ telle que $g_{\sigma(p)} \xrightarrow[p_{\infty}]{} h$,

et il existe une extractrice τ telle que $g_{\tau(p)} \xrightarrow[p_{\infty}]{} k$.

On a vu plus haut : $\forall p \in \mathbb{N}^*, g_p \circ h = h$,

donc, en particulier : $\forall p \in \mathbb{N}^*, g_{\tau(p)} \circ h = h$.

En passant à la limite lorsque l'entier p tend vers l'infini, on déduit : $k \circ h = h$.

De même, on montre : $k \circ h = k$.

On déduit : $h = k$.

On conclut que la suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ admet au plus une valeur d'adhérence.

• La suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans un compact, puisqu'elle est bornée et à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ qui est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et cette suite admet une seule valeur d'adhérence. D'après l'exercice 1.22, on conclut que $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge.

D'après b), finalement, $(g_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un projecteur.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

CHAPITRE **11**

Plan

Les méthodes à retenir	428
Énoncés des exercices	431
Du mal à démarrer ?	441
Corrigés	445

Thèmes abordés dans les exercices

- Détermination des vp et des SEP d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée
- Calcul ou étude du polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie, du polynôme caractéristique d'une matrice carrée
- Étude de la diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie ou d'une matrice carrée, obtention d'une diagonalisation
- Résolution d'équations matricielles
- Obtention de renseignements sur une matrice carrée satisfaisant une équation
- Détermination de la limite de la suite des puissances d'une matrice carrée
- Détermination de sommes de séries matricielles convergentes liées à la série géométrique ou à la série de l'exponentielle
- Obtention et utilisation du polynôme minimal
- Étude de la trigonalisabilité d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie ou d'une matrice carrée, obtention d'une trigonalisation.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions de : valeur propre, spectre, vecteur propre, sous-espace propre
- Définition du polynôme caractéristique, lien avec les valeurs propres, coefficients remarquables
- Définition de la diagonalisabilité, d'une diagonalisation
- CNS de diagonalisabilité faisant intervenir le polynôme caractéristique et les dimensions des SEP
- CS de diagonalisabilité
- Définition de la trigonalisabilité, d'une trigonalisation
- CNS de trigonalisabilité portant sur le polynôme caractéristique, cas de $\mathbb{C}$
- Notion de polynôme d'endomorphisme, de polynôme de matrice carrée, leur manipulation
- Définition de polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée
- Inclusion du spectre dans l'ensemble des zéros d'un polynôme annulateur

- CNS de diagonalisabilité par existence d'un polynôme annulateur scindé simple
- Théorème de Cayley et Hamilton
- Théorème de décomposition des noyaux
- Notion de polynôme minimal.

Les méthodes à retenir

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :

ev pour : espace vectoriel

sev pour : sous-espace vectoriel

vp pour : valeur propre

$\vec{v}_p$ pour : vecteur propre

SEP pour : sous-espace propre

K désigne un corps commutatif.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sauf mention contraire, n désigne un entier ≥ 1 .

**Pour déterminer
les valeurs propres
et les vecteurs propres
d'un endomorphisme f
d'un K -ev E ,
ou d'une matrice carrée A de $M_n(K)$**

Essayer l'une des trois méthodes suivantes :

1) Revenir à la définition, c'est-à-dire résoudre l'équation $f(x) = \lambda x$, d'inconnues $\lambda \in K$, $x \in E - \{0\}$.

À cet effet, on pourra raisonner par équivalences successives, ou par analyse-synthèse.

➡ **Exercice 11.5.**

2) Déterminer les valeurs propres de f , par exemple en formant le polynôme caractéristique χ_f de f (si E est de dimension finie), chercher les zéros de χ_f , puis déterminer les sous-espaces propres associés.

➡ **Exercices 11.3, 11.5, 11.38.**

Si E est un ev de polynômes, lors de la résolution de $(f(P) = \lambda P \text{ et } P \neq 0)$, envisager le degré de P , ou des polynômes P simples, ou des diviseurs simples de P .

➡ **Exercices 11.4, 11.29.**

Si E est un ev de fonctions, envisager l'intervention d'une équation différentielle.

➡ **Exercice 11.7.**

3) Faire intervenir la notion de polynôme annulateur, si f ou A satisfait une équation simple.

➡ **Exercices 11.5, 11.18.**

Pour déterminer une ou deux valeurs propres manquantes, pour une matrice carrée A

Penser à utiliser $\text{tr}(A)$ et éventuellement $\text{tr}(A^2)$.

➡ **Exercice 11.8.**

Pour étudier les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice $A \in \mathbf{M}(\mathbb{C})$ dont les coefficients interviennent explicitement

Traduire l'égalité $AX = \lambda X$, où $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ par un système d'égalités portant sur λ et sur les termes de X et, si nécessaire, faire intervenir la notion de module d'un nombre complexe, souvent à l'aide d'inégalités.

➡ **Exercice 11.28.**

Pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(K)$

Former $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ et calculer le déterminant en essayant de privilégier les factorisations.

➡ **Exercices 11.5, 11.10, 11.24, 11.38, 11.57 à 11.59.**

Essayer de se ramener, lorsque c'est possible, à des déterminants de matrices triangulaires par blocs.

➡ **Exercice 11.31.**

Pour étudier les valeurs propres réelles d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

Penser éventuellement à faire intervenir des arguments issus de l'analyse, en particulier le théorème des valeurs intermédiaires, sur le polynôme caractéristique de A ou sur un polynôme annulateur de A .

➡ **Exercices 11.18, 11.43, 11.45, 11.58.**

Pour déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice-compagnon

Effectuer une transformation du genre :

$$L_n \leftarrow L_n + \lambda L_{n-1} + \cdots + \lambda^{n-1} L_1.$$

➡ **Exercice 11.58.**

Pour étudier la diagonalisabilité d'une matrice carrée A et éventuellement la diagonaliser, dans un exemple numérique pouvant comporter des paramètres

Essayer de former le polynôme caractéristique χ_A , en déduire les valeurs propres de A , et, pour chaque valeur propre λ de A , déterminer une base de $\text{SEP}(A, \lambda)$. La matrice carrée A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(K)$ si et seulement si : χ_A est scindé sur K et, pour chaque valeur propre λ de A , $\dim \text{SEP}(A, \lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ dans χ_A . Dans ce cas, on aura alors $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale des valeurs propres de A , dans un ordre arbitraire, et P est la matrice obtenue en mettant côte à côte les vecteurs d'une base de vecteurs propres de A associés, dans l'ordre, aux valeurs propres. Lors du calcul de χ_A , essayer de factoriser au maximum.

➡ **Exercices 11.10 à 11.12, 11.16, 11.24**

Se rappeler aussi le théorème spectral, vu dans un autre chapitre : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

➡ **Exercices 11.8, 11.13, 11.33, 11.44.**

Pour étudier la diagonalisabilité d'une matrice carrée A

- Lorsque les valeurs propres et les vecteurs propres sont calculables, appliquer la CNS de diagonalisabilité.

➡ Exercices 11.10 à 11.12, 11.24, 11.33 a).

- Lorsque A satisfait une équation, appliquer la CNS de diagonalisabilité faisant intervenir un polynôme annulateur.

➡ Exercices 11.36 b), 11.39, 11.40.

Pour résoudre une équation matricielle, par exemple $B^2 = A$, où A est donnée et B inconnue

Essayer d'utiliser, si c'est possible, une diagonalisation de A , pour se ramener à une équation $C^2 = D$, où D est diagonale et C inconnue. Avant de résoudre $C^2 = D$, on peut souvent préciser la forme de C , en utilisant le fait que C et D commutent.

➡ Exercices 11.13, 11.32, 11.33, 11.52 à 11.54.

Pour étudier le commutant d'une matrice A de $M_n(K)$

Essayer, lorsque A est diagonale ou diagonalisable, de se ramener à des calculs sur les éléments ou à des calculs par blocs

➡ Exercice 11.72.

Pour étudier une équation matricielle dans un contexte de polynômes de matrices carrées

Essayer de faire intervenir une diagonalisation ou une trigonalisation.

➡ Exercices 11.23, 11.48, 11.49, 11.70, 11.71.

Pour résoudre une question faisant intervenir la trigonalisabilité

Essayer d'utiliser la CNS de trigonalisabilité : A est trigonalisable dans $M_n(K)$ si et seulement si χ_A est scindé sur K .

➡ Exercice 11.48.

Pour étudier une matrice carrée satisfaisant une équation

Penser à faire intervenir la notion de polynôme annulateur.

➡ Exercices 11.17 à 11.20, 11.43, 11.44, 11.50, 11.51.

Pour étudier une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui annule un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non scindé sur $\mathbb{R}$

Essayer d'utiliser une diagonalisation ou une trigonalisation de A dans $M_n(\mathbb{C})$, puis de revenir aux réels.

➡ Exercices 11.43, 11.44.

Pour obtenir des renseignements, par exemple sur la trace ou le déterminant, d'une matrice A de $M_n(K)$, lorsqu'on dispose d'un polynôme P annulateur de A

Utiliser : le spectre de A est inclus dans l'ensemble des zéros de P dans K .

➡ Exercices 11.16, 11.43, 11.44.

Pour étudier des polynômes de matrices carrées, lorsqu'intervient la notion de polynômes premiers entre eux

Penser à utiliser le théorème de Bezout.

➡ Exercice 11.75.

Pour calculer les puissances d'une matrice carrée

Essayer d'utiliser une diagonalisation ou une trigonalisation de A .

➡ Exercices 11.14, 11.15, 11.23.

Énoncés des exercices

11.1 Condition sur les coefficients d'une matrice carrée pour qu'un vecteur donné soit vecteur propre

Déterminer tous les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre.

11.2 Condition sur les coefficients d'une matrice carrée pour que deux vecteurs donnés soient vecteurs propres

Trouver tous les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ admette $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres.

11.3 Exemples de détermination des éléments propres de matrices triangulaires

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, et de

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

11.4 Spectre d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application $P \mapsto f(P) = X(P(X) - P(X-1))$.

- Vérifier que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev E .
- Former la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E .
- Déterminer noyau, rang, image, spectre de f .

11.5 Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de

$$f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

11.6 Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par :

$$f(P) = X(X-1)P(-1) + (X+1)(X-1)P(0) + (X+1)XP(1).$$

- Vérifier que f est linéaire.
- Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f , en considérant la matrice A de l'endomorphisme induit par f sur E , et en utilisant a) 2).

11.7 Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions

On note $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère l'application $T : E \longrightarrow E$, $f \mapsto g$, où g est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f'(x) - xf(x)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme surjectif de E .

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .

11.8 Exemple de détermination du spectre d'une matrice carrée

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer les valeurs propres de A_n .

b) CNS sur n pour que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n) \subset \mathbb{Z}$?

11.9 Non-diagonalisabilité de matrices élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que E_{ij} , matrice élémentaire de $\mathbf{M}_n(K)$, n'est pas diagonalisable.

11.10 Exemple d'étude de diagonalisabilité

CNS sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 3-a & -5+a & a \\ -a & a-2 & a \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ soit diagonalisable ?

11.11 Exemple d'étude de diagonalisabilités

Étudier, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.

11.12 Exemple de condition de diagonalisabilité

CNS sur $(a, \dots, f) \in \mathbb{C}^6$ pour que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$?

11.13 Exemple d'étude d'une équation matricielle

Trouver au moins une matrice $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ telle que : $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.14 Exemple de détermination de la limite de la suite des puissances d'une matrice carrée

On note $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.

11.15 Exemple de calcul de $\text{ch } A$

On note $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A . b) Calculer $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} A^{2p}$.

11.16 Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions de dimension finie

On note $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_1(x) = \operatorname{ch} x, \quad f_2(x) = \operatorname{sh} x, \quad f_3(x) = x \operatorname{ch} x, \quad f_4(x) = x \operatorname{sh} x,$$

et on note $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E . Quelle est la dimension de E ?

b) Montrer que $D : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev E et exprimer $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

c) 1) Calculer A^2, A^4 . (On pourra utiliser une écriture en blocs.)

2) En déduire : $\forall f \in E, f^{(4)} - 2f'' + f = 0$.

d) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de D .

Est-ce que D est diagonalisable ?

11.17 Étude d'une équation matricielle

Trouver toutes les matrices $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^3 + 2A = 3I_n$.

11.18 Étude d'une équation matricielle

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $2A^3 + 3A^2 - 6A - I_3 = 0$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

11.19 Exemple d'équation portant sur un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 3, $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose : $f^4 = f^2$ et $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp}(f)$. Montrer que f est diagonalisable.

11.20 Étude d'une équation matricielle avec transposition

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 + {}^tM = 2I_n$.

Démontrer que M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

11.21 Polynômes minimaux de A et ${}^tA$

Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer que A et ${}^tA$ ont le même polynôme minimal.

11.22 Polynôme minimal imposé

Le polynôme $P = X^2 + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$, de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, de $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$?

11.23 Utilisation de la trigonalisation pour l'étude d'une matrice nilpotente

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer : $A^n = 0$.

11.24 Exemple de trigonalisation

On note $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculer χ_A . b) Est-ce que A est diagonalisable ?

c) Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11.25 Expression de $\det(e^A)$

Démontrer : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

11.26 Liens entre les spectres de $f \circ g$ et $g \circ f$

Soient E un K -ev, $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer : $\text{Sp}(f \circ g) \cup \{0\} = \text{Sp}(g \circ f) \cup \{0\}$.

b) Établir que, si E est de dimension finie, alors : $\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$.

c) Donner un exemple d'ev E (non de dimension finie) et d'endomorphismes f, g de E tels que :
 $\text{Sp}(f \circ g) \neq \text{Sp}(g \circ f)$.

11.27 Inégalité sur le rayon spectral d'une matrice carrée

Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire une norme sur l'ev $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$, appelé *rayon spectral* de A .

Démontrer : $\rho(A) \leq \|A\|$.

11.28 Valeurs propres d'une matrice stochastique

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\left(\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} \in [0; 1] \right) \text{ et } \left(\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \right).$$

a) Montrer que 1 est valeur propre de A .

b) Établir : $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \exists i \in \{1, \dots, n\}, |\lambda - a_{ii}| \leq 1 - a_{ii}$,

et conclure : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n B'(a_{ii}, 1 - a_{ii})$.

11.29 Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

On note $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \longmapsto (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

11.30 Spectre d'un endomorphisme d'un espace de fonctions

On note E le $\mathbb{R}$ -ev des applications $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues et de limite nulle en $+\infty$, et T l'endomorphisme de E qui, à $f \in E$, associe l'application

$T(f) : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x+1)$. Déterminer le spectre de T .

11.31 Polynôme caractéristique d'une matrice par blocs

Soient $A \in \mathbf{M}_n(K), M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(K)$.

Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A .

11.32 Exemple de résolution d'équation matricielle

On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation $M^3 - 2M = A$, d'inconnue $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

11.33 Exemple de résolution d'équation matricielle

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A .

b) Résoudre l'équation $(1) \quad M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

11.34 Exemple d'étude de diagonalisabilité

On note $A_n = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$a_{ij} = 1 \text{ si } (i = 1 \text{ ou } j = n), \quad a_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

11.35 Exemple de recherche d'anticommutant

Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$ diagonalisable telle que : $\forall (\lambda, \mu) \in (\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A))^2, \lambda + \mu \neq 0$.

Montrer, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$: $AM + MA = 0 \iff M = 0$.

11.36 Étude de matrices vérifiant une équation

Soient $k \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_n(K)$ tels que : $A^{k+1} = A^k$.

a) Montrer : $\forall q \in \mathbb{N}, A^{k+q} = A^k$. b) Établir que A^k est diagonalisable.

c) Démontrer que, pour tout $p \in \{1, \dots, k-1\}$, $A^k - A^p$ est nilpotente.

11.37 Matrices symétriques complexes non diagonalisables

a) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques complexes d'ordre 2 non diagonalisables.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, il existe une matrice symétrique complexe d'ordre n non diagonalisable.

11.38 Matrices de permutation circulaire, déterminant circulaire

a) Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & (0) & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Déterminer les valeurs propres de J_n et montrer que J_n est diagonalisable.

b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, le déterminant circulant

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

11.39 Diagonalisabilité à partir d'une hypothèse sur des images

Soient E un K -ev de dimension finie, $a, b \in K$ tels que $a \neq b$, $e = \text{Id}_E$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\text{Im}(f - ae) \cap \text{Im}(f - be) = \{0\}$. Montrer que f est diagonalisable.

11.40 Étude de diagonalisabilité pour un endomorphisme sur un espace de matrices carrées

Soient $A, B, C \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que : $B^2 = B$, $C^2 = C$, $BAC = 0$, $CB = 0$, $\text{tr}(A) \neq 0$.

On note $f : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathbf{M}_n(K)$, $M \longmapsto \text{tr}(M)A + \text{tr}(A)BMC$.

- Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(K)$.
- Démontrer que f est diagonalisable.

11.41 Involutions qui anticommulent, en dimension 4

Soient $A, B \in \mathbf{M}_4(\mathbb{C})$ telles que : $A^2 = B^2 = I_4$ et $AB + BA = 0$.

- En calculant $\text{tr}(BAB)$ de deux façons, montrer : $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$.
- Montrer que A et B sont diagonalisables, et déterminer les valeurs propres de A et B , ainsi que leurs ordres de multiplicité.
- On note $C = iAB$.
 1) Vérifier : $C^2 = I_4$, $AC + CA = 0$, $BC + CB = 0$.
 2) En déduire les valeurs propres de iAB et $\text{tr}(AB)$.

11.42 Spectres disjoints

Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset \quad (ii) \quad \chi_A(B) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

11.43 Exemple de propriété des solutions d'une équation matricielle

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Démontrer : $\det(A) > 0$.

11.44 Exemple de propriété des solutions d'une équation matricielle

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 - 4A^2 + 6A = 0$. Montrer : $n \leq \text{tr}(e^A) \leq 1,2n$.

11.45 Polynôme minimal imposé

Existe-t-il $A \in \mathbf{M}_7(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal soit $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$?

11.46 Exemples de détermination du polynôme minimal d'un endomorphisme

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- On note $D : E \longrightarrow E$, $P \longmapsto P'$. Déterminer π_D .
- On note $T : E \longrightarrow E$, $P \longmapsto P(X + a)$. Déterminer π_T .

11.47 Polynômes caractéristiques de A et de $P(A)$

Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $P \in K[X]$. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé, et

$$\text{on note } \chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k).$$

Montrer : $\chi_{P(A)} = (-1)^n \prod_{k=1}^n (X - P(\lambda_k))$, et donc, $\chi_{P(A)}$ est scindé.

11.48 Lien entre f nilpotent et $\text{Sp}(f) = \{0\}$

Soient E un K -ev de dimension finie ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que, si f est nilpotent, alors $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

b) On suppose ici $K = \mathbb{C}$. Montrer que, si $\text{Sp}(f) = \{0\}$, alors f est nilpotent.

11.49 Étude d'une équation matricielle

Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. On suppose : $A^p(A - \text{I}_n)^q = 0$ et $\text{tr}(A) = 0$. Montrer : $A^p = 0$.

11.50 Étude d'une équation matricielle

Trouver toutes les matrices $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^5 = A^2$ et $\text{tr}(A) = n$.

11.51 Une équation matricielle qui n'a pas de solution

Montrer que l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, n'a pas de solution.

(On pourra utiliser l'exercice 11.23.)

11.52 Exemple d'équation matricielle

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X^2 = A$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

11.53 Exemple d'équation matricielle

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, et $P = X^5 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Résoudre l'équation $P(M) = A$, d'inconnue $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

11.54 Exemple d'équation matricielle faisant intervenir la comatrice

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\text{com}(A) = \text{I}_n - A$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

11.55 Polynômes caractéristiques de AB et de BA

Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

11.56 Étude de $\det(A\bar{A} + \text{I}_n)$

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Établir : $\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$. (On pourra utiliser l'exercice 11.55.)

b) En déduire : $\det(A\bar{A} + \text{I}_n) \in \mathbb{R}$.

11.57 Exemple de calcul de polynôme caractéristique et d'étude de diagonalisabilité

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $A_n = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{ij} = 1 \text{ si } i \geq j \text{ ou } (i = 1 \text{ et } j = n), \quad a_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique χ_{A_n} de A_n .

b) Démontrer que, dans $]1; +\infty[$, A_n admet une valeur propre et une seule.

À cet effet, on pourra considérer $\varphi :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \lambda \longmapsto (\lambda - 1)^n \lambda^{-n+2} - 1$.

11.58 Polynôme caractéristique d'une matrice-compagnon

$$\text{Soient } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

- a) Former χ_A .
- b) On suppose ici : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_k \in]0; +\infty[$.
- Démontrer que, dans $]0; +\infty[, A$ admet une valeur propre unique.

11.59 Exemple de calcul de polynôme caractéristique et d'étude de spectre

$$\text{On note, pour } (n, z) \in (\mathbb{N} - \{0, 1\}) \times \mathbb{C} : A(n, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & z \\ 1 & \ddots & \ddots & (0) & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & (1) & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

- a) Calculer le polynôme caractéristique χ_n de $A(n, z)$.
- b) Montrer : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A(n, z)) \subset B'(0, \text{Max}(2, 1 + \sqrt{|z|} 2^{\frac{n}{2}-1}))$.

11.60 Étude de diagonalisabilité pour une matrice par blocs

- a) On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable et diagonaliser M .
- b) Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$.
- 1) Montrer que B est semblable à C .
- 2) Établir que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

11.61 Décomposition d'un endomorphisme diagonalisable en combinaison linéaire de projecteurs

Soient E un K -ev de dimension finie, $e = \text{Id}_E, f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On note, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f), E_\lambda = \text{SEP}(f, \lambda)$, et p_λ le projecteur sur E_λ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(f) - \{\lambda\}} E_\mu$.

- a) Montrer : $\forall A \in K[X], \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} A(\lambda) p_\lambda = A(f)$. En particulier : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda p_\lambda = f$.
- b) Établir : $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \exists L \in K[X], p_\lambda = L(f)$.

11.62 Minoration de la dimension du commutant d'une matrice carrée

On note $\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -ev des matrices triangulaires supérieures de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathbf{T}'_{n,s}(\mathbb{C})$ le sev de $\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ formé des matrices de $\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ à termes diagonaux tous nuls. On note, pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$: $f_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), M \longmapsto AM - MA$ et $C(A) = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) ; f_A(M) = 0\}$.

a) Vérifier, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $f_A \in \mathcal{L}(\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))$, et, pour toute $A \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$, $f_A(\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})) \subset \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$.

b) En déduire : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \dim(C(A)) \geq n$.

11.63 Étude de diagonalisabilité

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\text{rg}(A) = 2$, $\text{tr}(A) = 0$, $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

11.64 Liens entre les diagonalisabilités de A et de A^2 , pour A inversible

Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.

11.65 Étude de diagonalisabilité pour une matrice par blocs

Soient $A, B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que M est diagonalisable si et seulement si AB est diagonalisable. (On pourra utiliser l'exercice 11.64.)

11.66 Étude de diagonalisabilité pour une matrice par blocs

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{GL}_p(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p+q}(K)$.

a) Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) En déduire que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

11.67 Endomorphismes tels que $f \circ g - g \circ f = e$

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev distinct de $\{0\}$, $e = \text{Id}_E$, $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que : $f \circ g - g \circ f = e$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

b) En déduire : $\forall P \in \mathbb{K}[X], f \circ P(g) - P(g) \circ f = P'(g)$.

c) Démontrer que f et g n'admettent pas de polynôme minimal et que E n'est pas de dimension finie.

11.68 Détermination des polynômes P tels que $P(A)$ soit nilpotente

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ soit nilpotente.

11.69 Liens entre les qualités de $f - \lambda e$ et de $P(f) - P(\lambda) e$

Soient E un $\mathbb{C}$ -ev, $e = \text{Id}_E$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{C}[X]$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que, si $f - \lambda e$ n'est pas injective (resp. n'est pas surjective), alors $P(f) - P(\lambda)e$ n'est pas injective (resp. n'est pas surjective).

b) On suppose ici $\deg(P) \geq 1$. Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Montrer que, si $P(f) - \mu e$ n'est pas injective (resp. n'est pas surjective), alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = P(\lambda)$ et que $f - \lambda e$ ne soit pas injective (resp. ne soit pas surjective).

11.70 Exemple de déterminant d'une somme de matrices

Soient $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, telles que $AN = NA$. Montrer :

$$\det(A + N) = \det(A).$$

11.71 Égalité des polynômes caractéristiques de e^{AB} et e^{BA}

Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer : $\chi_{e^{AB}} = \chi_{e^{BA}}$. On pourra utiliser l'exercice 11.55.

11.72 Commutant et bicommutant d'une matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$ diagonalisable. On note λ_k ($1 \leq k \leq p$) les valeurs propres de A , ω_k ($1 \leq k \leq p$) l'ordre de multiplicité de λ_k , $D = \text{diag}(\lambda_k I_{\omega_k})$, $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $A = PDP^{-1}$. On note $C(A)$ le commutant de A dans $\mathbf{M}_n(K)$:

$$C(A) = \{X \in \mathbf{M}_n(K) ; AX = XA\},$$

et $C'(A)$ le commutant de $C(A)$ dans $\mathbf{M}_n(K)$:

$$C'(A) = \{B \in \mathbf{M}_n(K) ; \forall X \in C(A), XB = BX\}.$$

a) Déterminer $C(A)$ et préciser $\dim(C(A))$.

b) Déterminer $C'(A)$ et préciser $\dim(C'(A))$.

11.73 Diagonalisation simultanée

Soient E un K -ev de dimension finie $n \geq 1$, I un ensemble non vide, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E , commutant deux à deux, c'est-à-dire tels que :

$$\forall (i, j) \in I^2, f_i \circ f_j = f_j \circ f_i.$$

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle tous les f_i sont diagonalisables (on pourra faire une récurrence forte sur n).

11.74 Conséquence d'une diagonalisation simultanée

Soient E un K -ev de dimension finie, M l'ensemble des $f \in \mathcal{L}(E)$ tels qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ (dépendant de f) tel que f^k soit diagonalisable. Démontrer que, pour tout $(f, g) \in M^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$, on a : $f \circ g \in M$. (On pourra utiliser l'exercice 11.73.)

11.75 CNS pour que χ_f soit irréductible

Soient E un K -ev de dimension finie ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que χ_f est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si les seuls sev de E stables par f sont $\{0\}$ et E .

11.76 Étude de matrices proportionnelles semblables

a) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, si A et $2A$ sont semblables, alors A est nilpotente. (On pourra utiliser l'exercice 11.48.)

b) Donner un exemple de $\mathbb{C}$ -ev (non de dimension finie) et de $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que : f n'est pas nilpotent et il existe $g \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $2f = g \circ f \circ g^{-1}$.

11.77 Réunion compacte de spectres

Soient E une partie compacte de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $S = \bigcup_{A \in E} \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Démontrer que S est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Du mal à démarrer ?

11.1 Revenir à la définition d'un vecteur propre.

11.2 1^{re} méthode : Utilisation de la définition :

Revenir à la définition d'un vecteur propre, en traduisant que les familles (AU, U) et (AV, V) sont liées.

2^e méthode : Utilisation d'une matrice de passage :

En notant $P = (U \quad V)$, traduire que $P^{-1}AP$ est diagonale.

11.3 Revenir à la définition. Dans cet exercice, les matrices A et B semblent peu différentes par leurs écritures, mais A ne sera pas diagonalisable et B sera diagonalisable.

11.4 a) Immédiat.

b) Calculer $f(X^j)$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$.

c) Remarquer que A est triangulaire supérieure, à termes diagonaux tous $\neq 0$ sauf le premier.

11.5 1^{re} méthode : Étude matricielle :

Former la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

2^e méthode : Utilisation d'un polynôme annulateur :

Remarquer que f^2 est l'identité.

11.6 a) 1) Immédiat.

2) • On obtient : $\text{Ker}(f) = (X+1)X(X-1)\mathbb{R}[X]$.

• Montrer : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

b) • 0 est vp de f et SEP $(f, 0)$ est déjà obtenu.

• Montrer que, si $(\lambda, P) \in \mathbb{R}^* \times (\mathbb{R}[X] - \{0\})$ vérifie $f(P) = \lambda P$, alors $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

11.7 a) • Vérifier : $T \in \mathcal{L}(E)$.

• Pour montrer que T est surjectif, utiliser le théorème de Cauchy et Lipschitz sur les ED linéaires du premier ordre.

b) Revenir à la définition et résoudre une ED1.

11.8 Remarquer d'abord que A_n est symétrique réelle.

a) • Montrer que 0 est vp et préciser $\dim \text{SEP}(A_n, 0)$.

• Il manque (au plus) deux valeurs propres λ_1, λ_2 . Utiliser A_n^2 , $\text{tr}(A_n)$, $\text{tr}(A_n^2)$.

b) Traduire $\sqrt{2n-3} \in \mathbb{N}$.

11.9 Raisonner par l'absurde.

11.10 Former le polynôme caractéristique de $M(a)$ et déterminer $\dim \text{SEP}(A, -2)$.

11.11 Former le polynôme caractéristique de M . Discuter selon le signe de $ab - ac + bc$.

11.12 Les valeurs propres sont évidentes. Déterminer les dimensions des SEP associés à 0, 1.

11.13 1^{re} méthode : Réduction :

Diagonaliser A , $A = PDP^{-1}$, et chercher X sous la forme $X = P\Delta P^{-1}$, Δ diagonale.

2^e méthode : Utilisation d'une particularité de A :

En notant $I = I_3$ et U la matrice dont chaque terme est égal à 1, chercher X sous la forme $X = (a-b)I + bU$.

11.14 Diagonaliser A , en déduire A^n , puis $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.

11.15 a) Méthode du cours.

b) Utiliser la diagonalisation obtenue en a) et faire apparaître des DSE(0) de fonctions usuelles.

11.16 a) Montrer que $\mathcal{B}$ est libre, par exemple en utilisant des $DL_3(0)$.

b) Calculer Df_i pour $1 \leq i \leq n$.

c) 1) En notant $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, remarquer

$$A = \begin{pmatrix} J & I \\ 0 & J \end{pmatrix},$$

2) Calculer $A^4 - 2A^2 + I_4$.

d) D'après c), $X^4 - 2X^2 + 1$ est annulateur de f .

11.17 Utiliser la notion de polynôme annulateur.

11.18 Utiliser la notion de polynôme annulateur. Étudier les variations de ce polynôme.

11.19 Séparer en deux cas selon que 0 est ou n'est pas vp de f .

11.20 Exprimer ${}^tM$, puis $M = {}^t({}^tM)$, pour obtenir un polynôme annulateur de M , de degré 4.

11.21 Montrer que π_A est annulateur de ${}^tA$, puis utiliser la définition de π_{tA} .

11.22 Donner des exemples de matrices, dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$, dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, ayant P pour polynôme minimal. Raisonner par l'absurde pour le cas de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

11.23 Trigonaliser A dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, et étudier la forme des puissances successives d'une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont tous nuls.

11.24 a) Immédiat.

b) Raisonner par l'absurde.

c) Noter $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, f l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ représenté par A dans $\mathcal{B}$, et chercher une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que f soit représenté dans $\mathcal{C}$ par T .

11.25 Utiliser une trigonalisation de A dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

11.26 a) Montrer : $\text{Sp}(f \circ g) - \{0\} \subset \text{Sp}(g \circ f)$, en revenant aux définitions.

b) 1^{re} méthode : Étude des caractères bijectifs :

Séparer en cas selon que f ou g est bijectif ou non.

2^e méthode : Utilisation des polynômes caractéristiques :

Utiliser l'exercice 11.55.

c) Envisager, par exemple, $E = C^\infty([0; 1], \mathbb{R})$ et $f : u \mapsto u'$, $g : v \mapsto g(v)$, où $g(v)$ est la primitive de g s'annulant en 0.

11.27 Soient $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $X \in \text{SEP}(A, \lambda) - \{0\}$.

Considérer la matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ obtenue en répétant X côte à côte, n fois.

11.28 a) Calculer AU , où $U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est à termes tous égaux à 1.

b) Soient $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. Montrer, en passant aux éléments :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |\lambda - a_{ii}| |x_i| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij} |x_j|,$$

et considérer i tel que : $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

11.29 a) Immédiat.

b) Montrer que, si P est $\vec{\text{vp}}$ de f , alors $\deg(P) = 3$, puis noter $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

11.30 1) Soit $\lambda \in \text{Sp}(T)$, $f \in E - \{0\}$ telle que $T(f) = \lambda f$. Calculer $f(x + n)$ pour $x \in [0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. Déduire : $\lambda \in]-1; 1[$.

2) Réciproquement, montrer que, pour tout $\lambda \in]-1; 1[$, il existe $f \in E - \{0\}$ telle que $T(f) = \lambda f$, en construisant f par intervalles successifs.

11.31 Former le polynôme caractéristique χ_M de M , en manipulant des blocs. On peut commencer par multiplier des colonnes par $1 - X$.

11.32 1) Commencer par diagonaliser A , $A = PDP^{-1}$.

2) Si M convient, alors M commute avec A , et en déduire la forme de N telle que $M = PNP^{-1}$. Résoudre ensuite $N^3 - 2N = D$.

11.33 a) Méthode du cours.

b) Remarquer que, si une matrice M vérifie (1), alors M commute avec A . Déterminer la forme des matrices commutant avec D , matrice diagonale obtenue en a).

11.34 Écrire la matrice A_n .

Raisonner par l'absurde, en remarquant que les valeurs propres de A_n sont 0 et 1.

11.35 Avec les notations usuelles, $A = PDP^{-1}$.

Pour $M \in \mathbf{M}_n(K)$, noter $N = P^{-1}MP$ et résoudre $DN + ND = 0$.

11.36 a) Récurrence sur q .

b) Montrer : $(A^k)^2 = A^k$ et utiliser un polynôme annulateur.

c) Calculer $(A^k - A^p)^k$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

11.37 a) Noter $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et traduire que A admet une vp double et que le SEP associé est de dimension 1.

b) Compléter un exemple obtenu en a) par des termes tous nuls.

11.38 a) Former le polynôme caractéristique de J_n , par exemple en développant par rapport à la première colonne, puis faire intervenir les racines n -èmes de 1 dans $\mathbb{C}$.

b) Remarquer que la matrice envisagée se décompose linéairement sur $I_n, J_n, J_n^2, \dots, J_n^{n-1}$.

11.39 Montrer : $\forall x \in E, (f - ae) \circ (f - be)(x) = 0$, puis utiliser la notion de polynôme annulateur.

11.40 a) Immédiat.

b) Calculer $f^2(M)$ pour toute $M \in \mathbf{M}_n(K)$, et en déduire un polynôme annulateur de f .

11.41 a) Utiliser la formule :

$$\forall X, Y \in \mathbf{M}_4(\mathbb{C}), \quad \text{tr}(XY) = \text{tr}(YX).$$

b) Utiliser la notion de polynôme annulateur et l'ordre (4) des matrices envisagées.

c) 1) Immédiat.

2) Le couple (A, C) vérifie les mêmes hypothèses que le couple (A, B) .

11.42 Utiliser une factorisation de χ_A , qui est scindé sur $\mathbb{C}$.

11.43 Utiliser la notion de polynôme annulateur et faire intervenir une diagonalisation dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

11.44 Utiliser la notion de polynôme annulateur et faire intervenir une diagonalisation dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

11.45 Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et raisonner par l'absurde.

11.46 Dans cet exercice, ne pas confondre le rôle d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ auquel on applique, par exemple, D ou T , et le rôle d'un polynôme annulateur de D ou de T .

a) Montrer : $D^n = 0$ et $D^{n-1} \neq 0$.

b) Montrer : $(T - \text{Id}_E)^n = 0$ et $(T - \text{Id}_E)^{n-1} \neq 0$.

11.47 Utiliser une trigonalisation de A dans $\mathbf{M}_n(K)$.

11.48 a) Supposer $f^k = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\text{Sp}(f) \subset \{0\} \text{ et } 0 \in \text{Sp}(f).$$

b) Réciproquement, si $K = \mathbb{C}$ et $\text{Sp}(f) = \{0\}$, utiliser une trigonalisation de f , et étudier la forme des puissances successives d'une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont nuls.

11.49 Utiliser la notion de polynôme annulateur.

Montrer que $A - I_n$ est inversible.

11.50 Utiliser la notion de polynôme annulateur et utiliser une trigonalisation de A dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

11.51 Raisonner par l'absurde et utiliser l'exercice 11.23.

11.52 Commencer par déterminer les matrices qui commutent avec A .

11.53 1) Diagonaliser A , $A = QDQ^{-1}$.

2) Montrer que, si M convient, alors M commute avec A , d'où la forme de N telle que $M = QNQ^{-1}$. Résoudre des équations du 5^{ème} degré dans $\mathbb{R}$.

11.54 Utiliser la formule : $\det(A)I_n = A^t \text{com}(A)$, et la notion de polynôme annulateur.

11.55 Envisager, par exemple, les produits matriciels :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0 & -\lambda I_n \end{pmatrix}$$

et passer aux déterminants.

11.56 a) Calculer $\overline{\chi_{AA}}(\lambda)$, en utilisant l'exercice 11.55.

b) Envisager $\lambda = -1$.

11.57 a) Former le polynôme caractéristique de A_n , par exemple en développant par rapport à la première ligne.

b) Étudier les variations de φ .

11.58 a) Utiliser : $L_n \longleftarrow L_n + \lambda L_{n-1} + \dots + \lambda^{n-1} L_1$.

b) Étudier les variations de : $\varphi : \lambda \mapsto \frac{(-1)^n \chi_A(\lambda)}{\lambda^n}$.

11.59 a) Former le polynôme caractéristique χ_n de $A(n, z)$ en développant, par exemple, par rapport à la première ligne.

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A(n, z))$. Supposer $|\lambda| \geq 2$, noter, pour la commodité, $\mu = |\lambda - 1|$ et obtenir une inégalité sur μ , puis sur $|\lambda|$.

11.60 a) Immédiat.

b) 1) Remarquer que B se déduit de C comme M se déduit de

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ dans a).}$$

2) Séparer en deux sens.

11.61 a) Soit $x \in E$.

On a $x = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(x)$, et déduire $A(f)(x)$.

b) Noter $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont deux à deux distincts. Utiliser le cours sur l'interpolation polynomiale.

11.62 a) La linéarité de f_A est immédiate.

Pour l'inclusion, examiner les termes diagonaux de $f_A(T)$ pour $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$.

b) Utiliser une trigonalisation de A dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $A = PTP^{-1}$.

1) Montrer que $\theta : B \mapsto P^{-1}BP$ est un isomorphisme d'ev de $C(A)$ sur $C(T)$.

2) Appliquer le théorème du rang à :

$$g_T : \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}), \quad U \mapsto TU - UT.$$

11.63 Utiliser une trigonalisation de A .

11.64 1) Un sens est immédiat.

2) Supposer A^2 diagonalisable. Utiliser un polynôme scindé simple P annulateur de A^2 et montrer que l'on peut supposer $P(0) \neq 0$. Faire intervenir les deux racines carrées complexes d'un complexe non nul.

11.65 Calculer M^2 et utiliser l'exercice 11.64.

11.66 Noter $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Chercher une matrice $X \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$ telle que, en notant

$$P = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}, \text{ on ait : } M = PNP^{-1}, \text{ c'est-à-dire } MP = PN.$$

c) Séparer en deux sens.

11.67 a) Récurrence sur n .

 b) Décomposer P sur la base canonique et utiliser a).

c) Raisonner par l'absurde et utiliser b).

11.68 En notant π_A le polynôme minimal de A , montrer que $P(A)$ est nilpotente si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \pi_A \mid P^k.$$

 Faire intervenir une factorisation de π_A dans $\mathbb{C}[X]$.

11.69 a) 1) Si $f - \lambda e$ n'est pas injectif, revenir à la définition.

 2) Montrer la non-surjectivité par contraposition. Supposer $P(f) - P(\lambda)e$ surjectif. Factoriser $P(X) - P(\lambda)$ par $X - \lambda$, et déduire que $f - \lambda e$ n'est pas surjectif.

 b) Factoriser : $P(X) - \mu = \alpha \prod_{k=1}^n (X - t_k)$.

11.70 Montrer que $A^{-1}N$ est nilpotente et utiliser une trigonalisation.

11.71 Utiliser des trigonalisations de AB et BA et le fait que AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité, cf. exercice 11.67.

11.72 Noter $A = PDP^{-1}$, $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{\omega_1}, \dots, \lambda_p I_{\omega_p})$.

 a) Pour $X \in \mathbf{M}_n(K)$, noter $M = P^{-1}XP$ et résoudre $DM = MD$ en utilisant des blocs.

 2) Pour $B \in \mathbf{M}_n(K)$, noter $Z = P^{-1}BP$ et résoudre $MZ = ZM$ en utilisant des blocs.

11.73 Récurrence forte sur n .

 Pour le passage de n à $n+1$, séparer en deux cas :

 le cas où toutes les f_i sont des homothéties, immédiat

 le cas où il existe $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas une homothétie.

 Considérer les vp et les SEP de f_{i_0} et appliquer l'hypothèse à la famille $(f_{i,k})_{i \in I}$, où $f_{i,k}$ est l'endomorphisme induit par f_i sur le SEP numéro k de f_{i_0} .

11.74 Soit $(f, g) \in M^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Appliquer le résultat de l'exercice 11.73 à la famille (f^p, g^p) où $p \in \mathbb{N}^*$ est à définir.

11.75 1) Supposer χ_f irréductible.

 Soit F un sev de E , stable par f , tel que $F \neq \{0\}$. Considérer $x \in F - \{0\}$, puis $f(x), f^2(x), \dots$. Utiliser le théorème de Bezout.

 2) Réciproquement, supposer que les seuls sev de E stables par f soient $\{0\}$ et E . Raisonner par l'absurde, supposer :

$$\chi_f = AB, \text{ pgcd}(A, B) = 1,$$

$$1 \leq \deg(A) \leq n-1, \quad 1 \leq \deg(B) \leq n-1.$$

Utiliser le théorème de Cayley et Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux.

11.76 a) Supposer A et $2A$ semblables. Montrer :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \forall k \in \mathbb{N}, 2^k \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

 et déduire : $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \lambda = 0$.

Utiliser l'exercice 11.48.

 b) Considérer, par exemple, $E = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et :

$$f : (x_n)_n \mapsto (2^n x_n)_n, \quad g : (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n.$$

11.77 Munir $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée $\|\cdot\|$ associée.

 1) Montrer que S est bornée, en utilisant E bornée.

 2) Montrer que S est fermée, à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés, et en utilisant des vecteurs propres de norme 1.

Conclure.

Corrigés des exercices

11.1 Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, notons

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a, puisque $U \neq 0$:

$$U \text{ v.p. de } A \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, AU = \lambda U$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + 5 = \lambda \\ 2y + 4 = 2\lambda \\ 3 = 3\lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 5 = 1 \\ 2y + 4 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4 \\ y = -1. \end{cases}$$

On conclut qu'il y a un couple (x, y) convenant et un seul, $(x, y) = (-4, -1)$.

11.2 1^{re} méthode : Utilisation de la définition :

Puisque $U \neq 0$ et $V \neq 0$, A admet U et V pour vecteurs propres si et seulement si :

AU est colinéaire à U , et AV est colinéaire à V .

$$\text{On a : } AU = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a \\ -2+b \end{pmatrix}, \text{ donc :}$$

AU colinéaire à U

$$\iff \begin{vmatrix} 2+a & 2 \\ -2+b & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff a - 2b + 6 = 0.$$

$$\text{Et : } AV = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}, \text{ donc :}$$

AV colinéaire à V

$$\iff \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ -1+b & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff a - b + 2 = 0.$$

$$\text{Enfin : } \begin{cases} a - 2b + 6 = 0 \\ a - b + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 4. \end{cases}$$

On conclut qu'il y a un couple (a, b) convenant et un seul, $(a, b) = (2, 4)$.

2^e méthode : Utilisation d'une matrice de passage :

Notons $P = (U \ V) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il est clair que P est in-

versible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice A admet U et

V pour vecteurs propres si et seulement si $P^{-1}AP$ est diagonale. On calcule le produit $P^{-1}AP$ et on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4+a-b & 2+a-b \\ -6-a+2b & -3-a+2b \end{pmatrix}.$$

On a : $P^{-1}AP$ diagonale

$$\iff \begin{cases} 2-a+b=0 \\ -6-a+2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=4. \end{cases}$$

11.3 • Puisque A (resp. B) est triangulaire, les valeurs propres de A (resp. B) se lisent sur sa diagonale, donc : les valeurs propres de A (resp. B) sont 0 (double) et 1 (simple).

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$1) * X \in \text{SEP}(A, 0) \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ z=0, \end{cases}$$

$$\text{donc } \text{SEP}(A, 0) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dim \text{SEP}(A, 0) = 1$$

$$* X \in \text{SEP}(A, 1) \iff AX = X$$

$$\iff \begin{cases} y+z=x \\ z=y \end{cases} \iff \begin{cases} x=2y \\ z=y, \end{cases}$$

$$\text{donc } \text{SEP}(A, 1) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dim \text{SEP}(A, 1) = 1$$

$$2) * X \in \text{SEP}(B, 0) \iff BX = 0 \iff y+z=0,$$

$$\text{donc } \text{SEP}(B, 0) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\dim \text{SEP}(B, 0) = 2$$

$$* X \in \text{SEP}(B, 1) \iff BX = X \iff \begin{cases} y=x \\ z=0, \end{cases}$$

$$\text{donc } \text{SEP}(B, 1) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dim \text{SEP}(B, 1) = 1.$$

Remarque : Il en résulte que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, et que B est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

11.4 a) • On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} & f(\alpha P + Q) \\ &= X((\alpha P + Q)(X) - (\alpha P + Q)(X - 1)) \\ &= X(\alpha P(X) + Q(X) - \alpha P(X - 1) - Q(X - 1)) \\ &= \alpha X(P(X) - P(X - 1)) + X(Q(X) - Q(X - 1)) \\ &= \alpha f(P) + f(Q), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• Soit $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$.

On a alors : $P(X) - P(X - 1) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, car les termes de degré n se simplifient, puis :

$$f(P) = X(P(X) - P(X - 1)) \in \mathbb{R}_n[X] = E.$$

On conclut que f est un endomorphisme de E .

b) On a, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} f(X^j) &= X(X^j - (X - 1)^j) \\ &= X\left(X^j - \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i\right) \\ &= X\left(-\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i\right) = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} (-1)^{j-i-1} X^{i+1} \\ &= \sum_{k=i+1}^j \binom{j}{k-1} (-1)^{j-k} X^k. \end{aligned}$$

D'où la matrice A de f dans la base canonique de E :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & * \\ & & \ddots & & \\ & & & j & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & n \end{pmatrix},$$

où le terme situé à la k -ème ligne et à la j -ème colonne est égal à $\binom{j}{k-1} (-1)^{j-k}$, pour $(k, j) \in \{0, \dots, n\}^2$.

c) • *Noyau* :

Puisque A est triangulaire, que le premier terme diagonal est nul et que les autres termes diagonaux sont tous non nuls, $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1, de base (1) .

• *Rang* :

D'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim \text{Ker}(f) = (n + 1) - 1 = n.$$

• *Image* :

Par définition def, on a :

$$\forall P \in E, f(P) = X(P(X) - P(X - 1)) \in \mathbb{R}_{n-1}[X],$$

donc : $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'autre part :

$$\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]).$$

On conclut : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(X, \dots, X^n)$.

• *Spectre* :

Puisque A est triangulaire supérieure, les valeurs propres de f se lisent sur la diagonale de A , donc :

$$\text{Sp}(f) = \{0, 1, \dots, n\}.$$

11.5 D'abord, il est clair que f est un endomorphisme de E .

1^{re} méthode : Étude matricielle

Formons la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

On a : $f(E_{11}) = E_{22}$, $f(E_{12}) = -E_{12}$,

$$f(E_{21}) = -E_{21}, \quad f(E_{22}) = E_{11},$$

d'où :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique de M , par exemple en développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^2(-1-\lambda)^2 - (-1-\lambda)^2 \\ &= (1+\lambda)^2(\lambda^2-1) = (\lambda-1)(\lambda+1)^3. \end{aligned}$$

On déduit que les valeurs propres de M sont :

-1 (triple) et 1 (simple).

On a, pour toute $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

• $MX = -X \iff x_4 = -x_1$, donc :

$$\text{SEP}(M, -1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

• $MX = X \iff (x_1 = x_4, x_2 = 0, x_3 = 0)$ donc

$$\text{SEP}(M, 1) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{SEP}(f, 1) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2^e méthode : Utilisation d'un polynôme annulateur

On remarque que, pour toute $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$f^2(A) = f \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A,$$

donc : $f^2 = \text{Id}_{M_2(\mathbb{R})}$.

Remarque : f est une symétrie.

Ainsi, le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de A .

Il en résulte : $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

On a, pour toute $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

• $f(A) = -A \iff d = -a$, donc

$$\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

• $f(A) = A \iff (d = a, b = 0, c = 0)$, donc :

$$\text{SEP}(f, 1) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.6 a) 1) On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= X(X-1)(\alpha P + Q)(-1) + (X+1)(X-1)(\alpha P + Q)(0) \\ &\quad + (X+1)X(\alpha P + Q)(1) \\ &= \alpha(X(X-1)P(-1) + (X+1)(X-1)P(0) \\ &\quad + (X+1)XP(1)) + (X(X-1)Q(-1) \\ &\quad + (X+1)(X-1)Q(0) + (X+1)XQ(1)) \\ &= \alpha f(P) + f(Q), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

2) • On a, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\iff f(P) = 0 \\ &\iff X(X-1)P(-1) + (X+1)(X-1)P(0) \\ &\quad + (X+1)XP(1) = 0 \\ &\iff (P(-1) + P(0) + P(1))X^2 \\ &\quad + (-P(-1) + P(1))X - P(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} P(-1) + P(0) + P(1) = 0 \\ -P(-1) + P(1) = 0 \\ P(0) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \iff (X+1)X(X-1) \mid P. \end{aligned}$$

On conclut : $\text{Ker}(f) = (X+1)X(X-1)\mathbb{R}[X]$.

• * D'après la définition de f , il est clair que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) \in \mathbb{R}_2[X],$$

donc : $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

$$\text{* On a : } \begin{cases} f(X(X-1)) = 2X(X-1) \\ f((X+1)(X-1)) = -(X+1)(X-1) \\ f((X+1)X) = 2(X+1)X, \end{cases}$$

donc les trois polynômes

$$A = X(X-1), B = (X+1)(X-1), C = (X+1)X$$

sont dans $\text{Im}(f)$.

De plus,

$$-A + C = 2X, A + C = 2X^2, 2B - A - C = -2,$$

donc $1, X, X^2$ se décomposent sur A, B, C .

Ainsi :

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2) \subset \text{Vect}(A, B, C) = \text{Im}(f).$$

On conclut : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

b) • On a étudié plus haut $\text{Ker}(f)$.

Il en résulte que 0 est valeur propre de f et que :

$$\text{SEP}(f, 0) = \text{Ker}(f) = (X+1)X(X-1)\mathbb{R}[X].$$

• Si $(\lambda, P) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}[X] - \{0\}$ est tel que $f(P) = \lambda P$, alors :

$$P = \frac{1}{\lambda} f(P) = f\left(\frac{1}{\lambda} P\right) \in \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X].$$

Le sev $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par f , car $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Considérons l'endomorphisme g de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par f sur $\mathbb{R}_2[X]$. La matrice de g dans la base (A, B, C) de $\mathbb{R}_2[X]$ (dé-

$$\text{finie plus haut) est : } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que les valeurs propres de g sont 2 et -1, et que :

$$\text{SEP}(g, 2) = \text{Vect}(A, C), \text{SEP}(g, -1) = \text{Vect}(B).$$

On conclut :

$$\begin{aligned} \text{Sp}(f) &= \{-1, 0, 2\} \\ \text{SEP}(f, -1) &= \text{Vect}((X+1)(X-1)) \\ \text{SEP}(f, 0) &= \text{Vect}((X+1)X(X-1)) \\ \text{SEP}(f, 2) &= \text{Vect}((X+1)X, (X-1)X) = \text{Vect}(X, X^2). \end{aligned}$$

11.7 a) • Il est clair que, pour toute $f \in E$, l'application $T(f) : x \mapsto f'(x) - xf(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que $T(f) \in E$.

On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in E$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, T(\alpha f + g)(x) &= (\alpha f + g)'(x) - x(\alpha f + g)(x) \\ &= \alpha f'(x) + g'(x) - \alpha x f(x) - x g(x) \\ &= \alpha(f'(x) - x f(x)) + (g'(x) - x g(x)) \\ &= \alpha T(f)(x) + T(g)(x) \\ &= (\alpha T(f) + T(g))(x), \end{aligned}$$

donc : $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$,

ce qui montre que T est linéaire.

On conclut : T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev E .

• Soit $g \in E$. D'après le théorème de Cauchy et Lipschitz linéaire, il existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - x f(x) = g(x).$$

De plus, à l'aide d'une récurrence immédiate, f est de classe C^∞ , donc : $f \in E$.

Ainsi : $\forall g \in E, \exists f \in E, T(f) = g$,

donc T est surjective.

b) Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times (E - \{0\})$. On a :

$$\begin{aligned} T(f) &= \lambda f \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - x f(x) &= \lambda f(x) \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - (x + \lambda) f(x) &= 0 \\ \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= C e^{\frac{x^2}{2} + \lambda x}. \end{aligned}$$

On conclut :

$$\text{Sp}(T) = \mathbb{R}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{SEP}(T, \lambda) = \text{Vect}(f_\lambda),$$

$$\text{où } f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{\frac{x^2}{2} + \lambda x}.$$

11.8 On peut d'abord remarquer que A_n est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, le polynôme caractéristique de A_n est scindé sur $\mathbb{R}$.

a) • On a : $\text{rg}(A_n) = 2$, donc, d'après le théorème du rang : $\dim \text{Ker}(A_n) = n - \text{rg}(A) = n - 2 \geq 1$.

Ceci montre que 0 est valeur propre de A_n et que :

$$\dim \text{SEP}(A_n, 0) = n - 2.$$

• Il nous manque donc (au plus) deux valeurs propres, notées λ_1, λ_2 .

* Puisque χ_{A_n} est scindé sur $\mathbb{R}$:

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + (n - 2) \cdot 0,$$

et d'autre part : $\text{tr}(A) = 2$, donc : $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$.

* Calculons A_n^2 . On obtient :

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \dots & 2 & n \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & (2) & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & n \end{pmatrix},$$

d'où : $\text{tr}(A_n^2) = 2n + (n - 2)2 = 4n - 4$.

Et, d'autre part : $\text{tr}(A_n^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (n - 2)0^2$,

d'où : $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 4n - 4$. On déduit :

$$4 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 = (4n - 4) + 2\lambda_1\lambda_2,$$

d'où : $\lambda_1\lambda_2 = 4 - 2n$.

Ainsi : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1\lambda_2 = 4 - 2n, \end{cases}$ donc λ_1 et λ_2 sont les solutions

de l'équation $t^2 - 2t + (4 - 2n) = 0$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 4 - 4(4 - 2n) = 8n - 12 > 0$, d'où, à l'ordre près :

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2n - 3}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2n - 3}.$$

Ainsi, les valeurs propres de A_n sont :

$$0 \text{ (d'ordre } n - 2),$$

$$1 - \sqrt{2n - 3} \text{ (d'ordre } 1), \quad 1 + \sqrt{2n - 3} \text{ (d'ordre } 1).$$

b) On a :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n) \subset \mathbb{Z} \iff \begin{cases} 1 - \sqrt{2n - 3} \in \mathbb{Z} \\ 1 + \sqrt{2n - 3} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \sqrt{2n - 3} \in \mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{N}, \sqrt{2n - 3} = k$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{N}, 2n - 3 = k^2 \quad (1).$$

Si n convient, nécessairement k est impair. Donc :

$$(1) \iff \exists t \in \mathbb{N}, 2n - 3 = (2t + 1)^2$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{N}, n = 2(t^2 + t + 1).$$

Puisque, de plus, $n \geq 3$, on conclut :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n) \subset \mathbb{Z} \iff \exists t \in \mathbb{N}^*, n = 2(t^2 + t + 1).$$

Les premières valeurs de n sont : 6, 14, 26...

11.9 Puisque E_{ij} est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc $\text{Sp}_K(E_{ij}) = \{0\}$. Si E_{ij} était diagonalisable, alors il existerait $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $E_{ij} = P0P^{-1} = 0$, contradiction.

On conclut que E_{ij} n'est pas diagonalisable.

11.10 Formons le polynôme caractéristique de $M(a)$:

$$\begin{aligned}
 \chi_{M(a)}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-a-\lambda & -5+a & a \\ -a & a-2-\lambda & a \\ 5 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 L_1 &\leftarrow L_1 - L_2 \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ -a & a-2-\lambda & a \\ 5 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 C_2 &\leftarrow C_2 + C_1 \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -a & -2-\lambda & a \\ 5 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & a \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (3-\lambda)(-2-\lambda)^2 = -(\lambda+2)^2(\lambda-3).
 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de $M(a)$ sont :

-2 (double) et 3 (simple).

Déterminons la dimension de $\text{SEP}(A, -2)$.

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 AX = -2X &\iff \begin{cases} (5-a)x + (-5+a)y + az = 0 \\ -ax + ay + az = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \left(\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \text{ si } a \neq 0 \right) \text{ ou } (x = y \text{ si } a = 0).
 \end{aligned}$$

Il en résulte : $\dim \text{SEP}(A, -2) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0. \end{cases}$

On conclut que $M(a)$ est diagonalisable si et seulement si :
 $a = 0$.

11.11 Formons le polynôme caractéristique de M , par exemple en développant par la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned}
 \chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & a & c \\ b & -\lambda & c \\ b & -a & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda^3 + bc\lambda - ac\lambda + ab\lambda = -\lambda(\lambda^2 - (ab - ac + bc)).
 \end{aligned}$$

1^{er} cas : $ab - ac + bc > 0$:

Alors, M admet trois valeurs propres réelles deux à deux distinctes, donc M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, donc M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.

2^e cas : $ab - ac + bc < 0$:

Alors, M admet trois valeurs propres complexes deux à deux distinctes, donc M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, mais,

comme χ_M n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, M n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

3^e cas : $ab - ac + bc = 0$:

Alors, $\chi_M(\lambda) = -\lambda^3$, donc M n'a comme valeur propre (réelle ou complexe) que 0.

Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors $M = 0$, donc M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.

Supposons $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Si M était diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, M serait semblable à 0, donc $M = 0$, contradiction. Ceci montre que M n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ ni dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.

En conclusion :

- M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si :
 $ab - ac + bc > 0$ ou $(a, b, c) = (0, 0, 0)$
- M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ si et seulement si :
 $ab - ac + bc \neq 0$ ou $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

11.12 Puisque A est triangulaire, les valeurs propres de A se lisent sur sa diagonale : 0 (double), 1 (double).

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = 0 \iff \begin{cases} ay + bz + ct = 0 \\ dz + et = 0 \\ z + ft = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ay = 0 \\ z = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Il en résulte : $\dim \text{SEP}(A, 0) = 2 \iff a = 0$.

$$\text{De même : } AX = X \iff \begin{cases} ay + bz + ct = x \\ dz + et = y \\ ft = 0 \end{cases}.$$

Il en résulte : $\dim \text{SEP}(A, 1) = 2 \iff f = 0$.

On conclut que A est diagonalisable si et seulement si :
 $a = 0$ et $f = 0$.

11.13 1^{re} méthode : Réduction :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Un calcul élémentaire fournit $A = PDP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En notant $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ et $X = P\Delta P^{-1}$, on a alors :

$$X^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Ainsi, X convient. On calcule X par produit de trois matrices et on obtient :

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 2i & \sqrt{2} - i & \sqrt{2} - i \\ \sqrt{2} - i & \sqrt{2} + 2i & \sqrt{2} - i \\ \sqrt{2} - i & \sqrt{2} - i & \sqrt{2} + 2i \end{pmatrix}.$$

2^e méthode : Utilisation d'une particularité de A :

Vu la forme de la matrice A , on conjecture qu'il existe

$$X = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ convenant, où } (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

En notant $I = I_3$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$X^2 = A \iff ((a-b)I + bU)^2 = -I + U$$

$$\iff (a-b)^2 I + 2b(a-b)U + b^2 \underbrace{U^2}_{=3U} = -I + U$$

$$\iff ((a-b)^2 + 1)I + (2b(a-b) + 3b^2 - 1)U = 0$$

$$\iff \begin{cases} (a-b)^2 + 1 = 0 \\ 2ab + b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a-b = i \\ 2ab + b^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b+i \\ 2b(b+i) + b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b+i \\ 3b^2 + 2ib - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2} + 2i}{3} \\ b = \frac{\sqrt{2} - i}{3} \end{cases}$$

et on retrouve la même solution X que dans la première méthode.

Remarque : On a déterminé une matrice X convenant, mais il se peut, a priori, qu'il y en ait d'autres. es.

11.14

On forme le polynôme caractéristique de A , on calcule les valeurs propres de A (dans $\mathbb{C}$) et les SEP de A , et, après quelques calculs élémentaires, on obtient $A = PDP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{j\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{j\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

Comme $\left| \frac{j\sqrt{3}}{3} \right| < 1$, on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{j\sqrt{3}}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{j\sqrt{3}}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où, par continuité des opérations dans $M_3(\mathbb{C})$ et en effectuant le produit de trois matrices :

$$A^n = P D^n P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \Delta P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.15 a) Un calcul élémentaire fournit :

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 4)^2(\lambda - 6),$$

donc les valeurs propres de A sont :

4 (double), 6 (simple).

Par un calcul élémentaire, on obtient :

$$\text{SEP}(A, 4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{SEP}(A, 6) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

donc A est diagonalisable.

Ainsi : $A = PDP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) La série proposée est absolument convergente dans $M_3(\mathbb{R})$, donc convergente, et :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} A^{2p} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} (PDP^{-1})^{2p} \\ &= P \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} D^{2p} \right) P^{-1} = P \begin{pmatrix} \text{ch } 4 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch } 4 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch } 6 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{ch } 4 + \text{ch } 6 & 0 & \text{ch } 4 - \text{ch } 6 \\ -\text{ch } 4 + \text{ch } 6 & 2 \text{ch } 4 & \text{ch } 4 - \text{ch } 6 \\ \text{ch } 4 - \text{ch } 6 & 0 & \text{ch } 4 + \text{ch } 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11.16

a) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\sum_{i=1}^4 \alpha_i f_i = 0$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 \operatorname{ch} x + \alpha_2 \operatorname{sh} x + \alpha_3 x \operatorname{ch} x + \alpha_4 x \operatorname{sh} x = 0.$$

En prenant le $DL_3(0)$, on a :

$$\alpha_1 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + \alpha_2 \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \alpha_3 x \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + \alpha_4 x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)x + \left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_4\right)x^2 + \left(\frac{\alpha_2}{6} + \frac{\alpha_3}{2}\right)x^3 + o(x^3) = 0.$$

Par unicité du $DL_3(0)$ de la fonction nulle, on a alors :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \frac{\alpha_1}{4} + \alpha_4 = 0, \quad \frac{\alpha_2}{6} + \frac{\alpha_3}{2} = 0,$$

d'où : $\alpha_1 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

Ceci montre que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est libre, donc $\mathcal{B}$ est une base de $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$, et : $\dim(E) = 4$.

b) • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Df_1(x) = \operatorname{sh} x = f_2(x),$$

$$Df_2(x) = \operatorname{ch} x = f_1(x),$$

$$Df_3(x) = \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x = f_1(x) + f_4(x),$$

$$Df_4(x) = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x = f_2(x) + f_3(x).$$

Comme D est linéaire, il en résulte :

$$\forall f \in E, Df \in E.$$

On conclut que D est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev E .

• On a :

$$Df_1 = f_2, \quad Df_2 = f_1, \quad Df_3 = f_1 + f_4, \quad Df_4 = f_2 + f_3,$$

donc la matrice de D dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) 1) En notant $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

on a $A = \begin{pmatrix} J & I \\ 0 & J \end{pmatrix}$, d'où, par produit par blocs :

$$A^2 = \begin{pmatrix} J & I \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & I \\ 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^2 & 2J \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2J \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} I & 2J \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 2J \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 4J \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

2) On a alors :

$$A^4 - 2A^2 + I_4 = \begin{pmatrix} I & 4J \\ 0 & I \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} I & 2J \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 0,$$

$$\text{donc : } D^4 - 2D^2 + \operatorname{Id}_E = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire : } \forall f \in E, f^{(4)} - 2f'' + f = 0.$$

d) • D'après c), le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + 1$ est annulateur de D . Comme $P = (X^2 - 1)^2 = (X + 1)^2(X - 1)^2$, il en résulte, d'après le cours :

$$\operatorname{Sp}(D) \subset \{-1, 1\}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$* \quad AX = -X \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\text{donc } -1 \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \text{ et } \operatorname{SEP}(A, -1) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$* \quad AX = X \iff \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\text{donc } 1 \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \text{ et } \operatorname{SEP}(A, 1) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut :

$$\operatorname{Sp}(D) = \{-1, 1\},$$

$$\operatorname{SEP}(D, -1) = \operatorname{Vect}(f_1 - f_2),$$

$$\operatorname{SEP}(D, 1) = \operatorname{Vect}(f_1 + f_2).$$

• Puisque la somme des dimensions des SEP de E est $2 \neq 4$, on conclut que D n'est pas diagonalisable.

11.17 1) Soit A convenant.

Le polynôme $P = X^3 + 2X - 3$ annule A ,

et $P = (X - 1) \underbrace{(X^2 + X + 3)}_{\Delta < 0}$, donc : $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1\}$.

Comme A est supposée diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, il existe alors $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PI_n P^{-1}$, d'où $A = I_n$.

2) Réciproquement, il est clair que I_n convient.

Finalement, il y a une matrice et une seule convenant : $A = I_n$.

11.18 Le polynôme $P = 2X^3 + 3X^2 - 6X - 1$ est annulateur de A .

Étudions les variations de P .

On a : $P' = 6X^2 + 6X - 6 = 6(X^2 + X - 1)$,

qui s'annule en $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

D'où le tableau des variations de P :

x	$-\infty$	α	x_1	β	x_2	γ	$+\infty$
$P'(x)$		+	0	-	0	+	
$P(x)$	$-\infty$		↗	↘	↗	↘	$+\infty$

De plus : $x_1 < -1 < 0 < x_2$

et : $P(-1) = 6 > 0$, $P(0) = -1 < 0$.

Il en résulte, par le théorème des valeurs intermédiaires (P est continu sur l'intervalle $\mathbb{R}$) et la stricte monotonie par intervalles, que P admet, dans $\mathbb{R}$, exactement trois zéros α, β, γ , deux à deux distincts.

Ainsi, P est scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$ et annulateur de A , donc, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

11.19 1) Si 0 est valeur propre de f , alors $-1, 0, 1$ sont valeurs propres de f et $\dim(E) = 3$, donc (condition suffisante du cours), f est diagonalisable.

2) Supposons que 0 ne soit pas valeur propre de f . Alors, f est inversible. Comme $f^2 \circ (f^2 - e) = f^4 - f^2 = 0$, on déduit $f^2 - e = 0$. Ainsi, le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de f . Comme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, ce polynôme est scindé simple et annulateur de f , donc, d'après le cours, f est diagonalisable.

On conclut que f est diagonalisable.

11.20 On a : ${}^tM = 2I_n - M^2$,

d'où :

$$\begin{aligned} M &= {}^t(2I_n - M^2) = 2I_n - ({}^tM)^2 \\ &= 2I_n - (2I_n - M^2)^2 = -M^4 + 4M^2 - 2I_n, \end{aligned}$$

et donc : $M^4 - 4M^2 + M + 2I_n = 0$.

Ceci montre que le polynôme $P = X^4 - 4X^2 + X + 2$ est annulateur de P .

De plus :

$$\begin{aligned} P &= (X - 1)(X^3 + X^2 - 3X - 2) \\ &= (X - 1)(X + 2)(X^2 - X - 1) \\ &= (X - 1)(X + 2)\left(X - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, P est scindé simple et annulateur de M , donc, d'après le cours, M est diagonalisable.

11.21 • On a : $\pi_A(A) = 0$, donc, en transposant :

$$\pi_A({}^tA) = {}^t(\pi_A(A)) = 0,$$

ce qui montre que π_A est annulateur de ${}^tA$.

Par définition de π_A , il en résulte : $\pi_A \mid \pi_{{}^tA}$.

• En appliquant le résultat précédent à ${}^tA$ à la place de A , on obtient : $\pi_A \mid \pi_{{}^tA}$.

• Comme π_A et $\pi_{{}^tA}$ sont des polynômes unitaires, on conclut :

$$\pi_{{}^tA} = \pi_A.$$

11.22 1) Dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$, $P = X^2 + 1$ est le polynôme minimal, par exemple, de $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

2) Dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, $P = X^2 + 1$ est le polynôme minimal, par exemple, de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, $P = X^2 + 1$ est le polynôme minimal, par exemple, de $A = \text{diag}(i, i, -i)$.

4) Étude dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

Supposons qu'il existe $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\pi_A = P$.

Comme $\pi_A = P = X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ est annulateur de A et scindé simple dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{-i, i\}$. Mais, comme A est réelle, les ordres de multiplicité de $-i$ et i dans le polynôme caractéristique χ_A sont égaux. En notant p l'ordre de multiplicité de i (ou de $-i$) dans χ_A , on a donc $2p = 3$ (ordre de A), contradiction.

On conclut qu'il n'existe pas $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\pi_A = P$.

11.23 Puisque $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que : $A = PTP^{-1}$.

Comme A est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$. Ainsi, le polynôme X^k est annulateur de A . Il en résulte que le spectre de A est inclus dans $\{0\}$, donc les termes diagonaux de T sont tous nuls :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit alors que, dans le calcul des puissances successives de T , la diagonale de 0 se décale vers le haut :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$T^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^n = 0.$$

d'où : $A^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1} = 0$.

11.24 a) Formons le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-2\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} \\ C_3 &\leftarrow C_3 + C_2 \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-2\lambda & -2\lambda \\ 2 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} \\ L_2 &\leftarrow L_2 - L_3 \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{8}(2\lambda) \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1 \\ -1 & -1-2\lambda \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{4}(4\lambda^2) = -\lambda^3. \end{aligned}$$

b) D'après a) : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice nulle, donc $A = 0$, exclu. On conclut : A n'est pas diagonalisable.

c) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ représenté par A dans $\mathcal{B}$. On cherche une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que f soit représenté par T dans $\mathcal{C}$. On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = T \iff (f(v_1) = 0, f(v_2) = v_1, f(v_3) = v_2),$$

donc, si $\mathcal{C}$ convient, alors $f^2(v_3) = f(v_2) = v_1 \neq 0$.

$$\text{On calcule } A^2 \text{ et on obtient : } A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par exemple, } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vérifie } f^2(v_3) \neq 0.$$

$$\text{Notons donc } v_2 = f(v_3) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = f(v_2) = \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est libre, car :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Puisque A représente f dans $\mathcal{B}$ et que T représente f dans $\mathcal{C}$, A est semblable à T .

11.25 Puisque $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice carrée A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = PTP^{-1}, \text{ où : } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}).$$

On a alors : $\exp(A) = \exp(PTP^{-1}) = P \exp(T) P^{-1}$, d'où :

$$\begin{aligned} \det(\exp(A)) &= \det(\exp(T)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{tr}(T)} = e^{\text{tr}(A)}. \end{aligned}$$

11.26 a) • Soit $\lambda \in \text{Sp}(f \circ g) - \{0\}$.

On a donc $\lambda \neq 0$ et il existe $x \in E - \{0\}$ tel que $f \circ g(x) = \lambda x$. D'où :

$$(g \circ f)(g(x)) = g((f \circ g)(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Si $g(x) = 0$, alors $\lambda x = f(g(x)) = 0$, contradiction, car $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$.

On a donc $g(x) \neq 0$, et il s'ensuit : $\lambda \in \text{Sp}(g \circ f)$.

Ainsi : $\text{Sp}(f \circ g) - \{0\} \subset \text{Sp}(g \circ f)$.

• On déduit : $\text{Sp}(f \circ g) \cup \{0\} \subset \text{Sp}(g \circ f) \cup \{0\}$.

• Par rôles symétriques de f et g , on conclut :

$$\text{Sp}(f \circ g) \cup \{0\} = \text{Sp}(g \circ f) \cup \{0\}.$$

b) On suppose ici que E est de dimension finie.

1^{re} méthode : Étude de caractères bijectifs :

• Si f et g sont bijectifs, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectifs, donc $0 \notin \text{Sp}(f \circ g)$ et $0 \notin \text{Sp}(g \circ f)$, et on déduit de a) :

$$\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f).$$

• Si f ou g n'est pas bijectif, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas bijectifs, donc ne sont pas injectifs, (car E est de dimension finie), donc $0 \in \text{Sp}(f \circ g)$ et $0 \in \text{Sp}(g \circ f)$, et on déduit de a) : $\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$.

2^e méthode : Utilisation des polynômes caractéristiques :

D'après l'exercice 11.55, $\chi_{f \circ g} = \chi_{g \circ f}$, donc $\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$, puisque le spectre est l'ensemble des zéros du polynôme caractéristique.

c) Prenons $E = C^\infty([0; 1], \mathbb{R})$, $f : E \xrightarrow{u \mapsto u'} E$, $g : E \xrightarrow{v \mapsto g(v)} E$,

où $g(v)$ est la primitive de v s'annulant en 0.

Alors, $g \circ f(1) = 0$, donc $0 \in \text{Sp}(g \circ f)$, mais $f \circ g = \text{Id}_E$, donc $0 \notin \text{Sp}(f \circ g)$.

Dans cet exemple : $\text{Sp}(f \circ g) \neq \text{Sp}(g \circ f)$.

11.27 Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que : $AX = \lambda X$.

Considérons la matrice carrée M de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ obtenue en répétant X côte à côte, n fois, c'est-à-dire que les colonnes de M sont toutes égales à X .

On a alors $M \neq 0$ et $AM = \lambda M$, d'où :

$$|\lambda| \|M\| = \|\lambda M\| = \|AM\| \leq \|A\| \|M\|.$$

Comme $M \neq 0$, on a $\|M\| > 0$, d'où finalement :

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

11.28 a) En notant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$AU = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = U.$$

Ceci montre que 1 est valeur propre de A . De plus, U est un vecteur propre pour A , associé à la valeur propre 1.

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que

$$AX = \lambda X. \text{ Notons } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \text{ On a donc :}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i,$$

$$\text{d'où : } \forall i \in \{1, \dots, n\}, (\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j,$$

puis, en passant aux modules :

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{ii}| |x_i| &= |(\lambda - a_{ii}) x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j \neq i} a_{ij} |x_j|. \end{aligned}$$

Il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que : $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$,

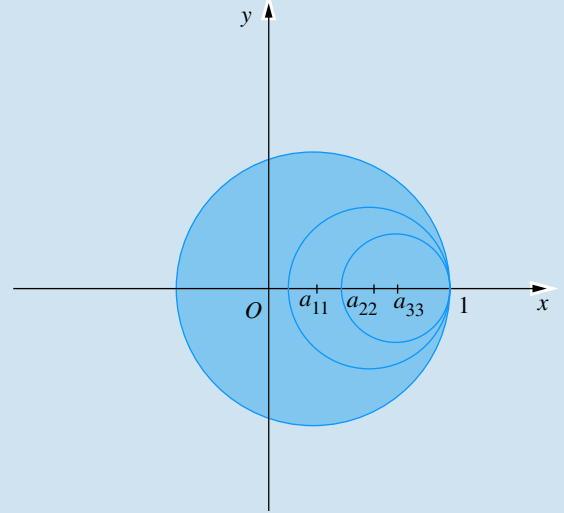
et on a alors :

$$|\lambda - a_{ii}| |x_i| \leq \left(\sum_{j \neq i} a_{ij} \right) |x_i| = (1 - a_{ii}) |x_i|.$$

Comme $X \neq 0$, on a $|x_i| > 0$, et on déduit :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq 1 - a_{ii}.$$

On conclut : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n B'(a_{ii}, 1 - a_{ii})$.



Exemple : $n = 3, 0 < a_{11} < a_{22} < a_{33} < 1$

11.29 a) • Il est clair que f va de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

• La linéarité de f est immédiate, résultant de la linéarité de la dérivation.

b) Soit $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}[X] - \{0\})$ tel que $f(P) = \lambda P$.

Il existe $n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, et $a_n \neq 0$.

Alors, $f(P)$ est de degré $\leq n+2$, et le terme de degré $n+2$ de $f(P)$ est $(n-3)a_n X^{n+2}$, d'où nécessairement $n = 3$.

En notant $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :

$$f(P) = \lambda P$$

$$\iff (X^3 + X)(3aX^2 + 2bX + c)$$

$$\begin{aligned} &= (3X^2 - 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ &= \lambda(aX^3 + bX^2 + cX + d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff -bX^4 + (4a - 2c)X^3 + (3b - 3d)X^2 + 2cX + d \\ = \lambda(aX^3 + bX^2 + cX + d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff (b = 0, \lambda a = 4a - 2c, \lambda b = 3b - 3d, \\ \lambda c = 2c, \lambda d = d) \end{aligned}$$

$$\iff (b = 0, d = 0, \lambda a = 4a - 2c, \lambda c = 2c)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 2, a = c, b = 0, d = 0 \\ \text{ou} \\ c = 0, \lambda = 4, b = 0, d = 0. \end{cases}$$

Finalement : $\text{Sp}(f) = \{2, 4\}$,

$$\text{SEP}(f, 2) = \text{Vect}(X^3 + X), \text{SEP}(f, 4) = \text{Vect}(X^3).$$

11.30 Il est immédiat que E est bien un $\mathbb{R}$ -ev et que T est bien un endomorphisme de E .

1) Soit $\lambda \in \text{Sp}(T)$.

Il existe $f \in E - \{0\}$ telle que : $T(f) = \lambda f$.

On a donc : $\forall x \in [0; +\infty[, f(x+1) = \lambda f(x)$.

Par une récurrence immédiate, il en résulte :

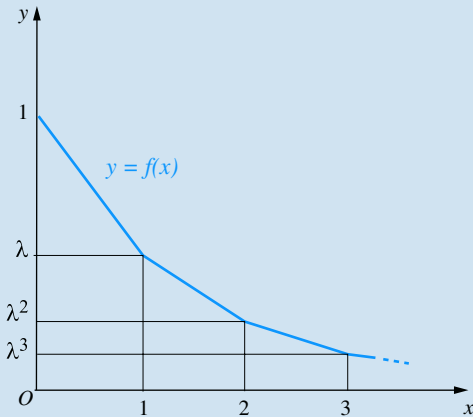
$$\forall x \in [0; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, f(x+n) = \lambda^n f(x).$$

Puisque $f \neq 0$, il existe $x_0 \in [0; +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq 0$, d'où : $\lambda^n = \frac{f(x_0+n)}{f(x_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et donc : $\lambda \in]-1; 1[$.

2) Réciproquement, soit $\lambda \in]-1; 1[$.

Il est clair qu'il existe $f_0 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que : $f_0(1) = \lambda f_0(0)$ et $f_0 \neq 0$. Il suffit, par exemple, de prendre pour f_0 l'application, affine sur $[0; 1]$, qui envoie 0 en 1 et envoie 1 en λ .

Considérons l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par : $f(x) = \lambda^n f_0(x+n)$, où n désigne la partie entière de x .



Il est clair que : $f \in E$ et $T(f) = \lambda f$, donc λ est valeur propre de T .

On conclut : $\text{Sp}(f) =]-1; 1[$.

11.31 Formons le polynôme caractéristique χ_M de M :

$$\chi_M(X) = \det \begin{pmatrix} I_n - XI_n & I_n \\ A & A - XI_n \end{pmatrix}.$$

En multipliant les colonnes numéros $n+1$ à $2n$ par $(1-X)$, on obtient :

$$(1-X)\chi_M(X) = \det \begin{pmatrix} (1-X)I_n & (1-X)I_n \\ A & (1-X)(A - XI_n) \end{pmatrix}.$$

En, faisant $C_j \leftarrow C_j - C_{j-n}$ pour $j = n+1, \dots, 2n$, on a :

$$\begin{aligned} & (1-X)^n \chi_M(X) \\ &= \det \begin{pmatrix} (1-X)I_n & 0 \\ A & (1-X)(A - XI_n) - A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \det((1-X)I_n) \det(-XA - X(1-X)I_n) \\ &= (1-X)^n (-X)^n \det(A - (X-1)I_n) \\ &= (1-X)^n (-X)^n \chi_A(X-1). \end{aligned}$$

Ainsi : $(1-X)^n (\chi_M(X) - (-X)^n \chi_A(X-1)) = 0$.

Comme l'anneau $K[X]$ est intègre et que $(1-X)^n \neq 0$, on peut simplifier et on conclut :

$$\chi_M(X) = (-X)^n \chi_A(X-1).$$

11.32 1) Réduction de A :

Un calcul élémentaire montre que A est diagonalisable et que $A = PDP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Résolution de l'équation $M^3 - M = A$:

Si M convient, alors M commute avec A , puisque M commute avec tout polynôme en M .

Notons $N = P^{-1}MP$.

Puisque $AM = MA$, on déduit $DN = ND$.

En notant $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$DN = ND$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & -b \\ 4c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 4b \\ 4c = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Il en résulte $N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $(a, d) \in \mathbb{R}^2$.

On a alors :

$$M^3 - 2M = A \Leftrightarrow N^3 - 2N = D$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 2a = -1 \\ d^3 - 2d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 2a + 1 = 0 \\ d^3 - 2d - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a^2+a-1) = 0 \\ (d-2)(d^2+2d+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left\{1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} \\ d = 2. \end{cases}$$

Pour chacune des trois matrices N ainsi obtenues, on calcule M , par produit de trois matrices, et on conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation proposée est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 5+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 5-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

11.33 a) • Puisque A est symétrique réelle, A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

• Un calcul élémentaire fournit une diagonalisation de A , $A = PDP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Remarquons que, si une matrice M vérifie (1), alors M commute avec A .

Soit $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Notons $X = P^{-1}MP$. On a :

$$AM = MA \iff DX = XD.$$

Comme $D = \begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, décomposons X de même :

$X = \begin{pmatrix} Y & L \\ C & z \end{pmatrix}$. On a :

$$DX = XD$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & L \\ C & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & L \\ C & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3Y & 3L \\ -3C & -3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3Y & -3L \\ 3C & -3z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} SL = -3L \\ -3C = 3C \end{cases} \iff \begin{cases} L = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que, si M est solution de (1), alors, en notant

$X = P^{-1}MP$, X est de la forme $X = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$, où

$Y \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{R}$.

Avec les notations précédentes :

$$(1) \quad M^2 = A \iff X^2 = D$$

$$\iff \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} Y^2 = 3I_2 \\ z^2 = -3. \end{cases}$$

Comme l'équation $z^2 = -3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on conclut que l'équation proposée n'a pas de solution dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

11.34

$$\text{Il s'agit de } A_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & (0) & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}).$$

Puisque A_n est triangulaire, les valeurs propres de A_n se lisent sur sa diagonale, donc A_n admet pour valeurs propres : 0 (d'ordre $n-2$) et 1 (d'ordre 2).

Supposons A_n diagonalisable. Alors, A_n est semblable à la matrice diagonale $D = \text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0)$. En particulier, comme $D^2 = D$, on a : $A^2 = A$. Mais le $(1, n)$ ème terme de A^2 est n , contradiction.

Ceci montre que A n'est pas diagonalisable.

11.35

Puisque A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(K)$, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(K)$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Soit $M \in \mathbf{M}_n(K)$. Notons $N = P^{-1}MP$. On a :

$$AM + MA = 0 \iff DN + ND = 0.$$

Notons $N = (\nu_{ij})_{ij}$. On a :

$$DN + ND = 0$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lambda_i \nu_{ij} + \nu_{ij} \lambda_j = 0$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \underbrace{(\lambda_i + \lambda_j)}_{\neq 0} \nu_{ij} = 0$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \nu_{ij} = 0$$

$$\iff N = 0 \iff M = 0.$$

On conclut, avec les hypothèses de l'énoncé :

$$AM + MA = 0 \iff M = 0.$$

11.36

a) Récurrence sur q .

La propriété est évidente pour $q = 0$.

Si, pour $q \in \mathbb{N}$ fixé, $A^{k+q} = A^k$, alors :

$$A^{k+(q+1)} = A^{(k+q)+1} = A^{k+q}A = A^kA = A^{k+1} = A^k.$$

On conclut, par récurrence sur q :

$$\forall q \in \mathbb{N}, A^{k+q} = A^k.$$

b) En particulier : $A^{k+k} = A^k$, c'est-à-dire $(A^k)^2 = A^k$. Ainsi, le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ est scindé simple sur K et annulateur de A^k , donc, d'après le cours, A^k est diagonalisable.

Plus précisément, A^k est une matrice de projecteur.

c) Soit $p \in \{1, \dots, k-1\}$. Puisque A^k et A^p commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(A^k - A^p)^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (A^k)^i (-1)^{k-i} (A^p)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} A^{(k-p)i+pk}.\end{aligned}$$

Comme : $\forall i \in \{0, \dots, k\}$, $(k-p)i + pk \geq pk \geq k$,

on a : $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $A^{(k-p)i+pk} = A^k$,

d'où :

$$\begin{aligned}(A^k - A^p)^k &= \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \right) A^k \\ &= (1 + (-1))^k A^k = 0^k A^k = 0 A^k = 0.\end{aligned}$$

On conclut : $A^k - A^p$ est nilpotente.

11.37 a) Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique com-

plexe d'ordre 2, quelconque, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, A n'est pas diagonalisable si et seulement si : A admet une valeur propre double et le SEP associé est de dimension 1.

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2).$$

Alors :

χ_A admet une racine double

$$\iff (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = 0$$

$$\iff (a - c)^2 + 4b^2 = 0$$

$$\iff c = a + 2\varepsilon i b, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Sachant que A admet une valeur propre double, A n'est pas diagonalisable si et seulement si A n'est pas une matrice d'homothétie, c'est-à-dire si et seulement si on n'a pas $b = 0$ et $a = c$. Mais, avec $c = a + 2\varepsilon i b$, on a : $a = c \iff b = 0$.

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques complexes d'ordre 2 non diagonalisables est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a + 2\varepsilon i b \end{pmatrix} ; (\varepsilon, a, b) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \right\}.$$

b) En particulier, d'après a), la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$, obtenue pour $\varepsilon = 1, a = 0, b = 1$ est symétrique complexe non diagonalisable.

Il est alors clair que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, la matrice $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, obtenue en complétant A_2 par des termes tous nuls, est symétrique complexe et non diagonalisable.

En effet, si A_n était diagonalisable, par endomorphisme induit, d'après le cours, A_2 serait diagonalisable, contradiction.

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, il existe une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

11.38 a) • Formons le polynôme caractéristique de J_n , par exemple en développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned}\chi_{J_n(\lambda)} &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & & & -\lambda \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ & & & -\lambda \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &\quad + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ -\lambda & \ddots & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & -\lambda & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &= (-\lambda)(-\lambda)^{n-1} + (-1)^{n+1} = (-1)^n(\lambda^n - 1).\end{aligned}$$

Il en résulte que les valeurs propres de J_n sont les

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2i p \pi}{n}\right), \quad p \in \{0, \dots, n-1\}, \text{ toutes simples.}$$

• Puisque $J_n \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et que J_n admet n valeurs propres deux à deux distinctes, d'après la condition suffisante du cours, J_n est diagonalisable.

b) D'après a), en notant $D = \text{diag}(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = P D P^{-1}$.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On remarque que :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \\ = a_0 I_n + a_1 J_n + a_2 J_n^2 + \dots + a_{n-1} J_n^{n-1}.\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}D_n &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k P D^k P^{-1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \left(P \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) P^{-1} \right) = \det \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) \\
&= \det \left(\text{diag} \sum_{0 \leq p \leq n-1} a_k \omega_k^p \right) = \prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \exp \left(\frac{2i k p \pi}{n} \right).
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 3$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0 + a_1 + a_2)(a_0 + a_1 j + a_2 j^2)(a_0 + a_1 j^2 + a_2 j).$$

11.39 Soit $x \in E$. En notant $y = (f - ae) \circ (f - be)(x)$, on a :

$$\begin{cases} y = (f - ae)((f - be)(x)) \in \text{Im}(f - ae) \\ y = (f - be)((f - ae)(x)) \in \text{Im}(f - be), \end{cases}$$

donc : $y \in \text{Im}(f - ae) \cap \text{Im}(f - be) = \{0\}$.

Ceci montre : $\forall x \in E, (f - ae) \circ (f - be)(x) = 0$,

c'est-à-dire : $(f - ae) \circ (f - be) = 0$.

Le polynôme $P = (X - ae)(X - be)$ est donc annulateur de f . De plus, comme $a \neq b$, P est scindé simple sur K .

D'après le cours, on conclut que f est diagonalisable.

11.40 a) Il est clair que f est une application de $\mathbf{M}_n(K)$ dans $\mathbf{M}_n(K)$.

La linéarité de f est immédiate : on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $M, N \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$\begin{aligned}
f(\alpha M + N) &= \text{tr}(\alpha M + N)A + \text{tr}(A)B(\alpha M + N)C \\
&= (\alpha \text{tr}(M) + \text{tr}(N))A + \alpha \text{tr}(A)BMC + \text{tr}(A)BNC \\
&= \alpha(\text{tr}(M)A + \text{tr}(A)BMC) + (\text{tr}(M)A + \text{tr}(A)BNC) \\
&= \alpha f(M) + f(N).
\end{aligned}$$

On conclut que f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(K)$.

b) Cherchons un polynôme annulateur de f , scindé simple.

Commençons par calculer f^2 .

On a, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$\begin{aligned}
f^2(M) &= f(f(M)) = \text{tr}(f(M))A + \text{tr}(A)Bf(M)C \\
&= \text{tr}(\text{tr}(M)A + \text{tr}(A)BMC)A \\
&\quad + \text{tr}(A)B(\text{tr}(M)A + \text{tr}(A)BMC)C \\
&= (\text{tr}(M)\text{tr}(A) + \text{tr}(A)\text{tr}(BMC))A \\
&\quad + \text{tr}(A)\text{tr}(M)\underbrace{BAC}_{=0} + (\text{tr}(A))^2 \underbrace{B^2}_{=B} M \underbrace{C^2}_{=C}.
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\text{tr}(BMC) &= \text{tr}(B(MC)) \\
&= \text{tr}((MC)B) = \text{tr}(M(\underbrace{CB}_{=0})) = 0.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f^2(M) &= \text{tr}(M)\text{tr}(A)A + (\text{tr}(A))^2 BMC \\
&= \text{tr}(A)(\text{tr}(M)A + \text{tr}(A)BMC) = \text{tr}(A)f(M).
\end{aligned}$$

Ceci montre : $f^2 = \text{tr}(A)f$.

Ainsi, le polynôme $P = X^2 - \text{tr}(A)X$ est annulateur de f .

De plus, $P = X(X - \text{tr}(A))$ est scindé simple sur K , car $\text{tr}(A) \neq 0$.

D'après le cours, on conclut que f est diagonalisable.

11.41 a) On a :

$$\begin{cases} \text{tr}(B(AB)) = \text{tr}((AB)B) = \text{tr}(AB^2) = \text{tr}(A) \\ \text{tr}((BA)B) = \text{tr}((-AB)B) = -\text{tr}(AB^2) = -\text{tr}(A), \end{cases}$$

donc : $\text{tr}(A) = 0$.

Comme A et B ont des rôles symétriques dans les hypothèses, on a aussi : $\text{tr}(B) = 0$.

b) • Puisque $A^2 = I_4$, le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de A . De plus, $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est scindé simple sur $\mathbb{C}$. D'après le cours, on déduit que A est diagonalisable.

De même, B est diagonalisable.

• Puisque $X^2 - 1$ est annulateur de A , on a : $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$. Notons α (resp. β) l'ordre de multiplicité de la valeur propre -1 (resp. 1) de A , avec la convention $\alpha = 0$ si -1 n'est pas valeur propre de A , $\beta = 0$ si 1 n'est pas valeur propre de A .

Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, on a : $\alpha + \beta = 4$.

D'autre part : $0 = \text{tr}(A) = \alpha(-1) + \beta 1$.

On déduit : $\alpha = \beta = 2$.

On conclut que les valeurs propres de A sont :

-1 (double) et 1 (double).

De même pour B .

c) 1) On a :

$$\begin{aligned}
C^2 &= (iAB)^2 = -(AB)(AB) = -A(BA)B \\
&= A(AB)B = A^2 B^2 = I_4 I_4 = I_4,
\end{aligned}$$

$$AC + CA = i(AAB + ABA) = iA(AB + BA) = 0,$$

$$BC + CB = i(BAB + ABB) = i(BA + AB)B = 0.$$

2) Le couple (A, C) vérifie les mêmes hypothèses que le couple (A, B) , donc, d'après a) et b), les valeurs propres de C sont -1 (double) et 1 (double), et on a $\text{tr}(C) = 0$, d'où $\text{tr}(AB) = -i \text{tr}(C) = 0$.

11.42 Le polynôme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$; il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\chi_A = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$, d'où :

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i I_n - B). \text{ On a alors :}$$

$$\chi_A(B) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$\iff (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i I_n - B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$$

$$\iff (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B))$$

$$\iff \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset.$$

Remarque : Puisque A et B ont des rôles symétriques dans (i), les conditions (i) ou (ii) sont aussi équivalentes à :

$$\chi_B(A) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

11.43 Par hypothèse, le polynôme $P = X^3 - 3X - 4$ est annulateur de A .

On a : $P' = 3X^2 - 3 = 3(X-1)(X+1)$,
d'où le tableau des variations de P :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

On déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie par intervalles, que P admet, dans $\mathbb{R}$, un zéro et un seul, noté α . De plus : $\alpha > 1$.

Il existe donc $\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ tel que :

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \bar{\beta}).$$

Ainsi, P est scindé simple sur $\mathbb{C}$ et annulateur de A , donc, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où :

$$D = \text{diag}(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_p \text{ fois}, \underbrace{\beta, \dots, \beta}_q \text{ fois}, \underbrace{\bar{\beta}, \dots, \bar{\beta}}_q \text{ fois}).$$

$$\text{d'où : } \det(A) = \det(D) = \alpha^p \beta^q \bar{\beta}^q = \alpha^p |\beta|^q > 0.$$

11.44 Par hypothèse, le polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 6X$ est annulateur de A . On a :

$$P = X(X^2 - 4X + 6) = X((X - (2 - i\sqrt{2}))(X - (2 + i\sqrt{2}))),$$

donc P est scindé simple sur $\mathbb{C}$.

D'après le cours, il en résulte que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où : $D = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_p \text{ fois}, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_q \text{ fois}, \underbrace{\bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha}}_q \text{ fois})$,

$$\text{et } \alpha = 2 - i\sqrt{2}, p, q \in \mathbb{N}.$$

D'après le cours, on a alors : $e^A = Pe^D P^{-1}$,

et : $e^D = \text{diag}(1, \dots, 1, e^\alpha, \dots, e^\alpha, e^{\bar{\alpha}}, \dots, e^{\bar{\alpha}})$.

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \text{tr}(e^A) &= \text{tr}(e^D) = p + qe^\alpha + qe^{\bar{\alpha}} \\ &= p + q(e^{2-i\sqrt{2}} + e^{2+i\sqrt{2}}) = p + 2qe^2 \cos \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Comme (à la calculatrice) : $1 \leq e^2 \cos \sqrt{2} \leq 1,2$
et que $p + 2q = n$, on conclut : $n \leq \text{tr}(e^A) \leq 1,2n$.

11.45 On a :

$$\begin{aligned} P &= X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \\ &= (X^4 + X^3 + X^2) + (X^2 + X + 1) \\ &= (X^2 + 1)(X^2 + X + 1), \end{aligned}$$

qui n'a pas de zéro réel.

D'autre part, χ_A est de degré 7, impair, et à coefficients réels, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, χ_A admet au moins un zéro réel, donc A admet au moins une valeur propre réelle λ_1 .

Si P est le polynôme minimal de A , alors λ_1 est zéro de P , contradiction.

On conclut qu'il n'existe aucune matrice $A \in \mathbf{M}_7(\mathbb{R})$ telle que le polynôme minimal de A soit P .

11.46 a) Il est clair que D est un endomorphisme de E .

$$\text{On a : } \forall P \in E, D^n(P) = P^{(n)} = 0,$$

donc le polynôme X^n est annulateur de D .

$$\text{D'autre part : } D^{n-1}(X^{n-1}) = (n-1)! \neq 0,$$

donc X^{n-1} n'est pas annulateur de D .

$$\text{On conclut : } \pi_D = X^n.$$

b) Il est clair que T est un endomorphisme de E .

On a :

$$\forall P \in E, (T - \text{Id}_E)(P) = P(X+a) - P(X) \in \mathbb{R}_{n-2}[X],$$

$$\text{d'où, en réitérant : } \forall P \in E, (T - \text{Id}_E)^n(P) = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire : } (T - \text{Id}_E)^n = 0.$$

Ceci montre que le polynôme $(X-1)^n$ est annulateur de T .

D'autre part, puisque $a \neq 0$:

$$(T - \text{Id}_E)(X^{n-1}) = (X+a)^{n-1} - X^{n-1}$$

est de degré $n-2$, donc, en réitérant, $(T - \text{Id}_E)^{n-1}(X^{n-1})$ est une constante non nulle, donc $(X-1)^{n-1}$ n'est pas annulateur de T .

$$\text{On conclut : } \pi_T = (X-1)^n.$$

11.47 Puisque χ_A est scindé sur K , A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(K)$. Il existe donc $Q \in \mathbf{GL}_n(K)$

$$\text{et } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(K)$$

telles que $A = QTQ^{-1}$.

On a alors : $P(A) = P(QTQ^{-1}) = QP(T)Q^{-1}$,
donc :

$$\begin{aligned} \chi_{P(A)}(X) &= \chi_{P(T)}(X) = \begin{vmatrix} P(\lambda_1) - X & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) - X \end{vmatrix} \\ &= \prod_{k=1}^n (P(\lambda_k) - X) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (X - P(\lambda_k)). \end{aligned}$$

11.48 a) Supposons f nilpotent.

Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

- Puisque le polynôme X^k est annulateur de f , d'après le cours, on a donc : $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda \in K ; \lambda^k = 0\} = \{0\}$.
- Montrons que 0 est valeur propre de f .

Puisque $f^k = 0$, on a : $(\det(f))^k = \det(f^k) = 0$,

donc $\det(f) = 0$, f n'est pas injectif, 0 est valeur propre de f .

Ainsi : $\{0\} \subset \text{Sp}(f)$.

On conclut : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

b) On suppose ici $K = \mathbb{C}$ et $\text{Sp}(f) = \{0\}$. Puisque $K = \mathbb{C}$, d'après le cours, f est trigonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.

Comme $\text{Sp}(f) = \{0\}$, les éléments diagonaux de T sont tous nuls, donc T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit alors que les puissances successives de T sont de la forme :

$$\begin{aligned} T^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ & \ddots & \ddots \\ (0) & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \\ T^{n-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ & \ddots & (0) & 0 \\ & (0) & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, T^n = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f^n = 0$, donc f est nilpotent.

11.49 Par hypothèse, le polynôme $P = X^p(X-1)^q$ est annulateur de A . Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, d'après le cours, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

D'autre part : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} ; P(\lambda) = 0\} = \{0, 1\}$.

En notant a (resp. b) l'ordre de multiplicité de 0 (resp. 1) dans χ_A , on a donc : $\text{tr}(A) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b$.

Comme, par hypothèse, $\text{tr}(A) = 0$, on déduit $b = 0$, donc 1 n'est pas valeur propre de A .

Il en résulte que $A - I_n$ est inversible. En multipliant par l'inverse de $(A - I_n)^q$ dans l'égalité d'hypothèse, on conclut :
 $A^p = 0$.

11.50 1) Soit A convenant.

Le polynôme $P = X^5 - X^2$ est annulateur de A , et :

$$P = X^2(X^3 - 1) = X^2(X-1)(X-j)(X-j^2)$$

est scindé sur $\mathbb{C}$, donc, d'après le cours, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que $A = PT P^{-1}$.

De plus, les termes diagonaux de T sont, à l'ordre près :

0 (m fois), 1 (p fois), j (q fois), j^2 (q fois), où $m, p, q \in \mathbb{N}$ et $m + p + 2q = n$.

En effet, comme $j \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, les ordres de multiplicité de j et j^2 dans le polynôme χ_A de $\mathbb{R}[X]$ sont égaux.

Alors : $\text{tr}(A) = \text{tr}(T) = m \cdot 0 + p \cdot 1 + q \cdot j + q \cdot j^2 = p - q$.

Ainsi : $m, p, q \in \mathbb{N}$, $m + p + 2q = n$, $p - q = n$,

d'où : $0 = (m + p + 2q) - (p - q) = m + 3q$,

donc $m = 0$ et $q = 0$, puis $p = n$.

$$\text{On a donc : } T = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix},$$

et 0, j, j^2 ne sont pas valeurs propres de A .

Il en résulte que A , $A - jI_n$, $A - j^2I_n$ sont inversibles.

Comme $A^2(A - I_n)(A - jI_n)(A - j^2I_n) = 0$,

on déduit $A - I_n = 0$, $A = I_n$.

2) Réciproquement, pour $A = I_n$, on a bien $A^5 = A^2$ et $\text{tr}(A) = n$.

On conclut qu'il y a une matrice et une seule convenant, $A = I_n$.

11.51 Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.

Supposons qu'il existe $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = N$.

On a $N^3 = 0$, donc $(X^2)^3 = 0$, $X^6 = 0$. Ainsi, X est nilpotente.

D'après l'exercice 11.23, puisque $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ est nilpotente, on a $X^3 = 0$.

Alors : $N^2 = (X^2)^2 = X^4 = X^3 X = 0$.

Mais $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, contradiction.

On conclut qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = N$.

11.52 Remarquons que A est triangulaire (inférieure).

Si une matrice $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $X^2 = A$, alors X commute avec A . Déterminons d'abord les matrices qui commutent avec A . Dans cet exemple, on peut y arriver par un simple calcul sur les éléments des matrices.

Notons $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$.

On a, en effectuant le produit matriciel :

$$\begin{aligned} XA = AX &\iff \begin{pmatrix} a+b+c & b & 4c \\ x+y+z & y & 4z \\ u+v+w & v & 4w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+x & b+y & c+z \\ a+4u & b+4v & c+4w \end{pmatrix} \\ &\iff (c=0, b=0, z=0, v=0, y=a, u+w=a+4u), \end{aligned}$$

donc, en particulier, X est de la forme $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ x & a & 0 \\ u & 0 & w \end{pmatrix}$,

où $(a, x, u, w) \in \mathbb{R}^4$.

En reportant dans l'équation de l'énoncé :

$$\begin{aligned} X^2 = A &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ax & a^2 & 0 \\ au+wu & 0 & w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\iff (a^2 = 1, 2ax = 1, au+wu = 1, w^2 = 4) \\ &\iff \left(a = 1, w = 2, x = \frac{1}{2}, u = \frac{1}{3} \right) \\ \text{ou} &\quad \left(a = 1, w = -2, x = \frac{1}{2}, u = -1 \right) \\ \text{ou} &\quad \left(a = -1, w = 2, x = -\frac{1}{2}, u = 1 \right) \\ \text{ou} &\quad \left(a = -1, w = -2, x = -\frac{1}{2}, u = -\frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation de l'énoncé est $\mathcal{S} = \{X_1, X_2, -X_1, -X_2\}$, où :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

11.53 1) Réduction de A :

Un calcul élémentaire montre que A est diagonalisable et fournit une diagonalisation de A , $A = QDQ^{-1}$, où :

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ Q^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Soit $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Notons $N = Q^{-1}MQ$, où Q est définie ci-dessus.

On a donc $M = QNQ^{-1}$, d'où :

$$\begin{aligned} P(M) = A &\iff P(QNQ^{-1}) = QDQ^{-1} \\ &\iff QP(N)Q^{-1} = QDQ^{-1} \iff P(N) = D. \end{aligned}$$

Si $P(N) = D$, alors N commute avec D , donc, d'après l'exercice 11.72 ou par un calcul élémentaire, on déduit que N est diagonale.

Notons donc $N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{On a : } P(N) = D \iff \begin{cases} P(x) = -1 \\ P(y) = 1 \\ P(z) = 3. \end{cases}$$

Il nous reste à résoudre trois équations du 5ème degré dans $\mathbb{R}$.

L'application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^5 + t + 1$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 5t^4 + 1 > 0,$$

donc P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'autre part :

$$P(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad P(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, il s'ensuit que, pour tout $C \in \mathbb{R}$, l'équation $P(t) = C$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.

De plus, on remarque :

$$P(-1) = -1, \quad P(0) = 1, \quad P(1) = 3.$$

$$\text{Il en résulte : } \begin{cases} P(x) = -1 \\ P(y) = 1 \\ P(z) = 3. \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

On conclut que l'équation proposée admet une solution et une seule, que l'on calcule enfin par produit de trois matrices :

$$M = Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.54 On a, d'après une formule du cours :

$$\det(A) I_n = A^t \text{com}(A) = A(I_n - A) = A - A^2,$$

$$\text{d'où : } A^2 - A + \det(A) I_n = 0.$$

Notons $\Delta = 1 - 4 \det(A)$ le discriminant de cette équation du second degré.

1^{er} cas : $\Delta \neq 0$:

Le polynôme $X^2 - X + \det(A)$ est annulateur de A et scindé simple sur $\mathbb{C}$, donc, d'après le cours, A est diagonalisable.

2) $\Delta = 0$:

$$\text{On a alors : } 0 = A^2 - A + \frac{1}{4} I_n = \left(A - \frac{1}{2} I_n\right)^2,$$

$$\text{donc : } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Si A est diagonalisable, alors A est semblable à $\frac{1}{2} I_n$, donc

$$A = \frac{1}{2} I_n. \text{ Mais alors : } \det(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \neq \frac{1}{4},$$

car $n \geq 3$, contradiction.

Il en résulte que A n'est pas diagonalisable.

On conclut :

$$A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \det(A) \neq \frac{1}{4}.$$

11.55 On a, dans $M_{2n}(K)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - \lambda I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0 & -\lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda I_n & 0 \\ -B & BA - \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

D'où, en passant aux déterminants :

$$\det(AB - \lambda I_n) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix},$$

$$(-\lambda)^n \det(BA - \lambda I_n) = (-1)^n (-\lambda)^n \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix},$$

et donc :

$$(-\lambda)^n (\det(BA - \lambda I_n) - \det(AB - \lambda I_n)) = 0.$$

Comme $K[\lambda]$ est un anneau intègre et que le polynôme $(-\lambda)^n$ n'est pas le polynôme nul, on peut simplifier par $(-\lambda)^n$, et on déduit :

$$\det(BA - \lambda I_n) = \det(AB - \lambda I_n),$$

$$\text{c'est-à-dire : } \chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

Voir aussi l'exercice 10.30.

11.56 a) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{\chi_{AA}(\lambda)} &= \overline{\det(A\bar{A} - \lambda I_n)} = \det(\overline{A\bar{A} - \lambda I_n}) \\ &= \det(\bar{A}A - \bar{\lambda} I_n) = \chi_{\bar{A}A}(\bar{\lambda}) \stackrel{\text{exercice 11.55}}{=} \chi_{A\bar{A}}(\bar{\lambda}). \end{aligned}$$

D'après le cours sur les polynômes, il en résulte que $\chi_{A\bar{A}}$ est à coefficients réels, c'est-à-dire, avec l'indéterminée X au lieu de λ : $\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$.

$$b) \text{ On a alors : } \det(A\bar{A} + I_n) = \chi_{A\bar{A}}(-1) \in \mathbb{R}.$$

11.57 a) Formons le polynôme caractéristique de A_n , par exemple en développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \chi_{A_n}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & (0) & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (1) & & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & & & (0) \\ & \ddots & & \\ (1) & & 1-\lambda \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &\quad + (-1)^{n+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (1) & & \ddots & 1-\lambda \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}}_{\text{noté } D_{n-1}} \\ &= (1-\lambda)^n + (-1)^{n+1} D_{n-1} \end{aligned}$$

et :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (1) & & \ddots & 1-\lambda \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$C_1 \leftarrow \overline{C_1} - C_2 \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & (1) & \ddots & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & 1 \end{vmatrix}_{[n]} = \lambda D_{n-1}.$$

De proche en proche :

$$D_n = \lambda D_{n-1} = \dots = \lambda^{n-2} D_2 \\ = \lambda^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^{n-2} \lambda = \lambda^{n-1}.$$

d'où : $\chi_{A_n}(\lambda) = (1-\lambda)^n + (-1)^{n+1} \lambda^{n-2}$.

b) Considérons l'application $\varphi : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $\lambda \in [1; +\infty[$, par :

$$\varphi(\lambda) = \frac{(-1)^n \chi_{A_n}(\lambda)}{\lambda^{n-2}} = (\lambda-1)^n \lambda^{-n+2} - 1.$$

Ainsi, les valeurs propres de A_n situées dans $[1; +\infty[$ sont les zéros de φ .

L'application φ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et, pour tout $\lambda \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= n(\lambda-1)^{n-1} \lambda^{-n+2} + (\lambda-1)^n (-n+2) \lambda^{-n+1} \\ &= (\lambda-1)^{n-1} \lambda^{-n+1} (n\lambda + (-n+2)(\lambda-1)) \\ &= (\lambda-1)^{n-1} \lambda^{-n+1} \underbrace{(2\lambda + (n-2))}_{>0}. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation de φ :

λ	1	$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$	+	
$\varphi(\lambda)$	-1	$\nearrow +\infty$

Puisque l'application φ est strictement croissante et continue sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et que $\varphi(1) = -1$ et $\varphi(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty$, d'après le théorème de la bijection monotone, φ admet un zéro et un seul dans $]1; +\infty[$.

On conclut que A_n admet, dans $]1; +\infty[$, une valeur propre et une seule.

11.58 a) Formons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & -\lambda & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ a_3 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & -\lambda & 1 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{[n]} \\ L_n \leftarrow L_n + \lambda L_{n-1} + \dots + \lambda^{n-1} L_1$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & -\lambda & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ a_3 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & -\lambda & 1 \\ \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= (-1)^{n+1} \alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} = (-1)^{n+1} \alpha, \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha &= a_n + \lambda a_{n-1} + \dots + \lambda^{n-2} a_2 + \lambda^{n-1} (a_1 - \lambda) \\ &= a_n + \lambda a_{n-1} + \dots + a_1 \lambda^{n-1} - \lambda^n. \end{aligned}$$

On conclut :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - (a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n)).$$

b) On suppose ici : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_k \in]0; +\infty[$.

Notons $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lambda \mapsto \varphi(\lambda) = \frac{(-1)^n \chi_A(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - \left(\frac{a_1}{\lambda} + \dots + \frac{a_n}{\lambda^n} \right).$$

Il est clair que χ_A et φ ont, dans $]0; +\infty[$, les mêmes zéros.

L'application φ est dérivable (donc continue) sur $]0; +\infty[$

et : $\forall \lambda \in]0; +\infty[, \varphi'(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{na_n}{\lambda^{n+1}} > 0$,

donc φ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De plus : $\varphi(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} -\infty$ et $\varphi(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 1$.

λ	0	$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$		+
$\varphi(\lambda)$	$-\infty$	$\nearrow 1$

D'après le théorème de la bijection monotone, φ admet un zéro et un seul.

On conclut que, dans $]0; +\infty[$, A admet une valeur propre et une seule.

11.59 a) Formons le polynôme caractéristique χ_n de $A(n, z)$, la variable étant notée classiquement λ , en développant, par exemple, par rapport à la première ligne :

$$\chi_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & \dots & 0 & z \\ 1 & \ddots & \ddots & (0) & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ * & & 1-\lambda \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} z \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (1) & & \ddots & 1-\lambda \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

noté D_{n-1}

On a, par $C_j \leftarrow C_j - C_{j+1}$, pour $j = n-2, \dots, 1$:

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} \lambda & & & & 0 \\ 0 & \lambda & & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1-\lambda & 0 \\ \vdots & (0) & & 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} = \lambda^{n-2}.$$

Ainsi : $\chi_n(\lambda) = (1-\lambda)^n + (-1)^{n+1} z \lambda^{n-2}$.

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A(n, z))$. D'après a), on a :

$$(1-\lambda)^n + (-1)^{n+1} z \lambda^{n-2} = 0.$$

Supposons $|\lambda| \geq 2$.

Notons $\mu = |\lambda - 1| \geq |\lambda| - 1 \geq 1 > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mu^n &= |1-\lambda|^n = |z \lambda^{n-2}| = |z| |(\lambda - 1) + 1|^{n-2} \\ &\leq |z| (|\lambda - 1| + 1)^{n-2} \leq |z| (\mu + 1)^{n-2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \mu^2 = \frac{\mu^n}{\mu^{n-2}} \leq |z| \left(\frac{1+\mu}{\mu} \right)^{n-2}.$$

$$\text{Comme } \mu \geq 1, \text{ on a : } \frac{1+\mu}{\mu} = \frac{1}{\mu} + 1 \leq 2,$$

$$\text{puis : } \mu^2 \leq |z| 2^{n-2}, \text{ donc } \mu \leq \sqrt{|z|} 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Enfin :

$$\begin{aligned} |\lambda| &= |1 - (1 - \lambda)| \leq 1 + |1 - \lambda| = 1 + \mu \\ &\leq 1 + \sqrt{|z|} 2^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut : } |\lambda| \leq \text{Max} \left(2, 1 + \sqrt{|z|} 2^{\frac{n}{2}-1} \right).$$

Finalement :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A(n, z)) \subset B' \left(0, \text{Max} \left(2, 1 + \sqrt{|z|} 2^{\frac{n}{2}-1} \right) \right).$$

11.60 a) Un calcul élémentaire montre que M est diagonalisable et que : $M = P D P^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) 1) On remarque, par un calcul par blocs suggéré par la diagonalisation précédente, en notant $I = I_n$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2I & 2I \\ I & -I \end{pmatrix}}_{\text{notée } Q} \underbrace{\begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}}_C \underbrace{\frac{1}{4} \begin{pmatrix} I & 2I \\ I & -2I \end{pmatrix}}_{\text{notée } R}.$$

$$\text{On a : } QR = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_{2n},$$

donc Q est inversible et $R = Q^{-1}$.

Ceci montre que B est semblable à C .

2) • Supposons A diagonalisable.

Il existe $U \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $\Delta \in \text{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = U \Delta U^{-1}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}}_{\text{notée } V, \text{ inversible}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}}_{\text{diagonale}} \underbrace{\begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}}_{= V^{-1}}, \end{aligned}$$

ce qui montre que C est diagonalisable.

• Réciproquement, si $C = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable,

alors, par endomorphisme induit, $-A$ est diagonalisable, donc A est diagonalisable.

On conclut : B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

11.61 Par commodité, si une somme est indexée par $\lambda \in \text{Sp}(f)$, nous la noterons indexée par λ seulement.

a) Soit $A \in K[X]$.

Puisque f est diagonalisable, on a : $E = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$.

Soit $x \in E$. Par définition de p_{λ} , on a :

$$x = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(x) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad p_{\lambda}(x) \in E_{\lambda}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} A(f)(x) &= A(f) \left(\sum_{\lambda} p_{\lambda}(x) \right) = \sum_{\lambda} A(f)(p_{\lambda}(x)) \\ &\stackrel{\text{cours}}{=} \sum_{\lambda} A(\lambda) p_{\lambda}(x) = \left(\sum_{\lambda} A(\lambda) p_{\lambda} \right)(x), \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } A(f) = \sum_{\lambda} A(\lambda) p_{\lambda}.$$

En particulier, pour $A = X$ (polynôme de degré 1), on a : $f = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$.

b) Notons $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont deux à deux différents.

Soit $j \in \{1, \dots, N\}$. D'après le cours sur l'interpolation polynomiale, il existe $A_j \in K[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, A_j(\lambda_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On a alors, d'après a) :

$$A_j(f) = \sum_{\lambda} A_j(\lambda) p_{\lambda} = \sum_{i=1}^N A_j(\lambda_i) p_{\lambda_i} = p_{\lambda_j}.$$

Ainsi : $\forall \{1, \dots, N\}, \exists A_j \in K[X], p_{\lambda_j} = A_j(f)$.

Autrement dit, chaque p_{λ} (pour $\lambda \in \text{Sp}(f)$) est un polynôme en f .

11.62 a) • Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Il est clair que $f_A : M \mapsto AM - MA$ est une application de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

La linéarité de f_A est immédiate : pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et toutes $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} f_A(\alpha M + N) &= A(\alpha M + N) - (\alpha M + N)A \\ &= \alpha(AM - MA) + (AN - NA) = \alpha f_A(M) + f_A(N). \end{aligned}$$

On conclut : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), f_A \in \mathcal{L}(\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))$.

• Soient $A \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}), M \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$.

Notons $A = (a_{ij})_{ij}, M = (m_{ij})_{ij}$.

Alors, $f_A(M) = AM - MA \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le terme diagonal numéro i de $f_A(M)$ est $a_{ii}m_{ii} - m_{ii}a_{ii} = 0$.

Ceci montre : $\forall M \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}), f_A(M) \in \mathbf{T}'_{n,s}(\mathbb{C})$.

On conclut : $\forall A \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}), f_A(\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})) \subset \mathbf{T}'_{n,s}(\mathbb{C})$.

b) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

D'après le cours, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

l) Montrons que l'application $\theta : B \mapsto P^{-1}BP$ est un isomorphisme de $C(A)$ sur $C(T)$.

• θ est bien une application de $C(A)$ dans $C(T)$, car, pour toute $B \in C(A)$, on a :

$$\begin{aligned} \theta(B)T &= (P^{-1}BP)T = P^{-1}B(PTP^{-1})P = P^{-1}BAP \\ &= P^{-1}ABP = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = T\theta(B), \end{aligned}$$

donc $\theta(B) \in C(T)$.

• Il est clair que $C(A)$ et $C(T)$ sont bien des $\mathbb{C}$ -ev.

• La linéarité de θ est immédiate.

• Pour tout $U \in C(T)$, il existe $B \in C(A)$ unique tel que $\theta(B) = U$, c'est $B = PUP^{-1}$.

Ainsi, $\theta : C(A) \rightarrow C(T), B \mapsto P^{-1}BP$

est un isomorphisme d'ev.

On a donc : $\dim(C(A)) = \dim(C(T))$.

2) D'autre part, d'après a) et le théorème du rang, appliqué à

$$g_T : \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}), U \mapsto TU - UT,$$

on a :

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(g_T) &= \dim(\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})) - \dim \text{Im}(g_T) \\ &\geq \dim(\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})) - \dim(\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})) = n. \end{aligned}$$

Enfin :

$$\text{Ker}(g_T) = \{U \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}) ; TU = UT\} = \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}) \cap C(T).$$

D'où :

$$\dim(C(T)) \geq \dim(\mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}) \cap C(T)) = \dim \text{Ker}(g_T) \geq n.$$

On conclut : $\dim(C(A)) \geq n$.

11.63 Puisque $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, d'après le cours, A est trigonalisable.

$$\text{Il existe } P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}),$$

telles que : $A = PTP^{-1}$.

Comme $\text{rg}(A) = 2$, d'après le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker}(A) \geq n - 2.$$

On peut donc supposer $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-2} = 0$, par exemple.

On a alors :

$$0 = \text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k = (n-2)0 + \lambda_{n-1} + \lambda_n,$$

donc : $\lambda_{n-1} + \lambda_n = 0$.

$$\text{Si } \lambda_{n-1} = 0, \text{ alors } \lambda_n = 0, T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

En calculant les puissances successives de T , on obtient $T^n = 0$ (cf. aussi l'exercice 11.23), puis :

$$A^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1} = 0,$$

contradiction.

On a donc : $\lambda_{n-1} \neq 0$.

Puisque $\lambda_n = -\lambda_{n-1} \neq 0$, les trois nombres complexes $0, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ sont deux à deux distincts. De plus :

$$\dim \text{Ker}(A) = n - \text{rg}(A) = n - 2,$$

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda_{n-1}I_n) \geq 1, \dim \text{Ker}(A - \lambda_n I_n) \geq 1.$$

On conclut : A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

11.64 1) Il est clair que, si A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ où $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C})$, alors A^2 est diagonalisable, puisque $A^2 = PD^2P^{-1}$.

2) Réciproquement, supposons A^2 diagonalisable.

D'après le cours, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé simple tel que $P(A^2) = 0$. On peut supposer P normalisé, c'est-à-dire dont le coefficient du terme de plus haut degré égal à 1.

• Supposons $X \mid P$.

Il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P = X^k Q$ et $Q(0) \neq 0$, d'où $A^{2k}Q(A^2) = 0$. Comme A est inversible, on déduit $Q(A^2) = 0$, et on est ramené au cas suivant.

• Supposons $X \nmid P$, c'est-à-dire $P(0) \neq 0$.

Ainsi, P est scindé simple non multiple de X . Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}^*$ deux à deux distincts tels que $P = \prod_{k=1}^N (X - z_k)$.

On a donc : $\prod_{k=1}^N (A^2 - z_k I_n) = P(A^2) = 0$.

Notons, pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$, u_k une racine carrée complexe de z_k , et $R = \prod_{k=1}^N ((X - u_k)(X + u_k))$. Il est clair que R est scindé simple et annulateur de A , puisque $R(A) = P(A^2) = 0$.

D'après le cours, on conclut que A est diagonalisable.

11.65 On remarque :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}.$$

a) 1) Supposons AB diagonalisable.

Comme $BA = B(AB)B^{-1} \sim AB$, BA est aussi diagonalisable. Il est clair alors que $\begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

D'autre part :

$$\begin{aligned} (\det(M))^2 &= \det(M^2) = \det(BA) \det(AB) \\ &= (\det(A))^2 (\det(B))^2 \neq 0, \end{aligned}$$

car $A, B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi, M est inversible et M^2 est diagonalisable.

D'après l'exercice 11.64, on conclut que M est diagonalisable.

2) Réciproquement, supposons que M est diagonalisable.

Alors, M^2 est diagonalisable.

Comme $M^2 = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, AB est matrice d'un endomorphisme induit par un endomorphisme représenté par M^2 , donc AB est diagonalisable.

Finalement, M est diagonalisable si et seulement si AB est diagonalisable.

11.66 Notons $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Cherchons, par exemple, une matrice $X \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$ telle que,

en notant $P = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, qui est inversible, on ait :

$M = PNP^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} M &= PNP^{-1} \iff MP = PN \\ \iff \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} A & AX + B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff AX + B &= 0 \iff X = -A^{-1}B. \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $P = \begin{pmatrix} I_p & -A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible et $M = PNP^{-1}$, ce qui montre que M et N sont semblables.

b) D'après a), M est diagonalisable si et seulement si N est diagonalisable.

D'autre part :

• si A est diagonalisable, alors $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable

• si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, alors, par endomorphisme induit, A est diagonalisable.

Ainsi, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A l'est.

On conclut que $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

11.67 a) Récurrence sur n .

• La propriété est vraie pour $n = 1$, par hypothèse.

• Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} f \circ g^{n+1} - g^{n+1} \circ f &= (f \circ g^n) \circ g - g^{n+1} \circ f \\ &= (g^n \circ f + ng^{n-1}) \circ g - g^{n+1} \circ f \\ &= g^n \circ (f \circ g) + ng^n - g^{n+1} \circ f \\ &= g^n \circ (g \circ f + e) + ng^n - g^{n+1} \circ f \\ &= (n+1)g^n, \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie pour $n+1$.

On a montré, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}.$$

b) Nous allons déduire la formule demandée, à partir de a), par linéarité.

Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$, où $N \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} & f \circ P(g) - P(g) \circ f \\ &= f \circ \left(\sum_{k=0}^N a_k g^k \right) - \left(\sum_{k=0}^N a_k g^k \right) \circ f \\ &= \sum_{k=0}^N a_k (f \circ g^k - g^k \circ f) = \sum_{k=1}^N a_k (f \circ g^k - g^k \circ f) \\ &= \sum_{k=1}^N k a_k g^{k-1} = P'(g). \end{aligned}$$

c) 1) Supposons que g admette un polynôme minimal P . D'après b), on a alors :

$$P'(g) = f \circ \underbrace{P(g)}_{=0} - \underbrace{P(g) \circ f}_{=0} = 0,$$

donc P' est annulateur de g .

De plus, $\deg(P') < \deg(P)$, d'où nécessairement $P = 1$, $e = 0$, $E = \{0\}$, contradiction.

On conclut : g n'admet pas de polynôme minimal.

2) Le couple $(g, -f)$ vérifie les mêmes hypothèses que (f, g) , donc, d'après 1), $-f$ n'admet pas de polynôme minimal, et on conclut : f n'admet pas de polynôme minimal.

3) Puisque f (ou g) n'admet pas de polynôme minimal, d'après le cours, par contraposée, E n'est pas de dimension finie.

11.68 Notons π_A le polynôme minimal de A . On a :

$$\begin{aligned} & P(A) \text{ nilpotente} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{N}^*, (P(A))^k = 0 \\ \iff & \exists k \in \mathbb{N}^*, P^k(A) = 0 \\ \iff & \exists k \in \mathbb{N}^*, \pi_A \mid P^k. \end{aligned}$$

Puisque $\pi_A \in \mathbb{C}[X]$, π_A est scindé sur $\mathbb{C}$, et, d'autre part, π_A admet exactement pour zéros $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Il existe donc

$\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\pi_A = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$. Alors :

$$(\exists k \in \mathbb{N}^*, \pi_A \mid P) \iff \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k) \mid P.$$

On conclut que l'ensemble des $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ soit nilpotente est l'ensemble des multiples, dans $\mathbb{C}[X]$, du poly-

nôme $\prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)$.

11.69 a) 1) Supposons $f - \lambda e$ non injective.

Alors, il existe $x \in E - \{0\}$ tel que $(f - \lambda e)(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = \lambda x$.

Il s'ensuit, d'après le cours : $P(f)(x) = P(\lambda)x$, donc $(P(f) - P(\lambda))(x) = 0$.

Ceci montre que $P(f) - P(\lambda)e$ n'est pas injectif.

2) Raisonnons par contraposition.

Supposons $P(f) - P(\lambda)e$ surjectif. Puisque le polynôme $P(X) - P(\lambda)$ s'annule en λ , il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda)Q(X).$$

On a donc : $P(f) - P(\lambda)e = (f - \lambda e) \circ Q(f)$.

Soit $y \in E$. Puisque $P(f) - P(\lambda)$ est surjectif, il existe $x \in E$ tel que : $y = (P(f) - P(\lambda))(x)$.

On a alors : $y = (f - \lambda e)(Q(f)(x))$.

Ceci montre : $\forall y \in E, \exists x \in E, y = (f - \lambda e)(x)$,

donc $f - \lambda e$ est surjectif.

On a montré, par contraposition, que, si $f - \lambda e$ n'est pas surjectif, alors $P(f) - P(\lambda)e$ n'est pas surjectif.

b) Le polynôme $P(X) - \mu$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{C}^*, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$P(X) - \mu = \alpha \prod_{k=1}^n (X - t_k).$$

On a alors : $P(f) - \mu e = \alpha(f - t_1 e) \circ \dots \circ (f - t_n e)$.

Si, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $f - t_k e$ est injectif (resp. surjectif), alors, par composition, $P(f) - \mu e$ est injectif (resp. surjectif).

Il en résulte, par contraposition, que, si $P(f) - \mu e$ n'est pas injectif (resp. n'est pas surjectif), alors il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f - t_k e$ n'est pas injectif (resp. n'est pas surjectif), donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = P(\lambda)$ et que $f - \lambda e$ n'est pas injectif (resp. n'est pas surjectif).

11.70 Puisque A et N commutent et que A est inversible, A^{-1} et N commutent. En effet :

$$\begin{aligned} AN = NA &\implies A^{-1}(AN)A^{-1} = A^{-1}(NA)A^{-1} \\ &\implies NA^{-1} = A^{-1}N. \end{aligned}$$

Comme A^{-1} et N commutent et que N est nilpotente, $A^{-1}N$ est nilpotente. En effet, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$, et on a : $(A^{-1}N)^k = (A^{-1})^k N^k = 0$.

D'après le cours, $A^{-1}N$ est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Comme de plus $A^{-1}N$ est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^{-1}N = PTP^{-1}$, où T est triangulaire supérieure à termes diagonaux tous nuls :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\det(A + N) &= \det(A(I_n + A^{-1}N)) \\ &= \det(A) \det(I_n + A^{-1}N) = \det(A) \det(I_n + PTP^{-1}) \\ &= \det(A) \det(P(I_n + T)P^{-1}) = \det(A) \det(I_n + T).\end{aligned}$$

$$\text{Comme : } \det(I_n + T) = \begin{vmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

on conclut : $\det(A + N) = \det(A)$.

11.71 Les matrices AB et BA de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables. Il existe donc $P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $T, U \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que :

$$AB = PTP^{-1} \text{ et } BA = QUQ^{-1}.$$

De plus, d'après l'exercice 11.55, AB et BA ont le même polynôme caractéristique. On peut donc supposer que T et U ont la même diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & ** \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a alors : $e^{AB} = e^{PTP^{-1}} = P e^T P^{-1}$,

et de même : $e^{BA} = Q e^U Q^{-1}$.

D'où : $\chi_{e^{AB}} = \chi_{e^T}$ et $\chi_{e^{BA}} = \chi_{e^U}$.

Mais :

$$e^T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad e^U = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (***) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

donc : $\chi_{e^T} = \chi_{e^U}$, et finalement : $\chi_{e^{AB}} = \chi_{e^{BA}}$.

11.72 Puisque A est diagonalisable, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$,

$D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C})$ telles que : $A = PDP^{-1}$, où :

$$D = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{\omega_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{\omega_p \text{ fois}}).$$

$$\text{Ainsi : } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\omega_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p I_{\omega_p} \end{pmatrix}.$$

a) • Soit $X \in \mathbf{M}_n(K)$. Notons $M = P^{-1}XP$. On a :

$$X \in C(A) \iff AX = XA \iff DM = MD.$$

Décomposons M en blocs de la même façon que pour D ci-dessus : $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ où les M_{ij} sont des blocs. On a :

$$DM = MD$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \lambda_i I_{\omega_i} M_{ij} = M_{ij} \lambda_j I_{\omega_j}$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (\lambda_i - \lambda_j) M_{ij} = 0$$

$$\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (i \neq j \implies M_{ij} = 0),$$

car $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts.

On conclut :

$$C(A) = \left\{ PMP^{-1} ; M = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_p \end{pmatrix}, M_k \in \mathbf{M}_{\omega_k}(K) \right\}.$$

• Il est clair que $C(A)$ est un K -ev et que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme d'ev de $C(D)$ sur $C(A)$.

On a donc :

$$\dim(C(A)) = \dim(C(D)) = \sum_{k=1}^p \dim(\mathbf{M}_{\omega_k}(K)) = \sum_{k=1}^p \omega_k^2.$$

b) • Soient $B \in \mathbf{M}_n(K)$, $Z = P^{-1}BP$.

On a, avec les notations de a) :

$$B \in C'(A) \iff \forall X \in C(A), XB = BX$$

$$\iff \forall M \in C(D), MZ = ZM.$$

Décomposons Z en blocs de la même façon que pour D , $Z = (Z_{ij})_{i,j}$, où les Z_{ij} sont des blocs.

On a :

$$B \in C'(A)$$

$$\iff \forall M_1, \dots, M_p, \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, M_j Z_{ij} = Z_{ij} M_i$$

$$\implies \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (i \neq j \implies Z_{ij} = 0),$$

comme on le voit en examinant le cas particulier $M_i = I_{\omega_i}$ et $M_j = 0$.

Ainsi, si $B \in C'(A)$, alors Z est diagonale par blocs, de la forme

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & Z_p \end{pmatrix}, \text{ et alors :}$$

$$B \in C'(A)$$

$$\iff \forall M_1, \dots, M_p, \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, M_j Z_j = Z_i M_i$$

$$\implies \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall M_i \in \mathbf{M}_{\omega_i}(K), M_i Z_i = Z_i M_i.$$

De même qu'en a), on montre que, si une matrice carrée M_i commute avec toute matrice carrée, alors M_i est de la forme $\alpha_i I_{\omega_i}$, où $\alpha_i \in K$.

La réciproque est évidente.

On a donc :

$$B \in C'(A)$$

$$\iff \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p, Z = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{\omega_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_p I_{\omega_p} \end{pmatrix}.$$

Finalement :

$$C'(A) = \left\{ P Z P^{-1} ; Z = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{\omega_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_p I_{\omega_p} \end{pmatrix} \right. \\ \left. (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p \right\}.$$

• Il est clair alors que $C'(A)$ est un K -ev et que :

$$\dim(C'(A)) = p.$$

11.73 Récurrence forte sur n .

La propriété est évidente pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons la propriété vraie pour tout entier $p \in \{1, \dots, n\}$ et soient E un K -ev de dimension finie $n + 1$, I un ensemble non vide, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux.

Le cas où toutes les f_i sont des homothéties est d'étude immédiate.

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas une homothétie.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f_{i_0} , $E_1, \dots, E_r$ les SEP pour f_{i_0} associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Puisque f_{i_0} est diagonalisable et n'est pas une homothétie, on a : $\forall k \in \{1, \dots, r\}, 1 \leq \dim(E_k) \leq n$.

Soient $k \in \{1, \dots, r\}, i \in I$. Puisque f_i et f_{i_0} commutent, d'après le cours, E_k est stable par f_i . Notons $f_{i,k}$ l'endomorphisme de E_k induit par f_i . Pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$, $(f_{i,k})_{i \in I}$ est une famille d'endomorphismes de E_k commutant deux à deux, donc, par hypothèse, il existe une base $\mathcal{B}_k$ de E_k telle que :

$$\forall i \in I, \text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(f_{i,k}) \in \mathbf{D}_{n_k}(K),$$

où $n_k = \dim(E_k) \leq n$.

Notons $\mathcal{B}$ la réunion ordonnée de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$. Alors, $\mathcal{B}$ est une base de E et, pour tout $i \in I$, la matrice de f_i dans $\mathcal{B}$ est diagonale.

Ceci montre le résultat pour $n + 1$.

On a établi la propriété demandée, par récurrence forte sur la dimension de E .

11.74 Soit $(f, g) \in M^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

Puisque $f \in M$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que f^k soit diagonalisable, et, puisque $g \in M$, il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que g^ℓ soit diagonalisable. Notons $p = k\ell \in \mathbb{N}^*$. Puisque f et g commutent, on a :

$$(f \circ g)^p = f^p \circ g^p = (f^k)^\ell \circ (g^\ell)^k.$$

Comme f^k et g^ℓ sont diagonalisables, il est immédiat que $(f^k)^\ell$ et $(g^\ell)^k$ sont diagonalisables. Puisque f et g com-

mutent, f^p et g^p commutent. D'après l'exercice 11.73, il en résulte que f^p et g^p sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices de f^p et g^p dans $\mathcal{B}$ soient diagonales. Par produit, la matrice de $f^p \circ g^p$ dans $\mathcal{B}$ est diagonale. Ceci montre que $(f \circ g)^p$ est diagonalisable. On conclut : $f \circ g \in M$.

11.75 1) Supposons χ_f irréductible.

Soit F un sev de E , stable par f , tel que $F \neq \{0\}$. Nous allons montrer $F = E$.

Notons $n = \dim(E)$.

Puisque $F \neq \{0\}$, il existe $x \in F$ tel que $x \neq 0$.

Ensuite, puisque F est stable par f , tous les vecteurs

$x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ sont dans F , donc :

$$\text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)) \subset F.$$

Montrons que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre. Soit

$(a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) = 0$. Notons

$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$. On a donc : $P(f) = 0$. Supposons $P \neq 0$. On a alors :

$$\chi_f \text{ irréductible, } \deg(\chi_f) = n, \deg(P) < n,$$

donc : $\text{pgcd}(\chi_f, P) = 1$.

D'après le théorème de Bezout, il existe alors $U, V \in K[X]$ tels que : $UP + V\chi_f = 1$. D'où :

$$x = \text{Id}_E(x) = (UP + V\chi_f)(f)(x) \\ = U(f)(P(f)(x)) + V(f)(\chi_f(f)(x)).$$

Par hypothèse, $P(f) = 0$, et, d'après le théorème de Cayley et Hamilton, $\chi_f(f) = 0$.

On déduit : $x = 0$, contradiction.

Ceci montre que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.

Alors :

$$n \geq \dim(F) \geq \dim(\text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))) = n,$$

d'où $F = E$.

2) Réciproquement, supposons que les seuls sev de E stables par f soient $\{0\}$ et E . Notons $n = \dim(E)$. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $(A, B) \in (K[X])^2$ tel que :

$$\chi_f = AB, \text{pgcd}(A, B) = 1,$$

$$1 \leq \deg(A) \leq n-1, 1 \leq \deg(B) \leq n-1.$$

Il est clair que les sev $\text{Ker}(A(f))$ et $\text{Ker}(B(f))$ sont stables par f , donc sont égaux à $\{0\}$ ou à E .

Si $\text{Ker}(A(f)) = \{0\}$ et $\text{Ker}(B(f)) = \{0\}$, alors, en utilisant le théorème de Cayley et Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux :

$$E = \text{Ker}(\chi_f(f)) = \text{Ker}(A(f)) \oplus \text{Ker}(B(f)) = \{0\},$$

contradiction.

On a donc, par exemple $\text{Ker}(A(f)) = E$, c'est-à-dire : $A(f) = 0$.

Il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$.

Notons $d = \deg(A)$, $1 \leq d \leq n-1$.

On a : $x \in \text{Ker}(A(f))$, puis, comme $\text{Ker}(A(f))$ est stable par f , on a :

$$f(x) \in \text{Ker}(A(f)), \dots, f^{d-1}(x) \in \text{Ker}(A(f)).$$

Comme $\deg(A) = d$, f^d se décompose linéairement sur $\text{Id}_E, f, \dots, f^{d-1}$, donc : $f^d(x) \in \text{Vect}(x, \dots, f^{d-1}(x))$. Le sev $G = \text{Vect}(x, \dots, f^{d-1}(x))$ est alors stable par f , et $G \neq \{0\}$, et $G \neq E$ car $1 \leq \dim(G) \leq d \leq n-1$, d'où une contradiction.

On conclut que χ_f est irréductible dans $K[X]$.

11.76 a) Supposons A et $2A$ semblables.

Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Alors, $2\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, puis, par une récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}$, $2^k \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Si $\lambda \neq 0$, alors les $2^k \lambda$, lorsque k décrit $\mathbb{N}$, sont deux à deux distincts, donc A admet une infinité de valeurs propres, contradiction.

On a donc : $\lambda = 0$.

Ceci montre : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$.

D'autre part, puisque $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

Il en résulte : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$.

D'après l'exercice 11.48, on conclut que A est nilpotente.

Remarque : La réciproque est vraie, c'est-à-dire que, si A est nilpotente, alors A est semblable à $2A$. Mais la résolution classique de cette question utilise la réduction de Jordan, qui n'est pas au programme.

b) Prenons $E = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, le $\mathbb{C}$ -ev des suites complexes indexées par $\mathbb{Z}$. Considérons l'application

$$f : E \longrightarrow E, \quad u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto (2^n u_n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Il est clair que : $f \in \mathcal{L}(E)$.

• On a, en notant 1 la suite constante égale à 1 :

$$f(1) = (2^n)_{n \in \mathbb{Z}},$$

puis, par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^k(1) = (2^{kn})_{n \in \mathbb{Z}} \neq 0,$$

donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^k \neq 0$.

Ceci montre que f n'est pas nilpotent.

• Considérons l'application

$$g : E \longrightarrow E, \quad (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Il est clair que : $g \in \mathcal{L}(E)$.

On a, pour toute $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} (g \circ f \circ g^{-1})(u) &= (g \circ f)((u_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}) = g((2^n u_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}) \\ &= (2^{n+1} u_n)_{n \in \mathbb{Z}} = 2(2^n u_n)_{n \in \mathbb{Z}} = 2f(u). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi :} \quad g \circ f \circ g^{-1} = 2f.$$

11.77 Munissons $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée associée, encore notée $\|\cdot\|$. Nous allons montrer que S est bornée et fermée dans $\mathbb{C}$.

1) Puisque E est compacte, E est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall A \in E, \quad \|A\| \leq M$.

Soit $\lambda \in S$. Il existe $A \in E$ telle que : $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, puis il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que : $AX = \lambda X$. On a :

$$|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\| \leq M \|X\|,$$

d'où, puisque $\|X\| > 0$: $|\lambda| \leq M$.

Ainsi : $S \subset B'(0; M)$, donc S est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

2) Soit $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite dans S convergeant vers un élément μ de $\mathbb{C}$.

Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, il existe $A_p \in E$ telle que

$\lambda_p \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A_p)$, puis il existe $X_p \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que :

$$A_p X_p = \lambda_p X_p \quad \text{et} \quad \|X_p\| = 1.$$

Puisque E est une partie compacte de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et que la sphère unité $S(0; 1) = \{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) : \|X\| = 1\}$ est une partie compacte de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, par produit cartésien, $E \times S(0; 1)$ est une partie compacte de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Il existe donc une extractrice σ et $(A, X) \in E \times S(0; 1)$ tels que :

$$(A_{\sigma(p)}, X_{\sigma(p)}) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} (A, X), \text{ c'est-à-dire :}$$

$$A_{\sigma(p)} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} A \quad \text{et} \quad X_{\sigma(p)} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} X.$$

Par continuité des opérations matricielles, il en résulte :

$$A_{\sigma(p)} X_{\sigma(p)} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} AX \quad \text{et} \quad \lambda_{\sigma(p)} X_{\sigma(p)} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \mu X,$$

d'où, par unicité de la limite : $AX = \mu X$.

De plus, comme : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \|X_{\sigma(p)}\| = 1$,

on a, par passage à la limite, $\|X\| = 1$, donc $X \neq 0$.

Ceci montre : $\exists A \in E, \quad \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, d'où : $\mu \in S$.

On a montré, par la caractérisation séquentielle, que S est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

Puisque S est une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$, et que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie, d'après le cours, on conclut que S est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Plan

Les méthodes à retenir	472
Énoncés des exercices	475
Du mal à démarrer ?	486
Corrigés	492

Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fbs
- Montrer qu'une application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fq, et expliciter la forme polaire φ de ϕ
- Étude de signe pour une fq
- Obtention d'inégalités faisant intervenir des ps ou/et des normes euclidiennes
- Étude des endomorphismes orthogonaux, manipulation des matrices orthogonales
- Étude de sev orthogonaux, de sev supplémentaires orthogonaux, détermination d'un projeté orthogonal, d'une distance
- Détermination d'un adjoint, manipulation d'un ou plusieurs adjoints
- Étude de matrices symétriques réelles, de matrices symétriques positives, de matrices symétriques définies-positives
- Inégalités issues de matrices symétriques positives
- Décomposition de matrices en divers produits.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de fbs, de fq, formules les reliant, propriétés de calcul
- Définition de fq positive, de fq définie-positive
- Interprétation matricielle des fbs
- Définition de ps, d'eve, produits scalaires usuels
- Inégalité de Cauchy et Schwarz, inégalité de Minkowski, études des cas d'égalité
- Définition et propriétés de l'orthogonalité
- Théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien réel
- Définition et propriétés des endomorphismes symétriques (ou : auto-adjoints)
- Définition et propriétés des endomorphismes orthogonaux
- Définition et propriétés de l'adjoint d'un endomorphisme d'un eve, interprétation matricielle dans une b.o.n.
- Théorème fondamental (ou : théorème spectral) pour un endomorphisme symétrique, pour une matrice symétrique réelle

- Définition de $\mathbf{S}_n^+$, de $\mathbf{S}_n^{++}$, de matrice symétrique positive, de matrice symétrique définie-positive
- Caractérisation des éléments de $\mathbf{S}_n^+$ ou $\mathbf{S}_n^{++}$ parmi ceux de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ à l'aide de leur spectre
- Théorème de réduction simultanée, pour une fbs et un ps, pour une matrice symétrique réelle et une matrice symétrique définie-positive.

Les méthodes à retenir

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :

ev pour : espace vectoriel

sev pour : sous-espace vectoriel

fbs pour : forme bilinéaire symétrique

fq pour : forme quadratique

ps pour : produit scalaire

eve pour : espace vectoriel euclidien

b.o.n. pour : base orthonormale.

Sauf mention contraire, n désigne un entier ≥ 1 .

Pour relier fbs et fq associées

Utiliser :

– l'expression de la fq ϕ associée à $\varphi : \forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x)$

➡ Exercice 12.1

– une expression de la fbs φ associée à la fq ϕ :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y)),$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{4}(\phi(x + y) - \phi(x - y)).$$

➡ Exercice 12.1.

Pour montrer qu'une application

$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$

est une fq sur un $\mathbb{R}$ -ev E

Exprimer la forme polaire φ de ϕ par dédoublement, et vérifier que φ est une fbs sur E et que ϕ est la fq associée à φ .

➡ Exercices 12.3, 12.7, 12.26, 12.27.

Pour établir une inégalité portant sur des produits scalaires ou/et des normes euclidiennes

Essayer d'utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz, moins fréquemment l'inégalité triangulaire.

➡ Exercices 12.4, 12.52.

Pour montrer qu'une matrice rectangulaire (éventuellement carrée) M est nulle

Il suffit de montrer $\|M\|_2^2 = 0$, c'est-à-dire : $\text{tr}({}^t M M) = 0$.

➡ Exercices 12.15, 12.46, 12.52, 12.53.

Pour obtenir des inégalités ou des égalités portant sur des produits scalaires ou des normes euclidiennes

Essayer, si les inégalités usuelles semblent inopérantes, d'introduire un paramètre λ réel dans une inégalité liée à la notion de produit scalaire, puis faire varier λ et choisir λ au mieux, ce qui revient souvent à traduire qu'un certain discriminant est ≤ 0 , comme dans la preuve classique de l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

➡ Exercices 12.62, 12.71.

Pour montrer que deux sev F, G d'un espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$ sont orthogonaux entre eux

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\forall x \in F, \forall y \in G, (x | y) = 0.$$

➡ Exercice 12.6 a).

Pour montrer qu'un sev G d'un eve $(E, (\cdot | \cdot))$ est l'orthogonal d'un sev F de E

Montrer : $\forall x \in F, \forall y \in G, (x | y) = 0$

et : $F \oplus G = E$ ou $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

➡ Exercice 12.6 a).

Pour calculer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un élément x d'un espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$ sur un sev F de dimension finie de E

• Si on connaît un sev G de E tel que $E = F \oplus^\perp G$, décomposer x en $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in G$, et on a alors $p_F(x) = y$.

➡ Exercice 12.6 b).

• Si on connaît une b.o.n. $(f_1, \dots, f_p)$ de F , appliquer la formule du

$$\text{cours : } p_F(x) = \sum_{k=1}^p (f_k | x) f_k.$$

➡ Exercice 12.5.

Pour étudier un endomorphisme orthogonal f d'un eve $(E, (\cdot | \cdot))$

Essayer d'utiliser :

– la définition : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) | f(y)) = (x | y)$

➡ Exercice 12.32

– la caractérisation par la conservation de la norme :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

– la caractérisation par le fait que l'image d'une b.o.n. soit une b.o.n.

– la traduction matricielle dans une b.o.n. $\mathcal{B}$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

**Pour traduire
qu'une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$
est orthogonale**

En plus des caractérisations des matrices orthogonales d'ordre n quelconque, penser à utiliser un produit vectoriel.

➡ Exercices 12.20, 12.21.

**Pour calculer l'adjoint
d'un endomorphisme f
d'un eve $(E, (\cdot | \cdot))$**

Essayer de :

– se ramener à la définition de l'adjoint, c'est-à-dire exprimer, pour $(x, y) \in E^2$ quelconque, $(f(x) | y)$ sous la forme $(x | g(y))$, où g est indépendant de x et y .

➡ Exercice 12.22

– utiliser la matrice A de f dans une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E , et on a alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tA$.

**Pour manipuler
un (ou des) adjoint(s)**

Utiliser la définition : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) | y) = (x | f^*(y))$,
et en particulier : $\forall x \in E, \|f(x)\|^2 = (x | f^* \circ f(x))$.

➡ Exercices 12.36, 12.37, 12.54, 12.55.

**Pour résoudre
une question
faisant intervenir
une (seule) matrice
symétrique réelle S**

Utiliser :

– la définition : ${}^tS = S$

– le théorème fondamental (ou : théorème spectral), sous sa forme matricielle :

$$\forall S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), \exists (\Omega, D) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{D}_n(\mathbb{R}), S = \Omega D \Omega^{-1}.$$

On est ainsi ramené à l'étude d'une matrice diagonale, pour laquelle on pourra passer aux éléments.

➡ Exercices 12.15, 12.41 à 12.43, 12.47, 12.49, 12.64, 12.70, 12.74, 12.79, 12.82 à 12.85, 12.87 à 12.90.

**Pour résoudre
une question
faisant intervenir
une (seule) matrice
de $\mathbf{S}_n^+$ ou de $\mathbf{S}_n^{++}$**

Utiliser l'un ou/et l'autre des deux résultats suivants :

– la définition de $S \in \mathbf{S}_n^+$ ou de $S \in \mathbf{S}_n^{++}$:

$$S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \left(S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0) \right)$$

$$S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \left(S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, {}^tX S X > 0) \right).$$

➡ Exercices 12.10, 12.14, 12.18, 12.44, 12.68, 12.69, 12.76

– la caractérisation des matrices de $\mathbf{S}_n^+$ ou de $\mathbf{S}_n^{++}$ parmi celles de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ à l'aide de leur spectre :

$$S \in \mathbf{S}_n^+ \iff (S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+)$$

$$S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff (S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*),$$

qui n'est pas dans le cours, mais est un exercice incontournable.

➡ Exercices 12.9, 12.11, 12.13, 12.16 à 12.19, 12.49, 12.66, 12.67, 12.70, 12.74, 12.83, 12.89.

**Pour transformer
une expression
faisant intervenir
une matrice S de S_n^+**

Essayer d'utiliser l'existence d'une matrice R de S_n^+ telle que $R^2 = S$, cf. exercice 12.11.

➡ Exercices 12.45, 12.59 à 12.61, 12.65, 12.80, 12.83.

**Pour résoudre
une question
dans laquelle interviennent
deux matrices
symétriques réelles A, B**

Essayer de :

– appliquer le théorème fondamental à A et répercuter la transformation sur B :

$$A = \Omega D \Omega^{-1}, \quad \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \quad D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}), \quad B = \Omega C \Omega^{-1},$$

où C n'est pas nécessairement diagonale, mais C est quand même symétrique.

Se ramener ainsi à une matrice diagonale (D) et une matrice pleine (C) au lieu de deux matrices pleines (A, B).

➡ Exercices 12.61, 12.66

– appliquer le théorème de réduction simultanée de deux formes quadratiques dont l'une est définie-positive, sous sa forme matricielle, si, par exemple, $A \in S_n^{++}$:

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}), \quad A = {}^t P P \quad \text{et} \quad B = {}^t P D P.$$

➡ Exercices 12.77, 12.78.

Énoncés des exercices

12.1 Étude de sev inclus dans le cône isotrope d'une forme quadratique

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, φ une fbs sur E , ϕ la fq associée à φ . On note $C(\phi)$ le cône isotrope de ϕ , c'est-à-dire : $C(\phi) = \{x \in E ; \phi(x) = 0\}$.

Établir, pour tout sev F de E : $F \subset C(\phi) \iff (\forall (x, y) \in F^2, \varphi(x, y) = 0)$.

12.2 Réciproque de l'inégalité de Cauchy et Schwarz

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, φ une fbs sur E , ϕ la fq associée à φ .

On suppose : $\forall (x, y) \in E^2, (\varphi(x, y))^2 \leq \phi(x)\phi(y)$. Montrer : $\phi \geq 0$ ou $\phi \leq 0$.

12.3 Exemple de forme quadratique positive sur un espace de fonctions

On note $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$ et $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \int_0^1 f^2 - \left(\int_0^1 f\right)^2$.

a) Montrer que ϕ est une fq sur E et exprimer sa forme polaire.

b) Montrer que ϕ est positive et déterminer le noyau de φ .

12.4 Exemple d'intervention de l'inégalité de Cauchy et Schwarz

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer : $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)$.

12.5 Matrice d'une symétrie orthogonale

Former, dans $\mathbb{R}^n$ usuel muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et de son produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot)$, la matrice de la symétrie orthogonale autour de la droite vectorielle engendrée par un vecteur unitaire $v = (v_1, \dots, v_n)$.

12.6 Orthogonalité entre $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique

$$(M, N) \mapsto (M | N) = \text{tr}({}^t M N).$$

a) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sev supplémentaires orthogonaux dans $M_n(\mathbb{R})$.

b) 1) Pour toute $M \in M_n(\mathbb{R})$, calculer la distance $d(M, S_n(\mathbb{R}))$ en fonction de M .

2) Exemple : Pour $M = \sum_{i=1}^n E_{i1}$, calculer $d(M, S_n(\mathbb{R}))$.

12.7 Exemple de fq définie positive sur un espace de polynômes

On note $E = X \mathbb{R}[X]$ et $q : E \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_0^1 (P + P')P'$.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -ev et que q est une fq définie positive sur E .

12.8 Calcul d'une borne inférieure par théorème de la projection orthogonale

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 |\ln x - ax - b|^2 dx$.

12.9 Caractérisation des matrices symétriques positives parmi les matrices symétrique réelles

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$a) S \in S_n^+ \iff \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+ \quad b) S \in S_n^{++} \iff \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

12.10 Somme de matrices symétriques positives

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $S_1, \dots, S_p \in S_n^+$. Montrer : $\sum_{k=1}^p S_k = 0 \iff (\forall k \in \{1, \dots, p\}, S_k = 0)$.

12.11 Existence de la racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive

Montrer : a) $\forall S \in S_n^+, \exists R \in S_n^+, S = R^2$ b) $\forall S \in S_n^{++}, \exists R \in S_n^{++}, S = R^2$.

(On pourra utiliser l'exercice 12.9.)

12.12 Inversibilité de la somme d'une matrice symétrique définie positive et d'une matrice antisymétrique

Soient $S \in S_n^{++}$, $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer : $S + A \in GL_n(\mathbb{R})$.

12.13 Exponentielle d'une matrice symétrique réelle

Montrer : a) $\forall S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), e^S \in \mathbf{S}_n^{++}$ b) $\forall S \in \mathbf{S}_n^+, I_n - e^{-S} \in \mathbf{S}_n^+$.

12.14 Exemple de matrice symétrique positive

Soient $n \geq 2$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{ij} = \begin{cases} n-1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Montrer : $A \in \mathbf{S}_n^+$. A-t-on $A \in \mathbf{S}_n^{++}$?

12.15 Matrices symétriques nilpotentes, matrices normales nilpotentes

a) Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer : $S = 0$.

b) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ normale, c'est-à-dire telle que $AA^t = A^tA$, et nilpotente. Montrer : $A = 0$.

12.16 Matrice de $\mathbf{S}_n^+$ issue d'une matrice de $\mathbf{S}_n^{++}$

Montrer : $\forall S \in \mathbf{S}_n^{++}, S + S^{-1} - 2I_n \in \mathbf{S}_n^+$.

12.17 Matrices symétriques telles que $S^p = I_n$

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $S^p = I_n$. Montrer : $\begin{cases} p \text{ impair} & \implies S = I_n \\ p \text{ pair} & \implies S^2 = I_n. \end{cases}$

12.18 Matrices de la forme AA^t

Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $S = AA^t$.

a) Montrer : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

b) Établir : $S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

12.19 Factorisation d'une matrice diagonalisable

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer : $\exists A \in \mathbf{S}_n^{++}, \exists B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), M = AB$.

12.20 Matrices orthogonales d'ordre 3 dont la première ligne est imposée

Trouver toutes les matrices $A \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$ de première ligne $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

12.21 Matrices de similitude directe dont les deux premières colonnes sont données

CNS sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 2 & 2 & b \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix}$ soit la matrice, dans une b.o.n., d'une similitude directe.

12.22 Exemple de détermination d'un adjoint

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $a, b \in E$. Déterminer l'adjoint f^* de $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall x \in E, f(x) = (a | x)b - (b | x)a.$$

12.23 CNS pour que $p^* \in \text{Vect}(e, p)$

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $e = \text{Id}_E$, $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$.

Montrer : $p^* \in \text{Vect}(e, p) \iff p^* = p$.

12.24 Image d'une forme quadratique

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev non réduit à $\{0\}$, φ une fbs sur E telle que $\varphi \neq 0$, q la forme quadratique associée à φ . Montrer :

- 1) q positive $\iff q(E) = \mathbb{R}_+$
- 2) q négative $\iff q(E) = \mathbb{R}_-$
- 3) q ni positive ni négative $\iff q(E) = \mathbb{R}$.

12.25 Exemple de fq définie par un polynôme homogène de degré 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note : $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$.

- a) Vérifier que ϕ est une fq positive sur $\mathbb{R}^n$.
- b) Déterminer le cône isotrope de ϕ , c'est-à-dire $C(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \phi(x) = 0\}$.

12.26 Étude de signes pour une fq sur un espace de polynômes

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)P(-n)e^{-n}$.

- a) Montrer que ϕ est une fq sur E .
- b) On note E_+ (resp. E_-) le sev de E formé des polynômes pairs (resp. impairs). Montrer que E_+ et E_- sont des sev de E supplémentaires dans E , orthogonaux pour la forme polaire φ de ϕ , et que :

$$(\forall P \in E_+ - \{0\}, \phi(P) > 0) \text{ et } (\forall P \in E_- - \{0\}, \phi(P) < 0).$$

12.27 Étude d'une forme quadratique

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $p \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

On note : $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i | x)^2$.

- a) Montrer que ϕ est une fq sur E , et exprimer sa forme polaire φ .
- b) CNS sur $(u_1, \dots, u_p)$ pour que φ soit un produit scalaire sur E .

12.28 Annulation d'un produit scalaire

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \text{Sp}(f)$ tels que $\lambda \leq 0 \leq \mu$, x (resp. y) un vecteur propre de f associé à λ (resp. μ). Établir : $\exists z \in [x; y], (f(z) | z) = 0$,

où $[x; y]$ désigne le segment de E joignant x et y : $[x; y] = \{(1-t)x + ty ; t \in [0; 1]\}$.

12.29 Formes linéaires issues d'une trace

On note, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) - \{0\}$: $\varphi_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \text{tr}(AM)$.

- a) Montrer : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) - \{0\}, \varphi_A \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^* - \{0\}$.
- b) On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot)$.

Montrer : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) - \{0\}, (\text{Ker}(\varphi_A))^\perp = \mathbb{R}^t A$.

12.30 Exemple de produit scalaire sur un espace de polynômes

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k).$$

- a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
 b) Dans le cas $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, trouver une b.o.n. de E pour φ .

12.31 Comportement d'une forme quadratique au voisinage de 0

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $(\cdot | \cdot)$, ϕ une fq sur E . Montrer :

$$\frac{|\phi(x)|^{3/4}}{\|x\|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

12.32 Endomorphisme orthogonal d'un espace de matrices carrées

On note, pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) : f_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), M \longmapsto AM$.

CNS sur A pour que f_A soit un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

12.33 Orthogonaux de sev dans un espace de fonctions

On note $E = C^1([0; 1]; \mathbb{R})$ et, pour $(f, g) \in E^2 : (f | g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$.

- a) Vérifier que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .
 b) 1) Quel est l'orthogonal de $F = \text{Vect}(e_0)$, où $e_0 : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1$?
 2) Quel est l'orthogonal de $G = \{g \in E ; g(0) = 0\}$?

12.34 Exponentielle d'une matrice antisymétrique réelle

Montrer : $\forall A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}), e^A \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser l'exercice 11.28.)

12.35 Étude de convergence pour une suite de matrices carrées

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I_n \iff A_k + A_k^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 2I_n$.

12.36 Étude de $\text{Ker}(f + f^*)$ pour f tel que $f^2 = 0$

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ une eve, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.

Montrer : $\text{Ker}(f + f^*) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$.

12.37 Noyaux de polynômes de f ou de f^*

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ une eve, $f \in \mathcal{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux.

Montrer : $\text{Ker}(P(f)) \perp \text{Ker}(Q(f^*))$.

12.38 Endomorphismes orthogonaux f tels que $\text{Sp}(f + f^*) = \{2\}$

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ une eve, $e = \text{Id}_E$, $f \in \mathcal{O}(E)$, $g = f + f^*$.

Montrer : $\text{Sp}(g) = \{2\} \iff f = e$.

12.39 Exemple de matrice symétrique définie positive

On note $A = (\text{Min}(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.

12.40 Terme diagonal nul dans une matrice symétrique positive

Soit $S = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{S}_n^+$. Montrer que, si un terme diagonal de S est nul, alors tous les termes de S situés dans la ligne ou dans la colonne de celui-ci sont nuls.

12.41 Expression variationnelle du rayon spectral

Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S (non nécessairement distinctes), $\rho(S) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, le *rayon spectral* de S , $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer : $\rho(S) = \sup_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_2=1} \|SX\|_2$.

12.42 Endomorphismes symétriques dont le spectre évite un intervalle

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $f \in \mathcal{S}(E)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$.

On suppose : $\text{Sp}(f) \cap]a; b[= \emptyset$. Montrer : $\forall x \in E, (f(x) - ax | f(x) - bx) \geq 0$,

et étudier le cas d'égalité lorsque $\text{Sp}(f) \cap [a; b] = \emptyset$.

12.43 Encadrement des vp réelles de A à l'aide des vp de $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$

Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$.

On note α (resp. β) la plus petite (resp. grande) valeur propre de S .

Montrer, pour toute valeur propre réelle λ de A : $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

12.44 Matrice symétrique par blocs

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathbf{S}_p^{++}$, $C \in \mathbf{S}_q^{++}$, $B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & -C \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

Démontrer que M est symétrique et inversible.

12.45 Inégalité issue de l'inégalité de Cauchy et Schwarz

Montrer : $\forall S \in \mathbf{S}_n^{++}, \forall X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ({}^tXSX)({}^tYS^{-1}Y) \geq ({}^tXY)^2$.

12.46 Trace et matrices antisymétriques, symétriques, symétriques positives

Soit $(A, B) \in (\mathbf{A}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer : $\text{tr}((AB - BA)^4) \geq 0$ et étudier le cas d'égalité.

12.47 Exemple d'équation matricielle faisant intervenir une transposée

Résoudre l'équation $X^tXX = I_n$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

12.48 Caractérisation des matrices de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer : $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \text{tr}({}^tAA) = 2 \\ \det(A) = 1. \end{cases}$

12.49 Suite de matrices symétriques définies positives

Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$. On considère la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_0 = I_n$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, A_{p+1} = \frac{1}{2}(A_p + SA_p^{-1}).$$

a) Montrer que $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall p \in \mathbb{N}, A_p \in \mathbf{S}_n^{++}$.

b) Établir que $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que sa limite L vérifie : $L \in \mathbf{S}_n^+$ et $L^2 = S$.

12.50 Noyau d'une fbs issue d'une autre fbs

Soient E un K -ev, $a \in E$, φ une fbs sur E , ϕ la fq associée à φ . On note :

$$\psi : E^2 \longrightarrow K, (x, y) \longmapsto \phi(a)\varphi(x, y) - \varphi(a, x)\varphi(a, y).$$

a) Vérifier que ψ est une fbs sur E .

b) On suppose $\phi(a) \neq 0$. Montrer : $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(\varphi) \oplus Ka$.

12.51 Étude de noyau pour une matrice vérifiant une condition de positivité

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$. Montrer : $\text{Ker}(A) = \text{Ker}({}^tA)$.

12.52 Borne supérieure sur un cercle de matrices

Déterminer la borne supérieure de $\text{tr}(X) + \text{tr}(Y)$ lorsque le couple (X, Y) de $(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$ vérifie : ${}^tXX + {}^tYY = I_n$.

12.53 Matrices M nilpotentes telles que $I_n + M$ soit orthogonale

Déterminer l'ensemble des $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M soit nilpotente et que $I_n + M$ soit orthogonale.

12.54 Noyau et image d'un endomorphisme normal

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$ normal, c'est-à-dire tel que : $f \circ f^* = f^* \circ f$. Montrer :

a) $\text{Ker}(f^*) = \text{Ker}(f)$ b) $\text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f) = E$ c) $\text{Im}(f^*) = \text{Im}(f)$.

12.55 Endomorphismes tels que $f \circ f^* = f^2$

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer : $f \circ f^* = f^2 \iff f = f^*$.

12.56 Expression de $\text{tr}(f^* \circ f)$ à l'aide de deux b.o.n.

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $n = \dim(E) \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $B = (e_1, \dots, e_n)$, $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux b.o.n. de E . Montrer : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (f(e_i) | e'_j)^2 = \text{tr}(f^* \circ f)$.

12.57 Endomorphisme d'un espace de polynômes

On note $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, (P | Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

a) 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathcal{L}(E_n)$ unique tel que :

$$\forall P, Q \in E_n, (P | f_n(Q)) = (XP | Q).$$

2) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f_n(X^k) = X^{k+1}$.

3) Est-ce que f_n est auto-adjoint ?

b) Calculer $f_2(X^k)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

12.58 Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive

a) Montrer : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+, \exists ! R \in \mathbf{S}_n^+, R^2 = S$.

On dit que R est la *racine carrée symétrique positive* de S , et on note : $R = S^{1/2}$.

b) Établir : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+, \exists P \in \mathbb{R}[X], S^{1/2} = P(S)$.

c) En déduire que, pour tout $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$, A et B commutent si et seulement si $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent.

12.59 Décomposition polaire dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

Démontrer : $\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \exists (\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{++}, A = \Omega S$.

12.60 Diagonalisabilité de certains produits de deux matrices

Soient $A \in \mathbf{S}_n^{++}, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser l'exercice 12.11.)

12.61 Trace d'un produit de deux matrices symétriques positives

Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$. Montrer : $0 \leq \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.

12.62 Noyaux de blocs d'une matrice symétrique positive

Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$ partitionnée en blocs : $S = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & C \end{pmatrix}$, où $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p + q = n$, $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R}), B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R}), C \in \mathbf{M}_q(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(B) \text{ et } \text{Ker}(C) \subset \text{Ker}({}^tB).$$

12.63 Concavité, convexité de fonctions liées à un spectre

Soient $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t)$ (resp. $g(t)$) la plus petite (resp. grande) valeur propre de $A + tB$. Montrer que f est concave et que g est convexe. (On pourra utiliser l'exercice 12.41.)

12.64 Matrices satisfaisant une condition de trace

Soit $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall B \in \mathbf{S}_n^{++}, \text{tr}(AB) \geq 0$. Montrer : $A \in \mathbf{S}_n^+$.

12.65 Spectre complexe de SA , pour $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ et $A + {}^tA \in \mathbf{S}_n^{++}$

Soient $S \in \mathbf{S}_n^{++}, A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + {}^tA \in \mathbf{S}_n^{++}$.

Démontrer : $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(SA), \text{Re}(\lambda) > 0$. (On pourra utiliser l'exercice 12.11.)

12.66 Étude de $AB + BA = 0$, pour $A \in \mathbf{S}_n^+, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$

a) Soient $A \in \mathbf{S}_n^+, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0$. Montrer : $AB = BA = 0$.

b) Donner un exemple de couple (A, B) tel que :

$$A \in \mathbf{S}_2^+ - \{0\}, B \in \mathbf{S}_2^+ - \{0\}, AB = BA = 0.$$

12.67 Produit scalaire issu d'une matrice par blocs

Soit $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.

Montrer que l'application $\varphi : (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \longmapsto -\det \begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ X & A \end{pmatrix}$

est un produit scalaire.

12.68 Matrice de Hilbert

On note $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $H_n \in \mathbf{S}_n^{++}$.

12.69 Matrice inversible issue de matrices symétriques positives

Démontrer : $\forall A \in \mathbf{S}_n^{++}, \forall B \in \mathbf{S}_n^+, I_n + AB \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

12.70 Inégalité sur un déterminant de matrice symétrique positive

Montrer : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+, 1 + (\det(S))^{1/n} \leq (\det(I_n + S))^{1/n}$.

12.71 Caractérisation des fq dont le noyau est égal au cône isotrope

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, q une fq sur E , φ la forme polaire de q , $\text{Ker}(\varphi)$ le noyau de φ , $C(q) = \{x \in E; q(x) = 0\}$ le cône isotrope de q . Montrer que q est de signe fixe si et seulement si : $\text{Ker}(\varphi) = C(q)$.

12.72 Famille obtusangle

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un eve, $n = \dim(E) \geq 1$.

Une famille finie $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E est dite *obtusangle* si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (i \neq j \implies (x_i | x_j) < 0).$$

a) Soit $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Montrer que, si $(x_1, \dots, x_p)$ est obtusangle, alors $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

b) En déduire qu'il n'existe pas de famille obtusangle dans E , de cardinal $\geq n + 2$.

12.73 Déterminants de matrices carrées extraites d'une matrice orthogonale

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $p \in \{1, \dots, n-1\}$, $\Omega = (\omega_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$A = (\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}, B = (\omega_{ij})_{p+1 \leq i, j \leq n}, \text{ de sorte que : } \Omega = \begin{pmatrix} A & * \\ * & B \end{pmatrix}.$$

Montrer : $|\det(A)| = |\det(B)| \in [0; 1]$. (On pourra utiliser l'exercice 11.55.)

12.74 Inégalité de convexité, inégalités de Hadamard

a) 1) Soit $S = (s_{ij})_{ij} \in \mathbf{S}_n^+$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S (non nécessairement distinctes). Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Démontrer : $\sum_{i=1}^n f(s_{ii}) \leq \sum_{k=1}^n f(\lambda_k)$.

2) En déduire : $\forall S = (s_{ij})_{ij} \in \mathbf{S}_n^+, \det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}$.

b) Établir : $\forall A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), |\det(A)| \leq \left(\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$.

12.75 Majoration d'une valeur absolue de déterminant

Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tAA = \alpha A + \beta {}^tA$.

Démontrer : $|\det(A)| \leq (\alpha + \beta)^n$. (On pourra utiliser l'exercice 12.74 b).)

12.76 Matrice symétrique positive dont les termes sont des aires

Soient $D_1, \dots, D_n$ des domaines simples de $\mathbb{R}^2$ (pour lesquels on puisse définir l'aire). On note, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, a_{ij} l'aire de $D_i \cap D_j$, et $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer : $A \in \mathbf{S}_n^+$.

12.77 Étude de $\det(A + B)$ pour $A, B \in \mathbf{S}_n^+$

Démontrer : $\forall (A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$, $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

12.78 Matrices dont les coefficients sont définis par des intégrales

Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et ≥ 0 , $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $0 \leq a \leq b \leq 1$. On note $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices définies, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$,

$$\text{par : } a_{ij} = \int_a^b f(x)x^{i+j} dx, \quad b_{ij} = \int_0^1 f(x)x^{i+j} dx.$$

Démontrer : $\det(A) \leq \det(B)$. (On pourra utiliser l'exercice 12.77.)

12.79 Étude de matrices normales

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t A = {}^t A A$. On suppose que les valeurs propres de ${}^t A A$ sont toutes simples. Démontrer : ${}^t A = A$.

12.80 Caractérisation des matrices A diagonalisables, par une factorisation de ${}^t A$

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (ii) $\exists S \in \mathbf{S}_n^{++}$, ${}^t A = S^{-1} A S$.

12.81 Décomposition polaire dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

Démontrer : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists (\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^+$, $A = \Omega S$.

(On pourra utiliser l'exercice 12.59.)

12.82 Factorisation $\Omega_1 D \Omega_2$ d'une matrice carrée réelle

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+)$ telles que : $A = \Omega_1 D \Omega_2$. (On pourra utiliser l'exercice 12.81.)

12.83 Inégalités sur déterminants et traces

a) Montrer : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+$, $(\det(S))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(S)$.

b) En déduire :

$$1) \forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), |\det(A)| \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr}({}^t A A) \right)^{n/2}$$

$$2) \forall A, B \in \mathbf{S}_n^+, \det(A) \det(B) \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr}(AB) \right)^n.$$

12.84 Les matrices ${}^t A A$ et $A {}^t A$ sont orthogonalement semblables

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A {}^t A$ et ${}^t A A$ sont *orthogonalement semblables*, c'est-à-dire qu'il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A {}^t A = \Omega {}^t A A \Omega^{-1}$.

12.85 Mineurs de Gauss

a) Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Pour chaque $p \in \{1, \dots, n\}$, on note $A_p = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathbf{S}_p(\mathbb{R})$. Les $\det(A_p)$, $1 \leq p \leq n$, sont appelés *les mineurs de Gauss de A*.

α) Montrer : $A \in \mathbf{S}_n^+ \implies (\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) \geq 0)$.

β) La réciproque du résultat précédent est-elle vraie ?

γ) Démontrer : $A \in \mathbf{S}_n^{++} \iff (\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) > 0)$.

b) En déduire que $\mathbf{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathbf{S}_n^+$.

c) Soient $a \in]-1; 1[$ et $A = (a^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer : $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.

12.86 Décomposition de Choleski

Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer :

a) $S \in \mathbf{S}_n^+ \iff (\exists T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R}), S = {}^t T T)$

b) $S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff (\exists T \in \mathbf{T}_{n,s} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), S = {}^t T T)$.

12.87 Inégalité sur les vp d'une matrice symétrique réelle à termes ≥ 0

Soient $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ à termes tous ≥ 0 , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , rangées de sorte que : $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Démontrer : $\lambda_1 \geq |\lambda_n|$.

12.88 Orthodiagonalisation simultanée d'une famille commutative de matrices symétriques réelles

Soient I un ensemble non vide, $(S_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, commutant deux à deux. Démontrer qu'il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in I, \Omega^{-1} S_i \Omega \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$.

12.89 Simplification de matrices symétriques positives

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et que $P|_{\mathbb{R}_+}$ soit strictement croissante.

Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$ telles que $P(A) = P(B)$. Montrer : $A = B$.

(On pourra utiliser l'exercice 12.88.)

12.90 Théorème du minimax de Courant et Fischer

Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S , rangées de sorte que : $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Pour chaque $r \in \{0, \dots, n-1\}$, on note $\mathcal{F}_r$ l'ensemble des sev de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension $n-r$.

Démontrer : $\forall r \in \{0, \dots, n-1\}, \lambda_{r+1} = \inf_{F \in \mathcal{F}_r} \left(\sup_{X \in F \text{ et } {}^t X X = 1} {}^t X S X \right)$.

Du mal à démarrer ?

12.1 Utiliser, pour le sens $\implies$, l'expression de $\varphi(x, y)$ à l'aide de $\phi(x + y)$, $\phi(x)$, $\phi(y)$, et, pour le sens $\impliedby$, l'expression de $\phi(x)$ à l'aide de φ .

12.2 Raisonner par l'absurde.

12.3 a) Considérer l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenue par dédoublement de ϕ , et montrer que φ est une fbs et que ϕ est la fq associée à φ .

b) 1) Utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz pour des intégrales.

2) Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy et Schwarz pour des intégrales.

12.4 Appliquer convenablement l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

12.5 Avec les notations usuelles, et en notant p l'orthoprojecteur sur $\mathbb{R}v$, on a : $s = 2p - e$ et $p(x) = (v | x)v$.

12.6 a) Pour montrer l'orthogonalité, calculer $(S | A)$ pour $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, et obtenir $(S | A) = 0$.

b) 1) Décomposer M sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

12.7 Considérer l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenue par dédoublement de ϕ .

12.8 Noter, par exemple, f, φ_1, φ_2 les éléments de E définis, pour tout $x \in [0; 1]$, par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x,$$

et $F = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.

Interpréter la question comme le calcul du carré de la distance de f à F . Appliquer le théorème de projection orthogonale et chercher le projeté orthogonal φ de f sur F sous la forme $a\varphi_1 + b\varphi_2$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

12.9 a) 1) Supposer $S \in \mathbf{S}_n^+$. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$. Utiliser un vecteur propre V pour S , associé à la valeur propre λ .

2) Réciproquement, supposer : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

Utiliser le théorème fondamental (ou : théorème spectral), puis se ramener à un calcul faisant intervenir une matrice diagonale.

b) Reprendre a) en précisant le caractère strict de certaines inégalités.

12.10 Un sens est évident. Pour l'autre sens, calculer ${}^tX \left(\sum_{k=1}^p S_k \right) X$, pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

12.11 a) Utiliser le théorème fondamental, l'exercice 12.9, et la matrice diagonale formée des racines carrées des valeurs propres de S .

b) Compléter a) par une étude d'inégalités strictes ou d'inversibilité.

12.12 Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(S + A)X = 0$. Dédurre ${}^tX S X = 0$, puis $X = 0$.

12.13 Utiliser le théorème fondamental et l'exercice 12.9.

12.14 Pour $X = {}^t(x_1 \dots x_n) \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, calculer ${}^tX A X$ et remarquer :

$${}^tX A X = \|U\|^2 \|X\|^2 - (U | X)^2, \text{ où } U = {}^t(1 \dots 1).$$

12.15 a) Utiliser le théorème fondamental.

b) Appliquer a) à $S = {}^tA A$, puis utiliser la norme euclidienne associée au ps canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

12.16 Utiliser le théorème fondamental et l'exercice 12.9 pour se ramener à des matrices diagonales.

12.17 Utiliser le théorème fondamental pour se ramener à une matrice diagonale.

12.18 a) Calculer ${}^tX S X$ pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Compléter a) par une étude d'inversibilité.

12.19 Utiliser le théorème fondamental et l'exercice 12.18.

12.20 En notant L_1, L_2, L_3 les lignes de A , vérifier $\|L_1\| = 1$, noter $L_2 = (a \ b \ c)$, traduire $(L_1 | L_2) = 0$ et $\|L_2\|_2^2 = 1$, puis, au signe près, $L_3 = L_1 \wedge L_2$.

12.21 D'après le cours, A est la matrice, dans une b.o.n., d'une similitude directe si et seulement si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \alpha A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R}).$$

Noter C_1, C_2, C_3 les colonnes de $\frac{1}{3}A$, et traduire la condition

$$\frac{1}{3}A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R}), \text{ en utilisant un produit vectoriel.}$$

12.22 Exprimer $(f(x) | y)$, pour tout $(x, y) \in E^2$ sous la forme $(x | \dots)$.

12.23 Un sens est évident.

Réciproquement, supposer $p^* = \alpha e + \beta p$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $p^* \circ p$ et séparer en cas : $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \beta = 0$.

12.24 • Montrer d'abord les implications directes, dans les trois cas :

1) si $q \geq 0$ et $q \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $q(x) > 0$ et remar-

quer : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $t = q\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{q(x)}}x\right)$

2) le cas $q \leq 0$ est analogue au cas $q \geq 0$

3) si q n'est ni positive ni négative, utiliser $u, v \in E$ tels que : $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$.

• 1) Montrer la réciproque en raisonnant par l'absurde et en utilisant les implications directes de 2) et 3).

2), 3) Analogues à 1).

12.25 a) Remarquer qu'il s'agit d'un polynôme homogène de degré 2, à valeurs ≥ 0 .

b) Immédiat.

12.26 a) • Ne pas oublier de montrer que, pour tout $P \in E$, la série $\sum_{n \geq 0} P(n)P(-n)e^{-n}$, converge.

• Considérer l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ obtenue par dédoublement de ϕ .

12.27 a) Considérer l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ obtenue par dédoublement de φ .

b) Remarquer $\phi \geq 0$ et traduire que ϕ est définie-positive.

12.28 Se rappeler que le segment joignant x et y dans E est, par définition :

$$[x; y] = \{(1-t)x + ty; t \in [0; 1]\}.$$

Considérer l'application $u : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$t \in [0; 1] \mapsto u(t) = \left(f((1-t)x + ty) \mid (1-t)x + ty\right),$$

et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

12.29 a) Immédiat.

b) Montrer que $\text{Ker}(\varphi_A)$ est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, donc $(\text{Ker}(\varphi_A))^\perp$ est une droite vectorielle, et vérifier ${}^tA \in (\text{Ker}(\varphi_A))^\perp$.

12.30 a) Certaines vérifications sont immédiates. Pour montrer $\varphi(P, P) \implies P = 0$, raisonner sur les degrés.

b) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$ de E .

12.31 Utiliser le résultat du cours sur une majoration relative aux applications bilinéaires en dimension finie.**12.32** Traduire que, pour tout $(M, N) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$:

$$(f_A(M) \mid f_A(N)) = (M \mid N).$$

12.33 a) Immédiat.

b) 1) Pour $f \in E$, traduire $f \in F^\perp$.

2) Montrer $G^\perp \subset F$ en considérant, pour $f \in G^\perp$, $g = f - f(0)e_0$. Vérifier : $e_0 \in G^\perp$.

12.34 Montrer : ${}^t(e^A)e^A = I_n$ et $\det(e^A) = 1$,

en utilisant l'exercice 11.28.

12.35 Un sens est immédiat.

Pour l'autre sens, considérer $\|A_k - I_n\|^2$.

12.36 1) Une inclusion est immédiate.

2) Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(f + f^*)$. Dédire $f \circ f^*(x) = 0$, puis, en utilisant le ps, montrer $f^*(x) = 0$.

12.37 Appliquer le théorème de Bezout.**12.38** • Un sens est évident.

• Réciproquement, supposer $\text{Sp}(g) = \{2\}$. Remarquer que g est symétrique et appliquer le théorème fondamental, puis déduire $g = 2e$. Calculer $(f - e)^* \circ (f - e)$.

12.39 1^{re} méthode : Utilisation d'une factorisation de A :

Remarquer $A = {}^tTT$ où T est une matrice triangulaire très simple. Appliquer alors l'exercice 12.18.

2^e méthode : Décomposition de la fq en somme de carrés :

Obtenir, avec les notations usuelles :

$${}^tXAX = (x_1 + \dots + x_n)^2 + \dots + x_n^2.$$

12.40 Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{ii} = 0$. Considérer, pour $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $j \neq i$, et pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$${}^t(\alpha E_i + E_j)S(\alpha E_i + E_j).$$

12.41 Utiliser le théorème fondamental pour se ramener à une matrice diagonale.**12.42** 1) Inégalité :

Utiliser le théorème fondamental.

2) Étude du cas d'égalité :

Reprendre les calculs de 1) en supposant qu'il y a égalité.

12.43 Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que : $AX = \lambda X$. Calculer ${}^tX S X$ et utiliser le théorème fondamental.

12.44 Pour $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, traduire $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en faisant apparaître ${}^tX A X$ et ${}^tY C Y$.

12.45 Utiliser l'exercice 12.11.

12.46 Noter $C = AB - BA$.

1) Inégalité : Obtenir successivement :

$$C \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}), \quad C^2 \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), \quad C^4 \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

2) Étude du cas d'égalité :

Utiliser la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

12.47 Dédurre que X est symétrique, puis $X^3 = I_n$. Utiliser le théorème fondamental pour se ramener à une matrice diagonale.

12.48 1) Un sens est évident.

2) Réciproquement, supposer : $\text{tr}(AA) = 2$ et $\det(A) = 1$. Former le polynôme caractéristique χ_{AA} de AA et utiliser le théorème fondamental.

12.49 a) Utiliser le théorème fondamental. Avec des notations évidentes, considérer, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, les suites réelles $(\mu_{i,p})_{p \in \mathbb{N}}$ définies par $\mu_{i,0} = 1$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mu_{i,p+1} = \frac{1}{2}(\mu_{i,p} + \lambda_i \mu_{i,p}^{-1}),$$

et considérer $D_p = \text{diag}(\mu_{1,p}, \dots, \mu_{n,p})$.

Montrer, par récurrence sur p , que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A_p existe et $A_p = \Omega D_p \Omega^{-1}$.

b) Étudier des suites récurrentes réelles.

12.50 a) Immédiat.

b) • Montrer $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\psi)$ et $a \in \text{Ker}(\psi)$.

• Montrer : $\text{Ker}(\varphi) \cap Ka = \{0\}$.

• Utiliser l'hyperplan $\text{Ker}(\varphi(a, \cdot))$.

12.51 Soit $x \in \text{Ker}(A)$. Pour $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, remarquer :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad {}^t(X + \lambda Y)A(X + \lambda Y) \geq 0.$$

12.52 1) Appliquer l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ usuel à I_n et X , pour obtenir :

$$(\text{tr}(X))^2 \leq n \text{tr}({}^tX X).$$

Remarquer : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

2) Examiner le cas $X = Y = \frac{1}{\sqrt{2}} I_n$.

12.53 1) Soient $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $M^k = 0, M^{k-1} \neq 0, I_n + M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Obtenir : ${}^tM + M + {}^tM M = 0$, multiplier par M^{k-1} , et amener une contradiction.

2) $M = 0$ convient.

12.54 a) • Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Calculer $\|f^*(x)\|^2$ et déduire $f^*(x) = 0$.

• Appliquer le résultat précédent à f^* à la place de f .

b) • Montrer : $\text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f)$.

• Utiliser le théorème du rang.

c) • Soit $y \in \text{Im}(f^*)$. Utiliser b) pour décomposer y sur $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

• Appliquer le résultat précédent à f^* à la place de f .

12.55 • Un sens est immédiat.

• Réciproquement, supposer $f \circ f^* = f^2$.

Noter $g = f - f^*$ et calculer $g^* \circ g$, puis utiliser le produit scalaire usuel sur $\mathcal{L}(E)$.

12.56 Noter $A = (a_{ij})_{ij} = \text{Mat}_B(f)$.

Calculer, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $(f(e_i) | e'_j)$.

Noter $E = (e_k | e'_j)_{1 \leq k, j \leq n}$ et montrer :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (f(e_i) | e'_j) = \|AE\|_2^2.$$

12.57 a) 1) Soient $n \in \mathbb{N}, Q \in E_n$. Montrer que

$$\varphi_Q : E_n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto (XP | Q)$$

est une forme linéaire sur E_n , et en déduire qu'il existe $Q_1 \in E_n$ unique tel que : $\forall P \in E, \varphi_Q(P) = (P | Q_1)$.

Remarque : On ne peut pas définir directement f_n comme un adjoint, car $P \longmapsto XP$ n'est pas un endomorphisme de E_n .

2) Calculer $(P | X^{k+1})$ pour tout $P \in E_n$.

3) Revenir à la définition.

b) • On a déjà $f_2(1)$ et $f_2(X)$ d'après a) 2).

• Noter $f_2(X^2) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

et traduire la définition de f_2 .

12.58 a) 1) Existence : Cf. exercice 12.11.

2) Unicité :

Soit $R \in \mathbf{S}_n^+$ telle que $R^2 = S$.

Considérer les sous-espaces propres pour R et pour S , et montrer que ce sont les mêmes.

b) Utiliser un polynôme d'interpolation.

c) Utiliser b) et le cours sur les polynômes de matrices carrées.

12.59 1) Unicité :

Si (Ω, S) convient, déduire ${}^tAA = S^2$, appliquer l'exercice 12.58, et déduire aussi Ω .

2) Existence :

Utiliser les exercices 12.18 et 12.58.

12.60 Utiliser l'exercice 12.11 et $R^2B = R(RBR)R^{-1}$.

12.61 Appliquer le théorème fondamental à A , d'où, avec des notations classiques, $A = \Omega D \Omega^{-1}$, puis noter $C = \Omega^{-1} B \Omega$. On se ramène ainsi, au lieu de (A, B) , à (D, C) , où D est diagonale. Passer alors aux éléments.

12.62 Soient $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{R})$. En considérant ${}^t \begin{pmatrix} X \\ \alpha Y \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} X \\ \alpha Y \end{pmatrix}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, déduire :

$$({}^tYBX)^2 - ({}^tXAX)({}^tYCY) \leq 0.$$

12.63 Appliquer l'exercice 12.41 (et un résultat analogue) pour obtenir, par exemple :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \min_{\|X\|_2=1} ({}^tX(A+tB)X).$$

Pour $u, v \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0; 1]$, $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_2 = 1$, calculer : ${}^tX(A + ((1-\alpha)u + \alpha v)B)X$.

12.64 Utiliser le théorème fondamental pour se ramener à une matrice diagonale et utiliser l'hypothèse convenablement appliquée.

12.65 Utiliser l'exercice 12.11 pour se ramener à RAR à la place de SA . Faire intervenir les nombres complexes. Pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(RAR)$ et $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tels que $(RAR)X = \lambda X$, calculer $(X^*R)(A + {}^tA)(RX)$.

12.66 a) Appliquer le théorème fondamental à A pour obtenir $A = \Omega D \Omega^{-1}$, où Ω est orthogonale et D diagonale, et noter $C = \Omega^{-1} B \Omega$.

Se ramener à (D, C) au lieu de (A, B) .

12.67 Calculer le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ X & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A^{-1}X & A^{-1} \end{pmatrix},$$

puis passer aux déterminants.

12.68

Remarquer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$

et calculer ${}^tX H_n X$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

12.69 Montrer que A est inversible et factoriser par A , pour se ramener à étudier $A^{-1} + B$.

12.70 Appliquer le théorème fondamental pour se ramener à une matrice diagonale. Utiliser la convexité de

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \ln(1 + e^t),$$

et l'inégalité de Jensen.

12.71 Montrer : $\text{Ker}(\varphi) \subset C(q)$.

1) • Si $q \geq 0$, pour $x \in C(q)$ et $y \in E$, utiliser :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, q(x + \lambda y) \geq 0,$$

pour obtenir : $C(q) \subset \text{Ker}(\varphi)$.

• Si $q \leq 0$, considérer $-q$.

2) Supposer que q ne soit ni positive ni négative. Il existe alors $u, v \in E$ tels que : $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $q(tv + u)$ et montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $q(tv + u) = 0$. En notant $w = tv + u$, montrer alors : $\varphi(u, w) \neq 0$ ou $\varphi(v, w) \neq 0$.

12.72 a) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$.

Considérer $y = \sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i| x_i$, et calculer

$$\left\| \sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i| x_i \right\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i \right\|^2.$$

12.73 • Noter $\Omega = \begin{pmatrix} A & U \\ V & B \end{pmatrix}$.

Traduire $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ pour déduire :

$${}^tAA + {}^tVV = I_p, \quad V^tV + B^tB = I_{n-p}.$$

Utiliser l'exercice 11.55 pour déduire :

$$\det({}^tAA) = \det({}^tBB).$$

• Montrer : $\text{Sp}({}^tAA) \subset [0; 1]$.

12.74 a) 1) Utiliser le théorème fondamental, $S = PDP^{-1}$, où $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$. Noter

$$P = (p_{ij})_{i,j}. \text{ Obtenir : } \forall i \in \{1, \dots, n\}, s_{ii} = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_{ik}^2.$$

Utiliser la convexité de f en les λ_k avec coefficients p_{ik}^2 , $1 \leq i \leq n$.

2) • Supposer d'abord $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ et utiliser l'application $f : x \mapsto -\ln x$.

• Traiter le cas : $S \in \mathbf{S}_n^+$ et $S \notin \mathbf{S}_n^{++}$.

b) Considérer $S = A^t A$ et appliquer a) à S .

12.75 Dédurre ${}^t A A = \gamma A + \gamma {}^t A$, où $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} > 0$.

En notant $\Omega = \frac{1}{\gamma} A - I_n$, obtenir : $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Appliquer l'inégalité de Hadamard à $A = \gamma \Omega + \gamma I_n$,

en notant $\Omega = (\omega_{ij})_{ij}$.

12.76 Considérer, pour tout domaine simple D de $\mathbb{R}^2$, la fonction caractéristique φ_D de D , définie par :

$$\varphi_D : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } M \in D \\ 0 & \text{si } M \notin D \end{cases}$$

et remarquer :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \varphi_{D_i} \cap \varphi_{D_j} = \varphi_{D_i} \varphi_{D_j}.$$

12.77 1) Soient $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, $B \in \mathbf{S}_n^+$.

Appliquer le théorème de réduction simultanée :

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}), \quad A = {}^t P P \quad \text{et} \quad B = {}^t P D P.$$

2) Le cas où $A \in \mathbf{S}_n^+$ et $B \in \mathbf{S}_n^{++}$ est analogue.

3) Examiner le cas où $A \in \mathbf{S}_n^+ - \mathbf{S}_n^{++}$ et $B \in \mathbf{S}_n^+ - \mathbf{S}_n^{++}$.

12.78 Pour tout $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, exprimer $q_A(V)$ et obtenir : $q_A(V) \leq q_B(V)$.

Appliquer l'exercice 12.77 à A et $B - A$.

12.79 Noter $S = {}^t A A = A {}^t A$ et appliquer le théorème fondamental pour obtenir, avec les notations usuelles, $S = P D P^{-1}$. Noter $B = P^{-1} A P$ et déduire $B D = D B$, puis B est diagonale.

12.80 • (i) $\implies$ (ii) :

À partir de $A = P D P^{-1}$, exprimer ${}^t A$.

• (ii) $\implies$ (i) :

À partir de ${}^t A = S^{-1} A S$, déduire que $A S$ est symétrique et utiliser l'exercice 12.11 pour avoir $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $S^{-1} = R^2$. Considérer alors $R(A S) R$.

12.81 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Se rappeler que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et utiliser l'exercice 12.59 et la compacité de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

12.82 Utiliser la décomposition polaire de A (exercice 12.81) et une matrice diagonale à termes diagonaux égaux à 1 ou -1 selon les cas.

12.83 a) Utiliser le théorème fondamental et la comparaison entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique.

b) 1) Appliquer a) à $S = {}^t A A$.

2) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$.

• Si $A \notin \mathbf{S}_n^{++}$, obtenir l'inégalité voulue.

• Si $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, utiliser l'exercice 12.11 pour avoir $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $A = R^2$, et appliquer a) à $R A R$.

12.84 Les matrices $A {}^t A$ et ${}^t A A$ sont symétriques réelles et ont le même polynôme caractéristique.

12.85 a) α) Supposer $A \in \mathbf{S}_n^+$. Soit $p \in \{1, \dots, n\}$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, compléter X par des termes nuls

pour obtenir un élément X' de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et appliquer ${}^t X' A X' \geq 0$.

β) Considérer, par exemple, $-E_{22}$.

γ) 1) Soit $A \in \mathbf{S}_n^{++}$. Montrer, comme en a) α) :

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad \det(A_p) > 0.$$

2) Réciproquement, supposer :

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad \det(A_p) > 0.$$

Montrer : $\forall p \in \{1, \dots, p\}, \quad A_p \in \mathbf{S}_p^{++}$

par récurrence (bornée) sur p .

Pour passer de p à $p + 1$, utiliser une décomposition en blocs et l'exercice 12.11.

b) Considérer l'application

$$f : \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad A \longmapsto (\det(A_1), \dots, \det(A_n)).$$

c) Calculer les mineurs de Gauss de A et appliquer a) γ).

12.86 a) Pour le sens $\implies$, faire une récurrence sur n , en utilisant une décomposition en blocs et un trinôme réel.

Pour le sens $\impliedby$, cf. exercice 12.18 a).

b) Utiliser a) et calculer des déterminants.

12.87 Utiliser le théorème fondamental.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, considérer $\tilde{X} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$.

Calculer ${}^t X A X$ et $\tilde{X} \tilde{A} \tilde{X}$.

12.88 Récurrence sur n .

Le cas $n = 1$ est immédiat.

Supposer la propriété vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p < n$, et soit I un ensemble non vide, $(S_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $S_n(\mathbb{R})$ commutant deux à deux. Le cas $(\forall i \in I, S_i \in \mathbb{R}I_n)$ est trivial. Supposer qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $S_{i_0} \notin \mathbb{R}I_n$. Appliquer le théorème fondamental à S_{i_0} et décomposer en blocs.

12.89 • Appliquer le théorème fondamental à A et montrer, en utilisant l'hypothèse portant sur P et un polynôme d'interpolation, que A est un polynôme en $P(A)$.

De même pour B .

En déduire que A et B commutent.

• Utiliser l'exercice 12.88.

12.90 Noter $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, noter C_i la i -ème colonne de la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarquer que $(\Omega C_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une b.o.n. de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Noter, pour $r \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$E_{r+1} = \text{Vect}(\Omega C_1, \dots, \Omega C_{r+1})$$

$$E'_r = \text{Vect}(\Omega C_{r+1}, \dots, \Omega C_n).$$

1) Soit $X \in E'_r$. Montrer : ${}^tX S X = \lambda_{r+1}^t X X$.

Déduire une inégalité.

2) Soit $F \in \mathcal{F}_r$. Montrer : $F \cap E_{r+1} \neq \{0\}$.

Utiliser un $X \in F \cap E_{r+1}$ tel que $X \neq 0$ et obtenir :

$${}^tX S X \geq \lambda_{r+1}^t X X.$$

Déduire l'autre inégalité.

Corrigés des exercices

12.1 1) Supposons $F \subset C(\phi)$.

Soient $x, y \in F$. On a alors : $\phi(x) = 0$ et $\phi(y) = 0$,
et, puisque F est un sev de $E : x + y \in F \subset C(\phi)$,
donc : $\phi(x + y) = 0$. On déduit :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y)) = 0.$$

2) Réciproquement, supposons :

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad \phi(x, y) = 0.$$

En particulier : $\forall x \in F, \quad \phi(x) = \phi(x, x) = 0$,
donc : $F \subset C(\phi)$.

12.2 Raisonnons par l'absurde : supposons que ϕ ne soit ni positive ni négative. Il existe alors $u, v \in E$ tels que :

$$\phi(u) < 0 \quad \text{et} \quad \phi(v) > 0.$$

D'après l'hypothèse : $0 \leq (\phi(u, v))^2 \leq \phi(u)\phi(v) < 0$,
contradiction.

On conclut : $\phi \geq 0$ ou $\phi \leq 0$.

12.3 a) Considérons l'application

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f, g) \longmapsto \int_0^1 fg - \left(\int_0^1 f \right) \left(\int_0^1 g \right),$$

obtenue à partir de ϕ par dédoublement.

Il est clair que φ est symétrique et que φ est linéaire par rapport à la deuxième place donc φ est une fbs sur E . Et on a :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f, f) = \int_0^1 f^2 - \left(\int_0^1 f \right)^2 = \phi(f).$$

On conclut que ϕ est une fq sur E et que la forme polaire de ϕ est φ .

b) 1) D'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz sur les intégrales, appliquée à f et 1 :

$$\forall f \in E, \quad \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2 \right) \left(\int_0^1 f^2 \right) = \int_0^1 f^2,$$

$$\text{donc : } \forall f \in E, \quad \phi(f) = \int_0^1 f^2 - \left(\int_0^1 f \right)^2 \geq 0.$$

On conclut : ϕ est positive.

2) • Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall g \in E, \quad \varphi(f, g) = 0.$$

$$\text{En particulier : } 0 = \phi(f) = \int_0^1 f - \left(\int_0^1 f \right)^2.$$

D'après l'étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy et Schwarz, il en résulte que la famille $(1, f)$ est liée, donc $f \in \mathbb{R}1$.

• Réciproquement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall g \in E, \quad \varphi(\alpha, g) = \int_0^1 \alpha g - \left(\int_0^1 \alpha \right) \left(\int_0^1 g \right) = 0,$$

donc : $\alpha \in \text{Ker}(\varphi)$.

On conclut : $\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}1$.

12.4 On a, par l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|x_i\| \right)^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy et Schwarz, dans $\mathbb{R}^n$ usuel, à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|x_i\| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right).$$

$$\text{On conclut : } \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right).$$

12.5 Notons s la symétrie orthogonale autour de la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire

$$v = (v_1, \dots, v_n).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

D'après le cours, le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur $\mathbb{R}v$ est donné par : $p(x) = \frac{(v|x)}{\|v\|^2} v = (v|x)v$.

$$\text{On a donc : } s(x) = 2p(x) - x = 2(v|x)v - x.$$

En passant aux matrices dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, et en notant X la matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, et S la matrice de s dans $\mathcal{B}$, on a :

$$SX = 2 \underbrace{(v|x)}_{\in \mathbb{R}} V - X = 2V {}^t(VX) - X = (2V {}^tV - I_n)X.$$

On conclut que la matrice cherchée est $S = 2V {}^tV - I_n$, ou encore :

$$S = \begin{pmatrix} 2v_1^2 - 1 & 2v_1v_2 & \dots & 2v_1v_n \\ 2v_2v_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2v_{n-1}v_n \\ 2v_nv_1 & \dots & 2v_nv_{n-1} & 2v_n^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : S est symétrique et orthogonale.

12.6

a) • Il est connu que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$(S | A) = \text{tr}({}^tSA) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) \\ = \text{tr}((-{}^tA)S) = -\text{tr}({}^tAS) = -(A | S) = -(S | A),$$

d'où : $(S | A) = 0$.

Ceci montre que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour $(. | .)$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Il en résulte en particulier : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

• On a, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})},$$

donc : $\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

Finalement, $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) 1) Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Notons : } S = \frac{1}{2}(M + {}^tM), \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM).$$

On a alors :

$$M = S + A, \quad S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), \quad A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = (\mathbf{S}_n(\mathbb{R}))^\perp.$$

Ceci montre que S est le projeté orthogonal de M sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

On a donc :

$$(d(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})))^2 = \|M - S\|^2 = \|A\|^2 = \text{tr}({}^tAA) \\ = \text{tr}\left[\left(\frac{1}{2}(M - {}^tM)\right)\frac{1}{2}(M - {}^tM)\right] = -\frac{1}{4}\text{tr}((M - {}^tM)^2).$$

$$2) \text{ Pour } M = \sum_{i=1}^n E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a :}$$

$$A = \frac{1}{2}(M - {}^tM) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & \dots & -1/2 \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$(d(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})))^2 = \|A\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ((A)_{ij})^2 = \frac{n-1}{2}.$$

$$\text{On conclut : } d(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})) = \sqrt{\frac{n-1}{2}}.$$

12.7

• Il est clair que $E = \mathbb{X} \mathbb{R}[X]$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.

Considérons l'application :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \longmapsto \frac{1}{2} \int_0^1 (PQ' + P'Q + 2P'Q'),$$

obtenue par dédoublement à partir de q . Il est clair que φ est symétrique, linéaire par rapport à la seconde place, et que :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P, P) = q(P).$$

Il en résulte que q est une fq sur E , la fq associée à la fbs φ .

On a, pour tout $P \in E$:

$$q(P) = \int_0^1 (P + P')P' = \int_0^1 P P' + \int_0^1 P'^2 \\ = \left[\frac{P^2}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 P'^2 \\ = \frac{(P(1))^2}{2} - \underbrace{\frac{(P(0))^2}{2}}_{=0} + \int_0^1 P'^2 \geq 0.$$

• Soit $P \in E$ tel que $q(P) = 0$. D'après le calcul précédent,

$$\text{on a alors : } \underbrace{\frac{(P(1))^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 P'^2}_{\geq 0} = 0,$$

$$\text{donc : } P(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 P'^2 = 0.$$

Puisque P'^2 est continue et ≥ 0 , on déduit $P' = 0$, donc P est une constante. Comme $P(1) = 0$, on obtient $P = 0$.

On conclut : q est une fq définie positive sur E .

12.8

Notons $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f, g) \longmapsto (f | g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Considérons les éléments f, φ_1, φ_2 de E définis, pour tout $x \in [0; 1]$, par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x,$$

et notons $F = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.

On a alors :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 |\ln x - ax - b|^2 dx = (d(f, F))^2.$$

D'après le théorème de la projection orthogonale,

il existe $\varphi \in F$ unique tel que $d(f, F) = \|f - \varphi\|$

et φ est donné par : $\varphi \in F$ et $\varphi - f \in F^\perp$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2$. On a :

$$\varphi - f \perp F \iff \begin{cases} \varphi - f \perp \varphi_1 \\ \varphi - f \perp \varphi_2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} (a\varphi_1 + b\varphi_2 - f | \varphi_1) = 0 \\ (a\varphi_1 + b\varphi_2 - f | \varphi_2) = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a(\varphi_1 | \varphi_1) + b(\varphi_2 | \varphi_1) = (f | \varphi_1) \\ a(\varphi_1 | \varphi_2) + b(\varphi_2 | \varphi_2) = (f | \varphi_2). \end{cases}$$

On calcule :

$$(\varphi_1 | \varphi_1) = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}, (\varphi_1 | \varphi_2) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4},$$

$$(\varphi_2 | \varphi_2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Pour $\varepsilon \in]0; 1]$, on a, par intégration par parties :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^3 \ln x dx = \left[\frac{x^4}{4} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{\varepsilon^4}{4} \ln \varepsilon - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^4}{4} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{16},$$

$$\text{donc : } (f | \varphi_1) = \int_0^1 x^3 \ln x dx = -\frac{1}{16},$$

$$\text{et de même : } (f | \varphi_2) = -\frac{1}{9}.$$

Ainsi :

$$(S) \iff \begin{cases} \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b = -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b = -\frac{1}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{19}{12} \end{cases}.$$

Enfin, puisque $\varphi - f \perp \varphi$, d'après le théorème de Pythagore :

$$(d(f, F))^2 = \|\varphi - f\|^2 = \|f\|^2 - \|\varphi\|^2$$

$$= \int_0^1 (x \ln x)^2 dx - \int_0^1 \left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{19}{12} \right)^2 dx.$$

On calcule la première intégrale comme plus haut (intégration par parties sur $[\varepsilon; 1]$, puis $\varepsilon \rightarrow 0$), et, après un calcul élémentaire, on conclut :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 |\ln x - ax - b|^2 dx = \frac{1}{432}.$$

12.9 Puisque $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

a) 1) Supposons $S \in \mathbf{S}_n^+$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$.

Il existe $V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que : $SV = \lambda V$.

$$\text{On a : } 0 \leq {}^t V S V = {}^t V (\lambda V) = \lambda {}^t V V = \lambda \underbrace{\|V\|^2}_{>0},$$

d'où : $\lambda \geq 0$.

Ceci montre : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

2) Réciproquement, supposons $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$${}^t X S X = {}^t X \Omega D \Omega^{-1} X = {}^t (\Omega^{-1} X) D (\Omega^{-1} X).$$

Notons $Y = \Omega^{-1} X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$${}^t X S X = {}^t Y D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0,$$

ce qui montre : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

b) On reprend l'étude précédente en précisant le caractère strict de certaines inégalités.

1) Soit $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. Soit $V \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$.

Il existe $V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que : $SV = \lambda V$.

$$\text{On a : } 0 < {}^t V S V = {}^t V (\lambda V) = \lambda {}^t V V = \lambda \underbrace{\|V\|^2}_{>0},$$

d'où : $\lambda > 0$.

Ceci montre : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

2) Réciproquement, supposons $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. On a :

$${}^t X S X = {}^t X (\Omega D \Omega^{-1}) X = {}^t (\Omega^{-1} X) D (\Omega^{-1} X).$$

Notons $Y = \Omega^{-1} X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$${}^t X S X = {}^t Y D Y = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{>0} y_i^2 \geq 0.$$

De plus, si $\sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{>0} \underbrace{y_i^2}_{\geq 0} = 0$, alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i = 0,$$

donc $Y = 0$, puis $X = \Omega Y = 0$, contradiction.

On a montré : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, ${}^t X S X > 0$,

et on conclut : $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

12.10 Le sens $\Leftarrow$ est immédiat.

Réciproquement, supposons $\sum_{k=1}^p S_k = 0$.

On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$0 = {}^t X \left(\sum_{k=1}^p S_k \right) X = \sum_{k=1}^p {}^t X S_k X \geq 0$$

Il en résulte :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X S_k X = 0.$$

Comme de plus : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $S_k \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$,

il en résulte : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $S_k = 0$,

puisque, S_k est alors la matrice de la forme quadratique nulle dans la base canonique.

12.11 a) Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$. D'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$. Comme $S \in \mathbf{S}_n^+$, d'après l'exercice 12.9, on a :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \geq 0.$$

Notons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, $R = \Omega D \Omega^{-1}$.

Alors :

• $R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ car :

$${}^t R = {}^t (\Omega \Delta \Omega^{-1}) = {}^t \Omega^{-1} \Delta {}^t \Omega = \Omega \Delta \Omega^{-1} = R$$

• $R \in \mathbf{S}_n^+$ car :

$$R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \{\sqrt{\lambda_k} : k \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathbb{R}_+,$$

cf. exercice 12.9.

• $R^2 = (\Omega \Delta \Omega^{-1})^2 = \Omega \Delta^2 \Omega^{-1} = \Omega D \Omega^{-1} = S$,

donc S convient.

b) Soit $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

D'après a), il existe $R \in \mathbf{S}_n^+$ telle que $S = R^2$. Comme $S \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, on a : $\det(S) \neq 0$, puis, comme $(\det(R))^2 = \det(R^2) = \det(S) \neq 0$, on a : $\det(R) \neq 0$. Ainsi, $R \in \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{S}_n^{++}$.

Remarque : On peut montrer qu'il y a unicité de R , cf. exercice 12.58, mais, dans la plupart des utilisations, c'est seulement l'existence de R qui sert.

12.12 Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(S + A)X = 0$.

On a alors : $0 = {}^t X(S + A)X = {}^t X S X + {}^t X A X$.

Puisque $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, on a :

$${}^t X A X = {}^t X (-{}^t A) X = -{}^t X {}^t A X = -\underbrace{{}^t (X A X)}_{\in \mathbb{R}} = -({}^t X A X),$$

d'où : ${}^t X A X = 0$.

On déduit : ${}^t X S X = 0$.

Comme $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, il s'ensuit : $X = 0$.

On a montré :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ((S + A)X = 0 \implies X = 0).$$

On conclut : $S + A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

12.13 Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$S = \Omega D \Omega^{-1}.$$

a) On a : $e^S = e^{\Omega D \Omega^{-1}} = \Omega e^D \Omega^{-1}$.

Comme $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$, on conclut (cf. exercice 12.9) : $e^S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

b) On a :

$$\begin{aligned} I_n - e^{-S} &= I_n - e^{-\Omega D \Omega^{-1}} = I_n - e^{\Omega(-D)\Omega^{-1}} \\ &= I_n - \Omega e^{-D} \Omega^{-1} = \Omega(I_n - e^{-D})\Omega^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque $S \in \mathbf{S}_n^+$, d'après l'exercice 12.9, on a :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \geq 0,$$

d'où : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, 1 - e^{-\lambda_k} \geq 0$.

Comme $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$

et $I_n - e^{-D} = \text{diag}(1 - e^{-\lambda_1}, \dots, 1 - e^{-\lambda_n}) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+)$,

on conclut (cf. exercice 12.9) :

$$I_n - e^{-S} \in \mathbf{S}_n^+.$$

12.14 Il est clair que $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} {}^t X A X &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \\ &= n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \end{aligned}$$

1) D'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ usuel,

appliquée à $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 &= (U | X)^2 \leq \|U\|^2 \|X\|^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = n \sum_{i=1}^n x_i^2, \end{aligned}$$

d'où : ${}^t X A X \geq 0$.

Ceci montre : $A \in \mathbf{S}_n^+$.

2) On a, avec U ci-dessus : $U \neq 0$ et ${}^t U A U = 0$,

donc : $A \notin \mathbf{S}_n^{++}$.

12.15 a) Puisque $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Puisque S est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $S^p = 0$. On a alors :

$$D^p = (\Omega^{-1} S \Omega)^p = \Omega^{-1} S^p \Omega = \Omega^{-1} 0 \Omega = 0.$$

Mais : $D^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$.

D'où : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \lambda_k^p = 0$,

puis : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \lambda_k = 0$,

et donc $D = 0$, puis $S = 0$.

b) Par hypothèse, A et ${}^tA$ commutent, et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

Notons $S = {}^tAA \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Puisque A et ${}^tA$ commutent, on a :

$$S^p = ({}^tAA)^p = {}^tA^pA^p = 0.$$

Ainsi, $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et S est nilpotente. D'après a), on déduit :

$$S = 0.$$

Enfin, en faisant intervenir le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme euclidienne associée :

$$\|A\|^2 = \text{tr}({}^tAA) = \text{tr}(S) = 0, \text{ donc : } A = 0.$$

12.16 Puisque $S \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que : } S = \Omega D \Omega^{-1}.$$

D'après l'exercice 12.9, puisque $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k > 0.$$

En particulier, S est inversible.

$$\text{Notons } A = S + S^{-1} - 2I_n.$$

$$\text{On a : } A = \Omega(D + D^{-1} - 2I_n)\Omega^{-1},$$

$$\text{et : } D + D^{-1} - 2I_n = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$

où, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mu_k = \lambda_k + \lambda_k^{-1} - 2 = \frac{1}{\lambda_k}(\lambda_k^2 + 1 - 2\lambda_k) = \frac{(\lambda_k - 1)^2}{\lambda_k}.$$

$$\text{Ainsi, } A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+,$$

$$\text{donc, d'après l'exercice 12.9 : } A \in \mathbf{S}_n^+.$$

$$\text{On conclut : } S + S^{-1} - 2I_n \in \mathbf{S}_n^+.$$

12.17 Puisque $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

$$\text{On a : } D^p = (\Omega^{-1}S\Omega)^p = \Omega^{-1}S^p\Omega = \Omega^{-1}\Omega = I_n.$$

$$\text{Mais : } D = \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p).$$

$$\text{d'où : } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k^p = 1.$$

• Si n est impair, on a alors, puisque les λ_k sont réels :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 1,$$

$$\text{d'où : } D = I_n, \text{ puis : } S = I_n.$$

• Si p est impair, on a alors :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \in \{-1, 1\},$$

$$\text{donc : } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k^2 = 1,$$

$$\text{d'où : } D^2 = I_n, \text{ puis : } S^2 = \Omega D^2 \Omega^{-1} = I_n.$$

12.18 a) On a : ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA {}^tA = {}^tAA = S$,

donc $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, et :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX = {}^tX({}^tAA)X$$

$$= ({}^tX {}^tA)(AX) = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|_2^2 \geq 0.$$

On conclut : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

b) • Supposons $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. Alors (cf. exercice 12.9), $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$, S est inversible.

Comme

$$\det(S) = \det({}^tAA) = \det({}^tA) \det(A) = (\det(A))^2,$$

on déduit $\det(A) \neq 0$, et donc $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

• Réciproquement, supposons $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\det(S) = (\det(A))^2 \neq 0,$$

donc $0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$. D'après a) et l'exercice 12.9, on a donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, et on conclut : $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

12.19 Par hypothèse, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M = PDP^{-1}$. On alors :

$$M = (P^tP)({}^tP^{-1}DP^{-1}).$$

En notant $A = P^tP$ et $B = {}^tP^{-1}DP^{-1}$, on a $M = AB$, $A \in \mathbf{S}_n^{++}$ (cf. exercice 12.18) et $B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, car :

$${}^tB = {}^t({}^tP^{-1}DP^{-1}) = {}^tP^{-1}DP^{-1} = B.$$

12.20 Notons L_1, L_2, L_3 les lignes de A .

Par hypothèse, $L_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$, et on a bien :

$$\|L_1\|_2^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1.$$

Notons $L_2 = (a \quad b \quad c)$. On a :

$$\begin{cases} (L_1 | L_2) = 0 \\ \|L_2\|_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\frac{3}{4}a \\ c^2 = 1 - \frac{25}{16}a^2. \end{cases}$$

$$\text{Et : } 1 - \frac{25}{16}a^2 \geq 0 \iff |a| \leq \frac{4}{5}.$$

Ainsi, $L_2 = (a \quad b \quad c)$, où :

$$a \in \left[-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right], b = -\frac{3}{4}a, c = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{25}{16}a^2}, \varepsilon = \pm 1.$$

Enfin, L_3 est, au signe près, le produit vectoriel de L_1 et L_2 , que l'on va présenter plus commodément en colonnes :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}c \\ -\frac{3}{5}c \\ \frac{3}{5}b - \frac{4}{5}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}c \\ -\frac{3}{5}c \\ -\frac{5}{4}a \end{pmatrix}.$$

On conclut que les matrices cherchées sont les

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ a & -\frac{3}{4}a & c \\ \varepsilon' \frac{4}{5}c & -\varepsilon' \frac{3}{5}c & -\varepsilon \frac{5}{4}a \end{pmatrix},$$

$$\text{où : } a \in \left[-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right], \quad c = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{25}{16}a^2}, \\ \varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad \varepsilon' \in \{-1, 1\}.$$

12.21 • D'après le cours, A est la matrice, dans une b.o.n., d'une similitude directe si et seulement si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R}).$$

Le carré de la norme euclidienne de la première colonne de αA est : $\alpha^2(2^2 + 2^2 + (-1)^2)$, c'est-à-dire $9\alpha^2$.

Si A convient, nécessairement, $\alpha = \frac{1}{3}$. Il en résulte que A convient si et seulement si : $\frac{1}{3}A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$.

• Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $\frac{1}{3}A$:

$$C_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Comme (C_1, C_2) est une famille orthonormale, on a :

$$\frac{1}{3}A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R}) \iff C_3 = C_1 \wedge C_2 \\ \iff \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On conclut que A convient si et seulement si :

$$(a, b, c) = (2, -1, 2).$$

12.22 On a, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned} (f(x) | y) &= ((a | x)b - (b | x)a | y) \\ &= (a | x)(b | y) - (b | x)(a | y) \\ &= (x | (b | y)a - (a | y)b) = -(x | f(y)), \end{aligned}$$

d'où, par définition de l'adjoint : $f^* = -f$.

Autrement dit, f est antisymétrique.

12.23 • Le sens $\Leftarrow$ est évident.

• Supposons : $p^* \in \text{Vect}(e, p)$. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $p^* = \alpha e + \beta p$. On a alors :

$$p^* \circ p = (\alpha e + \beta p) \circ p = \alpha p + \beta p^2 = (\alpha + \beta)p.$$

* Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors $p = \frac{1}{\alpha + \beta} p^* \circ p$, donc :

$$p^* = \frac{1}{\alpha + \beta} (p^* \circ p)^* = \frac{1}{\alpha + \beta} p^* \circ p = p.$$

* Si $\alpha + \beta = 0$, alors $p^* \circ p = 0$, d'où, pour tout $x \in E$:

$$\|p(x)\|^2 = (p(x) | p(x)) = (x | p^*(p(x))) = (x | 0) = 0,$$

et donc : $\forall x \in E, \quad p(x) = 0$, puis $p = 0$, donc $p^* = p$.

On conclut : $p^* = p$.

12.24 • 1) Si q est positive, alors, par définition : $q(E) \subset \mathbb{R}_+$.

D'autre part, comme $\varphi \neq 0$, d'après le cours, $q \neq 0$, donc il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, donc $q(x) > 0$.

$$\text{Alors : } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t = q\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{q(x)}}x\right) \in q(E).$$

On conclut : $q(E) = \mathbb{R}_+$.

2) Si q est négative, de même : $q(E) = \mathbb{R}_-$.

3) Supposons q ni positive ni négative. Il existe alors $u, v \in E$ tels que : $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$.

Comme l'application $\alpha \mapsto q(\alpha u) = \alpha^2 q(u)$ est une surjection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_-$, on déduit : $\mathbb{R}_- \subset q(E)$. De même, l'application $\beta \mapsto q(\beta v) = \beta^2 q(v)$ est une surjection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, donc : $\mathbb{R}_+ \subset q(E)$.

Enfin : $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \subset q(E) \subset \mathbb{R}$,

donc : $q(E) = \mathbb{R}$.

• 1) Supposons $q(E) = \mathbb{R}_+$. Si q était négative ou si q n'était ni positive ni négative, d'après 1), on aurait $q(E) = \mathbb{R}_-$ ou $q(E) = \mathbb{R}$, contradiction. On conclut que q est positive.

2), 3) De même, par raisonnement par l'absurde, on montre les deux autres réciproques.

12.25 a) Il est clair que

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$$

est un polynôme homogène de degré 2, donc ϕ est une fq sur E , et

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \geq 0,$$

donc ϕ est positive.

b) On a, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x \in C(\phi) &\iff \phi(x) = 0 \iff \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{(x_i - x_j)^2}_{\geq 0} = 0 \\ &\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (i < j \implies x_i - x_j = 0) \\ &\iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, x_i = x_j. \end{aligned}$$

En notant $u = (1, \dots, 1)$, on conclut : $C(\phi) = \mathbb{R}u$.

12.26 a) • Pour tout $P \in E$, $\phi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)P(-n)e^{-n}$

existe. En effet, par prépondérance de l'exponentielle sur les polynômes : $n^2 P(n)P(-n)e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

donc, à partir d'un certain rang :

$$|P(n)P(-n)e^{-n}| \leq \frac{1}{n^2},$$

ce qui montre que la série $\sum_{n \geq 0} P(n)P(-n)e^{-n}$ est absolument convergente, donc convergente.

• Considérons l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(P, Q) \longmapsto \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (P(n)Q(-n) + P(-n)Q(n))e^{-n},$$

dont l'existence est assurée de la même façon que pour ϕ . Il est immédiat que φ est symétrique, linéaire par rapport à la deuxième place, donc φ est une fbs, et on a :

$$\forall P \in E, \varphi(P, P) = \phi(P).$$

On conclut que ϕ est une fq, la fq associée à la fbs φ .

b) Il est connu que E_+ et E_- sont des sev de $E = \mathbb{R}[X]$ supplémentaires dans E .

• Soient $P \in E_+$, $Q \in E_-$. On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, P(n)Q(-n) + P(-n)Q(n) \\ = -P(n)Q(n) + P(n)Q(n) = 0, \end{aligned}$$

donc : $\varphi(P, Q) = 0$.

Ainsi, E_+ et E_- sont orthogonaux pour φ .

• Soit $P \in E_+ - \{0\}$. On a :

$$\phi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)P(-n)e^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(P(n))^2}_{\geq 0} e^{-n} \geq 0.$$

Supposons $\phi(P) = 0$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n))^2 e^{-n} = 0$,

puis : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = 0$.

Ainsi, le polynôme P s'annule en une infinité de points, donc $P = 0$, exclu.

On conclut : $\forall P \in E_+ - \{0\}, \phi(P) > 0$.

• De même :

$$\forall P \in E_- - \{0\}, \phi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} -(P(n))^2 e^{-n} < 0.$$

12.27 a) Considérons l'application

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i | x)(u_i | y),$$

obtenue par dédoublement de ϕ .

Il est clair que φ est symétrique et que φ est linéaire par rapport à la deuxième place. On a :

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i | x)^2 = \phi(x).$$

On conclut que ϕ est une fq sur E et que la forme polaire φ de ϕ est donnée par la formule vue plus haut.

b) On a : $\forall x \in E, \phi(x) = \sum_{i=1}^p \underbrace{\alpha_i}_{>0} \underbrace{(u_i | x)^2}_{\geq 0} \geq 0$.

D'où :

φ est un ps sur E

$$\iff \forall x \in E, (\phi(x) = 0 \implies x = 0)$$

$$\iff \forall x \in E, \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i | x)^2 = 0 \implies x = 0 \right)$$

$$\iff \forall x \in E, \left((\forall i \in \{1, \dots, p\}, (u_i | x) = 0) \implies x = 0 \right)$$

$$\iff \forall x \in E, \left(x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp \implies x = 0 \right)$$

$$\iff (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp = \{0\}$$

$$\iff \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E.$$

On conclut : φ est un ps sur E si et seulement si $(u_1, \dots, u_p)$ engendre E .

12.28 Considérons l'application

$$u : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \left(f((1-t)x + ty) \mid (1-t)x + ty \right).$$

En développant par bilinéarité (et symétrie), il est clair que u est un polynôme du second degré, donc u est une application continue sur l'intervalle $[0; 1]$. De plus :

$$\begin{cases} u(0) = (f(x) | x) = (\lambda x | x) = \lambda \|x\|^2 \leq 0 \\ u(1) = (f(y) | y) = (\mu y | y) = \mu \|y\|^2 \geq 0. \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0; 1]$ tel que $u(t) = 0$.

On conclut : $\exists z \in [x; y], (f(z) | z) = 0$.

12.29 a) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) - \{0\}$. L'application

$$\varphi_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \longmapsto \text{tr}(AM)$$

est linéaire, car, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}, M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\alpha M + N) &= \text{tr}(A(\alpha M + N)) \\ &= \alpha \text{tr}(AM) + \text{tr}(AN) = \alpha \varphi_A(M) + \varphi_A(N),\end{aligned}$$

donc : $\varphi_A \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^*$, dual de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, en utilisant la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi_A({}^tA) = \text{tr}(A{}^tA) = \text{tr}({}^tAA) = \|A\|_2^2 > 0,$$

donc $\varphi_A \neq 0$, d'où : $\varphi_A \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^* - \{0\}$.

b) • Puisque φ_A est une forme linéaire autre que la forme nulle, d'après le cours, $\text{Ker}(\varphi_A)$ est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, donc son orthogonal $(\text{Ker}(\varphi_A))^\perp$ est une droite vectorielle.

• D'autre part, pour toute $M \in \text{Ker}(\varphi_A)$:

$$({}^tA | M) = \text{tr}({}^tA M) = \text{tr}(AM) = \varphi_A(M) = 0,$$

donc : ${}^tA \in (\text{Ker}(\varphi_A))^\perp$.

Comme ${}^tA \neq 0$, on conclut : $(\text{Ker}(\varphi_A))^\perp = \mathbb{R}{}^tA$.

12.30 a) • Il est clair que φ est symétrique et que φ est linéaire par rapport à la seconde place.

• On a, pour tout $P \in E$:

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^n \underbrace{(P^{(k)}(a_k))^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

• Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P, P) = 0$. On a alors :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P^{(k)}(a_k) = 0.$$

Comme $P^{(n)}(a_n) = 0$ et $\deg(P) \leq n$, donc $\deg(P^{(n)}) \leq 0$, on a : $P^{(n)} = 0$, donc $\deg(P^{(n-1)}) \leq 0$.

Comme $P^{(n-1)}(a_{n-1}) = 0$ et que $\deg(P^{(n-1)}) \leq 0$, on a $P^{(n-1)} = 0$, donc $\deg(P^{(n-2)}) \leq 0$.

En réitérant, on déduit $P = 0$.

On conclut : φ est un produit scalaire sur E .

b) Nous allons appliquer le procédé de Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$ de E , de façon à obtenir une base (P_0, P_1, P_2) de E orthogonale pour φ , puis normer pour obtenir une base (U_1, U_2, U_3) de E orthonormale pour φ .

• On note $P_0 = 1$, puis $U_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|}$.

On a : $\|P_0\|^2 = \varphi(P_0, P_0) = 1$,

donc $\|P_0\| = 1$, $U_0 = 1$.

• On note $P_1 = aX + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(P_0, P_1) &= 0 \\ \iff P_0(-1)P_1(-1) + P_0'(0)P_1'(0) + P_0''(1)P_1''(1) &= 0 \\ \iff -a + b = 0 &\iff b = a,\end{aligned}$$

d'où : $P_1 = a(X + 1)$. Et :

$$\|P_1\|^2 = (P(-1))^2 + (P'(0))^2 + (P''(1))^2 = a^2,$$

d'où, par exemple, $\|P_1\| = a$, puis $U_1 = \frac{P_1}{\|P_1\|} = X + 1$.

• On note $P_2 = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} \varphi(P_0, P_2) = 0 \\ \varphi(P_1, P_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = 0 \end{cases}$$

d'où : $P = \alpha(X^2 - 1)$.

Et : $\|P_2\|^2 = (P_2(-1))^2 + (P_2'(0))^2 + (P_2''(1))^2 = 4\alpha^2$,

d'où, par exemple : $\alpha = \frac{1}{2}$,

puis : $U_2 = \frac{P_2}{\|P_2\|} = \frac{1}{2}(X^2 - 1)$.

On conclut : une b.o.n. de E pour φ est, par exemple :

$$\left(1, X + 1, \frac{1}{2}(X^2 - 1)\right).$$

12.30 a) • Il est clair que φ est symétrique et que φ est linéaire par rapport à la seconde place.

• On a, pour tout $P \in E$:

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^n \underbrace{(P^{(k)}(a_k))^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

• Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P, P) = 0$. On a alors :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P^{(k)}(a_k) = 0.$$

Comme $P^{(n)}(a_n) = 0$ et $\deg(P) \leq n$, donc $\deg(P^{(n)}) \leq 0$, on a : $P^{(n)} = 0$, donc $\deg(P^{(n-1)}) \leq 0$.

Comme $P^{(n-1)}(a_{n-1}) = 0$ et que $\deg(P^{(n-1)}) \leq 0$, on a $P^{(n-1)} = 0$, donc $\deg(P^{(n-2)}) \leq 0$.

En réitérant, on déduit $P = 0$.

On conclut : φ est un produit scalaire sur E .

b) Nous allons appliquer le procédé de Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$ de E , de façon à obtenir une base (P_0, P_1, P_2) de E orthogonale pour φ , puis normer pour obtenir une base (U_1, U_2, U_3) de E orthonormale pour φ .

• On note $P_0 = 1$, puis $U_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|}$.

On a : $\|P_0\|^2 = \varphi(P_0, P_0) = 1$,

donc $\|P_0\| = 1$, $U_0 = 1$.

12.31 Notons φ la forme polaire de ϕ . Puisque φ est bilinéaire et que E est de dimension finie, d'après le cours, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\varphi(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|.$$

En particulier : $\forall x \in E, \quad |\phi(x)| = |\varphi(x, x)| \leq M\|x\|^2$.

D'où :

$$0 \leq \frac{|\phi(x)|^{3/4}}{\|x\|} \leq \frac{(M\|x\|^2)^{3/4}}{\|x\|} = M^{3/4}\|x\|^{1/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

On conclut, par théorème d'encadrement :

$$\frac{(\phi(x))^{3/4}}{\|x\|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

12.32 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Il est clair que l'application

$$f_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto AM$$

est linéaire.

L'endomorphisme f_A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si :

$$\forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad (f_A(M) | f_A(N)) = (M | N).$$

On a, pour toutes $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(f_A(M) | f_A(N)) &= (AM | AN) \\ &= \text{tr}({}^t(AM)(AN)) = \text{tr}({}^tM^tAAN).\end{aligned}$$

D'où :

$$f_A \in \mathcal{O}(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))$$

$$\iff \forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}({}^tM^tAAN) = \text{tr}({}^tMN)$$

$$\iff \forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}({}^tM({}^tAA - I_n)N) = 0$$

$$\iff \forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}({}^t[({}^tAA - I_n)M]N) = 0$$

$$\iff \forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \left(\forall N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), ({}^tAA - I_n)M \perp N \right)$$

$$\iff \forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), ({}^tAA - I_n)M = 0$$

$$\iff {}^tAA - I_n = 0 \iff A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}).$$

On conclut : f_A est un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

12.33 a) • Il est clair que $(. | .)$ est symétrique et linéaire par rapport à la seconde place.

• On a, pour toute $f \in E$:

$$(f | f) = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq 0.$$

• De plus, pour toute $f \in E$, comme f' est continue et que $f'^2 \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}(f | f) = 0 &\iff \underbrace{(f(0))^2}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 (f'(t))^2 dt}_{\geq 0} = 0 \\ &\iff f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0 \\ &\iff (f(0) = 0 \text{ et } f' = 0) \iff f = 0.\end{aligned}$$

On conclut que $(. | .)$ est un ps sur E .

b) 1) Soit $f \in E$. On a :

$$f \in F^\perp \iff (e_0 | f) = 0$$

$$\iff \underbrace{e_0(0)}_1 f(0) + \underbrace{\int_0^1 e'_0(t) f'(t) dt}_0 = 0 \iff f(0) = 0,$$

$$\text{donc : } F^\perp = \{f \in E ; f(0) = 0\} = G.$$

2) Soit $f \in E$.

• Supposons $f \in G^\perp$. Considérons $g = f - f(0)e_0$.

On a : $g \in E$ et $g(0) = 0$, donc $g \in G$.

Il s'ensuit $(f | g) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}0 &= (f | g) = (f | f - f(0)e_0) = (f | f) - f(0)(f | e_0) \\ &= (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt - (f(0))^2 = \int_0^1 (f'(t))^2 dt.\end{aligned}$$

Comme f' est continue et que $f'^2 \geq 0$, il s'ensuit $f' = 0$, donc f est constante, $f \in F$.

• Réciproquement, il est clair que $e_0 \in G^\perp$, car :

$$\forall g \in G, (e_0 | g) = \underbrace{e_0(0)}_0 \underbrace{g(0)}_0 + \underbrace{\int_0^1 e'_0(t) g'(t) dt}_0 = 0.$$

On conclut : $G^\perp = \text{Vect}(e_0) = F$.

Ainsi, dans cet exercice : $F^\perp = G$ et $G^\perp = F$.

12.34 Soit $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

1) On a, puisque ${}^tA = -A$ et que $-A$ et A commutent :

$${}^t(e^A)e^A = e^{{}^tA}e^A = e^{-A}e^A = e^{-A+A} = e^0 = I_n.$$

2) On a, d'après l'exercice 11.28 :

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)} = e^0 = 1.$$

On conclut : $\forall A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}), e^A \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$.

12.35 1) Supposons $A_k \xrightarrow[k\infty]{} I_n$.

$$\text{Alors : } A_k^{-1} = {}^tA_k \xrightarrow[k\infty]{} {}^tI_n = I_n,$$

$$\text{puis : } A_k + A_k^{-1} \xrightarrow[k\infty]{} 2I_n.$$

2) Réciproquement, supposons : $A_k + A_k^{-1} \xrightarrow[k\infty]{} 2I_n$.

On a, en utilisant la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\|A_k - I_n\|^2 &= \text{tr}({}^t(A_k - I_n)(A_k - I_n)) \\ &= \text{tr}({}^tA_k A_k - {}^tA_k - A_k + I_n) \\ &= \text{tr}(-(A_k + A_k^{-1} - 2I_n)) \xrightarrow[k\infty]{} 0,\end{aligned}$$

donc : $A_k - I_n \xrightarrow[k\infty]{} 0$, et finalement : $A_k \xrightarrow[k\infty]{} I_n$.

12.36 1) Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$.

On a alors $f(x) = 0$ et $f^*(x) = 0$, d'où :

$$(f + f^*)(x) = f(x) + f^*(x) = 0 + 0 = 0,$$

donc $x \in \text{Ker}(f + f^*)$.

Ceci montre : $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*) \subset \text{Ker}(f + f^*)$.

2) Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(f + f^*)$. On a donc $(f + f^*)(x) = 0$. Comme $f^2 = 0$, on déduit :

$$\begin{aligned}0 &= f(0) = f((f + f^*)(x)) \\ &= (f^2 + f \circ f^*)(x) = \underbrace{f^2(x)}_0 + f \circ f^*(x).\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le produit scalaire :

$$0 = (f \circ f^*(x) | x) = (f^*(x) | f^*(x)) = \|f^*(x)\|^2,$$

d'où : $f^*(x) = 0$, puis :

$$f(x) = (f + f^*)(x) - f^*(x) = 0 - 0 = 0.$$

On obtient : $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$.

Ceci montre : $\text{Ker}(f + f^*) \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$.

On conclut : $\text{Ker}(f + f^*) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$.

12.37 Puisque P et Q sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $UP + VQ = 1$. On a donc, pour tout $x \in \text{Ker}(P(f))$:

$$\begin{aligned} x &= \text{Id}_E(x) = (UP + VQ)(f)(x) \\ &= U(f)(\underbrace{P(f)(x)}_{=0}) + Q(f)(V(f)(x)) = Q(f)(V(f)(x)), \end{aligned}$$

puis, pour tout $(x, y) \in \text{Ker}(P(f)) \times \text{Ker}(Q(f^*))$:

$$\begin{aligned} (x | y) &= (Q(f)(V(f)(x)) | y) \\ &= (V(f)(x) | \underbrace{(Q(f))^*(y)}_{=0}) = (V(f)(x) | \underbrace{Q(f^*)(y)}_{=0}) = 0. \end{aligned}$$

On a montré :

$$\forall (x, y) \in \text{Ker}(P(f)) \times \text{Ker}(Q(f^*)), (x | y) = 0,$$

et on conclut : $\text{Ker}(P(f)) \perp \text{Ker}(Q(f^*))$.

12.38 • Le sens $\Leftarrow$ est évident.

• Supposons $\text{Sp}(g) = \{2\}$.

Comme $g^* = (f + f^*)^* = f^* + f = g$, g est symétrique. D'après le cours, g est donc diagonalisable. Puisque g est diagonalisable et que $\text{Sp}(g) = \{2\}$, on a : $g = 2e$, en notant $e = \text{Id}_E$. Alors :

$$\begin{aligned} (f - e)^* \circ (f - e) &= (f^* - e) \circ (f - e) \\ &= f^* \circ f - (f^* + f) + e = e - 2e + e = 0, \end{aligned}$$

puis, en utilisant le ps $(u, v) \mapsto \text{tr}(u^* \circ v)$ sur $\mathcal{L}(E)$:

$$\|f - e\|_2^2 = \text{tr}((f - e)^* \circ (f - e)) = 0,$$

donc $f - e = 0$, $f = e$.

12.39 1^{re} méthode : Utilisation d'une factorisation de A :

On a :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (1) & & & \end{pmatrix}}_{\text{c'est } T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & (1) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & \end{pmatrix}}_{\text{notée } T}. \end{aligned}$$

Comme T est triangulaire et à termes diagonaux tous non nuls, on a : $T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

D'après l'exercice 12.18, on déduit : $A \in \text{S}_n^{++}$.

2^e méthode : Décomposition de la forme quadratique en somme de carrés :

D'abord, il est clair que : $A \in \text{S}_n(\mathbb{R})$.

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \text{Min}(i, j) x_j \\ &= (x_1 + \dots + x_n)^2 + (x_2 + \dots + x_n)^2 + \dots + x_n^2, \end{aligned}$$

comme on le voit en développant cette dernière expression.

Il en résulte, d'une part ${}^tXAX \geq 0$, et, d'autre part :

$$\begin{aligned} {}^tXAX = 0 &\iff \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 0 \\ x_2 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases} \\ &\iff X = 0. \end{aligned}$$

On conclut : $A \in \text{S}_n^{++}$.

12.40 Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{ii} = 0$.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $j \neq i$.

On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq {}^t(\alpha E_i + E_j)S(\alpha E_i + E_j) \\ &= \alpha^2 {}^tE_i S E_i + 2\alpha {}^tE_i S E_j + {}^tE_j S E_j \\ &= \alpha^2 \underbrace{a_{ii}}_{=0} + 2\alpha a_{ij} + a_{jj}^2. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, 2\alpha a_{ij} + a_{jj}^2 \geq 0$.

Si $a_{ij} > 0$, $2\alpha a_{ij} + a_{jj}^2 \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\infty} -\infty$, contradiction.

Si $a_{ij} < 0$, $2\alpha a_{ij} + a_{jj}^2 \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} -\infty$, contradiction.

Il s'ensuit : $a_{ij} = 0$.

On a montré ainsi que, si un terme diagonal de S est nul, alors tous les termes de S situés sur la ligne ou la colonne de celui-ci sont nuls.

12.41 Puisque $S \in \text{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, en notant $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, il existe $\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

• Soit $X \in \text{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_2 = 1$. En notant $Y = \Omega^{-1}X$, puisque Ω est orthogonale, on a : $\|X\|_2 = \|Y\|_2$ et $\|SX\|_2 = \|DY\|_2$.

Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On obtient :

$$\|DY\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i)^2 \leq (\rho(S))^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 = (\rho(S))^2,$$

d'où : $\|SX\|_2 = \|DY\|_2 \leq \rho(S)$.

• D'autre part, il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\rho(S) = |\lambda_k|$, et, en notant $X = \Omega E_k$ (où E_k est le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), on a :

$$\|X\|_2 = 1 \quad \text{et} \quad \|SX\|_2 = \|DE_k\|_2 = |\lambda_k| = \rho(S).$$

Finalement, l'application $X \mapsto \|SX\|_2$ est bornée sur la sphère-unité de $(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$, sa borne supérieure est $\rho(S)$, et celle-ci est atteinte.

12.42 1) Inégalité :

Puisque $f \in \mathcal{S}(E)$, d'après le théorème fondamental, il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$.

Soit $x \in E$. Notons $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - ax &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) - a\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^n a x_i e_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - a) x_i e_i. \end{aligned}$$

D'où, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. :

$$(f(x) - ax \mid f(x) - bx) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - a)(\lambda_i - b) x_i^2.$$

Comme $\text{Sp}(f) \cap]a; b[= \emptyset$, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (\lambda_i \leq a \quad \text{ou} \quad \lambda_i \geq b),$$

donc : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (\lambda_i - a)(\lambda_i - b) \geq 0$,

d'où : $(f(x) - ax \mid f(x) - bx) \geq 0$.

2) Étude du cas d'égalité :

On suppose ici plus précisément : $\text{Sp}(f) \cap [a; b] = \emptyset$.

Avec les notations de 1), on a, pour tout $x \in E$:

$$(f(x) - ax \mid f(x) - bx) = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^n \underbrace{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}_{> 0} \underbrace{x_i^2}_{\geq 0} = 0$$

$$\iff (\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i^2 = 0) \iff x = 0.$$

On conclut qu'il y a égalité si et seulement si $x = 0$.

12.43 Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. On a alors :

$$\begin{aligned} {}^tX SX &= \frac{1}{2} {}^tX (A + {}^tA) X \\ &= \frac{1}{2} {}^tX (AX) + \frac{1}{2} {}^t(AX) X = \lambda {}^tX X. \end{aligned}$$

Puisque $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ tels que, en notant $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on ait $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Notons $Y = \Omega^{-1} X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

$${}^tX SX = {}^tY DY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \quad \text{et} \quad {}^tX X = {}^tY Y = \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

$$\text{d'où :} \quad \lambda \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Comme : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (\alpha \leq \lambda_i \leq \beta \text{ et } y_i^2 \geq 0)$,

$$\text{on obtient :} \quad \alpha \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \beta \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Enfin, puisque $\sum_{i=1}^n y_i^2 > 0$, on conclut : $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

12.44 • Il est clair que M est symétrique.

• Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p+q,1}(\mathbb{R})$, où $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} AX + BY = 0 \\ {}^tBX - CY = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} AX + BY = 0 \\ {}^tXB - {}^tYC = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} {}^tX(AX + BY) = 0 \\ ({}^tXB - {}^tYC)Y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} {}^tXAX + {}^tXBY = 0 \\ {}^tXBY - {}^tYCY = 0 \end{cases} \\ &\implies \underbrace{{}^tXAX}_{\geq 0} + \underbrace{{}^tYCY}_{\geq 0} = 0 \iff \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \\ &\hspace{15em} A \in \mathbf{S}_p^{++}, C \in \mathbf{S}_q^{++} \\ &\implies \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut : M est inversible.

12.45 Puisque $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après l'exercice 12.11, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $S = R^2$. On a alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ usuel :

$$\begin{aligned}
({}^tXSX)({}^tYS^{-1}Y) &= ({}^tXR^2X)({}^tY(R^{-1})^2Y) \\
&= ({}^t(RX)(RX))({}^t(R^{-1}Y)(R^{-1}Y)) \\
&= \|RX\|_2^2 \|R^{-1}Y\|_2^2 \geq (RX | R^{-1}Y)^2 \\
&= ({}^t(RX)(R^{-1}Y))^2 = ({}^tX(RR^{-1})Y)^2 = ({}^tXY)^2.
\end{aligned}$$

12.46 Notons $C = AB - BA$.

1) Inégalité :

On a :

$$\begin{aligned}
{}^tC &= {}^t(AB - BA) = {}^tB {}^tA - {}^tA {}^tB \\
&= (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -C,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que C est antisymétrique.

$$\text{Ensuite : } {}^t(C^2) = ({}^tC)^2 = (-C)^2 = C^2,$$

donc C^2 est symétrique.

Enfin : $C^4 = {}^t(C^2)C^2 \in \mathbf{S}_n^+$, cf. exercice 12.18. D'où :

$$\text{tr}((AB - BA)^4) = \text{tr}({}^tC^2 C^2) = \|C^2\|_2^2 \geq 0.$$

2) Étude du cas d'égalité :

• Si $\text{tr}(C^4) = 0$, alors $\|C^2\|_2^2 = 0$, donc $C^2 = 0$, puis :

$$\|C\|_2^2 = \text{tr}({}^tCC) = \text{tr}(-C^2) = 0,$$

donc $C = 0$.

• Réciproquement, si $C = 0$, alors $\text{tr}(C^4) = 0$.

On conclut qu'il y a égalité si et seulement si : $AB = BA$.

12.47 1) • Soit X convenant.

On a alors : ${}^tX = {}^tX({}^tX X) = ({}^tX X)^2 \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$,

donc : $X \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Il en résulte : $X^3 = X^t X X = I_n$.

• D'après le théorème fondamental, puisque $X \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $X = \Omega D \Omega^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
X^3 = I_n &\iff D^3 = I_n \iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k^3 = 1) \\
&\iff (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 1) \iff D = I_n \iff X = I_n.
\end{aligned}$$

Ceci montre que, si X convient, alors $X = I_n$.

2) La réciproque est évidente : I_n convient. On conclut qu'il y a une matrice et une seule convenant : $X = I_n$.

12.48 1) Si $A \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA = I_2$ et $\det(A) = 1$, donc $\text{tr}({}^tAA) = 2$ et $\det(A) = 1$.

2) Réciproquement, supposons :

$$\text{tr}({}^tAA) = 2 \quad \text{et} \quad \det(A) = 1.$$

Comme ${}^tAA \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_{{}^tAA}(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}({}^tAA)\lambda + \det({}^tAA) \\
&= \lambda^2 - \text{tr}({}^tAA)\lambda + (\det(A))^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.
\end{aligned}$$

Puisque ${}^tAA \in \mathbf{S}_2(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, ${}^tAA$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, ${}^tAA$ est diagonalisable et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tAA) = \{1\}$, donc ${}^tAA = I_n$, $A \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$.

Comme, de plus, $\det(A) = 1$, on conclut : $A \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.

12.49 a) • Puisque $S \in \mathbf{S}_n^+ \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental,

il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

De plus, puisque $S \in \mathbf{S}_n^+$, d'après l'exercice 12.9, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0.$$

Notons, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(\mu_{i,p})_{p \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\mu_{i,0} = 1$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \mu_{i,p+1} = \frac{1}{2}(\mu_{i,p} + \lambda_i \mu_{i,p}^{-1}).$$

Il est clair que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mu_{i,p}$ existe et $\mu_{i,p} > 0$.

Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D_p = \text{diag}(\mu_{1,p}, \dots, \mu_{n,p})$.

On a donc : $\forall p \in \mathbb{N}, D_{p+1} = \frac{1}{2}(D_p + D D_p^{-1})$.

• Montrons, par récurrence sur p , que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A_p existe et $A_p = \Omega D_p \Omega^{-1}$.

La propriété est vraie pour $p = 0$ car $A_0 = I_n$ et $\Omega D_0 \Omega^{-1} = \Omega I_n \Omega^{-1} = I_n$.

Supposons la propriété vraie pour un $p \in \mathbb{N}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
A_{p+1} &= \frac{1}{2}(A_p + S A_p^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}(\Omega D_p \Omega^{-1} + \Omega D \Omega^{-1} (\Omega D_p \Omega^{-1})^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}\Omega(D_p + D D_p^{-1})\Omega^{-1} = \Omega D_{p+1} \Omega^{-1},
\end{aligned}$$

ce qui montre la propriété pour $p + 1$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A_p existe et $A_p = \Omega D_p \Omega^{-1}$.

De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, comme $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et $D_p \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a : $A_p \in \mathbf{S}_n^{++}$.

b) • Une étude élémentaire de suite récurrente réelle montre :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mu_{i,p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda_i}.$$

On déduit : $D_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$,

puis, par continuité des opérations usuelles dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A_p = \Omega D_p \Omega^{-1} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \underbrace{\Omega \Delta \Omega^{-1}}_{\text{notée } L}.$$

- Comme $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+)$, on a : $L \in \mathbf{S}_n^+$.
- Enfin : $L^2 = (\Omega \Delta \Omega^{-1})^2 = \Omega \Delta^2 \Omega^{-1} = \Omega D \Omega^{-1} = S$.

Remarque : On a ainsi construit, pour $S \in \mathbf{S}_n^+$ donnée, une suite récurrente dans $\mathbf{S}_n^{++}$ convergeant vers la racine carrée de S dans $\mathbf{S}_n^+$.

12.50 a) • La symétrie de ψ est immédiate.

- On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $x, y, z \in E$:

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda y + z) &= \phi(a)\varphi(x, \lambda y + z) - \varphi(a, x)\varphi(a, \lambda y + z) \\ &= \phi(a)(\lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, z)) - \varphi(a, x)(\lambda\varphi(a, y) + \varphi(a, z)) \\ &= \lambda(\phi(a)\varphi(x, y) - \varphi(a, x)\varphi(a, y)) \\ &\quad + (\phi(a)\varphi(x, z) - \varphi(a, x)\varphi(a, z)) \\ &= \lambda\psi(x, y) + \psi(x, z), \end{aligned}$$

donc ψ est linéaire par rapport à la deuxième place. On conclut que ψ est une fbs sur E .

- b) • Montrons : $\text{Ker}(\varphi) + Ka \subset \text{Ker}(\psi)$.

* Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$. On a :

$$\forall y \in E, \psi(x, y) = \underbrace{\phi(a)\varphi(x, y)}_{\neq 0} - \underbrace{\varphi(a, x)\varphi(a, y)}_{= 0} = 0,$$

donc : $x \in \text{Ker}(\psi)$.

* D'autre part :

$$\forall y \in E, \psi(a, y) = \phi(a)\varphi(a, y) - \varphi(a, a)\varphi(a, y) = 0,$$

donc : $a \in \text{Ker}(\psi)$.

Comme $\text{Ker}(\psi)$ est un sev de E , il en résulte :

$$\text{Ker}(\varphi) + Ka \subset \text{Ker}(\psi).$$

- Soit $x \in \text{Ker}(\varphi) \cap Ka$. Il existe $\lambda \in K$ tel que $x = \lambda a$, et on a : $\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0$.

$$\text{En particulier : } 0 = \varphi(x, a) = \varphi(\lambda a, a) = \lambda \underbrace{\phi(a)}_{\neq 0},$$

donc $\lambda = 0$, puis $x = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) \cap Ka = \{0\}$, la somme $\text{Ker}(\varphi) + Ka$ est directe.

- Notons $H = \{x \in E ; \varphi(a, x) = 0\} = \text{Ker}(\varphi(a, \cdot))$. Comme $\varphi(a, a) = \phi(a) \neq 0$, H est un hyperplan de E et on a : $E = H \oplus Ka$.

Soit $x \in \text{Ker}(\psi)$. Il existe $h \in H, \lambda \in K$ tels que : $x = h + \lambda a$.

On a, pour tout $y \in E$:

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(x, y) = \phi(a)\varphi(x, y) - \varphi(a, x)\varphi(a, y) \\ &= \phi(a)\varphi(h, y) + \lambda\phi(a)\varphi(a, y) \\ &\quad - \varphi(a, h)\varphi(a, y) - \lambda\phi(a)\varphi(a, y) \\ &= \phi(a)\varphi(h, y), \end{aligned}$$

d'où : $\varphi(h, y) = 0$.

On a donc $h \in \text{Ker}(\varphi)$, puis $x = h + \lambda a \in \text{Ker}(\varphi) + Ka$.

Ceci montre : $\text{Ker}(\psi) \subset \text{Ker}(\varphi) + Ka$.

Finalement : $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(\varphi) \oplus Ka$.

12.51 1) Soit $X \in \text{Ker}(A)$. On a donc : $AX = 0$.

Soit $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après l'hypothèse, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, {}^t(X + \lambda Y)A(X + \lambda Y) \geq 0,$$

c'est-à-dire : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda {}^tXAY + \lambda^2 {}^tYAY \geq 0$,

et donc, en simplifiant par λ :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, {}^tXAY + \lambda {}^tYAY \geq 0.$$

En faisant tendre λ vers 0^+ , on déduit : ${}^tXAY \geq 0$.

En appliquant ce résultat à $-Y$ à la place de Y , on a aussi :

$$-{}^tXAY \geq 0.$$

On déduit : ${}^tXAY = 0$.

On a ainsi montré : $\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAY = 0$.

Il en résulte : ${}^tXA = 0$, puis : ${}^tAX = {}^t({}^tXA) = 0$,

donc : $X \in \text{Ker}({}^tA)$.

Ceci montre : $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}({}^tA)$.

2) Comme : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX{}^tAX = {}^t({}^tXAX)$,

on a : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX{}^tAX \geq 0$.

On peut donc appliquer le résultat de 1) à ${}^tA$ à la place de A , d'où : $\text{Ker}({}^tA) \subset \text{Ker}(A)$.

Finalement : $\text{Ker}({}^tA) = \text{Ker}(A)$.

12.52 1) Soit $(X, Y) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que : ${}^tXX + {}^tYY = \mathbf{I}_n$.

Appliquons l'inégalité de Cauchy et Schwarz, dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot)$, au couple $(\mathbf{I}_n, X)$:

$$\begin{aligned} (\text{tr}(X))^2 &= (\text{tr}({}^t\mathbf{I}_n X))^2 = (\mathbf{I}_n | X)^2 \\ &\leq (\mathbf{I}_n | \mathbf{I}_n)(X | X) = n \text{tr}({}^tXX), \end{aligned}$$

et de même : $(\text{tr}(Y))^2 \leq n \text{tr}({}^tYY)$.

D'autre part, on remarque :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

comme on le voit en développant. D'où :

$$\begin{aligned} (\operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(Y))^2 &\leq 2((\operatorname{tr}(X))^2 + (\operatorname{tr}(Y))^2) \\ &\leq 2n (\operatorname{tr}({}^tXX) + \operatorname{tr}({}^tYY)) \\ &= 2n \operatorname{tr}({}^tXX + {}^tYY) = 2n \operatorname{tr}(I_n) = 2n^2. \end{aligned}$$

On déduit : $\operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(Y) \leq \sqrt{2}n$.

2) Pour $X = Y = \frac{1}{\sqrt{2}}I_n$, on a :

$${}^tXX + {}^tYY = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_n = I_n$$

$$\text{et} \quad \operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}n + \frac{1}{\sqrt{2}}n = \sqrt{2}n.$$

On conclut que la borne supérieure demandée est égale à $\sqrt{2}n$.

12.53 1) Soit M convenant.

Supposons $M \neq 0$. Puisque M est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que : $M^k = 0$ et $M^{k-1} \neq 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} I_n + M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) &\iff {}^t(I_n + M)(I_n + M) = I_n \\ &\iff {}^tM + M + {}^tMM = 0. \end{aligned}$$

En multipliant à droite par M^{k-1} , on déduit :

$$\begin{aligned} {}^tMM^{k-1} + \underbrace{{}^tM^k}_{=0} + \underbrace{{}^tMM^k}_{=0} &= 0, \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc : ${}^tMM^{k-1} = 0$.

Puis, en multipliant à gauche par ${}^tM^{k-2}$: ${}^tM^{k-1}M^{k-1} = 0$.

Alors, en utilisant la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|M^{k-1}\|^2 = \operatorname{tr}({}^t(M^{k-1})M^{k-1}) = 0,$$

d'où $M^{k-1} = 0$, contradiction.

Ceci montre : $M = 0$.

2) Réciproquement, il est clair que $M = 0$ convient.

On conclut qu'il y a une matrice M et une seule convenant :

$$M = 0.$$

12.54 a) • Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. On a :

$$\begin{aligned} \|f^*(x)\|^2 &= (f^*(x) | f^*(x)) = (x | f \circ f^*(x)) \\ &= (x | f^* \circ f(x)) = (x | f^*(0)) = 0, \end{aligned}$$

d'où : $f^*(x) = 0$, $x \in \operatorname{Ker}(f^*)$.

Ceci montre : $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^*)$.

• On a : $(f^*)^* \circ f^* = f \circ f^* = f^* \circ f = f^* \circ (f^*)^*$

donc f^* vérifie la même hypothèse que f .

D'après le résultat précédent, appliqué à f^* à la place de f , on a : $\operatorname{Ker}(f^*) \subset \operatorname{Ker}(f^{**}) = \operatorname{Ker}(f)$.

On conclut : $\operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Ker}(f)$.

b) • Soit $(x, y) \in \operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Im}(f)$. Alors, $x \in \operatorname{Ker}(f)$ et il existe $t \in E$ tel que $y = f(t)$. On a :

$$(x | y) = (x | f(t)) = (f^*(x) | t).$$

Mais $x \in \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^*)$, donc $f^*(x) = 0$, puis $(x | y) = 0$.

Ceci montre : $\operatorname{Ker}(f) \perp \operatorname{Im}(f)$.

• On a alors, en utilisant le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)) &= \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E), \end{aligned}$$

donc : $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.

Finalement : $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.

c) • Soit $y \in \operatorname{Im}(f^*)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^*(x)$. D'après b), il existe $u \in \operatorname{Ker}(f)$, $v \in \operatorname{Im}(f)$ tels que $x = u + v$. On a alors :

$$y = f^*(x) = f^*(u + v) = f^*(u) + f^*(v).$$

Mais $u \in \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^*)$, donc $f^*(u) = 0$, puis : $y = f^*(v)$.

Ensuite, comme $v \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $t \in E$ tel que $v = f(t)$. On a alors :

$$\begin{aligned} y = f^*(v) &= f^*(f(t)) = (f^* \circ f)(t) \\ &= (f \circ f^*)(t) = f(f^*(t)) \in \operatorname{Im}(f). \end{aligned}$$

Ceci montre : $\operatorname{Im}(f^*) \subset \operatorname{Im}(f)$.

• Comme f^* vérifie la même hypothèse que f , en appliquant le résultat précédent à f^* à la place de f , on a aussi : $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^*)$.

On conclut : $\operatorname{Im}(f^*) = \operatorname{Im}(f)$.

12.55 • Le sens $\Leftarrow$ est évident.

• Supposons $f \circ f^* = f^2$. Notons $g = f - f^*$. On a :

$$\begin{aligned} g^* \circ g &= (f - f^*)^* \circ (f - f^*) = (f^* - f) \circ (f - f^*) \\ &= f^* \circ f - f^2 - f^{*2} + f \circ f^* = f^* \circ f - f^{*2} \\ &= f^* \circ f - (f^2)^* = f^* \circ f - (f \circ f^*)^* \\ &= f^* \circ f - f \circ f^*. \end{aligned}$$

Considérons le produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2, (u | v) = \operatorname{tr}(u^* \circ v),$$

et la norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. On a alors :

$$\begin{aligned}\|g\|^2 &= \text{tr}(g^* \circ g) = \text{tr}(f^* \circ f - f \circ f^*) \\ &= \text{tr}(f^* \circ f) - \text{tr}(f \circ f^*) = 0, \\ \text{d'où } g &= 0, \text{ c'est-à-dire : } f = f^*.\end{aligned}$$

12.56 Notons $A = (a_{ij})_{ij} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{On a : } \forall i \in \{1, \dots, n\}, f(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k,$$

puis, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$(f(e_i) | e'_j) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} e_k \mid e'_j \right) = \sum_{k=1}^n a_{ki} (e_k | e'_j).$$

Notons $E = (e_k | e'_j)_{1 \leq k, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $(f(e_i) | e'_j)$ est le (i, j) ème terme de ${}^tAE$.

Les colonnes de E sont les coordonnées des e'_j dans $\mathcal{B}$. Autrement dit, E est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des b.o.n., on déduit : $E \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i, j \leq n} (f(e_i) | e'_j)^2 &= \|{}^tAE\|_2^2 = \text{tr}({}^t(AE)(AE)) \\ &= \text{tr}({}^tE(A{}^tAE)) = \text{tr}((A{}^tAE){}^tE) \\ &= \text{tr}((A{}^tA)(E{}^tE)) = \text{tr}(A{}^tA) = \text{tr}({}^tAA) = \text{tr}(f^* \circ f).\end{aligned}$$

12.57 a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Soit $Q \in E_n$. L'application

$$\varphi_Q : E_n \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto (XP | Q)$$

est une forme linéaire sur l'espace $(E_n, (\cdot | \cdot))$, donc, d'après le cours, il existe $Q_1 \in E_n$ unique tel que :

$$\forall P \in E_n, \varphi_Q(P) = (P | Q_1).$$

Ceci montre qu'il existe une application et une seule $f_n : E_n \longrightarrow E_n$ telle que :

$$\forall (P, Q) \in E_n^2, (P | f_n(Q)) = (XP | Q).$$

• Montrons que f_n est linéaire.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q_1, Q_2 \in E_n$. On a, pour tout $P \in E_n$:

$$\begin{aligned}(P | f_n(\alpha Q_1 + Q_2)) &= (XP | \alpha Q_1 + Q_2) \\ &= \alpha(XP | Q_1) + (XP | Q_2) \\ &= \alpha(P | f_n(Q_1)) + (P | f_n(Q_2)) \\ &= (P | \alpha f_n(Q_1) + f_n(Q_2)),\end{aligned}$$

donc : $f_n(\alpha Q_1 + Q_2) = \alpha f_n(Q_1) + f_n(Q_2)$,

et on conclut que f_n est linéaire. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathcal{L}(E)$ unique tel que :

$$\forall (P, Q) \in E_n^2, (P | f_n(Q)) = (XP | Q).$$

Remarque : On ne peut pas définir directement f_n comme un adjoint, car $P \longmapsto XP$ n'est pas un endomorphisme de E_n .

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et tout $P \in E_n$:

$$\begin{aligned}(P | X^{k+1}) &= \int_{-1}^1 P(x) x^{k+1} dx = \int_{-1}^1 (xP(x)) x^k dx \\ &= (XP | X^k) = (P | f_n(X^k)),\end{aligned}$$

d'où : $f_n(X^k) = X^{k+1}$.

Remarque : On n'a pas $f_n(X^n) = X^{n+1}$, car $X^{n+1} \notin E_n$.

3) On a, pour tout $(P, Q) \in E_n^2$:

$$\begin{aligned}(P | f_n(Q)) &= (XP | Q) \\ &= \int_{-1}^1 (xP(x)) Q(x) dx = \int_{-1}^1 P(x) (xQ(x)) dx \\ &= (P | XQ) = (XQ | P) = (Q | f_n(P)).\end{aligned}$$

On conclut : f_n est auto-adjoint.

b) • D'après a) 2), on a : $f_2(1) = X$, $f_2(X) = X^2$.

• Notons $f_2(X^2) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

On a, en utilisant la définition de f_2 :

$$\begin{aligned}\begin{cases} (1 | f_2(X^2)) = (X | X^2) \\ (X | f_2(X^2)) = (X^2 | X^2) \\ (X^2 | f_2(X^2)) = (X^3 | X^2) \end{cases} \\ \iff (S) \begin{cases} \alpha(1 | 1) + \beta(1 | X) + \gamma(1 | X^2) = (X | X^2) \\ \alpha(X | 1) + \beta(X | X) + \gamma(X | X^2) = (X^2 | X^2) \\ \alpha(X^2 | 1) + \beta(X^2 | X) + \gamma(X^2 | X^2) = (X^3 | X^2). \end{cases}\end{aligned}$$

Calculons les produits scalaires qui interviennent.

Par imparité :

$$(1 | X) = 0, (X | X^2) = 0, (X^3 | X^2) = 0.$$

$$\text{et : } (1 | 1) = 2, (1 | X^2) = (X | X) = \frac{2}{3}, (X^2 | X^2) = \frac{2}{5}.$$

D'où :

$$(S) \iff \begin{cases} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma = 0 \\ \frac{2}{3}\beta = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{3}{5} \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

On obtient : $f_2(X^2) = \frac{3}{5}X$.

On conclut : $f_2(1) = X$, $f_2(X) = X^2$, $f_2(X^2) = \frac{3}{5}X$.

12.58

a) 1) Existence

D'après le théorème fondamental, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ tels qu'en notant $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on ait $S = \Omega D \Omega^{-1}$. Considérons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, et $R = \Omega \Delta \Omega^{-1}$. Alors :

- $R^2 = \Omega \Delta^2 \Omega^{-1} = \Omega D \Omega^{-1} = S$
- ${}^t R = {}^t \Omega^{-1} \Delta {}^t \Omega = \Omega \Delta \Omega^{-1} = R$, donc $R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$
- $R \in \mathbf{S}_n^+$ car $R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) \subset \mathbb{R}_+$.

2) Unicité

Soit $R \in \mathbf{S}_n^+$ telle que $R^2 = S$.

- On a :
$$\begin{cases} \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) \subset \{\sqrt{\mu}; \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)\} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R), \quad \text{SEP}(R, \lambda) \subset \text{SEP}(S, \lambda^2) \end{cases}$$

car :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$$(RX = \lambda X \implies SX = R^2 X = \lambda^2 X).$$

Puisque R et S sont diagonalisables, on déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) &= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R)} \text{SEP}(R, \lambda) \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)} \text{SEP}(S, \lambda^2) \\ &\subset \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)} \text{SEP}(S, \mu) = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

d'où nécessairement :

$$\begin{cases} \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{\lambda^2; \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R)\} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R), \quad \text{SEP}(R, \lambda) = \text{SEP}(S, \lambda^2) \end{cases}$$

- Il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

D'après le résultat précédent, il existe $D' \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telle que $R = \Omega D' \Omega^{-1}$. Comme $R \in \mathbf{S}_n^+$, D' est formée des racines carrées des éléments de D , d'où l'unicité de R .

b) Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$. Avec les notations de la solution de a), d'après le cours sur l'interpolation polynomiale, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \sqrt{\lambda_k} = P(\lambda_k)$.

En effet, il suffit de prendre pour P un polynôme interpolant les $\sqrt{\lambda_k}$ en les λ_k , en ne considérant que des λ_k deux à deux distincts.

On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{diag}(\sqrt{\lambda_k})_{1 \leq k \leq n} = \text{diag}(P(\lambda_k))_{1 \leq k \leq n} \\ &= P(\text{diag}(\lambda_k)) = P(D), \end{aligned}$$

puis :

$$S^{1/2} = \Omega \Delta \Omega^{-1} = \Omega P(D) \Omega^{-1} = P(\Omega D \Omega^{-1}) = P(S).$$

On conclut : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+, \exists P \in \mathbb{R}[X], S^{1/2} = P(S)$.

c) Soit $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$.

1) Supposons que $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent. D'après le cours, tout polynôme en $A^{1/2}$ commute alors avec tout polynôme en $B^{1/2}$. Comme $A = (A^{1/2})^2$ et $B = (B^{1/2})^2$, on conclut que A et B commutent.

2) Réciproquement, supposons que A et B commutent. D'après le cours, tout polynôme en A commute alors avec tout polynôme en B . Comme, d'après b), $A^{1/2}$ est un polynôme en A et $B^{1/2}$ est un polynôme en B , on conclut que $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent.

12.59

Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

1) Unicité :

Si un couple (Ω, S) convient, alors :

$${}^t A A = {}^t (\Omega S) (\Omega S) = {}^t S ({}^t \Omega \Omega) S = S^2,$$

donc, d'après l'exercice 12.58 : $S = ({}^t A A)^{1/2}$.

Ensuite, comme $S \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, on a : $\Omega = A S^{-1}$.

Ceci montre l'unicité de (Ω, S) .

2) Existence :

D'après l'exercice 12.18, on a : ${}^t A A \in \mathbf{S}_n^{++}$. Puis, d'après l'exercice 12.58, il existe $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que : ${}^t A A = S^2$.

Notons $\Omega = A S^{-1}$. On a alors $A = \Omega S$, et :

$${}^t \Omega \Omega = {}^t (A S^{-1}) A S^{-1} = S^{-1} ({}^t A A) S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n,$$

donc : $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Ceci montre l'existence d'un couple (Ω, S) convenant.

12.60

Puisque $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après l'exercice 12.11, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $A = R^2$.

On a : $AB = R^2 B = R(RBR)R^{-1}$,

donc AB est semblable à RBR .

Mais, RBR est symétrique, car :

$${}^t (RBR) = {}^t R {}^t B {}^t R = RBR.$$

D'après le théorème fondamental, RBR est diagonalisable.

Puisque AB est semblable à une matrice diagonalisable, on conclut que AB est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : En particulier, χ_{AB} est scindé sur $\mathbb{R}$.

12.61

1^{re} méthode :

Soit $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$. Puisque $A \in \mathbf{S}_n^+$,

il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ tels que, en notant $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on ait : $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

Notons $C = \Omega^{-1} B \Omega$.

Comme $B \in \mathbf{S}_n^+$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, on a $C \in \mathbf{S}_n^+$; en effet :

$$\begin{cases} {}^tC = {}^t\Omega {}^tB {}^t\Omega^{-1} = \Omega^{-1}B\Omega = C \\ \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \\ {}^tX C X = {}^tX \Omega^{-1}B\Omega X = {}^t(\Omega X)B(\Omega X) \geq 0. \end{cases}$$

Notons $C = (c_{ij})_{ij}$; on a :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{tr}(B) = \text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii},$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(DC) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_{ii}.$$

D'une part, puisque $A \in \mathbf{S}_n^+$: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$.

D'autre part, puisque $C \in \mathbf{S}_n^+$, en notant E_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$c_{ii} = {}^tE_i C E_i \geq 0.$$

$$\text{On a donc : } 0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i c_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n c_{ii} \right),$$

$$\text{et finalement : } 0 \leq \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A) \text{tr}(B).$$

2^e méthode, pour la première inégalité :

D'après l'exercice 12.11, puisque $A, B \in \mathbf{S}_n^+$, il existe $R, S \in \mathbf{S}_n^+$ telles que : $A = R^2$ et $B = S^2$. On a alors, en faisant intervenir le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme euclidienne associée :

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \text{tr}(R^2 S^2) = \text{tr}(R(RS^2)) = \text{tr}((RS^2)R) \\ &= \text{tr}((RS)(SR)) = \text{tr}({}^t(SR)(SR)) = \|SR\|_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

12.62 1) Obtention d'un résultat préliminaire :

Soient $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq {}^t \begin{pmatrix} X \\ \alpha Y \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} X \\ \alpha Y \end{pmatrix} \\ &= ({}^tX \quad \alpha {}^tY) \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha Y \end{pmatrix} \\ &= {}^tX A X + 2\alpha {}^tY B X + \alpha^2 {}^tY C Y. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme du second degré est donc ≤ 0 :

$$({}^tY B X)^2 - ({}^tX A X)({}^tY C Y) \leq 0.$$

2) • Soit $X \in \text{Ker}(A)$. On a alors, d'après 1) :

$$\forall Y \in \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{R}), ({}^tY B X)^2 \leq 0.$$

Ceci montre : $\forall Y \in \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{R}), {}^tY(BX) = 0$,

c'est-à-dire que BX est orthogonal à tout vecteur de $\mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, donc $BX = 0$, $X \in \text{Ker}(B)$.

On a montré : $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(B)$.

• Soit $Y \in \text{Ker}(C)$. On a alors, d'après a) :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R}), ({}^tY B X)^2 \leq 0.$$

Ceci montre : $\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R}), {}^t(BY)X = 0$,

c'est-à-dire que ${}^tBY$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, donc ${}^tBY = 0$, $Y \in \text{Ker}({}^tB)$.

On a montré : $\text{Ker}(C) \subset \text{Ker}({}^tB)$.

12.63 Puisque $(A, B) \in (\mathbf{S}_n(\mathbb{R}))^2$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, A + tB \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

De même que dans l'exercice 12.41, on a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(t) = \min_{\|X\|_2=1} ({}^tX(A+tB)X) \\ g(t) = \max_{\|X\|_2=1} ({}^tX(A+tB)X). \end{cases}$$

Soient $u, v \in \mathbb{R}, \alpha \in [0; 1]$.

On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_2 = 1$:

$$\begin{aligned} &{}^tX(A + ((1-\alpha)u + \alpha v)B)X \\ &= {}^tX A X + ((1-\alpha)u + \alpha v){}^tX B X \\ &= (1-\alpha)({}^tX A X + u{}^tX B X) + \alpha({}^tX A X + v{}^tX B X) \\ &\quad \begin{cases} \geq (1-\alpha)f(u) + \alpha f(v) \\ \leq (1-\alpha)g(u) + \alpha g(v). \end{cases} \end{aligned}$$

Il en résulte, par définition de $f((1-\alpha)u + \alpha v)$ et de $g((1-\alpha)u + \alpha v)$:

$$\begin{cases} f((1-\alpha)u + \alpha v) \geq (1-\alpha)f(u) + \alpha f(v) \\ g((1-\alpha)u + \alpha v) \leq (1-\alpha)g(u) + \alpha g(v). \end{cases}$$

On conclut : f est concave et g est convexe.

12.64 • Puisque $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

Soit $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ quelconque.

Notons $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $B = \Omega \Delta \Omega^{-1}$.

Il est clair que : $B \in \mathbf{S}_n^{++}$.

D'après l'hypothèse, on a alors : $\text{tr}(AB) \geq 0$.

Mais :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(\Omega D \Omega^{-1} \Omega \Delta \Omega^{-1}) = \text{tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i.$$

Ceci montre : $\forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \geq 0$.

• Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé. Choisissons $\mu_i = 1$ et faisons tendre μ_j (pour $j \neq i$) vers 0 par valeurs > 0 . On obtient, par passage à la limite : $\lambda_i \geq 0$. Ainsi, $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+$. D'après l'exercice 12.9, on conclut : $A \in \mathbf{S}_n^+$.

12.65 Puisque $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après l'exercice 12.11, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que : $S = R^2$.

Alors : $SA = R^2A = R(RAR)R^{-1}$,
donc SA est semblable à RAR .

Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(RAR)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que : $(RAR)X = \lambda X$. On a alors, en utilisant la notion de transconjugée et la norme hermitienne sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}(X^*R)(A + {}^tA)(RX) &= X^*(RAR)X + X^*(R{}^tAR)X \\ &= X^*((RAR)X) + ((RAR)X)^*X = X^*\lambda X + (\lambda X)^*X \\ &= \lambda X^*X + \bar{\lambda}X^*X = (\lambda + \bar{\lambda})\|X\|_2^2.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$(X^*R)(A + {}^tA)(RX) = (RX)^*(A + {}^tA)(RX) > 0,$$

car $RX \neq 0$

(puisque $X \neq 0$ et $R \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$) et $A + {}^tA \in \mathbf{S}_n^{++}$.

Ainsi : $(\lambda + \bar{\lambda})\|X\|_2^2 > 0$, d'où : $\lambda + \bar{\lambda} > 0$.

On conclut : $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(SA), \text{Ré}(\lambda) > 0$.

12.66 a) Puisque $A \in \mathbf{S}_n^+ \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

De plus, d'après l'exercice 12.9, puisque $A \in \mathbf{S}_n^+$, on a :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \geq 0.$$

Notons $C = \Omega^{-1}B\Omega$ de sorte que : $B = \Omega C \Omega^{-1}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}AB + BA = 0 &\iff \Omega(DC + CD)\Omega^{-1} = 0 \\ &\iff DC + CD = 0.\end{aligned}$$

Passons aux éléments : $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $C = (c_{ij})_{ij}$.

On a, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$(DC + CD)_{ij} = \lambda_i c_{ij} + c_{ij} \lambda_j = (\lambda_i + \lambda_j) c_{ij}.$$

Ainsi : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (\lambda_i + \lambda_j) c_{ij} = 0$.

Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

On a : $\lambda_i + \lambda_j = 0$ ou $c_{ij} = 0$.

Comme les λ_k sont tous ≥ 0 , si $\lambda_i + \lambda_j = 0$, alors $\lambda_i = 0$ et $\lambda_j = 0$. On a donc :

$$(\lambda_i = 0 \text{ ou } c_{ij} = 0) \text{ et } (\lambda_j = 0 \text{ ou } c_{ij} = 0).$$

Ceci montre : $DC = 0$ et $CD = 0$, puis :

$$AB = \Omega(DC)\Omega^{-1} = 0 \text{ et } BA = \Omega(CD)\Omega^{-1} = 0.$$

b) L'exemple suivant convient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+ - \{0\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+ - \{0\},$$

dans lequel on a : $AB = BA = 0$.

12.67 Puisque $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après l'exercice 12.9, les valeurs propres de A sont toutes > 0 , donc A est inversible. On a, pour tout $(X, Y) \in (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tY \\ X & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1}X & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^tY A^{-1}X & {}^tY A^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

d'où, en passant aux déterminants :

$$-\varphi(X, Y) \det(A^{-1}) = -{}^tY A^{-1}X.$$

Ainsi : $\varphi(X, Y) = {}^tY (\det(A) A^{-1}) X$.

Comme $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a $\det(A) > 0$, $A^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$, donc $\det(A) A^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$.

Il en résulte, d'après l'expression matricielle des fbs, que φ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

12.68 • D'abord, il est clair que ${}^tH_n = H_n$, donc : $H_n \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Remarquons : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}{}^tX H_n X &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \frac{1}{i+j-1} x_j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_0^1 t^{i+j-2} x_i x_j dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} t^{i+j-2} x_i x_j \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n t^{j-1} x_j \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i \right)^2 dt \geq 0,\end{aligned}$$

donc : $H_n \in \mathbf{S}_n^+$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tX H_n X = 0$. Avec les notations précédentes, on a donc :

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i \right)^2 dt = 0.$$

Comme l'application polynomiale $t \mapsto \sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i$ est continue, il en résulte : $\forall t \in [0; 1], \sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i = 0$.

Ainsi, le polynôme $\sum_{i=1}^n x_i X^{i-1}$ s'annule en une infinité de points, donc est le polynôme nul, d'où :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 0,$$

puis : $X = 0$.

On conclut : $H_n \in \mathbf{S}_n^{++}$.

12.69 Soient $A \in \mathbf{S}_n^{++}, B \in \mathbf{S}_n^+$.

Puisque $A \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, A est inversible.

On a alors : $I_n + AB = A(A^{-1} + B)$.

• Comme $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a : $A^{-1} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et :

$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, {}^tX A^{-1} X$
 $= ({}^tX A^{-1}) A (A^{-1} X) = {}^t(A^{-1} X) A (A^{-1} X) > 0,$
 donc : $A^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$.

• Comme $A^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$ et $B \in \mathbf{S}_n^+$, on a $A^{-1} + B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$:

$${}^tX (A^{-1} + B) X = \underbrace{{}^tX A^{-1} X}_{> 0} + \underbrace{{}^tX B X}_{\geq 0} > 0,$$

donc : $A^{-1} + B \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

• Enfin, comme $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} + B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, on déduit : $A(A^{-1} + B) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

On conclut : $I_n + AB \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

12.70 Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$.

• D'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

De plus, comme $S \in \mathbf{S}_n^+$, d'après l'exercice 12.9 :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0.$$

On a alors : $1 + (\det(S))^{1/n} = 1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n}$

et : $(\det(I_n + S))^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{1/n}$.

Il suffit donc de montrer :

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{1/n}.$$

S'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i = 0$, alors l'inégalité voulue est triviale.

Supposons désormais : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i > 0$.

• Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \ln(1 + e^t).$$

L'application φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = \frac{e^t}{1 + e^t}, \quad \varphi''(t) = \frac{e^t}{(1 + e^t)^2} \geq 0.$$

Ceci montre que φ est convexe.

D'après l'inégalité de Jensen, on a donc :

$$\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(t_i) \quad (1).$$

Mais :

$$(1) \iff \ln \left[1 + \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right) \right] \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{t_i})$$

$$\iff 1 + \left(\prod_{i=1}^n e^{t_i} \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + e^{t_i}) \right)^{1/n}.$$

En appliquant cette inégalité à $t_i = \ln \lambda_i$, on conclut à l'inégalité demandée.

12.71 L'inclusion $\text{Ker}(\varphi) \subset C(q)$ est immédiate.

En effet, pour tout $x \in E$:

$$x \in \text{Ker}(\varphi) \iff (\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0)$$

$$\implies q(x) = \varphi(x, x) = 0 \iff x \in C(q).$$

I) • Supposons $q \geq 0$.

Soit $x \in C(q)$. Soit $y \in E$.

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, q(x + \lambda y) \geq 0$,

d'où, en développant et en utilisant $q(x) = 0$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, 2\lambda \varphi(x, y) + \lambda^2 q(y) \geq 0.$$

Il en résulte que le discriminant est ≤ 0 , c'est-à-dire $4(\varphi(x, y))^2 \leq 0$, puis : $\varphi(x, y) = 0$.

Ceci montre : $\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0$,

donc : $x \in \text{Ker}(\varphi)$.

On obtient : $C(q) \subset \text{Ker}(\varphi)$.

• Si $q \leq 0$, en appliquant le résultat précédent à $-q$, qui est ≥ 0 et dont la forme polaire est $-\varphi$, on a :

$$C(q) = C(-q) \subset \text{Ker}(-\varphi) = \text{Ker}(\varphi).$$

Ceci montre que, si q est de signe fixe, alors $\text{Ker}(\varphi) = C(q)$.

2) Supposons que q ne soit pas de signe fixe, c'est-à-dire que q n'est ni positive ni négative. Il existe alors $u, v \in E$ tels que :

$$q(u) < 0 \text{ et } q(v) > 0.$$

Nous allons montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ n'est pas égal à $C(q)$. À cet effet, il suffit de trouver un élément de $C(q)$ qui ne soit pas dans $\text{Ker}(\varphi)$.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad q(tv + u) = \underbrace{q(v)}_{>0} t^2 + 2\varphi(u, v)t + \underbrace{q(u)}_{<0}.$$

Le discriminant Δ de ce trinôme en t est :

$$\Delta = 4(\varphi(u, v))^2 - 4q(u)q(v) > 0,$$

donc ce trinôme admet deux zéros réels distincts.

Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que : $q(tv + u) = 0$.

Notons $w = tv + u$. On a alors $w \in C(q)$.

D'autre part :

$$\begin{cases} \varphi(u, w) = \varphi(u, tv + u) = t\varphi(u, v) + q(u) \\ \varphi(v, w) = \varphi(v, tv + u) = tq(v) + \varphi(v, u). \end{cases}$$

Si $\varphi(u, w) = 0$ et $\varphi(v, w) = 0$, alors :

$$t\varphi(u, v) = -q(u) \text{ et } \varphi(v, u) = -tq(v),$$

d'où :

$$t\varphi(u, v) = -q(u) > 0 \text{ et } t\varphi(u, v) = -t^2q(v) \leq 0,$$

contradiction.

On a donc : $\varphi(u, w) \neq 0$ ou $\varphi(v, w) \neq 0$,

d'où : $w \notin \text{Ker}(\varphi)$.

Ainsi : $w \in C(q)$ et $w \notin \text{Ker}(\varphi)$,

donc : $\text{Ker}(\varphi) \neq C(q)$.

12.72 a) Supposons $(x_1, \dots, x_p)$ obtusangle.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$.

Considérons $y = \sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i| x_i$. On a :

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i| x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i| x_i \right\|^2 - \underbrace{\left\| \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i \right\|^2}_{=0} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i|^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} |\alpha_i| |\alpha_j| (x_i | x_j) \right] \\ &\quad - \left[\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \alpha_i \alpha_j (x_i | x_j) \right] \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \underbrace{(|\alpha_i| |\alpha_j| - \alpha_i \alpha_j)}_{\geq 0} \underbrace{(x_i | x_j)}_{< 0} \leq 0, \end{aligned}$$

d'où : $y = 0$. Il s'ensuit :

$$0 = (x_p | y) = \left(x_p \left| \sum_{i=1}^{p-1} |\alpha_i| x_i \right. \right) = \sum_{i=1}^{p-1} \underbrace{|\alpha_i|}_{\geq 0} \underbrace{(x_p | x_i)}_{< 0}.$$

Il en résulte : $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}, |\alpha_i| = 0$,

d'où : $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}, \alpha_i = 0$.

Ceci montre que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

b) S'il existait une famille obtusangle $(x_1, \dots, x_p)$ telle que $p \geq n+2$, alors, d'après a), la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ serait libre et de cardinal $\geq n+1$, dans un ev de dimension n , contradiction.

On conclut que, dans un eve de dimension n , il n'existe pas de famille obtusangle de cardinal $\geq n+2$.

Remarque : On peut, dans tout eve de dimension n , construire une famille obtusangle de cardinal $n+1$.

12.73 • Notons $\Omega = \begin{pmatrix} A & U \\ V & B \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) &\iff \begin{cases} {}^t\Omega\Omega = I_n, \\ \Omega {}^t\Omega = I_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tV \\ {}^tU & {}^tB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & U \\ V & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A & U \\ V & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tV \\ {}^tU & {}^tB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} {}^tAA + {}^tVV = I_p \\ V^tV + B^tB = I_{n-p}. \end{cases} \end{aligned}$$

D'après l'exercice 11.55, on déduit :

$$\begin{aligned} \det({}^tAA) &= \det(I_p - {}^tVV) = (-1)^p \chi_{{}^tV}(1) \\ &= (-1)^{n-p} \chi_{V^tV}(1) = \det(I_{n-p} - V^tV) = \det(B^tB), \end{aligned}$$

d'où :

$$(\det(A))^2 = \det({}^tAA) = \det(B^tB) = (\det(B))^2,$$

et donc : $|\det(A)| = |\det(B)|$.

• On a : ${}^tAA \in \mathbf{S}_n^+$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}({}^tAA)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que ${}^tAAX = \lambda X$. Puisque ${}^tAA + {}^tVV = I_p$,

on a alors : ${}^tX({}^tAAX) + {}^tX^tV^tVX = {}^tXX$,

d'où : $\lambda \|X\|^2 + \|V^tX\|^2 = \|X\|^2$,

et donc : $\lambda \|X\|^2 \leq \|X\|^2$.

Comme $\|X\| > 0$, il s'ensuit : $\lambda \leq 1$.

Ainsi : $\text{Sp}({}^tAA) \subset [0; 1]$.

Comme ${}^tAA$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, il en résulte :

$$\det({}^tAA) \in [0; 1].$$

Mais : $\det({}^tAA) = (\det(A))^2$.

On conclut : $|\det(A)| \in [0; 1]$.

De même : $|\det(B)| \in [0; 1]$.

12.74 a) 1) Puisque $S \in \mathbf{S}_n^+ \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD^tP = PDP^{-1}$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Notons $P = (p_{ij})_{ij}$. On a, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, par produit matriciel : $s_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ik} \lambda_k p_{jk}$.

En particulier, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$s_{ii} = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_{ik}^2.$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé.

Puisque les p_{ik}^2 , $(1 \leq k \leq n)$ sont des réels ≥ 0 tels que $\sum_{k=1}^n p_{ik}^2 = 1$, (car P est orthogonale) et que f est convexe, on a, d'après l'inégalité de Jensen :

$$f(s_{ii}) = f\left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^2 \lambda_k\right) \leq \sum_{k=1}^n p_{ik}^2 f(\lambda_k).$$

D'où, en sommant pour i de 1 à n :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(s_{ii}) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_{ik}^2 f(\lambda_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{ik}^2 \right) f(\lambda_k) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k), \end{aligned}$$

car : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n p_{ik}^2 = 1$,

puisque P est orthogonale.

2) • Supposons d'abord $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. On a alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, s_{ii} = {}^tE_i S E_i > 0,$$

et, d'après l'exercice 12.9 : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_k > 0$.

Considérons l'application

$$f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto -\ln x,$$

qui est convexe. On peut adapter le résultat de 1) (où f était convexe sur $[0; +\infty[$) et on obtient :

$$\sum_{i=1}^n f(s_{ii}) \leq \sum_{k=1}^n f(\lambda_k).$$

$$\text{Mais : } \sum_{i=1}^n f(s_{ii}) = \sum_{i=1}^n -\ln(s_{ii}) = -\ln\left(\prod_{i=1}^n s_{ii}\right)$$

$$\text{et : } \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) = \sum_{k=1}^n -\ln \lambda_k = -\ln\left(\prod_{k=1}^n \lambda_k\right).$$

$$\text{On déduit : } \prod_{i=1}^n s_{ii} \geq \prod_{k=1}^n \lambda_k = \det(D) = \det(S).$$

• Si $S \in \mathbf{S}_n^+$ et $S \notin \mathbf{S}_n^{++}$, alors 0 est valeur propre de S , donc $\det(S) = 0$, et, d'autre part, les s_{ii} sont tous ≥ 0 , d'où l'inégalité voulue.

b) Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $S = A^tA \in \mathbf{S}_n^+$.

$$\text{D'après a) 2) : } \det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}.$$

$$\text{Mais : } \det(S) = \det(A^tA) = (\det(A))^2,$$

$$\text{et, pour tout } i \in \{1, \dots, n\} : s_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

$$\text{On déduit : } (\det(A))^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

$$\text{On conclut : } |\det(A)| \leq \left(\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

12.75 • Puisque ${}^tAA = \alpha A + \beta {}^tA$, on déduit, en transposant : ${}^tAA = \alpha {}^tA + \beta A$, puis, en additionnant et en notant

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} : {}^tAA = \gamma A + \gamma {}^tA.$$

On a alors :

$${}^t(A - \gamma I_n)(A - \gamma I_n) = {}^tAA - \gamma A - \gamma {}^tA + \gamma^2 I_n = \gamma^2 I_n,$$

donc, en notant $\Omega = \frac{1}{\gamma}A - I_n$, on a : ${}^t\Omega\Omega = I_n$,

c'est-à-dire : $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

• Nous allons appliquer l'inégalité de Hadamard, cf exercice

$$12.74 \text{ b) : } |\det(A)| \leq \left(\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Notons $\Omega = (\omega_{ij})_{ij}$.

On a alors, puisque $A = \gamma\Omega + \gamma I_n$:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{ii} = \gamma\omega_{ii} + \gamma \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \implies a_{ij} = \gamma\omega_{ij}. \end{cases}$$

D'où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 &= a_{ii}^2 + \sum_{j \neq i} a_{ij}^2 = (\gamma\omega_{ii} + \gamma)^2 + \sum_{j \neq i} \gamma^2 \omega_{ij}^2 \\ &= \gamma^2 + 2\gamma^2\omega_{ii} + \gamma^2 \underbrace{\sum_{j=1}^n \omega_{ij}^2}_{=1} = 2\gamma^2 + 2\gamma^2\omega_{ii} \leq 4\gamma^2. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } |\det(A)| \leq ((4\gamma^2)^n)^{1/2} = (2\gamma)^n = (\alpha + \beta)^n.$$

12.76 Notons $\mathcal{A}(D)$ l'aire d'un domaine simple D de $\mathbb{R}^2$.

- On a, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$a_{ji} = \mathcal{A}(D_j \cap D_i) = \mathcal{A}(D_i \cap D_j) = a_{ij},$$

donc : $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

- Notons, pour tout domaine simple D de $\mathbb{R}^2$, φ_D la fonction caractéristique de D , définie par :

$$\varphi_D : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } M \in D \\ 0 & \text{si } M \notin D. \end{cases}$$

Il est clair que, pour tous domaines simples D, D' de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi_{D \cap D'} = \varphi_D \varphi_{D'}.$$

On a donc, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \mathcal{A}(D_i \cap D_j) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{D_i \cap D_j}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{D_i}(x, y) \varphi_{D_j}(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_{D_i}(x, y) \varphi_{D_j}(x, y) \, dx \, dy \right) x_i x_j \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varphi_{D_i}(x, y) \varphi_{D_j}(x, y) x_i x_j \right) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{D_i}(x, y) x_i \right)^2 \, dx \, dy \geq 0. \end{aligned}$$

On conclut : $A \in \mathbf{S}_n^+$.

12.77 1) Soient $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, $B \in \mathbf{S}_n^+$. D'après le théorème de réduction simultanée, il existe $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. Puisque $B \in \mathbf{S}_n^+$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, on a aussi : $D \in \mathbf{S}_n^+$. Il existe donc $(d_1, \dots, d_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \det(A+B) &= \det({}^tP(I_n + D)P) \\ &= \det({}^tP) \det(I_n + D) \det(P) = (\det(P))^2 \prod_{i=1}^n (1 + d_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= \det({}^tPP) + \det({}^tPDP) \\ &= (\det(P))^2 \left(1 + \prod_{i=1}^n d_i \right). \end{aligned}$$

$$\text{Comme : } \prod_{i=1}^n (1 + d_i) \geq 1 + \prod_{i=1}^n d_i,$$

il en résulte : $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

2) Si $A \in \mathbf{S}_n^+$ et $B \in \mathbf{S}_n^{++}$, en appliquant 1) au couple (B, A) à la place de (A, B) , on conclut.

3) Supposons $A \in \mathbf{S}_n^+ - \mathbf{S}_n^{++}$ et $B \in \mathbf{S}_n^+ - \mathbf{S}_n^{++}$.

Alors, d'une part, $\det(A) = 0$ et $\det(B) = 0$, et, d'autre part, $A+B \in \mathbf{S}_n^+$, donc $\det(A+B) \geq 0$, d'où l'inégalité voulue.

Remarques :

1) Il en résulte que l'application $\det : (\mathbf{S}_n^+, \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \leq)$ est croissante.

2) Une récurrence immédiate montre que, si $N \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_N \in \mathbf{S}_n^+$, alors :

$$\det\left(\sum_{k=1}^N A_k\right) \geq \sum_{k=1}^N \det(A_k).$$

12.78 D'abord, A et B sont symétriques réelles.

Notons q_A, q_B les fq sur $\mathbb{R}^n$ canoniquement représentées par A, B .

On a, pour tout $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} q_A(V) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} v_i v_j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\int_a^b f(x) x^{i+j} \, dx \right) v_i v_j \\ &= \int_a^b \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} f(x) x^{i+j} v_i v_j \right) \, dx \\ &= \int_a^b f(x) \left(\sum_{i=1}^n x^i v_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x^j v_j \right) \, dx \\ &= \int_a^b f(x) \left(\sum_{i=1}^n x^i v_i \right)^2 \, dx, \end{aligned}$$

$$\text{et, de même : } q_B(V) = \int_0^1 f(x) \left(\sum_{i=1}^n x^i v_i \right)^2 \, dx.$$

Comme $f \geq 0$ et $[a; b] \subset [0; 1]$, on déduit :

$$\begin{aligned} 0 \leq q_A(V) &= \int_a^b f(x) \left(\sum_{i=1}^n x^i v_i \right)^2 \, dx \\ &\leq \int_0^1 f(x) \left(\sum_{i=1}^n x^i v_i \right)^2 \, dx = q_B(V). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall V \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(V) \leq q_B(V).$$

Ceci montre : $B - A \in \mathbf{S}_n^+$.

Comme $A \in \mathbf{S}_n^+$ et $B - A \in \mathbf{S}_n^+$, d'après l'exercice 12.77, on conclut :

$$\det(A) \leq \det(A + (B - A)) = \det(B).$$

12.79 Notons $S = A^t A = {}^t A A$.

Il est clair que $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème fondamental, il existe $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = P D P^{-1}$.

Notons $B = P^{-1} A P$, de sorte que : $A = P B P^{-1}$.

On a : $AS = A({}^t A A) = (A^t A)A = SA$,

donc :

$$\begin{aligned} BD &= (P^{-1} A P)(P^{-1} S P) = P^{-1} (AS) P \\ &= P^{-1} (SA) P = (P^{-1} S P)(P^{-1} A P) = DB. \end{aligned}$$

Passons aux éléments. Notons $B = (b_{ij})_{ij}$. On a alors :

$$BD = DB$$

$$\begin{aligned} \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad b_{ij} d_j &= d_i b_{ij} \\ \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (d_j - d_i) b_{ij} &= 0 \\ \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (i \neq j \implies b_{ij} &= 0), \end{aligned}$$

car $d_1, \dots, d_n$ sont deux à deux distincts, par hypothèse.

Ceci montre que B est diagonale, donc symétrique.

On a alors :

$${}^t A = {}^t (P B P^{-1}) = {}^t P^{-1} {}^t B {}^t P = P B P^{-1} = A.$$

12.80 • (i) $\implies$ (ii) :

Supposons A diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = P D P^{-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} {}^t A &= {}^t (P D P^{-1}) = {}^t P^{-1} D {}^t P \\ &= {}^t P^{-1} P^{-1} (P D P^{-1}) P {}^t P = ({}^t P^{-1} P^{-1}) A ({}^t P {}^t P). \end{aligned}$$

Notons $S = P {}^t P$. Puisque $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, d'après l'exercice 12.18, on a : $S = {}^t P P \in \mathbf{S}_n^{++}$.

$$\text{Et : } S^{-1} = (P {}^t P)^{-1} = {}^t P^{-1} P^{-1}.$$

On conclut : $\exists S \in \mathbf{S}_n^{++}$, ${}^t A = S^{-1} A S$.

• Supposons qu'il existe $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que : ${}^t A = S^{-1} A S$.

On a alors : ${}^t (AS) = {}^t S {}^t A = S (S^{-1} A S) = AS$,

donc : $AS \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Notons $B = AS$.

Puisque $S \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, on déduit : $A = B S^{-1}$.

Puisque $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a $S^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$. D'après l'exercice 12.11, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que : $S^{-1} = R^2$.

On a alors : $A = B R^2 = R^{-1} (R B R) R$,
ce qui montre que A est semblable à $R B R$.

Mais : ${}^t (R B R) = {}^t R {}^t B {}^t R = R B R$,

donc : $R B R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

D'après le théorème fondamental, $R B R$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque A est semblable à $R B R$ et que $R B R$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on conclut que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

12.81 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

On sait que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, donc il existe une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$. D'après l'exercice 12.59, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(\Omega_k, S_k) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{++}$ tel que : $A_k = \Omega_k S_k$.

• La suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à termes dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, qui est un compact de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, car $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un evn de dimension finie.

Il existe donc une extractrice σ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\Omega_{\sigma(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \Omega.$$

On a alors, par suite extraite : $A_{\sigma(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$.

D'autre part :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_{\sigma(k)} = \Omega_{\sigma(k)}^{-1} A_{\sigma(k)} = {}^t \Omega_{\sigma(k)} A_{\sigma(k)},$$

d'où, par continuité des opérations matricielles :

$$S_{\sigma(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \underbrace{{}^t \Omega A}_{\text{notée } S}.$$

Comme : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_{\sigma(k)} \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{S}_n^+$

et que $\mathbf{S}_n^+$ est fermé dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

Enfin, comme $S = {}^t \Omega A$, on a : $A = \Omega S$.

On conclut : $\exists \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \exists S \in \mathbf{S}_n^+, \quad A = \Omega S$.

Remarque : Il y a unicité de S , car nécessairement $S = ({}^t A A)^{1/2}$, mais il peut ne pas y avoir unicité de Ω .

12.82 D'après la décomposition polaire dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (exercice 12.81), il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathbf{S}_n^+$ telles que : $A = \Omega S$.

D'après le théorème fondamental, il existe $U \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$S = U D_1 U^{-1}.$$

On obtient alors : $A = \Omega U D_1 U^{-1}$.

Notons, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ -1 & \text{si } \lambda_i < 0, \end{cases}$

et $E = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $D = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+)$.

On a ainsi : $E \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, et : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \lambda_i = |\lambda_i| \varepsilon_i$,

d'où : $D = D_1 E$.

Alors :

$$A = \Omega U D_1 U^{-1} = \Omega U (D E^{-1}) U^{-1} = \Omega U D (E^{-1} U^{-1}).$$

En notant $\Omega_1 = \Omega U$ et $\Omega_2 = E^{-1}U^{-1}$, puisque $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, on a :

$$\Omega_1 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \Omega_2 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),$$

d'où le résultat voulu.

12.83 a) Soit $S \in \mathbf{S}_n^+$. D'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

De plus, puisque $S \in \mathbf{S}_n^+$, d'après l'exercice 12.9 :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \geq 0.$$

Alors :

$$(\det(S))^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n}$$

et

$$\frac{1}{n} \text{tr}(S) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

D'après la comparaison entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique pour des réels ≥ 0 , on a :

$$\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

d'où :

$$(\det(S))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(S).$$

b) 1) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $S = {}^tAA$. D'après l'exercice 12.18 : $S \in \mathbf{S}_n^+$. Il s'ensuit, d'après a) :

$$(\det(S))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(S).$$

Mais :

$$\det(S) = \det({}^tAA) = \det({}^tA) \det(A) = (\det(A))^2.$$

On conclut : $|\det(A)| \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr}({}^tAA) \right)^{n/2}.$

2) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$.

• Supposons $A \notin \mathbf{S}_n^{++}$. Alors, comme $A \in \mathbf{S}_n^+$, 0 est valeur propre de A , donc $\det(A) = 0$. D'autre part, d'après l'exercice 12.61, puisque $A, B \in \mathbf{S}_n^+$, on a : $\text{tr}(AB) \geq 0$, d'où l'inégalité voulue.

• Supposons $A \in \mathbf{S}_n^{++}$. D'après l'exercice 12.11, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $A = R^2$. On a :

$$AB = R^2B = R(RBR)R^{-1},$$

donc :

$$\begin{cases} \det(A) \det(B) = \det(AB) = \det(RBR) \\ \text{tr}(AB) = \text{tr}(RBR). \end{cases}$$

De plus, il est clair que $RBR \in \mathbf{S}_n^+$.

D'après a), appliqué à $S = RBR$, on a :

$$(\det(RBR))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(RBR).$$

On conclut : $\det(A) \det(B) \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr}(AB) \right)^n.$

12.84 Puisque A^tA et ${}^tAA$ sont symétriques réelles et que, d'après l'exercice 11.55, elles ont le même polynôme caractéristique, il existe $P, Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^tA = PDP^{-1} \text{ et } {}^tAA = QDQ^{-1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} {}^tAA &= QDQ^{-1} = Q(P^{-1}(A^tA)P)Q^{-1} \\ &= QP^{-1}(A^tA)(QP^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

En notant $\Omega = QP^{-1}$, comme $P, Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, on a : $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Ceci montre que A^tA et ${}^tAA$ sont orthogonalement semblables.

12.85 a) α) Supposons $A \in \mathbf{S}_n^+$, et soit $p \in \{1, \dots, n\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$; complétons X en

$$X' = (x_1 \dots x_p \ 0 \dots 0) \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Comme $A \in \mathbf{S}_n^+$, on a ${}^tX'AX' \geq 0$.

Mais : ${}^tX'AX' = {}^tX A_p X$,

d'où ${}^tX A_p X \geq 0$. Ainsi : $A_p \in \mathbf{S}_p^+$.

Puisque $A_p \in \mathbf{S}_p^+$, d'après le théorème fondamental, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ et $\Omega \in \mathbf{O}_p(\mathbb{R})$ tels que, en notant $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, on ait $A_p = \Omega D \Omega^{-1}$.

D'où :

$$\det(A_p) = \det(D) = \prod_{i=1}^p \lambda_i \geq 0.$$

β) La réciproque de α) est fausse (si $n \geq 2$), comme le montre l'exemple $A = -E_{22}$ (matrice élémentaire). En effet, tous les mineurs de Gauss de A sont nuls, mais $A \notin \mathbf{S}_n^+$, puisque ${}^tE_2 A E_2 = -1 < 0$.

γ) 1) Soit $A \in \mathbf{S}_n^{++}$. En raisonnant comme plus haut (solution de a) α)), on obtient, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $\det(A_p) > 0$.

γ) 2) Réciproquement, supposons :

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) > 0.$$

Montrons : $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $A_p \in \mathbf{S}_p^{++}$, par récurrence (bornée) sur p . Il en résultera, en particulier, $A = A_n \in \mathbf{S}_n^{++}$.

Il est clair que $A_1 = (\det(A_1)) \in \mathbf{S}_1^{++}$.

Supposons $A_p \in \mathbf{S}_p^{++}$, et décomposons A_{p+1} en blocs :

$$A_{p+1} = \begin{pmatrix} A_p & {}^tC_p \\ C_p & a_{p+1 \ p+1} \end{pmatrix}, \text{ où } C_p \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

D'après l'exercice 12.11, il existe $R_p \in \mathbf{S}_p^{++}$ telle que $A_p = R_p^2$.

Cherchons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $L_p \in \mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ pour que, en

notant $M = \begin{pmatrix} R_p & L_p \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, on ait $A_{p+1} = {}^tMM$.

On a :

$$\begin{aligned} {}^tMM = A_{p+1} &\iff \begin{pmatrix} R_p & 0 \\ {}^tL_p & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_p & L_p \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_p & {}^tC_p \\ C_p & a_{p+1 \ p+1} \end{pmatrix} \\ &\iff \left(R_p^2 = A_p, R_p L_p = {}^tC_p, {}^tL_p L_p + \alpha^2 = a_{p+1 \ p+1} \right). \end{aligned}$$

Comme $R_p \in \mathbf{S}_p^{++} \subset \mathbf{GL}_p(\mathbb{R})$, on peut choisir $L_p = R_p^{-1} {}^tC_p$.

Alors :

$$\begin{aligned} {}^tL_p L_p + \alpha^2 &= a_{p+1 \ p+1} \\ &\iff C_p R_p^{-1} R_p^{-1} {}^tC_p + \alpha^2 = a_{p+1 \ p+1} \\ &\iff \alpha^2 = a_{p+1 \ p+1} - C_p A_p^{-1} {}^tC_p. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer : $a_{p+1 \ p+1} - C_p A_p^{-1} {}^tC_p > 0$.

Remarquons :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_p & {}^tC_p \\ C_p & a_{p+1 \ p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p^{-1} & -A_p^{-1} {}^tC_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ C_p A_p^{-1} & a_{p+1 \ p+1} - C_p A_p^{-1} {}^tC_p \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où, en passant aux déterminants :

$$\det(A_{p+1}) \det(A_p^{-1}) = a_{p+1 \ p+1} - C_p A_p^{-1} {}^tC_p.$$

Comme, par hypothèse, $\det(A_p) > 0$ et $\det(A_{p+1}) > 0$, on déduit : $a_{p+1 \ p+1} - C_p A_p^{-1} {}^tC_p > 0$, et on choisit, par exemple, $\alpha > 0$ convenant.

$$\text{Alors } M = \begin{pmatrix} R_p & L_p \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{p+1}(\mathbb{R}),$$

et donc $A_{p+1} = {}^tMM \in \mathbf{S}_{p+1}^{++}$, ce qui établit la récurrence.

b) L'application $f : \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{S}_n^+, \quad f(A) = (\det(A_1), \dots, \det(A_n))$$

est continue, et d'après a) γ), $\mathbf{S}_n^{++} = f^{-1}(]0; +\infty[^n)$.

Comme $]0; +\infty[^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, on en conclut que $\mathbf{S}_n^{++}$ est ouvert dans $\mathbf{S}_n^+$.

De même, $\mathbf{S}_n^{++}$ est ouvert dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

c) Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $D_p = \det(A_p) = \det((a^{i-j})_{1 \leq i, j \leq p})$.

On a, par développement par rapport à la première ligne :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad D_{p+1} = (1 - a^2) D_p,$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad D_p = (1 - a^2)^{p-1}.$$

Ainsi : $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\det(A_p) = (1 - a^2)^{p-1} > 0$.

On conclut, en utilisant a) γ) : $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.

12.86 a) $\implies$:

Récurrence sur n .

La propriété est évidente pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour un n de $\mathbb{N}^*$, et soit $S \in \mathbf{S}_{n+1}^+$.

Décomposons S en blocs :

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tC \\ C & S_1 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), S_1 \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer $\beta \in \mathbb{R}, L \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{R}), T_1 \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ de

façon qu'en notant $T = \begin{pmatrix} \beta & L \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$, on ait $S = {}^tTT$.

On a :

$$\begin{aligned} S = {}^tTT &\iff \begin{pmatrix} \alpha & {}^tC \\ C & S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ {}^tL & {}^tT_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & L \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left(\beta^2 = \alpha, \beta L = {}^tC, {}^tLL + {}^tT_1 T_1 = S_1 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Soient } x \in \mathbb{R}, X_1 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X = \begin{pmatrix} x \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $S \in \mathbf{S}_{n+1}^+$, on a ${}^tX S X \geq 0$, c'est-à-dire, en développant :

$$\alpha x^2 + 2x {}^tC X_1 + {}^tX_1 S_1 X_1 \geq 0.$$

En particulier, en remplaçant x par 1 et X_1 par 0, on déduit $\alpha \geq 0$. En choisissant $\beta = \sqrt{\alpha}$, on a donc $\beta^2 = \alpha$.

• Cas $\alpha > 0$

Notons $L = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} {}^tC$. On a, pour tout X_1 de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en remplaçant plus haut x par $-\frac{1}{\alpha} {}^tC X_1$:

$$-\frac{1}{\alpha} ({}^tC X_1)^2 + {}^tX_1 S_1 X_1 \geq 0,$$

c'est-à-dire : ${}^tX_1 (S_1 - {}^tLL) X_1 \geq 0$.

Ainsi, $S_1 - {}^tLL \in \mathbf{S}_n^+$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $T_1 \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ telle que $S_1 - {}^tLL = {}^tT_1 T_1$.

En notant $T = \begin{pmatrix} \beta & L \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$, on obtient ainsi :

$$T \in \mathbf{T}_{n+1,s}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad S = {}^tTT.$$

• Cas $\alpha = 0$

On a alors :

$$\forall X_1 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2x {}^tC X_1 + {}^tX_1 S_1 X_1 \geq 0,$$

d'où : $\forall X_1 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad ({}^tC X_1 = 0 \quad \text{et} \quad {}^tX_1 S_1 X_1 \geq 0)$,
et donc : $C = 0 \quad \text{et} \quad S_1 \in \mathbf{S}_n^+$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $T_1 \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ telle

que $S_1 = {}^tT_1 T_1$, d'où, en notant $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$:

$$T \in \mathbf{T}_{n+1,s}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad S = {}^tTT.$$

$\implies :$

S'il existe $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t T T$, alors, pour toute X de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^t X S X = {}^t X {}^t T T X = {}^t (T X) T X = \|T X\|_2^2 \geq 0,$$

et donc : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

$b) \implies :$

Soit $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

D'après a), il existe $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t T T$.

Comme : $(\det(T))^2 = \det({}^t T T) = \det(S) \neq 0$,

on a $\det(T) \neq 0$, et donc $T \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

$\implies :$

S'il existe $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t T T$, alors (cf. a)) $S \in \mathbf{S}_n^+$, et : $\det(S) = (\det(T))^2 \neq 0$,

donc $S \in \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{S}_n^{++}$.

Remarque : Pour b), $\implies$, on peut utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, appliqué à la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et au produit scalaire de matrice S dans $\mathcal{B}_0$.

12.87 Puisque $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que : $A X = \lambda_n X$.

On a : ${}^t X A X = \lambda_n {}^t X X = \lambda_n \|X\|^2$.

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\tilde{X} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a : ${}^t X A X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$.

Puisque les a_{ij} sont tous ≥ 0 , on déduit :

$$|{}^t X A X| = \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \right| \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i| |x_j| = {}^t \tilde{X} A \tilde{X}.$$

Notons $Y = \Omega^{-1} \tilde{X}$, de sorte que : $\tilde{X} = \Omega Y$, et notons

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} {}^t \tilde{X} A \tilde{X} &= {}^t (\Omega Y) A (\Omega Y) = {}^t Y {}^t \Omega A \Omega Y \\ &= {}^t Y D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &= \lambda_1 \|Y\|^2 = \lambda_1 \|\Omega^{-1} Y\|^2 = \lambda_1 \|\tilde{X}\|^2 = \lambda_1 \|X\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi : $|\lambda_n| \|X\|^2 = |{}^t X A X| \leq {}^t \tilde{X} A \tilde{X} \leq \lambda_1 \|X\|^2$.

Comme $\|X\|^2 > 0$, on conclut : $|\lambda_n| \leq \lambda_1$.

12.88 Récurrence sur n .

La propriété est triviale pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour tout p de $\mathbb{N}^*$ tel que $p < n$, et soient I un ensemble non vide, $(S_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ commutant deux à deux.

Le cas $(\forall i \in I, S_i \in \mathbb{R} I_n)$ est trivial.

Supposons donc qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $S_{i_0} \notin \mathbb{R} I_n$.

D'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_{i_0} = \Omega D \Omega^{-1}$.

Comme $S_{i_0} \notin \mathbb{R} I_n$, les éléments diagonaux de D ne sont pas

tous égaux. On peut donc supposer $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 I_r & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$, où

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \{1, \dots, n-1\}$, $D' \in \mathbf{D}_{n-r}(\mathbb{R})$ à termes diagonaux $\neq \lambda_0$.

Pour chaque i de I , décomposons $\Omega^{-1} S_i \Omega$ en blocs :

$$\Omega^{-1} S_i \Omega = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ {}^t B_i & C_i \end{pmatrix},$$

où $A_i \in \mathbf{S}_r(\mathbb{R})$, $B_i \in \mathbf{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C_i \in \mathbf{S}_{n-r}(\mathbb{R})$.

Comme les $S_i (i \in I)$ commutent deux à deux, en particulier : $\forall i \in I$, $S_i S_{i_0} = S_{i_0} S_i$.

En effectuant un produit par blocs, on en déduit :

$$\forall i \in I, \lambda_0 B_i = B_i D',$$

c'est-à-dire : $\forall i \in I$, $B_i (D' - \lambda_0 I_{n-r}) = 0$.

Mais $D' - \lambda_0 I_{n-r}$ est inversible, d'où : $\forall i \in I$, $B_i = 0$.

On déduit alors : $\forall (i, j) \in I^2$, $\begin{cases} A_i A_j = A_j A_i \\ C_i C_j = C_j C_i \end{cases}$.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux familles $(A_i)_{i \in I}$ et $(C_i)_{i \in I}$.

Il existe donc $\Omega_1 \in \mathbf{O}_r(\mathbb{R})$ et $\Omega_2 \in \mathbf{O}_{n-r}(\mathbb{R})$

telles que :

$$\forall i \in I, \begin{cases} \Omega_1^{-1} A_i \Omega_1 \in \mathbf{D}_r(\mathbb{R}) \\ \Omega_2^{-1} C_i \Omega_2 \in \mathbf{D}_{n-r}(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

En notant $\Omega' = \Omega \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{pmatrix}$, on a alors facilement :

$\Omega' \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall i \in I, \Omega'^{-1} S_i \Omega' \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}).$$

12.89 • Puisque $A \in \mathbf{S}_n^+ \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$D = \text{diag}(\lambda_k) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

$1 \leq k \leq n$

De plus, comme $A \in \mathbf{S}_n^+$, d'après l'exercice 12.9, on a :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \geq 0.$$

Notons, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_k = P(\lambda_k) \in \mathbb{R}_+$

et $\Delta = \text{diag}(\mu_k)$. On a donc :

$$P(A) = P(\Omega D \Omega^{-1}) = \Omega P(D) \Omega^{-1} = \Omega \Omega^{-1}.$$

Puisque l'application $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\lambda \mapsto P(\lambda)$

est injective, d'après le cours sur l'interpolation polynomiale, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, Q(\mu_k) = \lambda_k.$$

On a alors :

$$Q(\Delta) = \text{diag}(Q(\mu_k)) = \text{diag}(\lambda_k) = D,$$

puis :

$$Q(P(A)) = Q(\Omega \Delta \Omega^{-1}) = \Omega Q(\Delta) \Omega^{-1} = \Omega D \Omega^{-1} = A.$$

Ceci montre que A est un polynôme en $P(A)$. De même, B est un polynôme en $P(B)$. Comme $P(A) = P(B)$, il en résulte que A et B sont des polynômes d'une même matrice, donc A et B commutent.

• D'après l'exercice 12.88, puisque $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $AB = BA$, A et B sont simultanément orthodagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe $R \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $E, F \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = RER^{-1}$ et $B = RFR^{-1}$.

On a alors :

$$\begin{cases} P(A) = P(RER^{-1}) = RP(E)R^{-1} \\ P(B) = P(RFR^{-1}) = RP(F)R^{-1}, \end{cases}$$

donc, puisque $P(A) = P(B)$, on a : $P(E) = P(F)$.

Notons $E = \text{diag}(\alpha_k)$, $F = \text{diag}(\beta_k)$,

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}_+$.

On a donc : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(\alpha_k) = P(\beta_k)$.

Comme $P|_{\mathbb{R}_+}$ est injective, il s'ensuit :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \alpha_k = \beta_k,$$

d'où $E = F$, puis : $A = B$.

12.90 Notons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Il existe donc $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons C_i le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et, pour tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$, notons

$$E_{r+1} = \text{Vect}(\Omega C_1, \dots, \Omega C_{r+1})$$

$$\text{et } E'_r = \text{Vect}(\Omega C_{r+1}, \dots, \Omega C_n).$$

1) Soit $X \in E'_r$.

Il existe $(x_{r+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-r}$ tel que $X = \sum_{i=r+1}^n x_i \Omega C_i$.

On a alors :

$$SX = \sum_{i=r+1}^n x_i S \Omega C_i = \sum_{i=r+1}^n x_i \Omega D C_i = \sum_{i=r+1}^n x_i \lambda_i \Omega C_i,$$

puis, comme $(\Omega C_i)_i$ est orthonormale :

$$\begin{aligned} {}^tX S X &= \sum_{i=r+1}^n x_i (x_i \lambda_i) = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i x_i^2 \\ &\leq \lambda_{r+1} \sum_{i=r+1}^n x_i^2 = \lambda_{r+1} {}^tX X. \end{aligned}$$

Ceci montre :

$$\forall X \in E'_r, ({}^tX X = 1 \implies {}^tX S X \leq \lambda_{r+1}),$$

d'où : $\sup_{X \in E'_r \text{ et } {}^tX X=1} {}^tX S X \leq \lambda_{r+1}$,

et donc : $\inf_{F \in \mathcal{F}_r} \left(\sup_{X \in F \text{ et } {}^tX X=1} {}^tX S X \right) \leq \lambda_{r+1}$.

2) Soit $F \in \mathcal{F}_r$.

Comme $\dim(F) = n - r$ et $\dim(E_{r+1}) = r + 1$, on a :

$$\dim(F) + \dim(E_{r+1}) = n + 1,$$

donc nécessairement : $F \cap E_{r+1} \neq \{0\}$.

Il existe donc $X \in F \cap E_{r+1} - \{0\}$. Ensuite, il existe

$(x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $X = \sum_{i=1}^{r+1} x_i \Omega C_i$.

On a alors : $SX = \sum_{i=1}^{r+1} x_i \lambda_i \Omega C_i$,

puis, comme $(\Omega C_i)_i$ est orthonormale :

$${}^tX S X = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} x_i^2 = \lambda_{r+1} {}^tX X.$$

Ceci montre : $\sup_{X \in F \text{ et } {}^tX X=1} {}^tX S X \geq \lambda_{r+1}$.

Il en résulte : $\inf_{F \in \mathcal{F}_r} \left(\sup_{X \in F \text{ et } {}^tX X=1} {}^tX S X \right) \geq \lambda_{r+1}$.

Finalement : $\lambda_{r+1} = \inf_{F \in \mathcal{F}_r} \left(\sup_{X \in F \text{ et } {}^tX X=1} {}^tX S X \right)$.

Plan

Les méthodes à retenir	519
Énoncés des exercices	520
Du mal à démarrer ?	522
Corrigés	523

Thèmes abordés dans les exercices

- Montrer qu'une application est un produit scalaire complexe
- Obtention d'égalités, d'inégalités faisant intervenir des produits scalaires ou/et des normes hermitiennes
- Étude de sev orthogonaux
- Calculs matriciels faisant intervenir la transconjugaison.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de forme sesquilinéaire, de forme à symétrie hermitienne
- Définition de produit scalaire complexe, d'espace préhilbertien complexe, d'espace hermitien, produits scalaires complexes usuels
- Inégalité de Cauchy et Schwarz, inégalité de Minkowski, études des cas d'égalité
- Définition et propriétés de l'orthogonalité
- Théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien complexe.

Les méthodes à retenir

Pour montrer qu'une application est une forme sesquilinéaire, est à symétrie hermitienne, est un produit scalaire

Revenir aux définitions.

➡ Exercices 13.1, 13.2.

Pour utiliser la notion de produit scalaire complexe, par opposition à celle de produit scalaire réel

Envisager l'intervention du nombre complexe i .

➡ Exercices 13.2, 13.4.

Pour simplifier par une matrice dans un produit

Penser à faire intervenir le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ou $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et essayer de faire apparaître un vecteur orthogonal à tout vecteur, ou bien un vecteur orthogonal à lui-même, ou encore un vecteur dont le carré de la norme soit nul.

➡ **Exercice 13.3.**

Pour établir une égalité ou une inégalité faisant intervenir un produit scalaire complexe

Essayer de :

– faire intervenir l’inégalité de Cauchy et Schwarz ou l’inégalité de Minkowski

➡ **Exercice 13.8**

– amener un paramètre réel ou complexe, et choisir celui-ci pour optimiser le résultat, ou appliquer une hypothèse à des coefficients complexes bien choisis.

➡ **Exercice 13.7.**

Énoncés des exercices

13.1 Produit scalaire réel issu d’un produit scalaire complexe

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien complexe. Montrer que l’application

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \operatorname{Ré}(x | y)$$

est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

13.2 Condition suffisante pour la symétrie hermitienne

Soient E un $\mathbb{C}$ -ev, $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ sesquilinéaire telle que $\forall x \in E, \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Montrer que φ est à symétrie hermitienne.

13.3 Simplifications correctes de matrices

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Montrer : a) $A^*A = 0 \implies A = 0$ b) $AA^*A = 0 \implies A = 0$.

13.4 Identité de polarisation dans le cas complexe

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien complexe, $\|\cdot\|$ la norme associée.

a) Montrer : $\forall (x, y) \in E^2, (x | y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - i\|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x - iy\|^2)$.

b) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) | f(y)) = (g(x) | g(y))$ (ii) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|$.

13.5 Limite de suite dans un espace préhilbertien complexe

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien complexe, $\|\cdot\|$ la norme associée, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E .

Montrer : $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \iff (\|x_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|x\| \text{ et } (x_n - x | x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0).$

13.6 Suite de matrices faisant intervenir une transconjugaison

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, A_{k+1} = I_n + A_k^* A_k$.

Montrer : $\|A_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$.

13.7 Majorations faisant intervenir des produits scalaires, des normes

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien complexe, $\|\cdot\|$ la norme associée, $n \in \mathbb{N}^*$, $e_1, \dots, e_n \in E$, $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^n |(e_k | x)|^2 \leq A \|x\|^2$$

$$(ii) \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 \leq A \sum_{k=1}^n |a_k|^2.$$

13.8 Inégalité sur des normes

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien complexe, $\|\cdot\|$ la norme associée, $v_1, v_2, v_3 \in E$.

Montrer : $\max_{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^2} \|v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3\| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} (\|v_1\| + \|v_2\| + \|v_3\|).$

13.9 Noyau de la somme de deux orthoprojecteurs

Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace hermitien, F, G deux sev de E .

Montrer : $\text{Ker}(p_F + p_G) = F^\perp \cap G^\perp$.

13.10 Somme de deux matrices normales

Une matrice M de $M_n(\mathbb{C})$ est dite *normale* si et seulement si : $M^* M = M M^*$.

a) Est-ce que la somme de deux matrices normales est nécessairement normale ?

b) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ normales et telles que : $\text{Im}(A) \perp \text{Im}(B)$.

Montrer que $A + B$ est normale.

13.11 Étude du cas où A^* est semblable à A^{-1}

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \exists B \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \quad A = B^{-1} B^* \quad (ii) \quad \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \quad A^* = P A^{-1} P^{-1}.$$

Pour (ii) $\implies$ (i), on pourra chercher B sous la forme $B = (\alpha I_n + A^*)(P + \beta P^*)$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Du mal à démarrer ?

13.1 Revenir à la définition d'un produit scalaire réel.

13.2 Revenir à la définition de la symétrie hermitienne.

13.3 Utiliser le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$, défini par : $\forall M, N \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C}), (M | N) = \text{tr}(M^* N)$

et le carré de la norme euclidienne associée :

$$\forall M \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C}), \|M\|^2 = \text{tr}(M^* M).$$

13.4 a) Calculer le second membre en développant les carrés de normes.

b) Un sens est évident.

Pour l'autre sens, utiliser a) et la linéarité de f .

13.5 1) Supposer : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Utiliser l'inégalité triangulaire renversée et l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

2) Supposer : $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|$ et $(x_n - x | x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exprimer $\|x_n - x\|^2$ en fonction de $\|x_n\|^2 - \|x\|^2$ et de $(x_n - x | x)$.

13.6 Utiliser le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et la norme euclidienne associée, pour déduire, après calculs :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|A_{k+1}\|^2 \geq 1 + \|A_k\|^2.$$

13.7 (i) $\implies$ (ii) :

Noter $v = \sum_{k=1}^n a_k e_k$, calculer $\|v\|^2$ convenablement, et utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz. Séparer les cas $v = 0$, $v \neq 0$, pour pouvoir simplifier par $\|v\|$.

(ii) $\implies$ (i) :

Pour $x \in E$, calculer $\left\|x - \sum_{k=1}^n a_k e_k\right\|^2$ et majorer en utilisant (ii),

puis choisir convenablement les a_k , par $a_k = \frac{1}{A}(e_k | x)$.

13.8 • Noter $\alpha = \max_{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^2} \|v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3\|$

$$\text{et } S = \sum_{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^2} \|v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3\|^2.$$

Développer S et déduire : $S \geq 4(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2)$.

• D'autre part, noter $\beta = \|v_1\| + \|v_2\| + \|v_3\|$ et utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ usuel.

13.9 1) L'inclusion $F^\perp \cap G^\perp \subset \text{Ker}(p_F + p_G)$ est immédiate.

2) Pour l'autre inclusion, utiliser :

$$\forall x \in E, (x | p_F(x)) = \|p_F(x)\|^2.$$

13.10 a) Trouver un contreexemple, pour $n = 2$, par exemple en choisissant A et B réelles telles que

$A = A, B = -B$ et que $A + B$ ne soit pas normale.

2) Montrer d'abord : $\text{Im}(A) \perp \text{Im}(B) \iff B^* A = 0$.

Montrer $AB^* = 0$ en utilisant le carré de la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire en calculant $\|AB^*\|^2$ et en utilisant les propriétés de A, B et de la trace.

13.11 (i) $\implies$ (ii) : Montrer que $P = B$ convient.

(ii) $\implies$ (i) : Supposer qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $A^* = P A^{-1} P^{-1}$.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $B = (\alpha I_n + A^*)(P + \beta P^*)$.

Traduire $BA = B^*$ et trouver des conditions suffisantes sur (α, β) .

Corrigés des exercices

13.1 D'abord, E est bien aussi un $\mathbb{R}$ -ev, puisque E est un $\mathbb{C}$ -ev.

• *Symétrie* : On a, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\varphi(y, x) = \text{Ré}(y | x) = \text{Ré}(\overline{x | y}) = \text{Ré}(x | y) = \varphi(x, y).$$

• *Linéarité par rapport à la seconde place* :

On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $x, y, y' \in E$:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \alpha y + y') &= \text{Ré}(x | \alpha y + y') \\ &= \text{Ré}(\alpha(x | y) + (x | y')) = \text{Ré}(\alpha(x | y)) + \text{Ré}(x | y') \\ &= \alpha \text{Ré}(x | y) + \text{Ré}(x | y') = \alpha \varphi(x, y) + \varphi(x, y'). \end{aligned}$$

• *Positivité de la forme quadratique associée* :

On a, pour tout $x \in E$:

$$\varphi(x, x) = \text{Ré}(x | x) = \text{Ré}(|x|^2) = |x|^2 \geq 0.$$

• *Définie-positivité* : On a, pour tout $x \in E$:

$$\varphi(x, x) = 0 \iff |x|^2 = 0 \iff x = 0.$$

On conclut que φ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -ev E .

13.2 Soit $(x, y) \in E^2$.

Appliquons l'hypothèse à $x + y$ et à $x + iy$:

$$\varphi(x + y, x + y) \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi(x + iy, x + iy) \in \mathbb{R}.$$

En développant par sesquilinearité, on obtient :

$$\begin{cases} \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) \in \mathbb{R} \\ \varphi(x, x) - i\varphi(x, y) + i\varphi(y, x) + \varphi(y, y) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En appliquant l'hypothèse aussi à x et à y , il en résulte :

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, x) \in \mathbb{R} \text{ et } i(\varphi(x, y) - \varphi(y, x)) \in \mathbb{R}.$$

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = a \text{ et } \varphi(x, y) - \varphi(y, x) = ib.$$

$$\text{D'où : } \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(a + ib) \text{ et } \varphi(y, x) = \frac{1}{2}(a - ib),$$

$$\text{puis : } \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

On conclut que φ est à symétrie hermitienne.

13.3 a) En utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ et la norme euclidienne associée, on a :

$$A^*A = 0 \implies \|A\|^2 = \text{tr}(A^*A) = 0 \implies A = 0.$$

b) En appliquant le résultat de a) à A^*A puis à A , on a :

$$AA^*A = 0 \implies A^*AA^*A = 0$$

$$\iff (A^*A)^*(A^*A) = 0 \xrightarrow{a)} \implies A^*A = 0 \xrightarrow{a)} \implies A = 0.$$

13.4 a) Soit $(x, y) \in E^2$. Développons les carrés de normes envisagés, en utilisant la sesquilinearité :

$$\|x + y\|^2 = (x + y | x + y) = (x | x) + (x | y) + (y | x) + (y | y)$$

$$\|x + iy\|^2 = (x + iy | x + iy) = (x | x) + i(x | y) - i(y | x) + (y | y)$$

$$\|x - y\|^2 = (x - y | x - y) = (x | x) - (x | y) - (y | x) + (y | y)$$

$$\|x - iy\|^2 = (x - iy | x - iy) = (x | x) - i(x | y) + i(y | x) + (y | y).$$

D'où, en combinant avec les facteurs 1, $-i$, -1 , i indiqués dans l'énoncé :

$$\|x + y\|^2 - i\|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x - iy\|^2 = 4(x | y),$$

ce qui donne la formule voulue.

b) (i) $\implies$ (ii) : Évident, en prenant $y = x$.

(ii) $\implies$ (i) :

$$\text{Supposons : } \forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|.$$

On a alors, pour tout $(x, y) \in E^2$, en utilisant la formule du a) et la linéarité de f :

$$\begin{aligned} 4(f(x) | f(y)) &= \|f(x) + f(y)\|^2 - i\|f(x) + if(y)\|^2 \\ &\quad - \|f(x) - f(y)\|^2 + i\|f(x) - if(y)\|^2 \\ &= \|f(x + y)\|^2 - i\|f(x + iy)\|^2 \\ &\quad - \|f(x - y)\|^2 + i\|f(x - iy)\|^2 \\ &= \|x + y\|^2 - i\|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x - iy\|^2 \\ &= 4(x | y). \end{aligned}$$

13.5 1) Supposons : $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$,

$$\text{c'est-à-dire : } \|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

$$\bullet \text{ Comme : } \forall n \in \mathbb{N}, \left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\|,$$

$$\text{on déduit : } \|x_n\| - \|x\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

$$\text{c'est-à-dire : } \|x_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|x\|.$$

• D'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |(x_n - x | x)| \leq \|x_n - x\| \|x\|,$$

$$\text{d'où, par théorème de majoration : } (x_n - x | x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

2) Réciproquement, supposons :

$$\|x_n\| \xrightarrow{n \infty} \|x\| \text{ et } (x_n - x | x) \xrightarrow{n \infty} 0.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= (x_n - x | x_n - x) \\ &= \|x_n\|^2 - (x_n | x) - (x | x_n) + \|x\|^2 \\ &= (\|x_n\|^2 - \|x\|^2) - ((x_n - x | x) + \overline{(x_n - x | x)}). \end{aligned}$$

On déduit, par opérations : $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \infty} 0$,

et on conclut : $x_n \xrightarrow{n \infty} x$.

13.6 Puisque toutes les normes sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ (qui est de dimension finie) sont équivalentes, on peut choisir, par exemple, la norme associée au produit scalaire canonique. On, a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|A_{k+1}\|^2 &= \text{tr}(A_{k+1}^* A_{k+1}) \\ &= \text{tr}((I_n + A_k^* A_k)^* (I_n + A_k^* A_k)) \\ &= \text{tr}((I_n + A_k^* A_k)(I_n + A_k^* A_k)) \\ &= \text{tr}(I_n + 2A_k^* A_k + A_k^* A_k A_k^* A_k) \\ &= n + 2 \text{tr}(A_k^* A_k) + \text{tr}((A_k^* A_k)(A_k^* A_k)) \\ &= n + 2\|A_k\|^2 + \|A_k^* A_k\|^2 \geq 1 + \|A_k\|^2. \end{aligned}$$

On déduit, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|A_k\|^2 \geq k,$$

et on conclut, par opérations et minoration :

$$\|A_k\| \xrightarrow{k \infty} +\infty.$$

13.7 (i) $\implies$ (ii) :

Supposons : $\forall x \in E, \sum_{k=1}^n |(e_k | x)|^2 \leq A \|x\|^2$.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Notons $v = \sum_{k=1}^n a_k e_k$.

On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (v | v) = \left(\sum_{k=1}^n a_k e_k \middle| v \right) = \sum_{k=1}^n \overline{a_k} (e_k | v) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\overline{a_k}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |(e_k | v)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} A^{1/2} \|v\|. \end{aligned}$$

Si $v = 0$, alors l'inégalité (ii) voulue est triviale.

Supposons $v \neq 0$, donc $\|v\| > 0$. On déduit, en simplifiant par

$$\|v\| : \|v\| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} A^{1/2},$$

$$\text{donc : } \|v\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) A.$$

(ii) $\implies$ (i) :

Supposons :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n, \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 \leq A \sum_{k=1}^n |a_k|^2.$$

Soit $x \in E$. On a, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \text{Ré} \sum_{k=1}^n (\overline{a_k} (e_k | x)) + \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \text{Ré} (\overline{a_k} (e_k | x)) + A \sum_{k=1}^n |a_k|^2. \end{aligned}$$

Choisissons $a_k = \frac{1}{A} (e_k | x)$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, de façon à éliminer la notation de partie réelle.

On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{A} |(e_k | x)|^2 + A \sum_{k=1}^n \frac{1}{A^2} |(e_k | x)|^2 \\ &= \|x\|^2 - \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n |(e_k | x)|^2, \end{aligned}$$

$$\text{et on conclut : } \sum_{k=1}^n |(e_k | x)|^2 \leq A \|x\|^2.$$

13.8 Notons $\alpha = \max_{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^2} \|v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3\|$,

et considérons $S = \sum_{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^2} \|v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3\|^2$. On a, en développant les carrés de normes :

$$\begin{aligned} S &= \|v_1 + v_2 + v_3\|^2 + \|v_1 + v_2 - v_3\|^2 \\ &\quad + \|v_1 - v_2 + v_3\|^2 + \|v_1 - v_2 - v_3\|^2 \\ &= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2 \\ &\quad + 2 \text{Ré}(v_1 | v_2) + 2 \text{Ré}(v_1 | v_3) + 2 \text{Ré}(v_2 | v_3) \\ &\quad + \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2 \\ &\quad + 2 \text{Ré}(v_1 | v_2) - 2 \text{Ré}(v_1 | v_3) - 2 \text{Ré}(v_2 | v_3) \\ &\quad + \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2 \\ &\quad - 2 \text{Ré}(v_1 | v_2) + 2 \text{Ré}(v_1 | v_3) - 2 \text{Ré}(v_2 | v_3) \\ &\quad + \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2 \\ &\quad - 2 \text{Ré}(v_1 | v_2) - 2 \text{Ré}(v_1 | v_3) + 2 \text{Ré}(v_2 | v_3) \\ &= 4(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2). \end{aligned}$$

On a donc : $4\alpha^2 \geq S \geq 4(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2)$.

• Notons $\beta = \|v_1\| + \|v_2\| + \|v_3\|$. D'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ usuel, appliquée aux vecteurs $(\|v_1\|, \|v_2\|, \|v_3\|)$ et $(1, 1, 1)$, on a :

$$\begin{aligned}\beta^2 &= (1 \cdot \|v_1\| + 1 \cdot \|v_2\| + 1 \cdot \|v_3\|)^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2),\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2 \geq \frac{\beta^2}{3}.$$

$$\text{Des deux points précédents, on déduit : } 4\alpha^2 \geq 4\frac{\beta^2}{3},$$

$$\text{et on conclut : } \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\beta.$$

13.9 1) On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}x \in F^\perp \cap G^\perp &\iff \begin{cases} x \in F^\perp = \text{Ker}(p_F) \\ x \in G^\perp = \text{Ker}(p_G) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} p_F(x) = 0 \\ p_G(x) = 0 \end{cases} \\ &\implies (p_F + p_G)(x) = p_F(x) + p_G(x) = 0 + 0 = 0 \\ &\implies x \in \text{Ker}(p_F + p_G),\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } F^\perp \cap G^\perp \subset \text{Ker}(p_F + p_G).$$

2) Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(p_F + p_G)$, c'est-à-dire : $p_F(x) + p_G(x) = 0$.

On a, puisque p_F est l'orthoprojecteur sur F :

$$\underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} \mid \underbrace{p_F(x)}_{\in F} = 0,$$

$$\text{d'où : } (x \mid p_F(x)) = (p_F(x) \mid p_F(x)) = \|p_F(x)\|^2.$$

$$\text{De même : } (x \mid p_G(x)) = \|p_G(x)\|^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\|p_F(x)\|^2 + \|p_G(x)\|^2 &= (x \mid p_F(x)) + (x \mid p_G(x)) \\ &= (x \mid p_F(x) + p_G(x)) = (x \mid 0) = 0.\end{aligned}$$

$$\text{On déduit : } \|p_F(x)\|^2 = 0 \text{ et } \|p_G(x)\|^2 = 0,$$

$$\text{donc : } p_F(x) = 0 \text{ et } p_G(x) = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire : } x \in \text{Ker}(p_F) \cap \text{Ker}(p_G) = F^\perp \cap G^\perp.$$

$$\text{Ceci montre : } \text{Ker}(p_F + p_G) \subset F^\perp \cap G^\perp.$$

$$\text{Finalement : } \text{Ker}(p_F + p_G) = F^\perp \cap G^\perp.$$

13.10 a) La réponse est négative (si $n \geq 2$) : la somme de deux matrices normales peut ne pas être normale, comme le montre l'exemple suivant, pour $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, on a $A^*A = AA^*$ car $A^* = A$, $B^*B = BB^*$ car $B^* = -B$, mais, par un simple calcul sur les éléments :

$$(A + B)(A + B)^* \neq (A + B)^*(A + B).$$

On peut ensuite compléter cet exemple par des termes tous nuls, pour obtenir un exemple à l'ordre n , pour tout $n \geq 2$.

b) Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ normales, c'est-à-dire telles que : $A^*A = AA^*$ et $B^*B = BB^*$.

Supposons : $\text{Im}(A) \perp \text{Im}(B)$ (1).

On a :

$$\begin{aligned}(1) &\iff \forall U \in \text{Im}(A), \forall V \in \text{Im}(B), U \perp V \\ &\iff \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (AX) \perp (BY) \\ &\iff \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (AX)^*(BY) = 0 \\ &\iff \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (B^*AX)^*Y = 0) \\ &\iff \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (B^*AX) \perp Y) \\ &\iff \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), (B^*A)X = 0 \\ &\iff B^*A = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, l'hypothèse (1) équivaut, plus simplement, à : $B^*A = 0$.

Par transconjugaison, on a aussi : $A^*B = (B^*A)^* = 0$.

Alors :

$$\begin{aligned}(A + B)^*(A + B) &= (A^* + B^*)(A + B) \\ &= A^*A + \underbrace{A^*B}_{=0} + \underbrace{B^*A}_{=0} + B^*B = A^*A + B^*B.\end{aligned}$$

Montrons, maintenant : $AB^* = 0$ et $BA^* = 0$.

À cet effet, calculons la norme au carré :

$$\begin{aligned}\|AB^*\|^2 &= \text{tr}((AB^*)^*(AB^*)) = \text{tr}((BA^*)(AB^*)) \\ &= \text{tr}(B(A^*AB^*)) = \text{tr}((A^*AB^*)B) \\ &= \text{tr}((A^*A)(B^*B)) = \text{tr}((AA^*)(BB^*)) \\ &= \text{tr}(A(\underbrace{A^*B}_{=0})B^*) = 0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit $AB^* = 0$, puis : $BA^* = (AB^*)^* = 0$, et donc :

$$\begin{aligned}(A + B)(A + B)^* &= (A + B)(A^* + B^*) \\ &= AA^* + AB^* + BA^* + BB^* \\ &= AA^* + BB^* = A^*A + B^*B = (A + B)^*(A + B).\end{aligned}$$

On conclut que $A + B$ est normale.

13.11 (i) $\implies$ (ii) :

Supposons qu'il existe $B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = B^{-1}B^*$. On a alors : $A^* = (B^{-1}B^*)^* = B(B^{-1})^*$

$$\text{et : } A^{-1} = (B^{-1}B^*)^{-1} = (B^*)^{-1}B = (B^{-1})^*B,$$

$$\text{d'où : } A^* = B(B^{-1})^* = B(A^{-1}B^{-1}) = BA^{-1}B^{-1}.$$

En notant $P = B$, on a donc :

$$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ et } A^* = PA^{-1}P^{-1}.$$

(ii) $\implies$ (i) :

Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $A^* = PA^{-1}P^{-1}$. Cherchons B , selon l'indication de l'énoncé, sous la forme $B = (\alpha I_n + A^*)(P + \beta P^*)$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ est à trouver.

Avec ces notations, on a : $B^* = (P^* + \bar{\beta}P)(\bar{\alpha}I_n + A)$,

et donc :

$$BA = B^*$$

$$\begin{aligned} \iff (\alpha I_n + A^*)(P + \beta P^*) &= (P^* + \bar{\beta}P)(\bar{\alpha}I_n + A) \\ \iff \alpha PA + \alpha \beta P^* A + A^* P A + \beta A^* P^* A &= \bar{\alpha} P^* + \bar{\alpha} \bar{\beta} P + P^* A + \bar{\beta} P A \quad (1). \end{aligned}$$

Mais : $A^* P A = (P A^{-1} P^{-1}) P A = P$

et : $A^* P^* A = (A^* P A)^* = P^*.$

Donc :

$$\begin{aligned} (1) \iff \alpha PA + \alpha \beta P^* A + P + \beta P^* &= \bar{\alpha} P^* + \bar{\alpha} \bar{\beta} P + P^* A + \bar{\beta} P A \\ \iff (\alpha = \bar{\beta}, \alpha \beta = 1, 1 = \bar{\alpha} \bar{\beta}, \beta = \bar{\alpha}) & \\ \iff (\beta = \bar{\alpha}, \alpha \bar{\alpha} = 1). & \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \bar{\alpha} = 1$:

$$\begin{aligned} B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \begin{cases} \alpha I_n + A^* \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \\ P + \beta P^* \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \bar{\alpha} I_n + A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \\ I_n + \bar{\alpha} P^{-1} P^* \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \end{cases} \\ &\iff \left(-\bar{\alpha} \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), -\frac{1}{\bar{\alpha}} \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P^{-1} P^*) \right) \\ &\iff \left(-\bar{\alpha} \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), -\alpha \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P^{-1} P^*) \right). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P^{-1} P^*)$ sont finis et que l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{C}; |\alpha| = 1\}$ est infini, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$$|\alpha| = 1, -\bar{\alpha} \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), -\alpha \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P^{-1} P^*).$$

Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ convenant, puis B convenant, ce qui montre (ii).

Finalement, les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes.

Plan

Les méthodes à retenir	528
Énoncés des exercices	529
Du mal à démarrer ?	533
Corrigés	535

Thèmes abordés dans les exercices

- Établir une structure de groupe, de sous-groupe
- Calculs dans un groupe
- Manipulation des morphismes de groupes, endomorphismes d'un groupe, isomorphismes de groupes, automorphismes d'un groupe
- Établir une structure d'anneau, de sous-anneau, d'idéal d'un anneau commutatif
- Étude d'idéaux principaux, d'idéaux non principaux
- Calculs dans un anneau, manipulation d'éléments nilpotents, d'éléments idempotents, de diviseurs de 0
- Manipulation de morphismes d'anneaux, endomorphismes d'un anneau, isomorphismes d'anneaux, automorphismes d'un anneau
- Résolution de congruences à une ou plusieurs inconnues, résolution d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Intervention de la finitude dans les groupes, dans les anneaux.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de la structure de groupe, de sous-groupe, de sous-groupe engendré par une partie
- Noyau, image d'un morphisme de groupes commutatifs
- Définition d'un groupe monogène, d'un groupe cyclique, groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Définition et propriétés des morphismes de groupes, endomorphismes d'un groupe, isomorphismes de groupes, automorphismes d'un groupe
- Produit de deux groupes
- Définition et propriétés de la structure d'anneau, de sous-anneau, d'idéal d'un anneau commutatif
- Définition des éléments nilpotents, des éléments idempotents, des diviseurs de 0, dans un anneau
- Définition et propriétés des morphismes d'anneaux, endomorphismes d'un anneau, isomorphismes d'anneaux, automorphismes d'un anneau
- Définition d'idéal principal d'un anneau commutatif
- Anneaux usuels $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $K[X]$, $\mathbb{R}^E$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathbf{M}_n(K)$
- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$, notion de nombres premiers entre eux, pgcd, ppcm, théorème de Bezout, théorème de Gauss, décomposition primaire, caractérisation des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Les méthodes à retenir

Pour montrer qu'un ensemble G muni d'une loi interne $\cdot$ est un groupe

Essayer de :

- revenir à la définition de groupe
- montrer que G est un sous-groupe d'un groupe connu.

Pour montrer qu'une partie H d'un groupe G est un sous-groupe de G

Essayer de :

- revenir à la définition de sous-groupe.

➡ **Exercice 14.3 a)**

- montrer que H est le sous-groupe engendré par une certaine partie de G , ou montrer que H est une intersection de sous-groupes de G .

Pour montrer qu'une application $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes

Après avoir vérifié que G et G' sont bien des groupes et que f est correctement définie, revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(xy) = f(x)f(y).$$

➡ **Exercice 14.13 b).**

Pour montrer qu'un ensemble A muni de deux lois $+$ et $\cdot$ est un anneau

Essayer de :

- revenir à la définition d'un anneau
- montrer que A est un sous-anneau d'un anneau connu

➡ **Exercice 14.15 a).**

Pour montrer qu'une partie B d'un anneau A est un sous-anneau de A

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer $1_A \in B$ et :

$$\forall (x, y) \in B^2, x + y \in B, -x \in B, xy \in B.$$

➡ **Exercices 14.4, 14.5, 14.19, 14.27.**

Pour montrer qu'une partie I d'un anneau commutatif A est un idéal de A

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer :

$$\begin{cases} 0_A \in I \\ \forall (x, y) \in I^2, x - y \in I \\ \forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I. \end{cases}$$

➡ **Exercices 14.5, 14.15 a), 14.20.**

Pour montrer qu'un idéal I d'un anneau commutatif A n'est pas un idéal principal de A

Raisonner par l'absurde : supposer qu'il existe $x \in A$ tel que $I = Ax$, et amener une contradiction.

➡ **Exercices 14.15 b) 1), 14.21.**

Pour montrer que deux anneaux ne sont pas isomorphes

Raisonner par l'absurde : supposer qu'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre, et amener une contradiction.

➡ **Exercice 14.22.**

Pour résoudre un système de congruences simultanées, à une inconnue dans $\mathbb{Z}$

Résoudre la première équation, par exemple, en exprimant x en fonction d'un autre entier, noté a par exemple, puis reporter dans la deuxième équation, et répéter.

➡ **Exercice 14.6.**

Pour résoudre un système d'équations d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$

Essayer de :

– exprimer une des deux inconnues en fonction de l'autre à partir d'une des deux équations, puis reporter dans l'autre.

➡ **Exercice 14.7 a), b)**

– combiner les équations pour éliminer une des deux inconnues.

➡ **Exercice 14.7 c).**

Pour résoudre une équation algébrique d'inconnue $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Essayer, si n n'est pas trop grand, tous les $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ou, si possible, seulement tous ceux vérifiant une condition nécessaire.

➡ **Exercice 14.16.**

Pour obtenir des résultats concernant des groupes finis ou des anneaux finis

Penser à utiliser des applications du genre, pour $x \in A$ fixé :

$$f : A \longrightarrow A, y \longmapsto xy,$$

et essayer de montrer que f est injective, pour en déduire, puisque A est supposé fini, que f est surjective.

➡ **Exercices 14.8, 14.9, 14.24, 14.28.**

Énoncés des exercices

14.1 Calculs dans un groupe

Soient G un groupe, e son neutre, $a, b \in G$ tels que : $a^3b = ba^3$ et $a^5 = e$.

Montrer : $ab = ba$.

14.2 Calculs de puissances dans un groupe

Soient G un groupe, $a, b \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que : $b^n a = ab$.

a) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, b^{kn} a = ab^k$.

b) En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}, b^{np} a^p = a^p b$.

14.3 Centralisateur d'une partie dans un groupe

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, de neutre noté e .

Pour toute partie A de G , on appelle *centralisateur de A dans G* la partie, notée $C(A)$ de G définie par : $C(A) = \{x \in G ; \forall a \in A, ax = xa\}$.

a) Vérifier que, pour toute partie A de G , $C(A)$ est un sous-groupe de G .

b) Montrer, pour toutes parties A, B de G :

$$\begin{aligned} \alpha) A \subset B &\implies C(A) \supset C(B) & \beta) A \subset C(C(A)) \\ \gamma) C(A) &= C(< A >) & \delta) C(C(C(A))) = C(A). \end{aligned}$$

14.4 Centre d'un anneau

Soit A un anneau.

Montrer que le *centre* Z de A , défini par : $Z = \{x \in A ; \forall a \in A, ax = xa\}$, est un sous-anneau de A .

14.5 Sous-anneau, idéal : exemples dans un anneau de fonctions

On note $A = C([0; 1], \mathbb{R})$, $B = C^1([0; 1], \mathbb{R})$, $I = \{f \in A ; f(0) = 0\}$, $E = B \cap I$.

Vérifier :

- a) A est un anneau pour les lois usuelles
- b) B est un sous-anneau de A , et B n'est pas un idéal de A
- c) I est un idéal de A , et I n'est pas un sous-anneau de A
- d) E n'est ni un sous-anneau ni un idéal de A .

14.6 Exemples de systèmes de congruences simultanées, à une inconnue

Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} x \equiv 1 \quad [2] \\ x \equiv 2 \quad [3] \\ x \equiv 3 \quad [5] \end{cases} & \quad b) \begin{cases} x \equiv 1 \quad [6] \\ x \equiv 4 \quad [10] \\ x \equiv 7 \quad [15] \end{cases} & \quad c) \begin{cases} x \equiv 7 \quad [18] \\ x \equiv 1 \quad [30] \\ x \equiv 16 \quad [45] \end{cases} \end{aligned}$$

14.7 Exemples de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$:

$$\begin{aligned} a) n = 13, \begin{cases} \widehat{2}x + \widehat{3}y = \widehat{4} \\ \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{5} \end{cases} & \quad b) n = 18, \begin{cases} \widehat{4}x + \widehat{7}y = \widehat{1} \\ \widehat{5}x + \widehat{2}y = \widehat{2} \end{cases} & \quad c) n = 60, \begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{10}y = \widehat{9} \\ \widehat{15}x + \widehat{4}y = \widehat{9} \end{cases} \end{aligned}$$

14.8 Caractérisation des sous-groupes parmi les parties finies d'un groupe

Soient G un groupe, e son neutre, A une partie finie de G . Montrer que A est un sous-groupe de G si et seulement si : $e \in A$ et $(\forall (x, y) \in A^2, xy \in A)$.

14.9 Somme des caractères d'un groupe fini commutatif

Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif, $\varphi : (G, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ un morphisme de groupes autre que l'application constante égale à 1. Montrer : $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$.

14.10 Images directes et réciproques de sous-groupes d'un groupe commutatif par un morphisme de groupes

Soient G, G' deux groupes commutatifs, $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes.

- a) Montrer, pour tout sous-groupe H de G : $f^{-1}(f(H)) = H + \text{Ker}(f)$.
- b) Montrer, pour tout sous-groupe H' de G' : $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \text{Im}(f)$.

14.11 Caractérisation des anneaux n'ayant que 0 comme élément nilpotent

Soient A un anneau, N l'ensemble des éléments nilpotents de A .

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $N = \{0\}$ (ii) $\forall x \in A, (x^2 = 0 \implies x = 0)$.

14.12 Produits de diviseurs de 0

Soit A un anneau commutatif.

On note $D = \{x \in A - \{0\} ; \exists y \in A - \{0\}, xy = 0\}$ l'ensemble des diviseurs de 0 dans A .

Montrer, pour tout $(a, b) \in A^2$:

$$a) ab \in D \implies (a \in D \text{ ou } b \in D) \quad b) (a \in D \text{ ou } b \in D) \implies ab \in D \cup \{0\}.$$

14.13 Morphisme des groupes d'inversibles induit par un morphisme d'anneaux

Soient A, B deux anneaux, A^* (resp. B^*) l'ensemble des éléments inversibles de A (resp. B), $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

a) Montrer : $f(A^*) \subset B^*$.

b) Établir que l'application $f : A^* \longrightarrow B^*, x \longmapsto f(x)$ est un morphisme de groupes (pour les lois $\cdot$ de A et de B).

14.14 Correspondance entre idéaux par un morphisme d'anneaux surjectif

Soient A, A' deux anneaux commutatifs, $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme d'anneaux surjectif.

Montrer que l'application $\tilde{f} : I \longmapsto f(I)$ (où $f(I)$ est l'image directe de I par f) est une bijection de l'ensemble $\mathcal{I}$ des idéaux de A contenant $\text{Ker}(f)$ sur l'ensemble $\mathcal{I}'$ des idéaux de A' .

14.15 Exemple d'idéal d'un anneau de suites

On note A l'ensemble des suites réelles bornées et I l'ensemble des suites réelles convergent vers 0.

a) Vérifier que A est un anneau pour les lois usuelles et que I est un idéal de A .

b) 1) Est-ce que I est principal ?

2) Est-ce que I est premier, c'est-à-dire est-ce que :

$$\forall (u, v) \in I^2, (uv \in I \implies (u \in I \text{ ou } v \in I)) ?$$

3) Est-ce que I est maximal, c'est-à-dire est-ce qu'il n'existe pas d'idéal J de A tel que : $I \subsetneq J \subsetneq A$?

c) Déterminer le radical $\sqrt{I}$ de I , défini par : $\sqrt{I} = \{u \in A ; \exists p \in \mathbb{N}^*, u^p \in I\}$.

14.16 Exemples de résolution d'équation algébrique dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$

Résoudre l'équation (1) d'inconnue $x \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} : x^8 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

14.17 Commutation dans un groupe

Soient G un groupe, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

On suppose que l'application $f : G \longrightarrow G, x \longmapsto x^n$ est un morphisme surjectif de groupes.

Démontrer : $\forall (x, y) \in G^2, x^{n-1}y = yx^{n-1}$.

14.18 Morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $N \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que le seul morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est l'application nulle.

14.19 Sous-anneaux d'un anneau-produit

a) Montrer que, si A' (resp. B') est un sous-anneau d'un anneau A (resp. B), alors $A' \times B'$ est un sous-anneau de l'anneau-produit $A \times B$.

b) Démontrer que les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$ sont les $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; x \equiv y \pmod{n}\}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

14.20 Idéaux d'un anneau-produit

Soient A, A' deux anneaux. Trouver tous les idéaux de l'anneau-produit $A \times A'$ en fonction des idéaux de A et des idéaux de A' .

14.21 Exemple d'idéal non principal dans $\mathbb{Z}[X]$

Montrer que $\{P \in \mathbb{Z}[X]; 2 \mid P(0)\}$, est un idéal non principal de $\mathbb{Z}[X]$.

14.22 Anneaux $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont deux à deux non isomorphes.

14.23 Exemple de divisibilité

CNS sur $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ pour que : $\forall n \in \mathbb{N}, 5 \mid 2^{an+b} + 3^n$.

14.24 Condition suffisante pour qu'un groupe fini soit abélien

Soient G un groupe fini, e le neutre de G . On suppose qu'il existe un endomorphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow G \text{ tel que : } \begin{cases} \forall t \in G, f \circ f(t) = t \\ \forall u \in G, (f(u) = u \implies u = e). \end{cases}$$

a) Montrer : $\forall x \in G, \exists t \in G, x = t(f(t))^{-1}$.

b) En déduire : $\forall x \in G, f(x) = x^{-1}$. c) Montrer que G est abélien.

14.25 Sous-groupes d'un groupe infini

Montrer que tout groupe infini admet une infinité de sous-groupes.

14.26 Morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$

Pour $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, +)$.

14.27 Centre d'un anneau régulier

Un anneau A est dit *régulier* si et seulement si : $\forall x \in A, \exists y \in A, xyx = x$.

On appelle *centre* d'un anneau A l'ensemble : $Z = \{x \in A; \forall a \in A, ax = xa\}$.

Démontrer que le centre d'un anneau régulier est un anneau régulier.

14.28 Anneaux intègres n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux

Soit A un anneau (commutatif) intègre tel que $A \neq \{0\}$. On suppose que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux. Démontrer que A est un corps.

Du mal à démarrer ?

14.1 Calculer, par exemple : $ab = a^5(ab) = \dots$

14.2 a) Récurrence sur k .

b) Récurrence sur p , en utilisant le résultat de a) pour transformer $b^{n^p}a$ en ab^{n^p} .

14.3 a) Revenir à la définition de sous-groupe.

b) α) Utiliser la définition.

β) Évident.

γ) $\bullet C(<A>) \subset C(A)$ par β).

• Soit $x \in C(A)$. Montrer $A \subset C(\{x\})$, puis $<A> \subset C(\{x\})$, $x \in C(<A>)$.

δ) Appliquer α) et β) diversement.

14.4 Se rappeler la définition d'un sous-anneau. On dit qu'une partie B de A est un sous-anneau de A si et seulement si :

$$1_A \in B \text{ et } \forall (x, y) \in B^2, (x + y \in B, -x \in B, xy \in B).$$

14.5 a) Immédiat.

b) 1) Utiliser la définition de : sous-anneau.

2) Raisonner par l'absurde, en utilisant la fonction constante 1 et une fonction continue non de classe C^1 .

c) 1) Utiliser la définition de : idéal.

2) Remarquer : $1 \notin I$.

d) 1) Remarquer : $1 \notin E$.

2) Analogue à b) 2).

14.6 Résoudre la première équation (par exemple) en exprimant x en fonction d'un autre entier, noté a par exemple, puis reporter dans la deuxième équation et réitérer.

a) Par (1) : $x = 1 + 2a$, puis, par (2) : $a = -1 + 3b$, etc

b) Par (1) : $x = 1 + 6a$, puis, par (2), une contradiction.

c) Par (1) : $x = 7 + 18a$, puis, par (2) : $a = -2 + 5b$, et le report dans (3) donne une équation satisfaite pour tout $b \in \mathbb{Z}$.

14.7 a), b) Essayer, à partir d'une des deux équations, d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre, puis reporter dans l'autre équation. Se rappeler qu'un élément $\hat{x}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si $x \wedge n = 1$.

c) Dans cet exemple, comme aucun coefficient de x ou y n'est premier avec 60, essayer d'éliminer x ou y par combinaison d'équations.

14.8 Pour $x \in A$, considérer l'application

$$f : A \longrightarrow A, y \longmapsto xy.$$

14.9 Remarquer que, puisque G est un groupe, pour tout $g_0 \in G$ fixé, l'application $G \longrightarrow G, g \longmapsto g_0g$ est une permutation de G , ce qui permet de réindexer la sommation.

14.10 Utiliser les définitions : morphisme de groupes, noyau, image. Se rappeler les définitions d'image directe et d'image réciproque d'une partie par une application :

$$\forall y \in G', y \in f(H) \iff (\exists x \in H, y = f(x)),$$

$$\forall x \in G, x \in f^{-1}(H') \iff f(x) \in H'.$$

14.11 Un sens est évident.

Pour l'autre sens, si $a^n = 0$ et $a^{n-1} \neq 0$, considérer $x = a^{n-1}$.

14.12 a) Si $ab \in D$ il existe $c \in A - \{0\}$ tel que $(ab)c = 0$, et séparer en cas : $bc \neq 0, bc = 0$.

b) Si $a \in D$, il existe $c \in A - \{0\}$ tel que $ac = 0$ et séparer en cas : $ab \neq 0, ab = 0$.

14.13 a) Immédiat.

b) 1) Montrer que A^* (resp. B^*) est un groupe pour la loi $\cdot$, en revenant aux définitions.

2) Montrer que f^* est un morphisme de groupes.

14.14 1) Montrer que, pour tout idéal I de A (contenant $\text{Ker}(f)$), $f(I)$ est un idéal de A' , en revenant aux définitions et en utilisant la surjectivité de f .

2) Montrer que, si I et J sont deux idéaux de A contenant $\text{Ker}(f)$, et tels que $f(I) = f(J)$, alors $I \subset J$, puis $I = J$.

3) Montrer que, pour tout idéal I' de A' , $f^{-1}(I')$ est un idéal de A , et montrer que $f(f^{-1}(I')) = I'$, en utilisant la surjectivité de f .

14.15 a) Évident.

b) 1) Raisonner par l'absurde et, si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre I , montrer que les u_n sont tous non nuls et envisager $w = (\sqrt{|u_n|})_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Construire $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ telles que : $uv = 0, u \notin I, v \notin I$, en séparant les rôles de n pair, n impair.

3) Considérer, par exemple, l'ensemble J des suites mixées d'une suite de termes d'indices pairs tendant vers 0 et d'une suite de termes d'indices impairs bornée.

c) Immédiat. On obtient : $\sqrt{I} = I$.

14.16 Remarquer qu'il s'agit du carré de $x^4 + x^2 + 1$. Procéder par examen de tous les cas : $x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

14.17 Soit $(x, y) \in G^2$. Utiliser $z \in G$ tel que $y = z^n$ et calculer $zx(x^{n-1}y)x$.

14.18 Soit $f : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes. Calculer $f(\tau_{ij})$ où τ_{ij} est la transposition qui échange i et j .

14.19 a) Revenir à la définition de : sous-anneau.

b) 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit C un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$. Considérer

$$E = \{|x - y|; (x, y) \in C, x \neq y\}$$

et, si $E \neq \emptyset$, considérer le plus petit élément n de E . Montrer alors $C = A_n$, en utilisant une division euclidienne.

14.20 1) Montrer que, si I (resp. I') est un idéal de A (resp. A'), alors $I \times I'$ est un idéal de $A \times A'$.

2) Réciproquement, soit J un idéal de $A \times A'$. Considérer les deux projections I, I' de J :

$$I = \{x \in A; \exists x' \in A', (x, x') \in J\},$$

$$I' = \{x' \in A'; \exists x \in A, (x, x') \in J\}.$$

Montrer que I (resp. I') est un idéal de A (resp. A') et que $J = I \times I'$.

14.21 1) Montrer que $I = \{P \in \mathbb{Z}[X]; 2 \mid P(0)\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.

2) Reasonner par l'absurde : supposer que I est principal, engendré par un P_0 . Montrer $\deg(P_0) = 0$, puis considérer $P_1 = 2 + X$.

14.22 Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Supposer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux $f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$. Alors, les solutions d'une équation dans $\mathbb{Z}^m$ doivent correspondre aux solutions de la même équation dans $\mathbb{Z}^n$. Envisager, par exemple, les idempotents, c'est-à-dire les solutions de l'équation $x^2 = x$.

14.23 En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{an+b} + 3^n$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et entiers. En déduire :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, 5 \mid u_n) \iff (5 \mid u_0 \text{ et } 5 \mid u_1).$$

Étudier ensuite les congruences, modulo 5, des puissances de 2.

14.24 a) Considérer l'application

$$g : G \rightarrow G, t \mapsto t(f(t))^{-1}.$$

Montrer que g est injective, et en déduire que g est surjective.

b) Soit $x \in G$. Utiliser a) et calculer $f(x)$.

c) Utiliser b).

14.25 Soit G un groupe n'admettant qu'un nombre fini de sous-groupes.

Montrer qu'il existe une partie finie F de G telle que :

$$G = \bigcup_{x \in F} \langle x \rangle.$$

D'autre part, montrer que, pour tout $x \in G$, $\langle x \rangle$ est fini.

En déduire une contradiction.

14.26 Pour $x \in \mathbb{Z}$ (resp. $y \in \mathbb{Z}$), noter $\hat{x}$ (resp. $\hat{y}$) la classe de x (resp. y) dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$).

• Soit $f : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(\hat{x}) = xf(\hat{1})$$

et considérer $\xi \in \{0, \dots, b-1\}$ tel que $f(\hat{1}) = \tilde{\xi}$.

Montrer que ξ est multiple de $\frac{b}{\delta}$, où $\delta = \text{pgcd}(a, b)$.

• Réciproquement, soit ξ un multiple de $\frac{b}{\delta}$. Montrer :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, (\hat{x}_1 = \hat{x}_2 \implies \tilde{\xi}x_1 = \tilde{\xi}x_2).$$

Considérer alors $f : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, \hat{x} \mapsto \tilde{\xi}x$

et montrer que f est un morphisme de groupes.

14.27 Montrer d'abord que Z est un anneau, cf. exercice 14.4.

Soit $x \in Z$. Il existe $y \in A$ tel que $x = xyx$. Noter $z = yxy$.

Montrer : $x = xzx, xy \in Z, z \in Z$.

14.28 Il existe $a \in A - \{0\}$.

Considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = a^n A = \{a^n x; x \in A\}$.

Il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $p < q$ et $I_p = I_q$.

Il existe $b \in A$ tel que : $a^p = a^q b$.

Déduire : $a(a^{q-p-1}b) = 1_A$.

Corrigés des exercices

14.1 $ab = a^5(ab) = a^6b = a^3(a^3b) = a^3(ba^3)$
 $= (a^3b)a^3 = (ba^3)a^3 = ba^6 = (ba)a^5 = ba.$

14.2 a) Récurrence sur k .

• La propriété est évidente pour $k = 0$.

Supposons, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé : $b^{kn}a = ab^k$. Alors :

$$b^{(k+1)n}a = b^{kn}(b^n a) = b^{kn}(ab) \\ = (b^{kn}a)b = (ab^k)b = ab^{k+1},$$

donc la propriété est vraie pour $k + 1$.

On conclut, par récurrence sur k :

$$\forall k \in \mathbb{N}, b^{kn}a = ab^k.$$

b) Récurrence sur p .

• La propriété est évidente pour $p = 0$.

• Supposons, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé : $b^{np}a^p = a^p b$. Alors :

$$b^{n(p+1)}a^{p+1} = (b^{np}a)a^p = (ab^{np})a^p \\ = a(b^{np}a^p) = a(a^p b) = a^{p+1}b,$$

donc la propriété est vraie pour $p + 1$.

On conclut, par récurrence sur p :

$$\forall p \in \mathbb{N}, b^{np}a = a^p b.$$

14.3 a) Soit A une partie de G .

• $e \in C(A)$, puisque : $\forall a \in A, ae = ea$.

• Pour tous x, y de $C(A)$:

$$\forall a \in A, \\ (xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy),$$

et donc $xy \in C(A)$.

• Soit $x \in C(A)$. On a : $\forall a \in A, ax = xa$,

d'où, en composant par x^{-1} à gauche et à droite :

$$\forall a \in A, x^{-1}a = ax^{-1},$$

et donc $x^{-1} \in C(A)$.

Ainsi, $C(A)$ est un sous-groupe de G .

b) α) Supposons $A \subset B$, et soit $x \in C(B)$.

On a : $\forall b \in B, bx = xb$, donc, a fortiori :

$\forall a \in A, ax = xa$, c'est-à-dire : $x \in C(A)$.

Ceci montre : $C(B) \subset C(A)$.

β) Soit $a \in A$. Par définition de $C(A)$: $\forall x \in C(A), ax = xa$, donc, par définition de $C(C(A))$: $a \in C(C(A))$.

γ) • $A \subset \langle A \rangle$, donc (cf. b) α) : $C(A) \supset C(\langle A \rangle)$.

• Soit $x \in C(A)$.

Puisque : $\forall a \in A, ax = xa$, on a : $A \subset C(\{x\})$.

Comme $C(\{x\})$ est un sous-groupe de G , il en résulte : $\langle A \rangle \subset C(\{x\})$,

c'est-à-dire : $\forall \alpha \in \langle A \rangle, \alpha x = x\alpha$,

et donc : $x \in C(\langle A \rangle)$.

Ainsi : $C(A) = C(\langle A \rangle)$.

δ) D'après β), appliqué à $C(A)$ à la place de A :

$$C(A) \subset C(C(A)).$$

D'après β) : $A \subset C(C(A))$,

puis, d'après α) : $C(A) \supset C(C(A))$.

On conclut : $C(C(C(A))) = C(A)$.

14.4 • $Z \subset A$ et $1 \in Z$.

• On a, pour tout $(x, y) \in Z^2$:

$$\forall a \in A, a(x + y) = ax + ay = xa + ya = (x + y)a,$$

donc : $x + y \in Z$.

• On a, pour tout $x \in Z$:

$$\forall a \in A, a(-x) = -ax = -xa = (-x)a,$$

donc : $-x \in Z$.

• On a, pour tout $(x, y) \in Z^2$:

$$\forall a \in A, \\ a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a,$$

donc : $xy \in Z$.

On conclut : Z est un sous-anneau de A .

Remarque : Il en résulte que Z (muni des lois induites par celles de A) est lui-même un anneau, avec le même neutre que A pour la multiplication.

14.5 a) D'après le cours, A est un anneau pour les lois usuelles, addition et multiplication.

b) 1) On a $1 \in B$ et, pour toutes $f, g \in B$:

$$f + g \in B, -f \in B, fg \in B.$$

On conclut : B est un sous-anneau de A .

2) Si B était un idéal de A , puisque $1 \in B$, on aurait $B = A$, contradiction car, par exemple, l'application $x \mapsto \left| x - \frac{1}{2} \right|$, est élément de A mais non de B .

On conclut : B n'est pas un idéal de A .

c) 1) On a $0 \in I$ et, pour toutes $f, g \in I$ et $h \in A$:

$$f - g \in I \text{ et } hf \in I,$$

$$\text{car : } (f - g)(0) = f(0) - g(0) = 0$$

$$\text{et : } (hf)(0) = h(0)f(0) = h(0)0 = 0.$$

On conclut : I est un idéal de A .

2) Comme $1 \notin I$, I n'est pas un sous-anneau de A .

d) 1) On a $1 \notin E$, car $1 \notin I$ et $E \subset I$, donc E n'est pas un sous-anneau de A .

2) Considérons $f, h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f : x \mapsto x, \quad h : x \mapsto \sqrt{1-x}.$$

Il est clair que : $f \in E$ et $h \in A$.

Mais $hf : x \mapsto x\sqrt{1-x}$ n'est pas dérivable en 1, donc : $hf \notin E$.

On conclut : E n'est pas un idéal de A .

14.6 Notons (S) le système proposé et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

$$a) \bullet \text{ On a : } x \equiv 1 \pmod{2} \iff (\exists a \in \mathbb{Z}, x = 1 + 2a).$$

• Puis, pour $a \in \mathbb{Z}$:

$$x \equiv 2 \pmod{3} \iff 1 + 2a \equiv 2 \pmod{3} \iff 2a \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\iff -2a \equiv -1 \pmod{3} \iff a \equiv -1 \pmod{3}$$

$$\iff (\exists b \in \mathbb{Z}, a = -1 + 3b).$$

On obtient : $x = 1 + 2a = 1 + 2(-1 + 3b) = -1 + 6b$.

• Puis, pour $b \in \mathbb{Z}$:

$$x \equiv 3 \pmod{5} \iff -1 + 6b \equiv 3 \pmod{5} \iff 6b \equiv 4 \pmod{5}$$

$$\iff b \equiv -1 \pmod{5} \iff (\exists c \in \mathbb{Z}, b = -1 + 5c).$$

Ainsi :

$$(S) \iff \exists c \in \mathbb{Z}, x = -1 + 6(-1 + 5c) = -7 + 30c.$$

On conclut : $\mathcal{S} = \{-7 + 30c; c \in \mathbb{Z}\}$.

b) Si x convient, alors, puisque $x \equiv 1 \pmod{6}$, x est impair, et, puisque $x \equiv 4 \pmod{10}$, x est pair, contradiction.

On conclut : $\mathcal{S} = \emptyset$.

$$c) \bullet \text{ On a : } x \equiv 7 \pmod{18} \iff (\exists a \in \mathbb{Z}, x = 7 + 18a).$$

• Puis, pour $a \in \mathbb{Z}$:

$$x \equiv 1 \pmod{30} \iff 7 + 18a \equiv 1 \pmod{30} \iff 18a \equiv -6 \pmod{30}$$

$$\iff 3a \equiv -1 \pmod{5} \iff 2 \cdot 3a \equiv -2 \pmod{5}$$

$$2 \wedge 5 = 1$$

$$\iff a \equiv -2 \pmod{5} \iff (\exists b \in \mathbb{Z}, a = -2 + 5b).$$

On obtient :

$$x = 7 + 18a = 7 + 18(-2 + 5b) = -29 + 90b.$$

• Puis, pour $b \in \mathbb{Z}$:

$$x \equiv 16 \pmod{45} \iff -29 + 90b \equiv 16 \pmod{45}$$

$$\iff 90b \equiv 45 \pmod{45} \iff 2b \equiv 1 \pmod{1},$$

vrai pour tout $b \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ainsi : } (S) \iff (\exists b \in \mathbb{Z}, x = -29 + 90b).$$

$$\text{On conclut : } \mathcal{S} = \{-29 + 90b; b \in \mathbb{Z}\}.$$

14.7 Notons (S) le système proposé et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

a) Puisque $2 \wedge 13 = 1$, $\widehat{2}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

De plus, comme $2 \cdot 7 = 14$, on a : $\widehat{2} \cdot \widehat{7} = \widehat{1}$.

Ainsi, dans la première équation de (S) :

$$\begin{aligned} \widehat{2}x + \widehat{3}y &= \widehat{4} \iff \widehat{7}(\widehat{2}x + \widehat{3}y) = \widehat{7} \cdot \widehat{4} \\ &\iff x + \widehat{21}y = \widehat{28} \iff x = \widehat{2} + \widehat{5}y. \end{aligned}$$

Puis, en reportant dans la deuxième équation de (S) :

$$\begin{aligned} \widehat{3}x + \widehat{2}y &= \widehat{5} \iff \widehat{3}(\widehat{2} + \widehat{5}y) + \widehat{2}y = \widehat{5} \\ &\iff \widehat{17}y = -\widehat{1} \iff \widehat{4}y = -\widehat{1} \\ &\iff (-3) \iff -\widehat{3}(\widehat{4}y) = (-\widehat{3})(-\widehat{1}) \iff y = \widehat{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin : } x = \widehat{2} + \widehat{5}y = \widehat{2} + \widehat{5} \cdot \widehat{3} = \widehat{17} = \widehat{4}.$$

$$\text{On conclut : } \mathcal{S} = \{(\widehat{4}, \widehat{3})\}.$$

b) Puisque $7 \wedge 18 = 1$, $\widehat{7}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

De plus, comme $7 \cdot 5 = 35$, on a : $\widehat{7} \cdot (-\widehat{5}) = \widehat{1}$.

Ainsi, dans la première équation de (S) :

$$\begin{aligned} \widehat{4}x + \widehat{7}y &= \widehat{1} \iff -\widehat{5}(\widehat{4}x + \widehat{7}y) = (-\widehat{5}) \cdot \widehat{1} \\ &\iff -\widehat{20}x - \widehat{35}y = -\widehat{5} \\ &\iff -\widehat{2}x + y = -\widehat{5} \iff y = \widehat{2}x - \widehat{5}. \end{aligned}$$

Puis, en reportant dans la deuxième équation de (S) :

$$\begin{aligned} \widehat{5}x + \widehat{2}y &= \widehat{2} \iff \widehat{5}x + \widehat{2}(\widehat{2}x - \widehat{5}) = \widehat{2} \iff \widehat{9}x = \widehat{12} \\ &\iff \widehat{2} \cdot \widehat{9}x = \widehat{2} \cdot \widehat{12} \iff \widehat{18}x = \widehat{24} \iff \widehat{0} = \widehat{6}, \end{aligned}$$

impossible.

On conclut : $\mathcal{S} = \emptyset$.

c) Essayons d'éliminer x ou y par combinaison d'équations. On a, en combinant avec les coefficients indiqués :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{3}x + \widehat{10}y = \widehat{9} \\ \widehat{15}x + \widehat{4}y = \widehat{9} \end{array} \right. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} -\widehat{2} \\ \widehat{5} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{l} \widehat{5} \\ -\widehat{1} \end{array} \right| \end{array} \implies \left\{ \begin{array}{l} \widehat{69}x = \widehat{27} \\ \widehat{46}y = \widehat{36} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array}$$

En notant $X, Y \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \widehat{X}$, $y = \widehat{Y}$, on a :

$$(4) \iff 46Y \equiv 36 \pmod{60} \iff 23Y \equiv 18 \pmod{30}$$

$$\iff 7Y \equiv 12 \pmod{30} \iff 13 \wedge 30 = 1, 7 \cdot 13 = 91 \iff 13 \cdot 7Y \equiv 156 \pmod{30}$$

$$\iff Y \equiv 6 \pmod{30} \iff y \in \{\widehat{6}, \widehat{36}\}.$$

• Pour $y = \widehat{6}$:

$$(S) \iff \begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{60} = \widehat{9} \\ \widehat{15}x + \widehat{24} = \widehat{9} \end{cases} \iff \begin{cases} \widehat{3}x = \widehat{9} \\ \widehat{15}x = -\widehat{15} = \widehat{45} \end{cases} \\ \iff \widehat{3}x = \widehat{9} \iff 3x \equiv 9 \pmod{60} \\ \iff x \equiv 3 \pmod{20} \iff x \in \{\widehat{3}, \widehat{23}, \widehat{43}\}.$$

• Pour $y = \widehat{36}$:

$$(S) \iff \begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{360} = \widehat{9} \\ \widehat{15}x + \widehat{144} = \widehat{9} \end{cases} \iff \begin{cases} \widehat{3}x = \widehat{9} \\ \widehat{15}x = -\widehat{135} = \widehat{45} \end{cases}$$

et on finit comme ci-dessus.

On conclut : $S = \{\widehat{3}, \widehat{23}, \widehat{43}\} \times \{\widehat{6}, \widehat{36}\}.$

14.8 1) Si A est un sous-groupe de G , alors, d'après le cours : $e \in A$ et $(\forall x, y \in A, xy \in A).$

2) Réciproquement, supposons :

$$e \in A \text{ et } (\forall x, y \in A, xy \in A).$$

Soit $x \in A$ fixé. Considérons l'application

$$f : A \longrightarrow A, y \longmapsto xy,$$

qui est correctement définie d'après l'hypothèse.

On a, pour tout $(y_1, y_2) \in A^2$:

$$f(y_1) = f(y_2) \iff xy_1 = xy_2 \iff y_1 = y_2,$$

car, G étant un groupe, x admet un inverse.

Ceci montre que f est injective.

Puisque $f : A \longrightarrow A$ est injective et que A est finie, on déduit que f est bijective. Comme $e \in A$ et que f est surjective, il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = e$, c'est-à-dire : $xx' = e$, et on a donc : $x^{-1} = x' \in A$. Finalement :

$$e \in A, (\forall x, y \in A, xy \in A), (\forall x \in A, x^{-1} \in A).$$

On conclut que A est un sous-groupe de G .

14.9 Comme $\varphi \neq 1$, il existe $g_0 \in G$ tel que $\varphi(g_0) \neq 1$. Puisque G est un groupe, l'application

$$G \longrightarrow G, g \longmapsto g_0g$$

est une permutation de G , d'où :

$$\sum_{g \in G} \varphi(g) = \sum_{g \in G} \varphi(g_0g) = \sum_{g \in G} \varphi(g_0)\varphi(g) = \varphi(g_0) \sum_{g \in G} \varphi(g).$$

$$\text{On déduit : } \underbrace{(1 - \varphi(g_0))}_{\neq 0} \sum_{g \in G} \varphi(g) = 0,$$

$$\text{et on conclut : } \sum_{g \in G} \varphi(g) = 0.$$

14.10 a) 1) Soit $x \in f^{-1}(f(H)).$

Alors, $f(x) \in f(H)$, donc il existe $h \in H$ tel que : $f(x) = f(h).$

D'où : $f(x - h) = f(x) - f(h) = 0,$

donc $x - h \in \text{Ker}(f).$

Ainsi : $x = h + (x - h), h \in H, x - h \in \text{Ker}(f).$

Ceci montre : $f^{-1}(f(H)) \subset H + \text{Ker}(f).$

2) Réciproquement, soit $x \in H + \text{Ker}(f).$

Il existe $h \in H, u \in \text{Ker}(f)$ tels que : $x = h + u.$

On a : $f(x) = f(h + u) = f(h) + f(u) = f(h) \in f(H),$

donc : $x \in f^{-1}(f(H)).$

Ceci montre : $H + \text{Ker}(f) \subset f^{-1}(f(H)).$

On conclut : $f^{-1}(f(H)) = H + \text{Ker}(f).$

b) 1) Soit $y \in f(f^{-1}(H')).$

Il existe $x \in f^{-1}(H')$ tel que $y = f(x).$

Alors, $f(x) \in H'$, donc $y = f(x) \in H'.$

De plus, par définition de $\text{Im}(f)$: $y = f(x) \in \text{Im}(f).$

On déduit : $y \in H' \cap \text{Im}(f).$

Ceci montre : $f(f^{-1}(H')) \subset H' \cap \text{Im}(f).$

2) Réciproquement, soit $y \in H' \cap \text{Im}(f).$

Alors, $y \in H'$ et il existe $x \in G$ tel que $y = f(x).$

Comme $f(x) = y \in H'$, on a : $x \in f^{-1}(H').$

Ainsi : $y = f(x) \in f(f^{-1}(H')).$

Ceci montre : $H' \cap \text{Im}(f) \subset f(f^{-1}(H')).$

On conclut : $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \text{Im}(f).$

14.11 (i) $\implies$ (ii) :

On suppose $N = \{0\}$. Soit $x \in A$ tel que $x^2 = 0$. Alors, $x \in N = \{0\}$, donc $x = 0$.

(ii) $\implies$ (i) :

On suppose : $\forall x \in A, (x^2 = 0 \implies x = 0).$

On a déjà : $\{0\} \subset N.$

Soit $a \in N.$

Raisonnons par l'absurde : supposons $a \neq 0.$

Il existe $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que : $a^n = 0$ et $a^{n-1} \neq 0.$

Puisque $2n - 2 \geq n$, on a : $(a^{n-1})^2 = a^{2n-2} = 0.$

Par hypothèse, il en résulte $a^{n-1} = 0$, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $a = 0.$

On a prouvé : $N = \{0\}.$

14.12 a) Supposons $ab \in D.$

On a alors, par définition de D : $ab \neq 0,$

donc nécessairement $a \neq 0$ et $b \neq 0.$

Par hypothèse, il existe $c \in A - \{0\}$ tel que $(ab)c = 0.$

- Si $bc \neq 0$, alors :

$$a \in A - \{0\}, \quad bc \in A - \{0\}, \quad a(bc) = 0,$$

donc : $a \in D$.

- Si $bc = 0$, alors :

$$b \in A - \{0\}, \quad c \in A - \{0\}, \quad bc = 0,$$

donc : $b \in D$.

On conclut : $a \in D$ ou $b \in D$.

b) Supposons : $a \in D$ ou $b \in D$.

Comme a et b ont des rôles symétriques, on peut se ramener à supposer, par exemple : $a \in D$.

Il existe donc $c \in A - \{0\}$ tel que $ac = 0$.

On a alors : $c \in A - \{0\}$ et $(ab)c = (ac)b = 0$.

- Si $ab \neq 0$, alors :

$$ab \in A - \{0\}, \quad c \in A - \{0\}, \quad (ab)c = 0,$$

donc : $ab \in D \subset D \cup \{0\}$.

- Si $ab = 0$, alors : $ab \in D \cup \{0\}$.

On conclut : $ab \in D \cup \{0\}$.

14.13

Notons 1_A (resp. 1_B) le neutre de A (resp. B) pour la loi $\cdot$.

a) Soit $x \in A^*$.

Il existe $x' \in A$ tel que : $xx' = x'x = 1_A$. On a :

$$\begin{cases} f(x)f(x') = f(xx') = f(1_A) = 1_B \\ f(x')f(x) = f(x'x) = f(1_A) = 1_B, \end{cases}$$

donc : $f(x) \in B^*$. Ceci montre : $f(A^*) \subset B^*$.

b) Puisque $f(A^*) \subset B^*$, on peut considérer l'application

$$f^* : A^* \longrightarrow B^*, \quad x \longmapsto f(x),$$

restriction de f à A^* au départ et à B^* à l'arrivée.

I) Montrons que A^* (resp. B^*) est un groupe pour la loi $\cdot$.

- On a : $1_A \in A^*$, car $1_A 1_A = 1_A$.

- Soient $x, y \in A^*$. Il existe $x', y' \in A$ tels que :

$$xx' = x'x = 1_A \quad \text{et} \quad yy' = y'y = 1_A.$$

$$\text{On a : } \begin{cases} (xy)(y'x') = x(yy')x' = x1_Ax' = xx' = 1_A \\ (y'x')(xy) = y'(x'x)y = y'1_Ay = y'y = 1_A, \end{cases}$$

donc : $xy \in A$.

- La loi $\cdot$ est associative dans A , donc dans A^* .

- Soit $x \in A^*$.

Il existe $x' \in A$ tel que $xx' = x'x = 1_A$.

On a alors : $x'x = xx' = 1_A$, donc $x' \in A^*$.

Ceci montre que A^* est un groupe pour la loi $\cdot$ de A .

En appliquant ce résultat à B à la place de A , on déduit que B^* est un groupe pour la loi $\cdot$ de B .

2) On a, pour tout $(x, y) \in (A^*)^2$:

$$f^*(xy) = f(xy) = f(x)f(y) = f^*(x)f^*(y),$$

donc f^* est un morphisme de $(A^*, \cdot)$ dans $(B^*, \cdot)$.

On conclut que f^* est un morphisme de groupes de A^* dans B^* .

14.14

1) Définition de $\tilde{f}$:

Soit $I \in \mathcal{I}$. Montrons que $f(I)$ est un idéal de A' .

- Puisque $0_A \in I$, on a : $0_{A'} = f(0_A) \in f(I)$.

- Soient $u, v \in f(I)$.

Il existe $x, y \in I$ tels que : $u = f(x)$, $v = f(y)$.

On a : $u + v = f(x) + f(y) = f(x + y)$,

et $x + y \in I$, donc : $u + v \in f(I)$.

- Soient $a' \in A'$, $u \in f(I)$.

Il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et, puisque f est surjectif, il existe $a \in A$ tel que $a' = f(a)$.

On a : $a'u = f(a)f(x) = f(ax)$,

et $ax \in I$, donc : $a'u \in f(I)$.

Ceci montre que $f(I)$ est un idéal de A' .

Remarque : Nous venons de montrer que, si $f : A \longrightarrow A'$ est un morphisme surjectif d'anneaux, alors, pour tout idéal I de A , $f(I)$ est un idéal de A' .

On peut donc considérer l'application $\tilde{f} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}'$, qui, à un idéal I de A contenant $\text{Ker}(f)$, associe l'idéal $f(I)$ de A' .

2) Injectivité de $\tilde{f}$:

Soient $I, J \in \mathcal{I}$ tels que $\tilde{f}(I) = \tilde{f}(J)$, c'est-à-dire : $f(I) = f(J)$.

Soit $x \in I$. On a : $f(x) \in f(I) = f(J)$,

donc il existe $y \in J$ tel que : $f(x) = f(y)$.

On a alors : $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$,

donc : $x - y \in \text{Ker}(f)$.

$$\text{Ainsi : } x = \underbrace{(x - y)}_{\in \text{Ker}(f)} + \underbrace{y}_{\in J}, \quad \text{donc : } x \in J.$$

Ceci montre : $I \subset J$.

Par rôles symétriques de I et J , on a donc : $I = J$.

On conclut : $\tilde{f}$ est injective.

3) Surjectivité de $\tilde{f}$:

Soit $I' \in \mathcal{I}'$.

Notons $I = f^{-1}(I')$, image réciproque de I' par f .

- Montrons que I est un idéal de A .

* On a : $f(0_A) = 0_{A'} \in I'$, donc : $0_A \in I$.

* Soient $x, y \in I$. Alors : $f(x), f(y) \in I'$, donc :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \in I',$$

d'où : $x+y \in f^{-1}(I') = I$.

* Soient $a \in A, x \in I$. Alors : $f(x) \in I'$ donc :

$$f(ax) = f(a)f(x) \in I',$$

puis : $ax \in f^{-1}(I') = I$.

Remarque : Nous venons de montrer que, si $f : A \longrightarrow A'$ est un morphisme d'anneaux, alors, pour tout idéal I' de A' , $f^{-1}(I')$ est un idéal de A .

• On a : $\forall x \in \text{Ker}(f), f(x) = 0_{A'} \in I'$,

donc : $\forall x \in \text{Ker}(f), x \in f^{-1}(I') = I$,

c'est-à-dire : $\text{Ker}(f) \subset I$.

• * On a : $\forall x \in I = f^{-1}(I'), f(x) \in I'$,

donc : $f(I) \subset I'$.

* Soit $x' \in I'$. Puisque f est surjectif, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = x'$.

Mais alors $x \in f^{-1}(I') = I$, donc $x' = f(x) \in f(I)$.

Ainsi : $I' \subset f(I)$.

On a montré : $f(I) = I'$.

Ceci établit que $\tilde{f}$ est surjective.

Finalement, $\tilde{f}$ est une bijection de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{I}'$.

14.15

a) 1) • $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un anneau pour les lois usuelles.

• $1 \in A$.

• $\forall u, v \in A, (u+v \in A, -u \in A, uv \in A)$,

par propriétés des suites réelles bornées.

On conclut : A est un anneau pour les lois usuelles.

2) • $I \subset A$, car, si une suite converge vers 0, alors elle est bornée.

• $0 \in I$.

• $\forall u, v \in I, u-v \in I$, car :

$$(u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ et } v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0) \implies u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

• $\forall a \in A, \forall u \in I, au \in I$, car :

$$((a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée et } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0) \implies a_n u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

On conclut : I est un idéal de A .

b) 1) Nous allons montrer que I n'est pas principal, en raisonnant par l'absurde. Supposons I principal.

Il existe $u \in I$ tel que : $I = Au$.

• Comme, par exemple, $v = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in I$, il existe

$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ telle que $v = au$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} = a_n u_n$,

d'où nécessairement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$.

Considérons $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sqrt{|u_n|}.$$

Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on a : $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc : $w \in I$.

Il existe donc $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ telle que : $w = bu$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{|u_n|} = b_n u_n.$$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| = \frac{1}{\sqrt{|u_n|}},$$

donc : $|b_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, contradiction avec $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée.

On conclut : I n'est pas principal.

2) Considérons $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}, \quad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

On a : $u \in A, v \in A, uv = 0 \in I, u \notin I, v \notin I$.

On conclut : I n'est pas premier.

3) Considérons l'ensemble J des suites réelles

$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée et que $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Il est clair que J est un idéal de A (comme en a), et que : $I \subsetneq J \subsetneq A$.

On conclut : I n'est pas maximal.

c) Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A, p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u^p \in I \iff u_n^p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff u \in I.$$

On conclut : $\sqrt{I} = I$.

14.16

Par commodité, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on note x la classe de x modulo 13.

On remarque :

$$X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1 = (X^4 + X^2 + 1)^2.$$

Puisque 13 est premier, $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ est un corps, donc :

$$(1) \iff (x^4 + x^2 + 1)^2 = 0 \iff x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Calculons, dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, x^2, x^4 , puis $x^4 + x^2 + 1$:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6
x^2	0	1	4	-4	3	-1	-3
x^4	0	1	3	3	-4	1	-4
$x^4 + x^2 + 1$	1	3	8	0	0	1	-6

Ainsi : $x^4 + x^2 + 1 = 0 \iff (x = \pm 3 \text{ ou } x = \pm 4)$.

On conclut que l'ensemble S des solutions de (1) est :

$$S = \{-4, -3, 3, 4\}.$$

14.17 Soit $(x, y) \in G^2$. Puisque f est surjectif, il existe $z \in G$ tel que : $y = f(z) = z^n$.

$$\text{On a : } x^n y = x^n z^n = f(x)f(z) = f(xz) = (xz)^n,$$

puis :

$$\begin{aligned} z(x^n y)x &= z((xz)^n)x = (zx)^{n+1} \\ &= (zx)(zx)^n = zx f(zx) = zx f(z)f(x) = zx z^n x^n. \end{aligned}$$

En simplifiant à gauche par zx et à droite par x , on déduit :

$$x^{n-1}y = z^n x^{n-1} = yx^{n-1}.$$

14.18 Soit $f : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes.

• Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i < j$.

Notons τ_{ij} la transposition qui échange i et j . On a :

$$2f(\tau_{ij}) = f(\tau_{ij}^2) = f(\text{Id}_{\{1, \dots, n\}}) = 0.$$

Comme N est impair, 2 est premier avec N , donc on peut simplifier par 2 et déduire : $f(\tau_{ij}) = 0$.

Ceci montre que, pour toute transposition τ , on a : $f(\tau) = 0$.

• Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. D'après le cours, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_p$ telles que : $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$. On a alors, puisque f est un morphisme de groupes :

$$f(\sigma) = f(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_p) = f(\tau_1) + \dots + f(\tau_p) = 0 + \dots + 0 = 0.$$

On déduit : $f = 0$.

On conclut que le seul morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (pour N impair) est l'application nulle.

14.19 a) $A' \times B' \subset A \times B$ et $(1_A, 1_B) \in A' \times B'$.

• On a, pour tous $(x, y), (u, v) \in A' \times B'$:

$$(x, y) - (u, v) = (x - u, y - v) \in A' \times B'$$

$$(x, y)(u, v) = (xy, uv) \in A' \times B'.$$

On conclut que $A' \times B'$ est un sous-anneau de $A \times B$.

b) 1) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

• $(1, 1) \in A_n$ car $1 - 1 = 0 \equiv 0 [n]$.

• Soient $(x, y), (u, v) \in A_n$, c'est-à-dire :

$$x \equiv y [n] \text{ et } u \equiv v [n].$$

$$\text{On a : } x - u \equiv y - v [n] \text{ et } xu \equiv yv [n],$$

$$\text{donc : } (x, y) - (u, v) \in A_n \text{ et } (x, y)(u, v) \in A_n.$$

On conclut que A_n est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit C un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$. Considérons

$$E = \{|x - y|; (x, y) \in C \text{ et } x \neq y\} \subset \mathbb{N}^*.$$

• Si $C \subset \{(x, x); x \in \mathbb{Z}\}$, alors, comme $(1, 1) \in C$ et que C est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$, on déduit :

$$C = \{(x, x); x \in \mathbb{Z}\}.$$

• Supposons $C \not\subset \{(x, x); x \in \mathbb{Z}\}$. Alors, $E \neq \emptyset$. Ainsi, E est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc E admet un plus petit élément n . Montrons : $C = A_n$.

* Puisque $n \in E$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|a - b| = n$, donc $a - b = \varepsilon n$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Ainsi, $(a, a + \varepsilon n) \in C$.

D'autre part, puisque C est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$: $(1, 1) \in C$. Il en résulte, par addition et par opposition :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x, x) \in C.$$

Comme C est un sous-anneau, on déduit :

$$(0, \varepsilon n) = (a, a + \varepsilon n) - (a, a) \in C.$$

Puisque C est stable par opposition et que $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, il en résulte : $(0, n) \in C$,

puis, par addition et par opposition :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (0, kn) \in C.$$

Soit $(x, y) \in A_n$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y - x = kn$. On a :

$$(x, y) = \underbrace{(x, x + kn)}_{\in C} = \underbrace{(x, x)}_{\in C} + (0, kn) \in C.$$

Ceci montre : $A_n \subset C$.

* Réciproquement, soit $(x, y) \in C$. Si $x = y$, alors $(x, y) = (x, x) \in A_n$. Supposons donc $x \neq y$, par exemple $x > y$, le cas $x < y$ s'y ramenant en échangeant les rôles de x et y .

Par division euclidienne de $x - y$ par n , il existe $k, r \in \mathbb{N}$, tels que : $x - y = kn + r$ et $0 \leq r < n$.

Comme $(x, y) \in C$ et $(0, n) \in C$, on a : $(x, y + kn) \in C$.

Si $x \neq y + kn$, alors, par définition de n :

$$r = x - y - kn = |x - (y + kn)| \geq n,$$

contradiction.

On a donc : $x = y + kn$, $x \equiv y [n]$.

Ceci montre : $C \subset A_n$.

On obtient : $C = A_n$.

Finalement, les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$ sont les A_n , $n \in \mathbb{N}$.

14.20 1) Soient I un idéal de A , I' un idéal de A' . Montrons que $I \times I'$ est un idéal de $A \times A'$.

• $(0, 0) \in I \times I'$.

• $\forall (x, x'), (y, y') \in I \times I'$,

$$(x, x') - (y, y') = (x - y, x' - y') \in I \times I'.$$

• $\forall (a, a') \in A \times A', \forall (x, x') \in I \times I'$,

$$(a, a')(x, x') = (ax, a'x') \in I \times I'.$$

On conclut : $I \times I'$ est un idéal de $A \times A'$.

2) Réciproquement, soit J un idéal de $A \times A'$.

Nous allons montrer qu'il existe un idéal I de A et un idéal I' de A' tels que : $J = I \times I'$. Notons

$$I = \text{pr}_1(J) = \{x \in A; \exists x' \in A, (x, x') \in J\},$$

$$I' = \text{pr}_2(J) = \{x' \in A'; \exists x \in A, (x, x') \in J\}.$$

$\alpha)$ Montrons que I est un idéal de A .

• $0 \in I$ car $0 = \text{pr}_1(0, 0)$ et $(0, 0) \in J$.

• Soit $x, y \in I$. Il existe $x', y' \in A$ tels que :

$$(x, x') \in J \text{ et } (y, y') \in J.$$

On a : $(x - y, x' - y') = (x, x') - (y, y') \in J$,

donc : $x - y \in \text{pr}_1(J) = I$.

• Soient $a \in A, x \in I$. Il existe $x' \in A$ tel que $(x, x') \in J$.

On a : $(ax, ax') = (a, a)(x, x') \in J$,

donc : $ax \in \text{pr}_1(J) = I$.

Ceci montre que I est un idéal de A .

$\beta)$ De même, I' est un idéal de A' .

$\gamma)$ On a : $J \subset I \times I'$.

En effet, pour tout $(x, x') \in J$, on a $x = \text{pr}_1(x, x') \in I$ et $x' = \text{pr}_2(x, x') \in I'$, donc $(x, x') \in I \times I'$.

$\delta)$ Montrons : $I \times I' \subset J$.

Soit $(x, y') \in I \times I'$.

Par définition de I et de I' , il existe $x' \in A', y \in A$ tel que : $(x, x') \in J$ et $(y, y') \in J$.

On a alors :

$$(x, 0) = (1, 0)(x, x') \in J \text{ et } (0, x') = (0, 1)(x, x') \in J,$$

donc : $(x, x') = (x, 0) + (0, x') \in J$.

Ceci montre : $I \times I' \subset J$.

On conclut qu'il existe un idéal I de A et un idéal I' de A' tels que : $J = I \times I'$.

Finalement : les idéaux de $A \times A'$ sont les $I \times I'$, où I est un idéal de A et I' un idéal de A' .

14.21 D'abord, il est clair que $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau commutatif intègre.

Notons $I = \{P \in \mathbb{Z}[X]; 2 \mid P(0)\}$.

$I)$ Montrons que I est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.

• $0 \in I$ car $2 \mid 0$.

• On a, pour tous $P, Q \in I : 2 \mid P(0)$ et $2 \mid Q(0)$ donc $2 \mid P(0) - Q(0) = (P - Q)(0)$ d'où $P - Q \in I$.

• On a, pour tout $A \in \mathbb{Z}[X]$ et tout $P \in I : 2 \mid P(0)$, donc $2 \mid P(0)Q(0) = (PQ)(0)$, d'où : $PQ \in I$.

On conclut : I est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.

2) Montrons que I n'est pas principal.

Raisonnons par l'absurde : supposons que I soit un idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$. Il existe alors $P_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $I = P_0\mathbb{Z}[X]$. Remarquons que le polynôme constant 2 est élément de I . Il existe donc $Q_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $2 = P_0Q_0$. Par considération des degrés, on a nécessairement : $\deg(P_0) = \deg(Q_0) = 0$, c'est-à-dire : $P_0 \in \mathbb{Z}^*, Q_0 \in \mathbb{Z}^*$.

Si $P_0 = \pm 1$, alors $I = P_0\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[X]$, contradiction car $1 \in \mathbb{Z}[X]$ et $1 \notin I$.

On a donc nécessairement : $P_0 = \pm 2$.

D'autre part, comme $2 + X \in I$, il existe $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $2 + X = P_0Q_1 = \pm 2Q_1$, d'où $\pm Q_1 = 1 + \frac{1}{2}X \notin \mathbb{Z}[X]$, contradiction.

On conclut : I est un idéal non principal de $\mathbb{Z}[X]$.

14.22 Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Supposons qu'il existe un isomorphisme d'anneaux

$$f : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^n.$$

Considérons $S_m = \{u \in \mathbb{Z}^m; u^2 = u\}$ et S_n de même.

• On a, pour tout $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{Z}^m$:

$$\begin{aligned} u \in S_m &\iff u^2 = u \iff (\forall k \in \{1, \dots, m\}, u_k^2 = u_k) \\ &\iff (\forall k \in \{1, \dots, m\}, u_k \in \{0, 1\}). \end{aligned}$$

Il en résulte : $S_m = \{0, 1\}^m$,

et donc : $\text{Card}(S_m) = 2^m$.

• D'autre part, montrons : $\text{Card}(S_m) = \text{Card}(S_n)$.

Soit $u \in S_m$. Puisque f est un morphisme d'anneaux, on a :

$$(f(u))^2 = f(u^2) = f(u),$$

donc : $f(u) \in S_n$.

Ceci montre : $f(S_m) \subset S_n$,

donc : $\text{Card}(f(S_m)) \leq \text{Card}(S_n)$.

Comme f est un isomorphisme d'anneaux, on peut appliquer le résultat précédent en échangeant les rôles de m et n , et on déduit : $\text{Card}(S_m) = \text{Card}(S_n)$.

• Enfin : $2^m = \text{Card}(S_m) = \text{Card}(S_n) = 2^n$, donc : $m = n$.

Ceci établit que, s'il existe un isomorphisme de $\mathbb{Z}^m$ sur $\mathbb{Z}^n$, alors $m = n$.

Par contraposition, on conclut que les anneaux $\mathbb{Z}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux non isomorphes.

14.23 Notons, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 2^{an+b} + 3^n$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^b(2^a)^n + 3^n$,

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants, dont l'équation caractéristique a pour solutions (distinctes) 2^a et 3.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (2^a + 3)u_{n+1} - 2^a 3u_n$.

Il en résulte que, si 5 divise u_0 et u_1 , alors, par récurrence à deux pas, comme $2^a + 3$ et $2^a 3$ sont des entiers, 5 divise u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part, la réciproque est évidente.

On a donc :

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N} \ 5 \mid u_n) &\iff \begin{cases} 5 \mid u_0 \\ 5 \mid u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5 \mid 2^b + 1 \\ 5 \mid 2^{a+b} + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2^b \equiv -1 \ [5] \\ 2^a 2^b \equiv -3 \ [5] \end{cases} \iff \begin{cases} 2^b \equiv -1 \ [5] \\ 2^a \equiv 3 \ [5] \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque : $2^4 = 16 \equiv 1 \ [5]$.

Effectuons les divisions euclidiennes de a et b par 4 :

$$\begin{cases} a = 4\alpha + r, \ \alpha, r \in \mathbb{N}, \ r \leq 3 \\ b = 4\beta + s, \ \beta, s \in \mathbb{N}, \ s \leq 3. \end{cases}$$

On a :

$$2^a \equiv 3 \ [5] \iff 2^{4\alpha+r} \equiv 3 \ [5] \iff 2^r \equiv 3 \ [5].$$

On calcule les 2^r modulo 5 :

r	0	1	2	3
2^r	1	2	4	3

Donc : $2^r \equiv 3 \ [5] \iff r = 3$.

De même :

$$2^b \equiv -1 \ [5] \iff 2^s \equiv -1 \ [5] \iff s = 2.$$

Finalement, la CNS cherchée est :

$$a \equiv 3 \ [4] \text{ et } b \equiv 2 \ [4].$$

Par exemple, pour $a = 3$ et $b = 2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 5 \mid 2^{3n+2} + 3^n.$$

14.24 a) Considérons l'application

$$g : G \longrightarrow G, \ t \longmapsto t(f(t))^{-1}.$$

• Montrons que g est injective.

Soit $(t, u) \in G^2$ tel que $g(t) = g(u)$. On, a alors :

$$t(f(t))^{-1} = u(f(u))^{-1},$$

d'où, en composant à gauche par u^{-1} et à droite par $f(t)$:

$$u^{-1}t = (f(u))^{-1}f(t) = f(u^{-1}t),$$

puisque f est un endomorphisme du groupe G .

D'après l'hypothèse, il s'ensuit : $u^{-1}t = e$, $u = t$.

Ceci établit que g est injective.

• Puisque $g : G \longrightarrow G$ est injective et que G , est fini, g est surjective.

On conclut : $\forall x \in G, \exists t \in G, x = t(f(t))^{-1}$.

b) Soit $x \in G$. D'après a), il existe $t \in G$ tel que $x = t(f(t))^{-1}$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(t(f(t))^{-1}) = f(t)(f(f(t))^{-1}) \\ &= f(t)t^{-1} = (t(f(t))^{-1})^{-1} = x^{-1}. \end{aligned}$$

c) Soit $(x, y) \in G^2$. On a, en utilisant le résultat de b) appliqué à xy , à x , à y :

$$\begin{aligned} xy &= ((xy)^{-1})^{-1} = (f(xy))^{-1} = (f(x)f(y))^{-1} \\ &= (f(y))^{-1}(f(x))^{-1} = (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} = yx. \end{aligned}$$

On conclut : G est abélien.

14.25 Par contraposition, montrons que, si un groupe n'admet qu'un nombre fini de sous-groupes, alors ce groupe est fini. Soit G un groupe n'admettant qu'un nombre fini de sous-groupes.

• Il est clair qu'en notant, pour tout $x \in G$, $\langle x \rangle$ le sous-groupe de G engendré par x , on a : $G = \bigcup_{x \in G} \langle x \rangle$. Comme G n'a qu'un nombre fini de sous-groupes, il existe une partie finie F de G telle que : $G = \bigcup_{x \in F} \langle x \rangle$.

• D'autre part, montrons que, pour tout $x \in G$, $\langle x \rangle$ est fini. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in G$ tel que $\langle x \rangle$ soit infini. D'après le cours, on a alors : $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$. On sait, d'après le cours, que $\mathbb{Z}$ admet une infinité de sous-groupes, les $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, deux à deux distincts. Par isomorphisme, $\langle x \rangle$ admet une infinité de sous-groupes, puis G admet une infinité de sous-groupes, contradiction.

Ceci montre que, pour tout $x \in G$, $\langle x \rangle$ est fini.

• Puisque $G = \bigcup_{x \in F} \langle x \rangle$, et que F et les $\langle x \rangle$ sont finis, on conclut que G est fini.

14.26 Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, notons $\hat{x}, \hat{y}$ les classes de x, y dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ respectivement.

• Soit $f : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes. Puisque $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ est monogène, engendré par $\hat{1}$, f est entièrement déterminé par la donnée de $f(\hat{1})$, et on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(\hat{x}) = xf(\hat{1}).$$

Il existe $\xi \in \{0, \dots, b-1\}$ tel que $f(\hat{1}) = \tilde{\xi}$. On a :

$$\tilde{a\xi} = a\tilde{\xi} = af(\hat{1}) = f(a\hat{1}) = f(\widehat{a}) = f(\widehat{0}) = \tilde{0},$$

d'où : $b \mid a\xi$.

Notons $\delta = \text{pgcd}(a, b)$; il existe $(a', b') \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que :

$$a = \delta a', \ b = \delta b', \ a' \wedge b' = 1.$$

Alors : $b \mid a\xi \iff \delta b' \mid \delta a'\xi \iff b' \mid a'\xi \iff b' \mid \xi$, en utilisant le théorème de Gauss.

Ainsi, si $f : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes,

alors $f(\widehat{1}) = \widetilde{\xi}$, où ξ est un multiple de $\frac{b}{\delta}$.

• Réciproquement, soit ξ un multiple de $\frac{b}{\delta}$.

Soient $x, x' \in \mathbb{Z}$ tels que $\widehat{x} = \widehat{x'}$. On a alors : $a \mid x - x'$, donc $\xi\delta a' = \xi a \mid (\xi x - \xi x')$.

Comme $b \mid \xi\delta$, on déduit $b \mid (\xi x - \xi x')$, c'est-à-dire $\widetilde{\xi x} = \widetilde{\xi x'}$.

On peut donc définir une application $f : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(\widehat{x}) = \widetilde{\xi x}.$$

L'application f ainsi définie est un morphisme de groupes, car, pour tout (x, y) de $\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} f(\widehat{x} + \widehat{y}) &= f(\widehat{x + y}) = \widetilde{\xi(x + y)} = \widetilde{\xi x + \xi y} = \widetilde{\xi x} + \widetilde{\xi y} \\ &= f(\widehat{x}) + f(\widehat{y}). \end{aligned}$$

Finalement, les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ sont les applications $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, où $\xi \in \{0, \dots, b-1\}$
 $\widehat{x} \longmapsto \widetilde{\xi x}$

est un multiple de $\frac{b}{\text{pgcd}(a, b)}$.

Il est clair que les morphismes ainsi obtenus sont deux à deux distincts et qu'il y en a $\text{pgcd}(a, b)$.

Par exemple, les morphismes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ sont les six applications $f_\xi : \widehat{x} \longmapsto \widetilde{\xi x}$, où $\xi = 0, 3, 6, 9, 12, 15$.

14.27 Soit A un anneau régulier.

D'après l'exercice 14.4, le centre Z de A est un sous-anneau de A , donc est un anneau.

Soit $x \in Z$. Puisque A est régulier, il existe $y \in A$ tel que : $x = xyx$. Considérons $z = yxy$. Nous allons montrer $x = xzx$ et $z \in Z$, ce qui établira que Z est un anneau régulier.

1) On a : $xzx = x(yxy)x = (xyx)(yx) = x(yx) = x$.

2) Montrons : $xy \in Z$.

Soit $a \in A$. Puisque $x \in Z$ et que la multiplication est associative dans A , on peut déplacer le facteur x dans des produits, d'où :

$$\begin{aligned} a(xy) &= (ax)y = (xa)y = x(ay) = (xyx)(ay) = xyxay, \\ (xy)a &= x(ya) = (ya)x = (ya)(xyx) \\ &= (y(ax)y)x = x(y(xa)y) = xyxay. \end{aligned}$$

Ceci montre : $\forall a \in A, a(xy) = (xy)a$,
donc : $xy \in Z$.

3) Montrons $z \in Z$. On a, pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} az &= a(yxy) = (ay)(xy) \underset{xy \in Z}{=} (xy)(ay) \\ &\underset{x \in Z}{=} yaxxy \underset{xy \in Z}{=} xyaya \underset{x \in Z}{=} yxya = za. \end{aligned}$$

Ceci montre : $z \in Z$.

Finalement : $\forall x \in Z, \exists z \in Z, xzx = x$.

On conclut : Z est un anneau régulier.

14.28

Soit $a \in A - \{0\}$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : I_n = a^n A = \{a^n x ; x \in A\}$, qui est l'idéal principal engendré par a^n .

Par hypothèse, A n'a qu'un nombre fini d'idéaux.

Il existe donc $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $p < q$ et $I_p = I_q$.

On a : $a^p = a^p 1_A \in I_p = I_q$,

donc il existe $b \in A$ tel que : $a^p = a^q b$.

Alors : $a^p(1_A - a^{q-p}b) = a^p - a^q b = 0$.

Comme $a \neq 0$ et que A est intègre, il en résulte :

$1_A - a^{q-p}b = 0$. Notons $c = a^{q-p-1}b$, qui est correctement défini car $q - p - 1 \in \mathbb{N}$, avec la convention $a^0 = 1_A$.

On a alors $ac = 1$, donc a admet un inverse.

Ceci montre que tout élément de $A - \{0\}$ admet un inverse, et on conclut que A est un corps.

Plan

Les méthodes à retenir	545
Énoncés des exercices	547
Du mal à démarrer ?	549
Corrigés	551

Thèmes abordés dans les exercices

- Reconnaître si une courbe de l'espace est plane, et si oui, déterminer son plan
- Calcul d'une abscisse curviligne, d'une longueur d'arc
- Détermination de la tangente en un point régulier d'un arc paramétré
- Détermination la normale ou/et du plan tangent en un point régulier d'une surface
- Réduction des quadriques
- Détermination de toutes les droites tracées sur une surface donnée.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Formule donnant la dérivée de l'abscisse curviligne sur un arc paramétré
- Vecteur directeur de la tangente en un point régulier d'un arc paramétré
- Pour une surface S donnée par une EC $F(x, y, z) = 0$, le plan tangent à S en un point régulier $M(x, y, z)$ de S est orthogonal à $\vec{\text{grad}} F(x, y, z)$
- Pour une surface S donnée par une RP $(u, v) \mapsto M(u, v)$, le plan tangent à S en un point régulier $M(u, v)$ de S est normal à $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v)$
- Le tableau des quadriques sur leur équation réduite.

Les méthodes à retenir

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :

RP pour : représentation paramétrique

EC pour : équation cartésienne

SEC pour : système d'équations cartésiennes.

Pour montrer qu'une courbe donnée par une RP est plane

- Essayer d'éliminer le paramètre t entre $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, de façon à obtenir une EC de plan.

➡ Exercices 15.1, 15.5

- Chercher $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$, tel que $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, et tel que :

$$\forall t, Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D = 0.$$

En particulier, se rappeler qu'un polynôme P est le polynôme nul si et seulement si P s'annule en une infinité de points.

➡ Exercice 15.5.

Pour calculer une abscisse curviligne sur un arc paramétré

Appliquer la formule du cours, pour la dérivée de l'abscisse curviligne : $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$, puis, pour la longueur d'un arc : $L = |s(b) - s(a)| = \left| \int_a^b s'(t) dt \right|$.

➡ Exercice 15.2.

Pour étudier le plan tangent ou la normale en un point régulier M d'une surface S

- Si la surface S est donnée par une EC $F(x, y, z) = 0$, où F est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, la normale à S en un point régulier $M(x, y, z)$ de S est la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z)$, et le plan tangent en M à S admet pour EC :

$$(X - x)F'_x(x, y, z) + (Y - y)F'_y(x, y, z) + (Z - z)F'_z(x, y, z) = 0.$$

➡ Exercices 15.3, 15.7

- Si la surface S est donnée par une RP $(u, v) \mapsto M(u, v)$, où M est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, la normale à S en un point régulier

$M(u, v)$ de S est dirigée par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v)$, et le plan tangent

en M à S est le plan passant par M et dirigé par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v)$.

➡ Exercice 15.4.

Pour étudier la tangente en un point régulier $M(t)$ d'un arc paramétré C

Utiliser le fait que la tangente en $M(t)$ à C est dirigée par $\frac{d\vec{M}}{dt}$.

➡ Exercice 15.6.

**Pour déterminer
la nature
d'une quadrique S ,
donnée par une EC
 $F(x,y,z) = 0$,
et pour nommer S**

Il est d'abord nécessaire de retenir le tableau des quadriques, qui est dans le cours.

Écrire la matrice Q de la forme quadratique canoniquement associée à S .

- Si Q est inversible, alors S est une quadrique à centre. Le centre $\Omega(x,y,z)$ de S est obtenu en résolvant $\overrightarrow{\text{grad}} F(x,y,z) = \overrightarrow{0}$. Changer d'origine, nouvelle origine Ω . Déterminer une base orthonormée (directe) $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de réduction de Q . Dans le repère $(\Omega; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, S admet une équation réduite. Reconnaître alors la nature de S et nommer S .

- Si Q n'est pas inversible, déterminer une base orthonormée (directe) $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de réduction de Q , et écrire l'équation de S dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Utiliser des mises sous formes canoniques de trinômes, pour obtenir une équation réduite de S .

➡ **Exercice 15.8.**

**Pour déterminer
toutes les droites Δ
tracées sur une surface S**

Si Δ n'est pas horizontale, Δ admet un SEC de la forme :

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

Reporter dans l'EC de S . L'inclusion de Δ dans S se traduit par un système d'équations d'inconnue (a, b, p, q) . Résoudre ce système.

➡ **Exercice 15.11 a)**

Énoncés des exercices

15.1 Courbe plane dans l'espace

Montrer que la courbe C de $\mathbb{R}^3$: $x = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$, $y = \cos t$, $z = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, $t \in \mathbb{R}$

est plane, déterminer son plan, et reconnaître la nature de C .

15.2 Exemple de calcul d'abscisse curviligne

Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ en tout point $M(t)$ de l'arc paramétré C de $\mathbb{R}^3$:

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = \sqrt{2} e^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

en prenant comme origine des abscisses curvilignes le point de C de paramètre $t = 0$.

15.3 Condition sur la normale en un point d'une surface

Existe-t-il un point M de la surface S d'EC $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en lequel la normale soit dirigée par $\vec{u}(1, 2, 3)$? par $\vec{v}(3, 2, 1)$?

15.4 Plan tangent en un point d'une surface donnée par une RP

Soit S la surface de RP : $x = e^u$, $y = e^v$, $z = uv$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que tout point de S est régulier, et déterminer le plan tangent en tout point $M(u, v)$ de S .

15.5 Courbe plane dans l'espace

Montrer que la courbe Γ de RP : $x = \frac{t-1}{t}$, $y = \frac{t+1}{t-1}$, $z = \frac{1}{t^2-t}$, $t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

est plane et déterminer son plan.

15.6 Condition sur la tangente en un point d'une courbe

Soit Γ la courbe de RP : $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = 2e^t + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la tangente en tout point M de Γ fait un angle constant avec le plan xOy .

15.7 Plan tangent contenant une droite donnée

Déterminer le (ou les) plan(s) tangent(s) à la surface S d'EC $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et contenant la

$$\text{droite } D \text{ de SEC } \begin{cases} x = 1 \\ y = z + 2. \end{cases}$$

15.8 Réduction des quadriques

Pour chaque quadrique S d'équation donnée, préciser :

- un repère orthonormé (direct) dans lequel S admet une équation réduite
- une équation réduite de S
- la nature de S .

a) $7x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 - 2yz + 4z^2 - 2x + 8y - 14z + 16 = 0$

b) $11x^2 - 16xy - 4xz + 5y^2 - 20yz + 2z^2 + 30x - 66y + 24z + 45 = 0$

c) $x^2 - 2xy + y^2 + 2z^2 + 2x - 5 = 0$

d) $2(x+y)(y-z) - 3x = 0$

e) $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{6}xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{3}yz + \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y + 4z + 1 = 0$.

15.9 Exemple de nature d'une quadrique

Quelle est la nature de la quadrique S d'EC : $(2x + 3y)^2 + (y + 2z)^2 + (3z - x)^2 = 1$?

15.10 Lieu des points équidistants de deux droites données

Soit $(\theta, h) \in]0; \pi/2[\times]0; +\infty[$. Former une EC de la surface S lieu des points M de $\mathcal{E}_3$ équi-

$$\text{distants des deux droites } D \begin{cases} x \cos \theta = y \sin \theta \\ z = h \end{cases} \quad D' \begin{cases} x \cos \theta = -y \sin \theta \\ z = -h. \end{cases}$$

Quelle est la nature de S ?

15.11 Droites tracées sur une surface, plan tangent

On note S la surface d'EC $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.

- Déterminer les droites tracées sur S .
- Montrer que ces droites sont situées dans un même plan P , que l'on déterminera.
- Quel est le plan tangent à S en chacun des points d'intersection de ces droites deux à deux ?

15.12 Ensemble des points équidistants de deux droites données

Former une EC de la surface S , réunion des droites Δ de $\mathcal{E}_3$ rencontrant les trois droites :

$$D_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \quad D_3 \begin{cases} x = y \\ z = 0. \end{cases}$$

Du mal à démarrer ?

15.1 Développer $\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, puis combiner x, y, z pour faire apparaître une EC de plan.

15.2 Calculer $x'(t), y'(t), z'(t)$,

puis $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$,

et enfin $s(t) = \int_0^t s'(u) du$.

15.3 La normale N en tout point $M(x, y, z)$ de S est dirigée par $\vec{\text{grad}} F(x, y, z)$, où $F(x, y, z)$ est le premier membre d'une EC de S , de la forme $F(x, y, z) = 0$. Traduire que $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) dirige N par la colinéarité de $\vec{\text{grad}} F(x, y, z)$ à $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$).

15.4 Calculer $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ en tout point $M(u, v)$ de S , montrer que ce vecteur n'est pas nul, puis écrire une EC du plan passant par $M(u, v)$ et dirigé par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$.

15.5 1) 1^{re} méthode : Combinaison judicieuse de x, y, z :

Exprimer x, y, z en fonction de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t-1}$, puis combiner x, y, z pour éliminer $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t-1}$.

2) 2^e méthode : Recherche de tout plan pouvant convenir :

Écrire l'EC générale d'un plan P :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

puis traduire $\Gamma \subset P$.

15.6 Déterminer un vecteur directeur $\vec{V}_1(t)$ de la tangente à Γ en $M(t)$, puis calculer l'angle θ entre cette tangente et le plan xOy , à l'aide du produit scalaire de $\vec{V}_1(t)$ et $\vec{k}$.

15.7 Former une EC du plan tangent Π_0 en un point quelconque $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de S , puis traduire que ce plan contient la droite D . Ne pas oublier la condition $M_0 \in S$.

15.8 Pour une quadrique S d'EC, dans un repère orthonormé (direct) $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

notons $Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

• Si Q est inversible, alors S est une quadrique à centre, et le centre $\Omega(x, y, z)$ de S est obtenu en résolvant l'équation $\vec{\text{grad}} F(x, y, z) = \vec{0}$, où $F : (x, y, z) \mapsto Ax^2 + \dots + J$.

Ayant calculé Ω , on se place dans le repère orthonormé (direct) $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et S admet pour EC dans $\mathcal{R}'$:

$$AX^2 + 2BXY + 2CXZ + DY^2 + 2EYZ + FZ^2 + J_1 = 0,$$

où J_1 est à calculer.

On détermine ensuite une base orthonormée (directe) $(\vec{T}, \vec{J}, \vec{K})$ de réduction de la matrice symétrique réelle Q . Dans $\mathcal{R}'' = (O; \vec{T}, \vec{J}, \vec{K})$, S admet une EC de la forme :

$$\lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2 + J_1 = 0.$$

• Si Q n'est pas inversible, on calcule une base orthonormée (directe) $(\vec{T}, \vec{J}, \vec{K})$ de réduction de Q . Dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{T}, \vec{J}, \vec{K})$, S admet une EC de la forme :

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + 2G_1X + 2H_1Y + 2I_1Z + J = 0.$$

Des mises sous formes canoniques de trinômes permettront ensuite d'aboutir à une équation réduite.

15.9 Remarquer que les expressions $2x + 3y, y + 2z, 3z - x$ sont liées.

15.10 Déterminer un point de D et un vecteur directeur de D . En déduire, pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3$, l'expression de $(d(M, D))^2$. Faire de même pour $(d(M, D'))^2$. Traduire ensuite $M(x, y, z) \in S$ par $(d(M, D))^2 = (d(M, D'))^2$.

15.11 a) Soit Δ une droite de $\mathcal{E}_3$.

1) Si Δ n'est pas horizontale, Δ admet un SEC de la forme :

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

Traduire $\Delta \subset S$ par un ensemble de conditions sur a, b, p, q , puis résoudre ces conditions.

2) Si Δ est horizontale, par une permutation de lettres, se ramener au cas précédent.

b) Un plan très simple contient les trois droites obtenues en a).

c) 1) 1^{re} méthode : Détermination des plans tangents :

Déterminer, en un point d'intersection des droites précédentes, le plan tangent, et constater que ce plan est le plan P obtenu en b).

2) 2^e méthode : Utilisation de tangentes à des courbes tracées sur une surface :

Remarquer que, par exemple, le plan tangent en le point de $D_1 \cap D_2$ contient D_1 et D_2 .

15.12 Remarquer que Δ ne peut pas être horizontale, donc Δ admet un SEC de la forme :

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

Traduire que Δ rencontre D_1, D_2, D_3 , et exprimer, par exemple, b, p, q en fonction de a . On obtient ainsi une droite $\Delta_a, a \in \mathbb{R}$. Enfin, éliminer a entre les deux équations de Δ_a pour obtenir une EC de la surface S .

Corrigés des exercices

15.1

• En développant les formules données dans l'énoncé, la courbe C admet la RP :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \\ y(t) = \cos t \\ z(t) = \frac{1}{2} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, \end{cases}$$

d'où, en combinant : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) - 2y(t) + z(t) = 0$, ce qui montre que C est plane, contenue dans le plan P d'EC :
 $x - 2y + z = 0$.

• On a, pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3$:

$$M \in C \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + z = \cos t \\ y = \cos t \\ x - z = \sqrt{3} \sin t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = y \\ y^2 + \left(\frac{x - z}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Ainsi, $C = P \cap S$, où P est un plan et S un cylindre elliptique. On conclut que C est une ellipse.

15.2

Les applications x, y, z sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour

$$\text{tout } t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x'(t) = e^t (\cos t - \sin t) \\ y'(t) = e^t (\sin t + \cos t) \\ z(t) = \sqrt{2} e^t. \end{cases}$$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (s'(t))^2 &= (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \\ &= e^{2t} ((\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 2) = 4e^{2t}. \end{aligned}$$

Comme $s' \geq 0$ (par définition), on déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, s'(t) = 2e^t.$$

Enfin :

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = \int_0^t 2e^u du = [2e^u]_0^t = 2(e^t - 1).$$

15.3

L'application

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z) = (2x, 2y, -2z).$$

D'où : $\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z) = \overrightarrow{0} \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$, mais $(0, 0, 0) \notin S$. Ainsi, tout point de S est régulier.

La normale N en un point $M(x, y, z)$ de S est dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z)$, ou encore par $(x, y, -z)$.

1)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \text{ dirige } N &\iff (x, y, -z) \text{ colinéaire à } (1, 2, 3) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x = \lambda, y = 2\lambda, z = -3\lambda). \end{aligned}$$

On a alors :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \iff (1^2 + 2^2 - 3^2)\lambda^2 = 1 \iff -4\lambda^2 = 1, \text{ impossible.}$$

On conclut qu'il n'existe aucun point de S en lequel la normale à S soit dirigée par $\overrightarrow{u}$.

2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \text{ dirige } N &\iff (x, y, -z) \text{ colinéaire à } (3, 2, 1) \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{R}, (x = 3\mu, y = 2\mu, z = -\mu). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 = 1 &\iff (3^2 + 2^2 - 1^2)\mu^2 = 1 \\ &\iff 12\mu^2 = 1 \iff \mu = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

On conclut qu'il existe exactement deux points de S en lesquels la normale à S est dirigée par $\overrightarrow{v}$.

15.4

L'application

$$M : (u, v) \longmapsto M(u, v) = O + e^u \overrightarrow{i} + e^v \overrightarrow{j} + uv \overrightarrow{k}$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, et, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} e^u \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^v \\ u \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -v e^v \\ -u e^u \\ e^{u+v} \end{pmatrix}.$$

Comme $e^{u+v} \neq 0$, on a : $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u,v) \neq \vec{0}$,

donc tout point $M(u,v)$ de S est régulier.

• On a, pour tout point $P(X,Y,Z)$ de $\mathcal{E}_3$, en notant Π le plan tangent en $M(u,v)$ à S :

$$P \in \Pi \iff \begin{vmatrix} X - e^u & e^u & 0 \\ Y - e^v & 0 & e^v \\ Z - uv & v & u \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -v e^v (X - e^u) - u e^u (Y - e^v) + e^{u+v} (Z - uv) = 0.$$

On conclut que le plan tangent en $M(u,v)$ à S admet pour EC, après simplification par $-e^{-(u+v)}$:

$$v e^{-u} X + u e^{-v} Y - Z + (u + v - uv) = 0.$$

15.5 1^{re} méthode : Combinaison judicieuse de x, y, z :

Faisons apparaître $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t-1}$.

On a, pour tout $t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$:

$$\begin{cases} x = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t} \\ y = \frac{t+1}{t-1} = 1 + \frac{2}{t-1} \\ z = \frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{(t-1)t} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Combinons pour éliminer $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t-1}$. Par exemple :

$$z = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} = \frac{y-1}{2} + x - 1.$$

Ainsi, tout point $M(x,y,z)$ de Γ vérifie :

$$2x + y - 2z - 3 = 0.$$

On conclut que Γ est plane, incluse dans le plan P d'EC :

$$2x + y - 2z - 3 = 0.$$

2^e méthode : Recherche de tout plan pouvant convenir :

Soient $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, et P le plan d'EC $Ax + By + Cz + D = 0$. On a :

$$\Gamma \subset P$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} - \{0, 1\},$$

$$A \frac{t-1}{t} + B \frac{t+1}{t-1} + C \frac{1}{t^2-t} + D = 0$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} - \{0, 1\},$$

$$A(t-1)^2 + Bt(t+1) + C + D(t^2-t) = 0$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} - \{0, 1\},$$

$$(A+B+D)t^2 + (-2A+B-D)t + (A+C) = 0$$

$$\iff \begin{cases} A+B+D=0 \\ -2A+B-D=0 \\ A+C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=2B \\ C=-2B \\ D=-3B. \end{cases}$$

Ainsi, A, B, C, D sont déterminés à un coefficient multiplicatif non nul près.

On conclut que Γ est plane, incluse dans le plan P d'EC :

$$2x + y - 2z - 3 = 0.$$

15.6 • Les applications x, y, z sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et, pour

$$\text{tout } t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x'(t) = e^t (\cos t - \sin t) \\ y'(t) = e^t (\sin t + \cos t) \\ z(t) = 2e^t. \end{cases}$$

En particulier, comme $z'(t) = 2e^t \neq 0$, tout point de Γ est régulier.

• La tangente en $M(t)$ à Γ est dirigée par :

$$\overrightarrow{V_1(t)} = \frac{d\vec{M}}{dt} = e^t (\cos t - \sin t) \vec{i} + e^t (\sin t + \cos t) \vec{j} + 2e^t \vec{k}.$$

En notant θ l'angle de la tangente en M à Γ avec xOy , on a $\theta \in [0; \pi/2]$ et :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\overrightarrow{V_1(t)} \cdot \vec{k}}{\|\overrightarrow{V_1(t)}\| \|\vec{k}\|} \\ &= \frac{2e^t}{(e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + 4e^{2t})^{1/2}} \\ &= \frac{2e^t}{(6e^{2t})^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

On conclut que la tangente en tout point de Γ fait un angle constant, égal à $\text{Arcsin} \frac{\sqrt{6}}{3}$, avec le plan xOy .

15.7 Une EC du plan tangent Π_0 en un point quelconque $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de S est :

$$(x - x_0)2x_0 + (y - y_0)2y_0 + (z - z_0)(-2z_0) = 0,$$

ou encore : $x_0x + y_0y - z_0z = 1$.

On a :

$$D \subset \Pi_0 \iff \forall z \in \mathbb{R}, x_0 + y_0(z+2) - z_0z = 1$$

$$\iff \forall z \in \mathbb{R}, (y_0 - z_0)z + (x_0 + 2y_0 - 1) = 0$$

$$\iff \begin{cases} y_0 - z_0 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_0 = y_0 \\ x_0 = -2y_0 + 1. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
M_0 \in S &\iff x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1 \\
&\iff (-2y_0 + 1)^2 + y_0^2 - y_0^2 = 1 \\
&\iff (2y_0 - 1)^2 = 1 \iff (y_0 = 0 \text{ ou } y_0 = 1).
\end{aligned}$$

On a alors :

$$x_0 = -2y_0 + 1 = 1, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = y_0 = 0$$

$$\text{ou } x_0 = -2y_0 + 1 = -1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = y_0 = 1.$$

Il y a donc exactement deux plans convenant, les plans d'EC :
 $x - y + z + 1 = 0, \quad x = 1.$

15.8

a) La matrice $Q = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible,

donc S est une quadrique à centre.

Le centre $\Omega(x, y, z)$ est obtenu en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} 14x + 4y - 4z - 2 = 0 \\ 4x + 8y - 2z + 8 = 0 \\ -4x - 2y + 8z - 14 = 0 \end{cases}$$

On obtient $\Omega(1, -1, 2)$.

Considérons le r.o.n.d. $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les formules de changement de repère, pour un point M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ et (X, Y, Z) dans $\mathcal{R}'$, sont :

$$x = X + 1, \quad y = Y - 1, \quad z = Z + 2.$$

On obtient donc une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}'$:

$$7X^2 + 4XY - 4XZ + 4Y^2 - 2YZ + 4Z^2 - 3 = 0.$$

On calcule les valeurs propres de Q ; on trouve : 3 (double) et 9 (simple).

Une base de SEP ($Q, 9$) est $(\vec{K})$, où $\vec{K}$ a pour coordonnées

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

Un vecteur normé de SEP ($Q, 3$) est, par exemple, $\vec{I}$ de co-

$$\text{ordonnées } \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

En notant $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$, de coordonnées $\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une b.o.n.d. de réduction de Q .

Une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est alors :

$$3\xi^2 + 3\zeta^2 + 9\eta^2 - 3 = 0,$$

$$\text{ou encore : } \xi^2 + \zeta^2 + \frac{\eta^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.$$

On conclut : S est un **ellipsoïde**, de révolution.

b) La matrice $Q = \begin{pmatrix} 11 & -8 & -2 \\ -8 & 5 & -10 \\ -2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, donc

S est une quadrique à centre.

Le centre $\Omega(x, y, z)$ est obtenu en résolvant le système d'équa-

$$\begin{cases} 22x - 16y - 4z + 30 = 0 \\ -16x + 10y - 20z - 66 = 0 \\ -4x - 20y + 4z + 24 = 0 \end{cases}$$

On obtient $\Omega(-1, 1, -2)$.

Considérons le r.o.n.d. $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les formules de changement de repère sont :

$$x = X - 1, \quad y = Y + 1, \quad z = Z - 2.$$

On obtient donc une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}'$:

$$11X^2 - 16XY - 4XZ + 5Y^2 - 20YZ + 2Z^2 - 27 = 0.$$

Une b.o.n.d. de vecteurs propres associés respectivement aux

valeurs propres 9, 18, -9 de Q est $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, où $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ ont respectivement pour coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est alors :

$$9\xi^2 + 18\zeta^2 - 9\eta^2 - 27 = 0,$$

ou encore :

$$\frac{\xi^2}{3} + \frac{\zeta^2}{3} - \frac{\eta^2}{2} = 1.$$

On conclut : S est un **hyperboloïde à une nappe**.

c) La matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible,

donc S n'est pas une quadrique à centre.

On calcule les valeurs propres de Q : 2 (double), 0 (simple),

et une b.o.n.d. $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de vecteurs propres associés, par exemple ceux de coordonnées, dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons le r.o.n.d. $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Les formules de changement de repère sont données par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire : $x = \frac{-X+Z}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{X+Z}{\sqrt{2}}$, $z = Y$.

Une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}'$ est donc :

$$2X^2 + 2Y^2 + \sqrt{2}(-X+Z) - 5 = 0 \quad (1).$$

Puis :

$$\begin{aligned} (1) &\iff X^2 + Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Z - \frac{5}{2} = 0 \\ &\iff \left(X - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + Y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}Z - \frac{21}{8} = 0 \\ &\iff \left(X - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + Y^2 = -2\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(Z - \frac{21\sqrt{2}}{8}\right). \end{aligned}$$

Notons A le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{21\sqrt{2}}{8}\right)$ dans

$\mathcal{R}'$, et $\mathcal{R}''$ le r.o.n.d. $\mathcal{R}'' = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Une équation de S dans $\mathcal{R}''$ est :

$$\xi^2 + \zeta^2 = -2\frac{1}{2\sqrt{2}}\eta.$$

On conclut : S est un **paraboloïde elliptique**, de révolution.

d) La matrice $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, donc S n'est pas une quadrique à centre.

On calcule les valeurs propres de Q : $3, -1, 0$ simples.

On calcule une b.o.n.d. de vecteurs propres associés, par exemple $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, où $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ ont pour coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Considérons le r.o.n.d. $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Les formules de changement de repère sont données par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{6}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{2X}{\sqrt{6}} - \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{X}{\sqrt{6}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} - \frac{Z}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}'$ est donc :

$$2\left(\frac{3X}{\sqrt{6}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3X}{\sqrt{6}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(\frac{X}{\sqrt{6}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} + \frac{Z}{\sqrt{3}}\right) = 0 \quad (1).$$

Puis :

$$\begin{aligned} (1) &\iff 3X^2 - Y^2 - \frac{3X}{\sqrt{6}} - \frac{3Y}{\sqrt{2}} - \sqrt{3}Z = 0 \\ &\iff 3\left(X - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{1}{8} - \left(Y + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{8} - \sqrt{3}Z = 0 \\ &\iff 3\left(X - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 - \left(Y + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt{3}\left(Z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Notons A le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

dans $\mathcal{R}'$, et $\mathcal{R}'' = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}''$ est :

$$3\xi^2 - \zeta^2 = \sqrt{3}\eta,$$

$$\text{ou encore : } \frac{\xi^2}{\frac{1}{3}} - \frac{\zeta^2}{1} = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\eta.$$

On conclut : S est un **paraboloïde hyperbolique**.

e) La matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible,

donc S n'est pas une quadrique à centre.

On calcule les valeurs propres de Q : 6 (simple), 0 (double).

On calcule une b.o.n.d. de vecteurs propres associés, par exemple $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, où $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ ont pour coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Considérons le r.o.n.d. $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Les formules de changement de repère sont données par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}(X - Y + Z) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Z) \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}(X + 2Y + Z). \end{cases}$$

Une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}'$ est donc :

$$6X^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(X - Y + Z) + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(X - Z) + \frac{4}{\sqrt{6}}(X + 2Y + Z) + 1 = 0 \quad (1).$$

Puis :

$$(1) \iff 6X^2 + 2\sqrt{6}X + \sqrt{6}Y + 1 = 0$$

$$\iff 6\left(X + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = -\sqrt{6}Y.$$

Notons A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0\right)$ dans $\mathcal{R}'$, et

$$\mathcal{R}'' = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}).$$

Une équation cartésienne de S dans $\mathcal{R}''$ est :

$$\xi^2 = -\frac{2\sqrt{6}}{12}\zeta.$$

On conclut : S est un **cylindre parabolique**.

15.9

Voyons si les expressions

$$A = 2x + 3y, \quad B = y + 2z, \quad C = 3z - x$$

sont liées entre elles.

Ou bien on remarque :

$$3B - 2C = 3(y + 2z) - 2(3z - x) = 2x + 3y = A,$$

ou bien on résout le système d'équations d'inconnue (x, y, z) , et on s'aperçoit que les trois formes linéaires envisagées sont liées.

Ainsi, en notant $X = 2x + 3y$, $Z = 3z - x$ par changement de repère (non orthonormé), S admet pour EC :

$$(3Y - 2Z)^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

donc S est un cylindre elliptique.

15.10

Un point de D est, par exemple, $A(0, 0, h)$, et un vecteur directeur de D est, par exemple, $\vec{v}(\sin \theta, \cos \theta, 0)$.

D'après le cours, on a alors, pour tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}_3$:

$$(d(M, D))^2 = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}$$

$$= (\cos \theta(z - h))^2 + (\sin \theta(z - h))^2 + (x \cos \theta - y \sin \theta)^2$$

$$= (z - h)^2 + (x \cos \theta - y \sin \theta)^2.$$

De même, en remplaçant (θ, h) par $(-\theta, -h)$, on a :

$$(d(M, D'))^2 = (z + h)^2 + (x \cos \theta + y \sin \theta)^2.$$

D'où :

$$M \in S \iff (d(M, D))^2 = (d(M, D'))^2$$

$$\iff (z - h)^2 + (x \cos \theta - y \sin \theta)^2$$

$$= (z + h)^2 + (x \cos \theta + y \sin \theta)^2$$

$$\iff hz + \sin \theta \cos \theta xy = 0.$$

La surface S est un parabolôïde hyperbolique.

15.11

a) Soit Δ une droite de $\mathcal{E}_3$.

1) Si Δ n'est pas horizontale, Δ admet un SEC

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

On a :

$$\Delta \subset S \iff \forall z \in \mathbb{R}, (az + p)^3 + (bz + q)^3 + z^3 = 1$$

$$\iff \forall z \in \mathbb{R}, (a^3 + b^3 + 1)z^3 + (3a^2p + 3b^2q)z^2$$

$$+ (3ap^2 + 3bq^2)z + (p^3 + q^3 - 1) = 0$$

$$\iff (S) \begin{cases} a^3 + b^3 + 1 = 0 \\ a^2p + b^2q = 0 \\ ap^2 + bq^2 = 0 \\ p^3 + q^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Exprimons, par exemple, q en fonction de a, b, p dans la dernière équation de (S) :

$$(S) \iff$$

$$(b = 0, \quad a^3 + 1 = 0,$$

$$a^2p = 0, \quad ap^2 = 0, \quad p^3 + q^3 - 1 = 0)$$

$$\text{ou } (b \neq 0, \quad a^3 + b^3 + 1 = 0, \quad q = -\frac{a^2}{b^2}p,$$

$$ap^2 + b\frac{a^4}{b^4}p^2 = 0, \quad p^3 + \frac{a^6}{b^6}p^3 - 1 = 0)$$

$$\iff (b = 0, \quad a = -1, \quad p = 0, \quad q = 1)$$

$$\text{ou } (b \neq 0, a^3 + b^3 + 1 = 0, q = -\frac{a^2}{b^2}p,$$

$$ap^2(a^3 + b^3) = 0, p^3(a^6 + b^6) - b^6 = 0) \\ \iff (b = 0, a = -1, p = 0, q = 1)$$

$$\text{ou } (b \neq 0, a = 0, b = -1, q = 0, p = 1).$$

Ceci donne deux droites, correspondant aux quadruplets $(a, b, p, q) = (-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)$:

$$D_1 \begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = -z. \end{cases}$$

2) Si Δ est horizontale, comme S est invariante par toute permutation de (x, y, z) , Δ correspond, par permutation, à D_1 ou D_2 , d'où la troisième droite :

$$D_3 \begin{cases} x = -y \\ z = 1. \end{cases}$$

On conclut qu'il y a trois droites exactement tracées sur S , les droites :

$$D_1 \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \quad D_2 \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 1 \end{cases}, \quad D_3 \begin{cases} z + x = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

b) Il est évident que les trois droites D_1, D_2, D_3 sont incluses dans le plan $P : x + y + z = 1$.

c) 1^{re} méthode : Détermination des plans tangents :

L'application

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^3 + y^3 + z^3 - 1$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ et, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2).$$

Comme : $\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z) = \overrightarrow{0} \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$ et que $O \notin S$, on a :

$$\forall M(x, y, z) \in S, \overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z) \neq \overrightarrow{0},$$

donc tout point de S est régulier.

Une EC du plan tangent à S en $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ est :

$$(X - x_0)3x_0^2 + (Y - y_0)3y_0^2 + (Z - z_0)3z_0^2 = 0.$$

D'autre part, les points d'intersection des trois droites D_1, D_2, D_3 deux à deux sont :

$$A(1, 1, -1), B(-1, 1, 1), C(1, -1, 1).$$

Une EC du plan tangent en A à S est :

$$(X - 1)3 + (Y - 1)3 + (Z + 1)3 = 0,$$

c'est-à-dire : $X + Y + Z = 1$,

donc ce plan tangent est le plan P obtenu en b).

De même pour les points B et C .

On conclut que les trois plans tangents en les trois points d'intersection de D_1, D_2, D_3 deux à deux sont confondus et sont égaux à P .

2^e méthode : Utilisation de tangentes à des courbes tracées sur une surface :

Puisque D_1 et D_2 se coupent en A et que D_1 et D_2 sont tracées sur S , le plan tangent en A à S contient les tangentes en A à D_1 et D_2 , c'est-à-dire contient D_1 et D_2 , donc ce plan est le plan P de la question b).

De même pour les points B et C .

15.12 Une droite horizontale Δ ne peut pas rencontrer D_1 et D_2 , qui sont dans des plans horizontaux distincts.

Une droite non horizontale Δ admet un système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}, \quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4.$$

On a :

$$\bullet \Delta \cap D_1 \neq \emptyset \iff (\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ (x = 0, z = 1, x = az + p, y = bz + q)) \iff a + p = 0$$

$$\bullet \Delta \cap D_2 \neq \emptyset \iff (\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ (y = 0, z = -1, x = az + p, y = bz + q)) \iff -b + q = 0$$

$$\bullet \Delta \cap D_3 \neq \emptyset \iff (\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ (x = y, z = 0, x = az + p, y = bz + q)) \iff p = q.$$

Donc Δ rencontre D_1, D_2, D_3 si et seulement si Δ admet un

$$\text{SEC : } \begin{cases} x = az - a \\ y = -az - a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Puis, pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace :

$$M \in S \iff \left(\exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = az - a \\ y = -az - a \end{cases} \right) \\ \iff \begin{cases} (z = 1 \text{ et } x = 0) \\ \text{ou} \\ (z \neq 1 \text{ et } y = -\frac{x(z+1)}{z-1}) \end{cases} \\ \iff xz + yz + x - y = 0.$$

Ainsi, S admet pour équation cartésienne :

$$xz + yz + x - y = 0.$$

Index alphabétique

A

abscisse (— curviligne), 546
addition (des DL), 48
adhérence, 4
adjoint, 474
anneau, 528
anneau (— commutatif), 528
anneaux (— finis), 529
application (— continue), 45
application (— linéaire), 5
application (— linéaire continue), 6
approximation (— uniforme par des polynômes), 188
arc (— paramétré), 546
ASM, 336

B

b.o.n., 472
base (— duale), 399
base (— préduale), 398, 399

C

C^1 -difféomorphisme, 379
 C^k -difféomorphisme, 379
 C^∞ -difféomorphisme, 379
caractérisation (— séquentielle de la continuité), 5
caractérisation (— séquentielle des fermés), 3
caractérisation (— séquentielle des limites), 187
Cauchy (suite de —), 7
changement (— de fonction inconnue), 44, 377, 378
changement (— de variable), 44, 47, 78, 79, 250, 338, 378, 379
changement (— de variable qui échange les bornes), 79
chemin, 7
classe (— C^1 , C^k , C^∞ pour la limite d'une suite de fonctions), 187
classe C^∞ , 252, 379
coefficients (— de Fourier), 312, 313
combinaison (— linéaire), 250
commutant, 430
compacité, 6

compact, 5, 6
compacte (partie —), 6
comparaison (— série/intégrale), 136, 139, 191
comparaison (— somme/intégrale), 138
comparaisons (pour les séries), 139
complète (partie —), 7
composition (des DL), 48
congruences, 529
connexe (— par arcs), 7
constante (— d'Euler), 138
continue, 5, 187
continue (— en un point), 5
continue (— par morceaux), 78
convergence (— absolue d'une série d'applications), 189
convergence (— normale d'une série d'applications), 189
convergence (— uniforme d'une suite d'applications), 186
convergence (— uniforme d'une série d'applications), 189
convergence (— d'une série), 137
convergence (— simple d'une suite d'applications), 186
convergence (— simple d'une série d'applications), 189
convergences (— d'une série d'applications), 188
convergences (— de la série de Fourier), 312
convergente (série absolument —), 137
convexe (partie —), 7
courbe, 546

D

décomposition (— en éléments simples), 45, 250
dédoublément, 472
dérivation, 48, 249, 250
dérivée (— n -ème), 45
dérivées (— partielles premières), 378
dérivées (— partielles secondes), 379
déterminant, 436
déterminants (— de matrices décomposées en blocs), 399
déterminants (— de matrices triangulaires par blocs), 429
développement (— asymptotique), 48, 137
développement (— asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre), 79
développement (— limité), 48
diagonalisabilité, 429
diagonalisable, 429

diagonalisation, 430
 diagonaliser, 429
 distance, 2
 distance ($\text{--- } d(x, A)$), 4
 distance ($\text{--- associée à une norme}$), 2
 diverge (pour une série), 137
 diverge ($\text{--- grossièrement, pour une série}$), 137
 $dSE(0)$, 250, 252
 dual, 398
 dualité, 399

E

EC, 545, 546, 547
 EC (--- de plan), 546
 ED, 336
 EDL1, 336
 EDL1 ($\text{--- ASM normalisée}$), 336
 EDL1 ($\text{--- ASM non normalisée}$), 336
 EDL1 (--- SSM), 336
 EDL1 ($\text{--- SSM normalisée}$), 336
 EDL2, 336
 EDL2, (--- SSM), 338
 EDL2 ($\text{--- SSM normalisée}$), 337
 égalités, 473
 équation (--- fonctionnelle), 44, 339
 équation (--- intégrale), 339
 équation (--- matricielle), 430
 équation ($\text{--- aux dérivées partielles du deuxième ordre (EDP2)}$), 379
 équation ($\text{--- aux dérivées partielles du premier ordre (EDP1)}$), 379
 équation ($\text{--- caractéristique}$), 337
 équation (--- réduite), 547
 équivalent (--- simple), 248
 équivalent ($\text{--- simple d'une intégrale dépendant d'un paramètre}$), 79
 espace (--- préhilbertien), 8, 473
 espace (--- vectoriel, ev), 2
 espace ($\text{--- vectoriel normé, evn}$), 2
 étoilé, 381
 ev, 398, 428, 472
 eve, 472
 exacte (forme différentielle ---), 381
 exponentielle (--- complexe), 253
 extrêmes (--- globaux), 380
 extrêmes (--- locaux), 380

F

facteur (--- intégrant), 381
 factorisation (--- d'une matrice), 399
 famille (--- infinie libre), 398
 famille (--- infinie liée), 398
 fbs, 472

fermée, 3, 381
 fonction, 44
 fonction (--- implicite), 380
 fonction (--- coordonnées), 5
 fonctions (--- partielles), 378
 fonctions ($\text{--- usuelles de la variable complexe}$), 253
 forme ($\text{--- différentielle}$), 381
 forme (--- quadratique), 7
 forme (--- linéaire), 398
 forme (--- polaire), 472
 forme ($\text{--- sesquilineaire}$), 519
 formule (--- de Leibniz), 45
 formule (--- de Parseval), 312
 formule (--- de Stirling), 138
 formule ($\text{--- fondamentale de l'analyse}$), 47
 fq, 472
 fraction (--- rationnelle), 45

G

groupe, 528
 groupes (--- finis), 529

I

idéal, 528
 idéal (--- principal), 528
 inégalité, 45, 253, 313
 inégalité ($\text{--- de Cauchy et Schwarz}$), 8, 46, 472, 520
 inégalité (--- de Minkowski), 8, 520
 inégalité ($\text{--- portant sur des intégrales}$), 46
 inégalité (--- triangulaire), 3, 4, 472
 inégalité ($\text{--- triangulaire renversée}$), 3, 4
 inégalités, 473
 inéquation ($\text{--- différentielle}$), 46
 inéquation (--- intégrale), 46
 intégrabilité, 78, 138
 intégrale, 47, 78
 intégrale (--- à paramètre), 80
 intégrale (--- d'un produit), 46
 intégrale (--- = série), 252
 intégrale ($\text{--- = somme de série}$), 191
 intégrale ($\text{--- dépendant d'un paramètre}$), 47, 251
 intégrale (--- double), 80
 intégrale (--- impropre), 80
 intégrales ($\text{--- de carrés de fonctions}$), 313
 intégration (--- par parties), 46, 47, 78, 79, 188, 312
 intérieur, 4
 intervalle, 7
 intervention ($\text{--- de l'exponentielle complexe}$), 312
 inverse (pour un DL), 48
 isomorphes, 528

J

jacobien, 379

L

lemme (— fondamental pour les séries), 137
 lien (— suite/série), 137, 138
 limite, 48
 limite (— d'une intégrale dépendant d'un paramètre), 79
 limite (— d'intégrale), 48
 limite (— en un point), 378
 linéaire, 5, 6
 linéarisation, 312
 linéarité (— de l'intégration), 47, 188
 lipschitzienne, 5, 45
 loi (— externe pour un DL), 48
 loi (— interne), 528

M

majoration, 248
 majoration (— géométrique), 191
 matrice (— orthogonale), 474
 matrice (— symétrique réelle), 474
 matrice (— compagnon), 429
 méthode (— de Lagrange), 337
 méthode (— de variation de la constante), 336
 méthode (— de variation des constantes), 338
 méthode (— des coefficients indéterminés), 380
 minoration, 248
 mises (— sous formes canoniques de trinômes), 547
 monotonie, 45
 morphisme (— de groupes), 528
 multiplication (des DL), 48

N

nature (— d'une quadrique), 547
 nature (— d'une série), 136, 137
 nature (— d'une suite), 137
 normale, 546
 norme, 2, 3
 norme (— équivalente), 3
 norme (— non équivalente), 3
 normes (— euclidiennes), 472, 473

O

orthogonal, 473
 orthogonaux, 8
 ouverte, 3

P

paquet (— de termes), 137
 paramètre (— à l'intérieur de l'intégrale), 79
 paramètre (— aux bornes), 79
 partie (— compacte), 6
 partie (— complète), 7

permutation (— intégrale/série), 191
 permuter (— intégrale et limite), 187
 permuter (— intégrale et série), 251
 plan (— tangent), 546
 point, 4
 point (— adhérent), 4
 point (— intérieur), 4
 point (— régulier), 546
 points (— critiques), 380
 polynôme (— annulateur), 428, 430
 polynôme (— caractéristique), 428, 429
 polynômes (— de matrices carrées), 430
 primitivation, 48, 249, 250
 primitives usuelles, 47
 produit, 7, 250
 produit (— scalaire), 7, 472, 473, 519
 produit (— scalaire canonique), 520
 produit (— scalaire complexe), 519, 520
 produit (— scalaire réel), 520
 projecteurs, 398
 projeté (— orthogonal), 473
 ps, 472
 puissances (— d'une matrice carrée), 430

Q

quadratique (forme —), 7

R

raccords (pour les ED), 336, 338
 rang, 399
 rayon (— de convergence d'une série entière), 248, 249
 règle (— $n^a u_n$), 136
 règle (— $x^a f(x)$), 78
 règle (— de d'Alembert), 136, 248
 relation (— de Chasles), 47, 188
 restes (— de séries convergentes), 139
 RP, 545
 RP (— d'une courbe), 546

S

S_n^+ , 474
 S_n^{++} , 474
 SDL1, 336
 SDL1 (— ASM, à coefficients constants), 337
 SDL1 (— SSM, à coefficients constants), 337
 SDL2, 336
 SEC, 545
 SEP, 428
 série, 137
 série (— = série), 252
 série (— de Fourier), 191
 série (— double), 140

série (— entière), 191, 248
 série (— entière dérivée), 249
 série (— trigonométrique), 313
 séries (— entières connues), 250
 sev, 398, 428, 472
 sev (— orthogonaux), 473
 solution (— générale), 336
 solution (— maximale d'un problème de Cauchy), 338
 solution (— particulière), 336
 solutions (— y d'une ED (E) développables en 0), 339
 sommation, 47
 somme (— d'une série), 139
 somme (— d'une série entière), 249
 somme (— d'une série numérique), 251
 somme (— de série convergente), 140, 312, 313
 sommes (— partielles de la série), 137
 sommes (— partielles de séries divergentes), 139
 sous-anneau, 528
 sous-espace (— vectoriel, sev), 2
 sous-espaces (— propres), 428
 sous-famille (— finie), 398
 sous-groupe, 528
 sous-groupe (— engendré), 528
 spectre, 430
 SSM, 336
 suite, 3
 suite (— d'applications), 186
 suite (— de Cauchy), 7
 suite (— double), 140
 surface, 546, 547
 symbole (— de Kronecker), 398
 symétrie (— hermitienne), 519

T

tableau (— des quadriques), 547
 télescopage, 139
 terme (— constant de la série entière), 250
 théorème (— d'équivalence), 78
 théorème (— d'interversion des sommations), 140
 théorème (— de Cauchy et Lipschitz), 338
 théorème (— de continuité sous le signe intégrale), 79, 80
 théorème (— de convergence dominée), 48, 187
 théorème (— de dérivation sous le signe intégrale), 80
 théorème (— de Fubini), 80, 140
 théorème (— de Heine), 5
 théorème (— de majoration), 78

théorème (— de minoration), 78
 théorème (— de projection orthogonale), 8
 théorème (— de réduction simultanée), 475
 théorème (— de Rolle), 45
 théorème (— de sommation des relations de comparaison), 139
 théorème (— de Taylor-Young), 380
 théorème (— de Weierstrass), 188
 théorème (— des accroissements finis), 45
 théorème (— des fonctions implicites), 380
 théorème (— du cours sur l'intégration sur un intervalle quelconque pour une série d'applications), 190
 théorème (— fondamental), 474
 théorème (— spectral), 427, 474
 théorème (— sur convergence uniforme et continuité), 252
 théorème (— sur convergence uniforme et continuité en un point), 190
 théorème (— sur convergence uniforme et intégration sur un segment), 190
 théorème (— sur convergence uniforme et limite), 190
 théorème (— sur convergence uniforme sur tout segment et continuité sur l'intervalle de départ), 190
 théorèmes (— de Dirichlet), 312
 théorèmes (— généraux), 5, 378, 379
 trace, 399, 430
 tracées (courbes — sur une surface), 547
 trigonalisabilité, 430
 trigonalisation, 430
 troncature (d'un DL), 48
 TSCSA, 137, 191

U

uniformément (— continue), 5, 45

V

valeurs (— propres), 428, 429
 valeurs (— propres réelles), 429
 variables (deux — réelles), 378
 variables (plusieurs — réelles), 378
 variations (— d'une fonction), 45
 vecteurs (— propres), 428, 429
 voisinage, 4
 vp, 428
 $\vec{vp}$, 428

l'intégrale

MATHÉMATIQUES

MÉTHODES ET EXERCICES

MP

Cet ouvrage de méthodes et d'exercices propose un **entraînement progressif et complet** qui vous aidera, tout au long de l'année, à passer du cours aux exercices et à assimiler le programme de mathématiques de 2^e année MP.

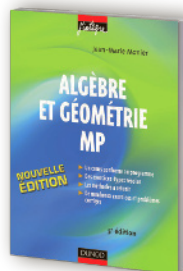
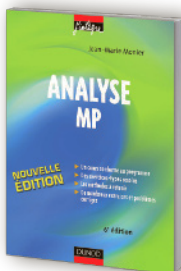
Toutes les méthodes à retenir présentées de façon synthétique étape par étape.

Plus de 600 énoncés d'exercices, avec indice de difficulté, couvrant l'intégralité du programme de MP.

Des indications pour bien démarrer la résolution des exercices.

Des corrigés complets pour tous les exercices.

Dans la série Monier, sont également disponibles des ouvrages de cours :



JEAN-MARIE MONIER
est professeur en classe
de Spéciales au lycée
La Martinière-Monplaisir
à Lyon

