المعهد العالي
للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الدكتور عمران قوبا

التحليل

3

الفضاءات الشعاعية المنظمة
التوابع لعدّة متحولات
المعادلات التفاضلية العادية

التحليل

الجزء الثالث

الدكتور عمران قوبا

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
2018

التحليل

الجزء الثالث

عمران قوبا

تصميم الغلاف: المؤلف

من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
الجمهورية العربية السورية، 2018.

Analysis

Volume 3

Omran Kouba

Publications of the
Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST)
Syrian Arab Republic, 2018.
ISBN 978-9933-9-2610-6

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- "الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "التحليل، الجزء الأول"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "كيمياء المحاليل المائية"، للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الأولى 2011، الطبعة الثانية 2016.
- "الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع"، للدكتور علي طه، 2011.
- "ميكانيك النقطة المادية"، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الإصدار الأول 2011، الإصدار الثاني 2016.
- "الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "التحليل، الجزء الثاني"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث"، للدكتور محمد بدر قويدر، 2017.
- "مدخل إلى كيمياء المياه: تلوث- معالجة- تحليل"، للدكتور نصر الحايك، 2017.
- "الترموديناميك"، للدكتور عقيل سلوم، 2017.
- "دليل الرسام الصناعي"، للدكتور مصطفى الجرف، 2017.
- "التحليل، الجزء الثالث"، للدكتور عمران قوبا، 2018.
- "التحليل، الجزء الرابع"، للدكتور عمران قوبا، 2018.
- "التحليل، الجزء الخامس"، للدكتور عمران قوبا، 2018.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل
المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد الإلكتروني:

www.hiast.edu.sy

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد أطر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.
يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاتصالات والمعلوماتية والنظم الإلكترونية والميكاترونيكس وعلوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات وفي التحكم والروبوتيك وفي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار وفي علوم وهندسة المواد وعلوم وهندسة البصريات. ويمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد بأطره الكفوءة ذات التأهيل العالي وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود أطره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى إفادة أوسع فئة من المهتمين من إمكانيات فريقه العلمي ومختبراته.

استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج أطره العلمية، منها ما هو تدريسي يوافق المناهج في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

يتيح المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا بعضاً من منشوراته على موقعه على الشابكة تحت رخصة المشاع الإبداعي لتعميم الفائدة على شريحة واسعة من القراء.

للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983
هاتف +(963)(11)5123819
فاكس +(963)(11)5140760
بريد إلكتروني contact@hiast.edu.sy
موقع إلكتروني www.hiast.edu.sy

شكر

أتقدّم بالشكر العميق إلى جميع الزملاء الذين أغنوا بملاحظاتهم فحوى هذا الكتاب، وأسهموا في إعطائه شكله النهائي هذا.

وأخصُّ بالشكر المعلِّم الفاضل الأستاذ الدكتور موفق دعبول، والأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل والدكتور خالد حلاوة على قراءتهم المتمعّنة لهذا الكتاب وعلى الملاحظات القيّمة التي أبدوها عليه. وأخيراً، وليس آخراً، أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى الأستاذ مروان البواب الذي دقّق الكتاب لغويّاً وأسهم بملاحظاته ومقترحاته في تحسين صياغة العديد من الفقرات.

محتوى الجزء الأوّل

مقدّمة

الفصل الأوّل

حقل الأعداد الحقيقيّة

الفصل الثاني

المتتاليات العدديّة

الفصل الثالث

المتسلسلات العدديّة

الفصل الرابع

التوابع لمتحوّل حقيقي : النهايات والاستمرار

الفصل الخامس

التوابع لمتحوّل حقيقي : الاشتقاق

محتوى الجزء الثاني

مقدّمة

الفصل السادس

التوابع المألوفة

الفصل السابع

مقارنة التوابع والنشر المحدود

الفصل الثامن

متتاليات ومتسلسلات التوابع

الفصل التاسع

التوابع الأصليّة والتكامل المحدود

الفصل العاشر

التكاملات المعمَّمة أو المعتلّة

والتكاملات التابعة لوسيط

محتوى الجزء الثالث

مقدّمة

الفصل الحادي عشر
الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

الفصل الثاني عشر
التوابع لعدّة متحوّلات

الفصل الثالث عشر

منشأ المعادلات التفاضليّة وتصنيفها

الفصل الرابع عشر

المعادلات التفاضليّة السلّمية الشهيرة من المرتبة الأولى

الفصل الخامس عشر

المعادلات التفاضليّة الخطّية

الفصل السادس عشر

المبرهنات الأساسيّة المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة العاديّة

محتوى الجزء الرابع

مقدّمة

الفصل السابع عشر

المتسلسلات الصحيحة

الفصل الثامن عشر

نظريّة كوشي والتوابع الهولومورفيّة

الفصل التاسع عشر

النشر بمتسلسلات لوران ونظريّة الرواسب

الفصل العشرون

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها

محتوى الجزء الخامس

مقدّمة

الفصل الحادي والعشرون

متسلسلات فورييه

الفصل الثاني والعشرون

مقدّمة في نظريّة القياس والتكامل

الفصل الثالث والعشرون

تحويلات فورييه

الفصل الرابع والعشرون

التوزيعات

مقدّمة

التحليل الرياضيّ هو فرعٌ من فروع الرياضيّات يتعامل مع الأعداد الحقيقيّة والأعداد العقديّة والتوابع، وهو يدرس مفاهيم الاستمرار والتكامل والتفاضل في أطرها العامّة.

تاريخياً، يمكن إرجاع بدايات هذا الفرع من فروع الرياضيّات إلى القرن السابع عشر، مع اختراع نيوتن ولايبنتز حسابَي التفاضل والتكامل، ثُمّ تطوّرت موضوعات المعادلات التفاضليّة وتحليل فورييه، والتوابع المولّدة في العمل التطبيقي في القرنين السابع عشر والثامن عشر، وجرى استخدام تقانات حسابَي التفاضل والتكامل بنجاح في تقريب العديد من المسائل المنقطعة، والمسائل المتّصلة.

وبقي تعريف مفهوم التابع موضع نقاش ومحاورة بين الرياضيّاتيين طوال القرن الثامن عشر، وكان كوشي CAUCHY أوّل من وضع التحليل الرياضي على أسس منطقيّة صلبة بإدخاله مفهوم متتاليات كوشي وذلك مع بداية القرن التاسع عشر. كما أرسى كوشي القواعد الصوريّة الأساسيّة للتحليل العقدي ووضع شروطاً تضمن وجود حلول للمعادلات التفاضليّة ووحدانية هذه الحلول. ودرسَ بواسون POISSON وليوفيل LIOUVILLE وفورييه FOURIER وغيرهم المعادلات التفاضليّة الجزئيّة والتحليل التوافقي.

وفي منتصف القرن التاسع عشر وضع ريمان RIEMANN نظريّته في التكامل. وشهد الثُلث الأخير من ذلك القرن إعادة التنظيم الأخيرة للمفاهيم الأساسيّة في التحليل الرياضي بجهود فايرشتراس WEIERSTRASS، الذي رأى أنّ النظرة الهندسيّة لمفاهيم النهاية والاستمرار تقود أحياناً إلى استنتاجات خاطئة، فوضع ما يسمّى تعريف ε-δ للنهاية. وبعدها تنبّه الرياضيّاتيّون إلى أنّهم يفترضون وجود مجموعة "متّصلة" من الأعداد الحقيقيّة دون أي إثبات على وجود هذه المجموعة، فأنشأ ديدكند DEDKINDE مجموعة الأعداد الحقيقيّة مستخدماً ما سُمِيّ لاحقاً "مقاطع ديدكند"، وجرت في الوقت نفسه تقريباً محاولات تطوير المبرهنات المتعلّقة بتكامل ريمان، وهذا ما أدّى إلى دراسة "قياس" المجموعات التي تكون عليها التوابع الحقيقيّة منقطعة.

وبدأت تظهر «الوحوش» المتمثّلة بتوابع غريبة مثل التوابع الحقيقيّة التي لا تقبل الاشتقاق عند أيّة نقطة، أو تلك التوابع التي تملأ منحنياتها الفراغ. وفي هذه الحقبة، طوّر جوردان JORDAN وبورِل BOREL نظرّية القياس، وطوّر كانتور CANTOR ما يُعرف اليوم بالنظريّة «الساذجة» للمجموعات.

ومع بداية القرن العشرين صار التحليل الرياضي يُصاغ باستخدام المفاهيم الجديدة في نظريّة المجموعات، وحلّ لوبيغ LEGESGUE مسألة نظريّة القياس والتكامل، وأدخل هِلبرت HILBERT مفهوم الفضاءات التي عُرفت فيما بعدُ باسمه لحل المعادلات التكامليّة، وكان مفهوم الفضاء الشعاعي المنظّم في الجوّ، إذ أنشأ باناخ BANACH في العشرينيات من ذلك القرن التحليل التابعي.

بدأت مفاهيم التوابع المعمّمة أو التوزيعات تظهر في نهايات القرن التاسع عشر، وذلك في إطار توابع غرين GREEN، وتحويلات لابلاس LAPLACE ونظريّة ريمان للمتسلسلات المثلثيّة التي هي ليست متسلسلات فورييه لتوابع قابلة للمُكاملة على سبيل المثال. وقاد الاستخدام المُكثّف لتحويلات لابلاس، واستخدام طرائق الحساب الرمزي إلى ما صار يُعرف بحساب العمليات. حملت هذه الطرائق سمعة سيّئة بين الرياضيّاتيين لأنّ تعليل صحّتها كان يعتمد على متسلسلات متباعدة.

أمّا المرّة الأولى التي احتل فيها مفهوم التابع المُعمّم موقعاً مركزيّاً في الرياضيّات فقد جاءت في إطار تكامل لوبيغ، إذ صار التابع القابل للمكاملة بمعنى لوبيغ مُكافئاً لأي تابع يتفق معه اتفاقاً شبه أكيد. وظهر تابع ديراك δ في العشرينيّات والثلاثينيّات من القرن العشرين، إذ راح ديراك DIRAC يتعامل مع القياس كتابع بالمعنى التقليدي.

وجاء التتويج النهائي لهذه المفاهيم في نظريّة التوزيعات لشوارتز SCHWARTZ وذلك في نهاية الأربعينيّات من القرن العشرين. تكمن نقطة الضعف الأساسيّة في هذه النظريّة في أنّه لا تمكن في إطار

هذه النظريّة معالجة المسائل اللاخطيّة، فالتوزيعات بمعنى شوارتز لا تؤلّف جبراً، ولا يمكن حساب جداء ضرب التوزيعات كما تُضرب التوابع.

يهدف هذا المؤلَّف إلى دراسة التحليل الرياضي، وهو موجّه إلى طلاب سيتابعون دراستهم في مجالات هندسيّة، ومكوّن من خمسة أجزاء.

نعالج في هذا الجزء الثالث الموضوعات الآتية :

- يعرض الفصل الحادي عشر المفاهيم الطبولوجيّة الأساسيّة في إطار الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة.
- ويتضمّن الفصل الثاني عشر دراسة التوابع لعدة متحولات، استمرارها، وقابلية مفاضلتها، والمشتقات الجزئية، والبحث عن القيم الحديّة، ومبرهنة التوابع الضمنيّة، ثُمّ ينتقل إلى دراسة الأشكال التفاضليّة من المرتبة الأولى.
- يتضمّن الفصل الثالث عشر مقدّمة حول تصنيف المعادلات التفاضليّة، ويشرح بعض المفاهيم الأساسيّة المتعلّقة بها، وأمثلة على مسائل تؤول دراستها إلى حلّ معادلات تفاضليّة.
- ويدرس الفصل الرابع عشر الطرائق العمليّة لحل بعض المعادلات التفاضليّة السلميّة الشهيرة من المرتبة الأولى.
- ويعالج الفصل الخامس عشر جمل المعادلات التفاضليّة الخطّية من المرتبة الأولى، والمعادلات التفاضليّة الخطّية من مراتب عليا.
- ويتصدّى الفصل السادس عشر للنظريّات العامّة المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة، والحلول الأعظميّة، والحلول الشاملة، ومبرهنة الوجود والوحدانيّة لكوشي–ليبشتز.

هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة.

ومن المفيد هنا الإشارة إلى أنّ دراسة كتاب رياضيات تختلف اختلافاً جوهرياً عن قراءة قصّة أو كتاب شعر يستمتع بهما المرء جالساً على كرسي مريح، إذ لا بُد من قلم وورقة ومنضدة نجلس إليها، نعالج المادّة النظريّة ونُغالب التمرينات حلّاً ومعاناة.

لذلك ننصح القارئ ألاّ يطّلع على الحلول المُقترحة للتمارين إلّا بعد أن يستنفد جميع محاولات حلها، وعليه في جميع الأحوال إعادة صياغة الحلّ بلغته ليضمن الاستيعاب الكامل للمفاهيم والأفكار المُعالجة.

ختاماً، أُزجي الشكر لجميع الزملاء الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب إلى النّور، وأُعرب سلفاً عن شكري لكلّ زميل يُبدي ملاحظة أو انتقاداً بنّاءَيْن حول فحوى هذا الكتاب.

أيار 2017 عمران قوبا

الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

يمثّل $\mathbb{K}$ ، في هذا الفصل، حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$
أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$

1. عموميّات

1-1. تعريف. ليكن E فضاءً شعاعيّاً على الحقل $\mathbb{K}$. نسمّي **نظيماً** على E كلّ تابع

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$$

يحقّق الشروط الآتية:

$\mathcal{N}_1$: أيّاً كان x من E كان $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

$\mathcal{N}_2$: أيّاً كان x من E و λ من $\mathbb{K}$ كان $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

$\mathcal{N}_3$: أيّاً كان x و y من E كان $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

ونسمّي **فضاءً شعاعيّاً منظّماً** كل فضاء شعاعي E مزوّد بنظيم $\|\cdot\|$ ونرمز إليه بالثنائية $(E, \|\cdot\|)$ أو $(E, \|\cdot\|_E)$ إذا كان هنالك مجال للالتباس. هذا ونسمّي **نصف نظيم** كلّ تابع $N : E \to \mathbb{R}_+$ يحقّق الشرطين $\mathcal{N}_2$ و $\mathcal{N}_3$ فقط.

2-1. ملاحظات

- يعمّمُ مفهومُ النّظيم في فضاء شعاعي منظَّم فكرة طول شعاع، وهو المفهوم المناسب لقياس المسافات بين عناصر الفضاء.
- تسمى الخاصّة $\mathcal{N}_3$ **متراجحة المثلّث** وتنتج منها المتراجحة الآتية:

$$\left(\mathcal{N}_3'\right) : \big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$$

وذلك لأنّه إذا كان x و y من E كان

$$\|x\| \le \|x - y\| + \|y\|$$

وكان

$$\|y\| \le \|y - x\| + \|x\|$$

ويتم إثبات المتراجحة المطلوبة بملاحظة أنّ $\|x - y\| = \|y - x\|$.

1-3. أمثلة

- إنّ كلّاً من الفضاءين الآتيين $(\mathbb{R},|\cdot|)$ و $(\mathbb{C},|\cdot|)$ فضاءٌ شعاعيٌّ منظّم.
- يمكننا تزويد الفضاء الشعاعي $\mathbb{K}^n$ بالعديد من النّظم. فإذا كان $X=(x_1,\ldots,x_n)$ عنصراً من $\mathbb{K}^n$ أمكننا أن نعرّف مثلاً :

$$\|X\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k| \quad \text{و} \quad \|X\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2} \quad \text{و} \quad \|X\|_\infty=\max_{1\le k\le n}\left(|x_k|\right)$$

ونترك القارئ يتحقّق كونَ كلٍّ من $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ نظيماً على $\mathbb{K}^n$ إذ يستفيد من متراجحة كوشي–شوارتز لإثبات متراجحة المثلّث في حالة $\|\cdot\|_2$.

بوجه عام يمكننا، إذا كان $1\le p$، أن نعرّف $\|X\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$ فنحصل على نظيم على $\mathbb{K}^n$. وفي هذه الحالة نستفيد من **متراجحة مينكوفسكي** لإثبات متراجحة المثلّث.

- وكذلك يمكننا أن نزوّد الفضاء الشعاعيّ $\mathbb{K}[X]$ بالعديد من النّظم. فإذا كان P عنصراً من $\mathbb{K}[X]$ عرّفنا مثلاً النظيمين

$$\|P\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}\left|P(t)\right| \quad \text{و} \quad \|P\|_1=\int_0^1\left|P(t)\right|\mathrm{d}t$$

- ويمكننا أن نزوّد $C([0,1],\mathbb{R})$، أي فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على $[0,1]$، بالعديد من النّظم أيضاً. فإذا كان f عنصراً من $C([0,1],\mathbb{R})$ عرّفنا مثلاً النظيمين :

$$\|f\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}\left|f(t)\right| \quad \text{و} \quad \|f\|_1=\int_0^1\left|f(t)\right|\mathrm{d}t$$

- وكذلك يمكن أن نعرّف على $C^1([0,1],\mathbb{R})$، أي فضاء التوابع الحقيقيّة التي تقبل مشتقّات مستمرّة على $[0,1]$، النظيمين

$$N_a(f)=\sup_{t\in[0,1]}\left|f(t)\right|+\sup_{t\in[0,1]}\left|f'(t)\right|$$

و
$$N_b(f)=\left|f(0)\right|+\sup_{t\in[0,1]}\left|f'(t)\right|$$

ننصح القارئ أن يتيقّن تحقُّق الخواص $\mathcal{N}_1$ و $\mathcal{N}_2$ و $\mathcal{N}_3$ في جميع الأمثلة السابقة.

1-4. تعاريف ومفاهيم عامّة

1-4-1. المسافة الموافقة لنظيم

ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، وليكن (x, y) من E^2. نسمّي المقدار $\|x - y\|$ **المسافة** بين x و y ونرمز إليها بالرمز $d\,(x, y)$. نحصل بذلك على التطبيق

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

الذي نسمّيه **المسافة** الموافقة للنظيم $\|\cdot\|$. وهو يحقّق الخواص الآتية:

- أيّاً كانت (x, y) من E^2 كان $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
- أيّاً كانت (x, y) من E^2 كان $d(x, y) = d(y, x)$.
- أيّاً كانت (x, y, z) من E^3 كان $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.
- أيّاً كانت (x, y, z) من E^3 كان $|d(x, z) - d(y, z)| \le d(x, y)$.
- أيّاً كانت (x, y, z) من E^3 كان $d(x - z, y - z) = d(x, y)$.

1-4-2. الكُرات في فضاء شعاعي منظّم

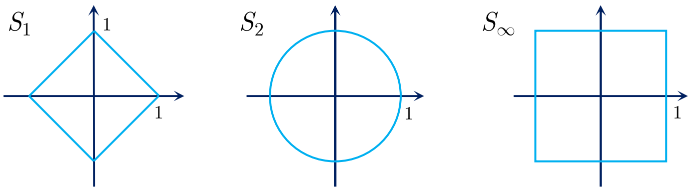
ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، ولتكن a من E، و r من $\mathbb{R}_+$. عندئذ تسمّى المجموعات

$$\begin{aligned}
B(a, r) &= \{x \in E : \; d(x, a) < r\}\\
\bar{B}(a, r) &= \{x \in E : \; d(x, a) \le r\}\\
S(a, r) &= \{x \in E : \; d(x, a) = r\}
\end{aligned}$$

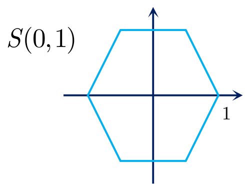
على التوالي، **كرةً مفتوحة** مركزها a ونصف قطرها r، و**كرةً مغلقة** مركزها a ونصف قطرها r، **وسطحاً كروياً** مركزه a ونصف قطره r.

ونسمي المجموعات $B(0,1)$ و $\bar{B}(0,1)$ و $S(0,1)$ الكرةَ الواحديّة المفتوحة والكرةَ الواحديّة المغلقة والسطحَ الكروي الواحدي في E على التوالي.

فإذا رمزنا بالرموز S_1 و S_2 و S_∞ إلى السطوح الكرويّة الواحديّة في $\mathbb{R}^2$ مزوّدةً بالنُّظُم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ على التوالي، كان



وإذا زوّدنا $\mathbb{R}^2$ بالنظيم $\|(x,y)\| = \max\left(\left|x+\frac{y}{\sqrt{3}}\right|, \left|x-\frac{y}{\sqrt{3}}\right|, \frac{2}{\sqrt{3}}|y|\right)$ كان السطح الكرويّ الواحدي الموافق هو



1-4-3. المجموعات المحدودة في فضاء شعاعي منظّم

ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، نقول إنّ المجموعة الجزئية A من E **محدودةٌ** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي موجبٌ M يُحقّق $A \subset B(0,M)$.

1-4-4. المسافة بين عنصر ومجموعة، والمسافة بين مجموعتين في فضاء شعاعي منظّم

ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E وأخيراً ليكن x عنصراً من E. نسمّي **بُعد العنصر x عن A** المقدار

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$$

ففي حالة $E = \mathbb{R}$ و $A =]0,1[$ و $x = 2$ لدينا $d(x,A) = 1$ وذلك مع أنّه لا يوجد عنصر y_0 في A يُحقّق المساواة $d(x,y_0) = 1$، ومنه نستنتج أنّه يمكن عموماً ألّا يوجد عنصر y_0 في A يُحقّق المساواة $d(x,y_0) = d(x,A)$.

وبأسلوب مماثل، إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من E أسمينا المقدار

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : (x,y) \in A \times B\}$$

المسافة بين A و B.

مثال. ليكن $C([0,1])$، فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على $[0,1]$، مزوداً بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$ المألوف:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left|f(t)\right|$$

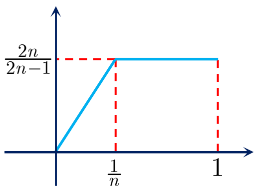
ولتكن المجموعة $A = \left\{ f \in E : (f(0) = 0) \wedge \left(\int_0^1 f \geq 1\right) \right\}$، ولنحسب $d(0,A)$.

في الحقيقة، إذا كان f من A كان

$$1 \leq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty = d(0,f)$$

ومن ثَمّ $d(0,A) \geq 1$.

ومن ناحية أخرى إذا تأمّلنا متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة كما يأتي:



$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2n^2x}{2n-1} & : \quad x \in \left[0,\frac{1}{n}\right] \\ \dfrac{2n}{2n-1} & : \quad x \in \left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$$

رأينا أنّ f_n ينتمي إلى A أيّاً كانت $n \geq 1$، وأنّ $\|f_n\|_\infty = \dfrac{2n}{2n-1}$. ومن ثَمّ يكون

$$1 \leq d(0,A) \leq d(0,f_n) = \|f_n\|_\infty = \frac{2n}{2n-1}$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد أنّ $d(0,A) = 1$.

أخيراً لنلاحظ أنّه لا يوجد عنصر g في A يُحقّق $d(0,g) = d(0,A) = 1$. لأنه لو وُجِدَ مثل هذا العنصر لكان لدينا

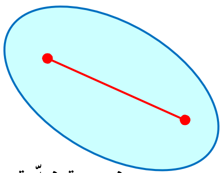
$$1 \leq \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \left|g(t)\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|g\|_\infty \,\mathrm{d}t = \|g\|_\infty = d(0,g) = 1$$

ومن ثَمّ $\int_0^1 \left(1 - \left|g(t)\right|\right) \mathrm{d}t = 0$. ولكن التابع $t \mapsto 1 - |g(t)|$ تابعٌ مستمرٌ وموجب على المجال $[0,1]$. نستنتج إذن أنّ $\forall t \in [0,1],\ \left|g(t)\right| = 1$، وبوجه خاص $\left|g(0)\right| = 1$ وهذا يناقض كون g عنصراً من A.

1-4-5. المجموعات المحدّبة في فضاء شعاعي منظّم

ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، ولتكن المجموعة A مجموعة جزئية من E. نقول إنّ A **مجموعة محدّبة** إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط

$$\forall (x,y) \in A \times A, \ \ \forall \lambda \in \ ]0,1[, \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in A$$



مجموعة محدّبة

ويمكن التعبير عن ذلك بالقول: إن القطعة المستقيمة الواصلة بين أية نقطتين من A محتواة بكاملها في A.

فمثلاً كلُّ كرة مفتوحة $A = B(a,r)$ من E محدّبة.

ذلك لأنّه أيّاً كان (x,y) من A^2 و λ من $]0,1[$ كان

$$\begin{aligned}\left\| \lambda x + (1-\lambda) y - a \right\| &= \left\| \lambda (x-a) + (1-\lambda)(y-a) \right\| \\ &\leq \lambda \left\| x-a \right\| + (1-\lambda) \left\| y-a \right\| \\ &< \lambda r + (1-\lambda) r = r\end{aligned}$$

ومن ثَمّ ينتمي العنصر $\lambda x + (1-\lambda) y$ إلى A.

1-4-6. النظم المتكافئة على فضاء شعاعي

ليكن N_1 و N_2 نظيمين على فضاء شعاعي E. نقول إنّ النظيمين N_1 و N_2 **متكافئان** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددان حقيقيان موجبان تماماً α و β يُحقّقان

$$(*) \qquad \forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

فإذا رمزنا بالرمز $B_1(a,r)$ إلى كرة مفتوحة في (E,N_1)، وبالرمز $B_2(a,r)$ إلى كرة مفتوحة في (E,N_2)، فإنّ الشرط $(*)$ يكافئ قولنا:

$$\forall a \in E, \forall r > 0, \ \ B_2(a,r\alpha) \subset B_1(a,r) \subset B_2(a,r\beta)$$

فمثلاً النظم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ على الفضاء الشعاعي $\mathbb{K}^n$ نظمٌ متكافئة، وذلك بسبب المتراجحة الواضحة الآتية:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \ \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

مثال. ليكن $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ ، فضاء التوابع الحقيقيّة من الصف C^1 على $[0,1]$. نعرّف على E النظم N_1 و N_2 و N_3 كما يأتي:

$$\forall f \in E, \quad \begin{aligned} N_1(f) &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \\ N_2(f) &= |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \\ N_3(f) &= |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \,\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

لندرس تكافؤ النّظم N_1 و N_2 و N_3.

- هنالك متراجحة واضحة هي

$$\forall f \in E, \quad N_3(f) \leq N_2(f) \leq N_1(f)$$

- وكذلك لدينا

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \quad |f(x)| &= \left| f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}\, t \right| \\ &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}\, t \\ &\leq |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| = N_2(f) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ لدينا أيضاً المتراجحة

$$\forall f \in E, \ \ N_1(f) \leq 2N_2(f)$$

فالنظيمان N_1 و N_2 متكافئان.

- لو افترضنا جدلاً وجود $\beta > 0$ يُحقّق $\forall f \in E, \ \ N_2(f) \leq \beta\, N_3(f)$ لكان لدينا

$$\forall n \geq 1, \quad N_2(f_n) \leq \beta\, N_3(f_n)$$

وقد عرّفنا $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1+nx}$.

وهذا تناقض لأنّ $N_2(f_n) = n+1$ و $N_3(f_n) \leq 2$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$. نستنتج إذن أنّ النّظيمين N_2 و N_3 غيرُ متكافئين.

2. الجوارات والمجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة في فضاء شعاعيّ منظّم

في كل هذه الفقرة E هو فضاءٌ شعاعيٌّ منظّم.

2-1. **تعريف**. ليكن a عنصراً من E. نقول إنّ المجموعة الجزئية V من E **جوارٌ** للعنصر a إذا وفقط إذا وُجِد ε في $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $B(a,\varepsilon) \subset V$. نرمز عادة بالرمز $\mathbb{V}(a)$ إلى مجموعة جوارات العنصر a في E. ويتحقّق القارئ بسهولة صحةَ الخواص الآتية:

① كلّ مجموعة جزئية W من E تحوي جواراً V للعنصر a هي نفسها جوارٌ للعنصر a.

② تقاطع جوارين، أو عددٍ منته، من جوارات العنصر a هو جوار للعنصر a.

③ إذا كان a و b عنصرين مختلفين من E أمكن إيجاد جوار V للعنصر a وجوار W للعنصر b يُحقّقان $V \cap W = \varnothing$.

2-2. **تعريف**. نقول إنّ المجموعة الجزئية G من E **مجموعة مفتوحة** إذا وفقط إذا كانت المجموعة G جواراً لكل عنصر من عناصرها. أي إذا تحقّقت إحدى الخاصتين المتكافئتين الآتيتين:

$$\Big(\forall a \in G,\, G \in \mathbb{V}(a)\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall a \in G, \exists \varepsilon > 0,\ \ B(a,\varepsilon) \subset G\Big)$$

ونتحقّق بسهولة صحّة الخواص الآتية انطلاقاً من هذا التعريف:

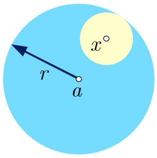
① إنّ كلاًّ من $\varnothing$ و E مجموعة مفتوحة.

② إنّ اجتماع جماعة من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

③ إنّ تقاطع جماعة **منتهية** من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

من المفيد أن نؤكّد هنا ضرورة اشتراط كون الجماعة منتهية في الخاصّة ③، كما يبيّن المثال الآتي : $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \{0\}$، إذ ليست $\{0\}$ مجموعة مفتوحة.

2-3. أمثلة



❖ إنّ كلّ كرة مفتوحة مجموعةٌ مفتوحة. في الحقيقة، إذا تأملنا الكرة المفتوحة $G = B(a,r)$ حيث $0 < r$، كان:

$$\forall x \in G, \quad B\left(x, r - \|x - a\|\right) \subset G$$

❖ ليكن $E = C([0,1],\mathbb{R})$، فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على $[0,1]$، مزوداً بالنظيم المنتظم :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

ولتكن المجموعة $G = \{f \in E : f(0) \neq 0\}$، عندئذ تكون G مجموعة مفتوحة. وذلك لأنّ

$$\forall f \in G, \quad B\left(f, \tfrac{1}{2}\left|f(0)\right|\right) \subset G$$

2-4. تعريف. نقول إنّ المجموعة الجزئية F من E **مجموعة مغلقة** إذا، وفقط إذا، كانت متمِّمتُها $E \backslash F$ مجموعةً مفتوحةً. أي إذا تحقّقت إحدى الخاصتين المتكافئتين الآتيتين:

$$\left(\forall a \notin F, E\backslash F \in \mathbb{V}(a)\right) \Leftrightarrow \left(\forall a \notin F, \exists \varepsilon > 0, \quad B(a,\varepsilon) \cap F = \varnothing\right)$$

ونتحقّق بسهولة صحّةَ الخواص الآتية انطلاقاً من هذا التعريف:

① إنّ كلاً من $\varnothing$ و E مجموعة مغلقة.

② إنّ تقاطع جماعة من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

③ إنّ اجتماع جماعة **منتهية** من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

نؤكّد من جديد ضرورة اشتراط كون الجماعة منتهية في الخاصّة ③، كما يبين المثال الآتي:
$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = \left]-1,+1\right[$. كما نؤكّد أنّ خاصّة كون مجموعة ما مغلقة **ليست** نفي خاصة كون المجموعة مفتوحة، إذ توجد مجموعات مغلقة ومفتوحة في آن معاً وكذلك توجد مجموعات غير مغلقة وغير مفتوحة.

2-5. أمثلة

❖ إنّ كلّ كرة مغلقة مجموعةٌ مغلقة. في الحقيقة، إذا كانت $F = \overline{B}(a,r)$ حيث $0 \leq r$، كان :

$$\forall x \notin F, \quad B\left(x, \|x-a\| - r\right) \cap F = \varnothing$$

❖ إذا كانت F كرة مغلقة فإنها ليست مجموعة مفتوحة. لأنها ليست جواراً لأي نقطة من سطحها الكروي.

2-6. ملاحظة مهمّة. إنّ استبدال نظيم مكافئ بالنظيم الموجود على E، لا يغيِّر مجموعة جوارات نقطة من E، ومن ثَمّ لا يغيّر المجموعات المفتوحة ولا المجموعات المغلقة في E. ينتج من ذلك أنّ استبدال نظيم مكافئ بالنظيم الموجود على E، لا يغيِّر أية خاصّة تُعَرَّف لاحقاً انطلاقاً من مفهوم الجوار.

3. داخل ولصاقة مجموعة جزئية من فضاء شعاعي منظّم

في كل هذه الفقرة E هو فضاءٌ شعاعيٌّ منظّم.

3-1. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية من E. نسمّي **داخل A** مجموعة عناصر E التي تقبل A جواراً لها. ونرمز بالرمز $\overset{\circ}{A}$ أو $\mathrm{int}(A)$ إلى هذه المجموعة. فيكون

$$a \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathbb{V}(a) \Leftrightarrow \left(\exists \varepsilon > 0, \;\; B(a,\varepsilon) \subset A\right)$$

ويتحقَّق دوماً الاحتواء $\overset{\circ}{A} \subset A$.

3-2. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية من E. عندئذ تتحقّق الخواص الآتية:

1. إنّ $\overset{\circ}{A}$ مجموعة مفتوحة.
2. إنّ $\overset{\circ}{A}$ أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A.
3. تكون A مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كان $A = \overset{\circ}{A}$.
4. إنّ $\mathrm{int}(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{A}$.

الإثبات

1. ليكن x عنصراً من $\overset{\circ}{A}$. يوجد $\varepsilon > 0$ يُحقِّق $B(x,\varepsilon) \subset A$. ولمّا كانت الكرة المفتوحة $B(x,\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة، أي جواراً لكلِّ عنصر من عناصرها، كانت A جواراً لكلِّ عنصر من $B(x,\varepsilon)$. أي إنّ $B(x,\varepsilon) \subset \overset{\circ}{A}$. فالمجموعة $\overset{\circ}{A}$ مجموعة مفتوحة.
2. لقد أثبتنا من جهة أولى أنّ $\overset{\circ}{A}$ مجموعة مفتوحة محتواة في A . لتكن من جهة ثانية G مجموعة مفتوحة محتواة في A . عندئذ

$$x \in G \Rightarrow G \in \mathbb{V}(x) \overset{G\subset A}{\Rightarrow} A \in \mathbb{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$$

ومنه $G \subset \overset{\circ}{A}$. فالمجموعة $\overset{\circ}{A}$ هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A .

3. إذا كانت A مجموعة مفتوحة فهي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A إذن $A = \overset{\circ}{A}$. وبالعكس، إذا كانت $A = \overset{\circ}{A}$ كانت A مجموعة مفتوحة استناداً إلى 1.
4. هذه نتيجة واضحة من 1. و 3. ❐

مثال. لتكن A مجموعة محدّبة في فضاء شعاعيّ منظّم E . عندئذ تكون المجموعة $\overset{\circ}{A}$ مجموعة محدّبة أيضاً.

في الحقيقة، لتكن (x,y) من $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A}$ و λ من $]0,1[$ ، عندئذ يوجد $\varepsilon > 0$ يُحقِّق $B(x,\varepsilon) \subset A$ و $B(y,\varepsilon) \subset A$. ومن ثَمّ نتحقق بسهولة أنّ

$$B(\lambda x + (1-\lambda)y, \varepsilon) \subset A$$

ينتج من ذلك أنّ $\lambda x + (1-\lambda)y$ ينتمي إلى $\overset{\circ}{A}$.

3-3. **تعريف.** لتكن A مجموعة جزئية من E ، وليكن x عنصراً من E . نقول إنّ x **نقطة لاصقة** بالمجموعة A ، إذا وفقط إذا لاقى كلُّ جوارٍ للعنصر x المجموعة A . أي

$$\forall V \in \mathbb{V}(x),\ \ V \cap A \neq \varnothing$$

نسمّي **لصاقة** A مجموعة النقاط اللّاصقة بالمجموعة A . ونرمز بالرمز $\overline{A}$ إلى هذه المجموعة.

فيكون

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall V \in \mathbb{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \end{aligned}$$

ويتحقَّق دوماً الاحتواء $A \subset \overline{A}$.

4-3. **مبرهنة** : لتكن A مجموعة جزئية من E . عندئذ تتحقّق الخواص الآتية:

1. إنّ $\overline{A}$ مجموعة مغلقة.
2. إنّ $\overline{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي A .
3. تكون A مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كان $A = \overline{A}$.
4. إنّ $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

الإثبات

1. ليكن x عنصراً من $E \backslash \overline{A}$. إذن يوجد $0 < \varepsilon$ يُحقّق $A \cap B(x,\varepsilon) = \varnothing$. لنفترض جدلاً أنّ $\overline{A} \cap B(x,\varepsilon) \neq \varnothing$. عندئذ يوجد عنصر y في $\overline{A} \cap B(x,\varepsilon)$. ولمّا كان $B(x,\varepsilon)$ جواراً للعنصر y كان $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \varnothing$ ، لأن y ينتمي إلى $\overline{A}$ ، وهذا تناقض. نستنتج من ذلك أنّ $\overline{A} \cap B(x,\varepsilon) = \varnothing$ ؛ أي إنّ المجموعة $E \backslash \overline{A}$ جوار للعنصر x . فالمجموعة $E \backslash \overline{A}$ مجموعة مفتوحة.

2. لقد أثبتنا من جهة أولى أنّ $\overline{A}$ مجموعة مغلقة تحوي A . لتكن، من جهة ثانية، F مجموعة مغلقة تحوي A . إذا كانت x لا ينتمي إلى F كان $E \backslash F$ جواراً للعنصر x لا يلاقي A . إذن x لا ينتمي إلى $\overline{A}$. ومنه $\overline{A} \subset F$.

3. إذا كانت A مجموعة مغلقة فهي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A إذن $A = \overline{A}$. وبالعكس، إذا كانت $A = \overline{A}$ كانت A مجموعة مغلقة بناءً على 1.

4. هذه نتيجة واضحة من الخاصتين 1. و 3. ❐

3-5. **تعريف**. لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E، نقول إنّ B **مجموعة كثيفة** في المجموعة A، إذا وفقط إذا كان $A \subset \overline{B}$. أي

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists b \in B, \quad \|a - b\| < \varepsilon$$

نقول في هذه الحالة إنّه بالإمكان **تقريب** أيّ عنصر من A ولأية درجة من التقريب بعناصر من B. فمثلاً في $\mathbb{R}$ تكون مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ كثيفة في مجموعة الأعداد الحقيقة غير العاديّة $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

4. مفاهيم النهاية والاستمرار في الفضاءات الشعاعية المنظّمة

في كامل هذه الفقرة تمثّل الرموز E و F و G فضاءات شعاعيّة منظّمة.

4-1. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E، وليكن $f : A \to F$ تطبيقاً و a عنصراً من $\overline{A}$. نقول إنّ **f يقبل نهايةً عند a** إذا وفقط إذا وُجِدَ عنصر ℓ في F يُحقِّق

$$\mathcal{L} \qquad \forall W \in \mathbb{V}(\ell), \ \exists V \in \mathbb{V}(a), \ f(V \cap A) \subset W$$

وهذا يكافئ الشرط الآتي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \left.\begin{array}{c} x \in A \\ \|x - a\|_E < \eta \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$$

إذا وُجِدَ عنصر ℓ يُحقِّق أحد الشرطين المتكافئين السابقين كان هذا العنصر وحيداً، ونسميه عندها **نهاية f عند a**. ونكتب عندئذ $\ell = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$ أو $\ell = \lim\limits_{a} f$ إذا لم يكن هنالك مجال للالتباس.

4-2. **تعريف**. لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية من عناصر E. نقول إنّ المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **متقاربة** إذا وفقط إذا وُجِدَ عنصر ℓ في E يُحقِّق

$$\mathcal{L}' \qquad \forall V \in \mathbb{V}(\ell), \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n > N_\varepsilon \Rightarrow x_n \in V$$

وهذا يكافئ الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n > N_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - \ell\|_E < \varepsilon$$

وكذلك إذا وُجِدَ عنصر ℓ يُحقِّق أحد الشرطين المتكافئين السابقين كان هذا العنصر وحيداً، ونسميه عندئذ **نهاية المتتالية** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$، ونكتب $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

3-4. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E، وليكن التطبيق $f : A \to F$.
نفترض أنّ $f(A) \subset B$ وأنّ $g : B \to G$ تطبيق آخر. أخيراً ليكن a عنصراً من $\overline{A}$
يقبل عنده التابع f نهاية b. عندئذ

① تكون b نقطة لاصقة بالمجموعة B أي $b \in \overline{B}$.

② إذا قَبِلَ g نهاية c عند b، فإنّ $g \circ f$ يقبل c نهاية له عند a.

الإثبات

① ليكن W جواراً للعنصر b. نجد، بناءً على تعريف النهاية $\mathcal{L}$، جواراً V للعنصر a يُحقّق $f(V \cap A) \subset W$، ولكن من جهة أولى $f(V \cap A) \neq \varnothing$ لأنّ a لاصقة بالمجموعة A، ومن جهة ثانية لدينا

$$f(V \cap A) \subset f(A) \subset B$$

إذن $\varnothing \neq f(V \cap A) \subset W \cap B$، ومن ثَمّ $W \cap B \neq \varnothing$. نستنتج من المناقشة السابقة أنّ b نقطة لاصقة بالمجموعة B.

② ليكن U جواراً للعنصر c. نجد بناءً على تعريف النهاية $\mathcal{L}$ جواراً W للعنصر b يُحقّق

$$g(W \cap B) \subset U$$

لأنّ $\lim_b g = c$. وكذلك نجد وفقاً لتعريف النهاية $\mathcal{L}$ جواراً V للعنصر a يُحقّق

$$f(V \cap A) \subset W$$

لأنّ $\lim_a f = b$. فيكون لدينا

$$g \circ f(V \cap A) \subset g(B \cap W) \subset U$$

ونكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall U \in \mathbb{V}(c),\ \exists V \in \mathbb{V}(a),\ \ g \circ f(V \cap A) \subset U$$

أي إنّ $g \circ f$ يقبل c نهاية له عند a. ❐

4-4. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E، وليكن $f : A \to F$ تطبيقاً. نقول إنّ التابع f **مستمرٌّ عند a** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall W \in \mathbb{V}(f(a)),\ \exists V \in \mathbb{V}(a),\quad f(V \cap A) \subset W \qquad \mathcal{C}$$

وهذا يكافئ الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \left. \begin{array}{c} x \in A \\ \|x-a\|_E < \eta \end{array} \right\} \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$$

ونقول إنّ f مستمرٌّ على A إذا وفقط إذا كان f مستمراً عند كلّ نقطة a من A.

4-5. أمثلة

❖ لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E، وليكن $f : A \to F$ تطبيقاً. نقول إنّ f يحقق **شرط لِبشتز** بثابت $K > 0$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall (x,y) \in A \times A, \quad \|f(x)-f(y)\|_F \leq K\|x-y\|_E$$

من الواضح أنّ كل تطبيق مُحقِّق لشرط لبشتز يكون مستمراً. فمثلاً التطبيقان الآتيان :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|, \\ \delta_B &: E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x,B). \end{aligned}$$

حيث B مجموعة جزئية غير خالية من E، مستمران، لأنّ كلّاً منهما يحقّق شرط لِبشتز بثابت يساوي 1.

❖ لنعرّف على الفضاء الشعاعي $E \times E$ النظيم التالي:

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad \|(x,y)\|_{E\times E} = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_E\right)$$

عندئذ يكون التطبيق $\sigma : E \times E \to E, \sigma(x,y) = x+y$ مستمراً.

في الحقيقة، يحقّق هذا التطبيق أيضاً شرط لِبشتز، لأنه أياً كان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) من E^2 كان لدينا :

$$\begin{aligned} \|\sigma(x_1,y_1)-\sigma(x_2,y_2)\|_E &= \|x_1-x_2+y_1-y_2\|_E \\ &\leq \|x_1-x_2\|_E + \|y_1-y_2\|_E \\ &\leq 2\max(\|x_1-x_2\|_E, \|y_1-y_2\|_E) \\ &\leq 2\,\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_{E\times E} \end{aligned}$$

❖ لنعرّف على الفضاء الشعاعي $\mathbb{K} \times E$ النظيم الآتي:

$$\forall (\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E, \quad \|(\lambda,x)\|_{\mathbb{K}\times E} = \max\left(|\lambda|, \|x\|_E\right)$$

عندئذ يكون التطبيق $\pi : \mathbb{K}\times E \to E, \pi(\lambda,x) = \lambda x$ مستمراً.

في الحقيقة، لتكن (λ_0, x_0) من $\mathbb{K} \times E$. عندئذ أيّاً كان (λ, x) من $\mathbb{K} \times E$ فلدينا

$$\begin{aligned} \pi(\lambda, x) - \pi(\lambda_0, x_0) &= \lambda x - \lambda_0 x_0 \\ &= (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x - x_0) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ أيّاً كان (λ, x) من $\mathbb{K} \times E$ الذي يُحقّق $\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\|_{\mathbb{K}\times E} \le 1$ تتحقق المتراجحة

$$\begin{aligned} \left\|\pi(\lambda, x) - \pi(\lambda_0, x_0)\right\|_E &\le |\lambda - \lambda_0| \, \|x - x_0\|_E \\ &\quad + |\lambda - \lambda_0| \, \|x_0\|_E + |\lambda_0| \, \|x - x_0\|_E \\ &\le \left(1 + \|x_0\|_E + |\lambda_0|\right) \cdot \max\left(|\lambda - \lambda_0|, \|x - x_0\|_E\right) \end{aligned}$$

فإذا كانت $\varepsilon > 0$، ووضعنا $\eta = \varepsilon / (1 + \varepsilon + \|x_0\|_E + |\lambda_0|)$ أمكننا أن نكتب استناداً إلى المتراجحة السابقة ما يأتي:

$$\left\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\right\|_{\mathbb{K}\times E} < \eta \Rightarrow \left\|\pi(\lambda, x) - \pi(\lambda_0, x_0)\right\|_E < \varepsilon$$

وهذا يثبت استمرار التابع π عند (λ_0, x_0).

تنتج المبرهنة الآتية مباشرة من المبرهنة 4-3.

4-6. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E، وليكن التطبيق $f : A \to F$. نفترض أنّ $f(A) \subset B$ وأنّ $g : B \to G$ تطبيق آخر. إذا كان f مستمراً عند نقطة a من A، وكان g مستمراً عند $f(a) = b$، كان $g \circ f$ مستمراً عند a.

4-7. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E، وليكن $f : A \to F$ تطبيقاً. نقول إنّ التابع f **مستمرٌّ بانتظام** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \left.\begin{matrix} (x, y) \in A^2 \\ \|x - y\|_E < \eta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\|f(x) - f(y)\right\|_F < \varepsilon$$

من الواضح أنّ كلّ تابع يحقّق شرط لِبشتز يكون مستمراً بانتظام، إلاّ أنّ العكس غير صحيح كما نعلم من دراستنا للتوابع الحقيقيّة.

5. المتتاليات في فضاء شعاعيّ منظّم

في كامل هذه الفقرة E و F هما فضاءان شعاعيّان منظّمان.

1-5. **مبرهنة** : لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E . عندئذ الخاصّتان الآتيتان متكافئتان:

① العنصر a هو نقطة لاصقة بالمجموعة A .

② توجد متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تُحقِّق $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

الإثبات

② ⇐ ① ليكن V جواراً للعنصر a يوجد إذن n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقِّق

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in V$$

ينتج من ثَمّ أنّ u_{n_0} ينتمي إلى $A \cap V$ ، فالتقاطع $A \cap V$ غير خالٍ.

① ⇐ ② أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$ ، كان التقاطع $A \cap B(a,1/n)$ غير خالٍ، ومن ثَمّ يوجد عنصرٌ x_n في $A \cap B(a,1/n)$. ونتيقّن بيسر أنّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تحقّق $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

تطبيق. لتكن A مجموعة جزئية محدّبة غير خالية من E ، عندئذ تكون $\overline{A}$ محدّبة.

في الحقيقة، ليكن (x,y) عنصراً من $\overline{A} \times \overline{A}$ ولتكن λ من $]0,1[$. توجد متتاليتان $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تحقّقان $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. لمّا كانت المجموعة A محدّبة كان $z_n = \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in A$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$. ومن ثَمّ

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lim_{n\to\infty} z_n \in \overline{A}$$

وهذا يثبت أنّ $\overline{A}$ مجموعة محدّبة.

2-5. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E ، ولتكن a من $\overline{A}$ ، وليكن f تطبيقاً من A إلى F . عندئذ يكون هناك تكافؤ بين الخاصتين الآتيتين:

① يقبل التطبيق f نهاية عند a .

② إنّ المتتالية $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في F ، أياً كانت المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدودها من عناصر A وتسعى إلى a .

وفي حالة تحقُّق إحدى الخاصتين السابقتين يكون $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

وذلك أيّاً كانت المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدودها من عناصر A وتسعى إلى a .

الإثبات

① ⇐ ② لنفترض أنّ $\lim_{a} f = \ell \in F$. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A تسعى إلى a .
نريد أن نثبت أنّ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. ليكن W جواراً للعنصر ℓ ، يوجد عندئذ جوار V للعنصر a يُحقِّق $x \in V \cap A \Rightarrow f(x) \in W$.
ولمّا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ، إذن يوجد n_0 في $\mathbb{N}$ ، يُحقِّق

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in V$$

ومن ثَمّ $f(x_n) \in W$ في حالة $n > n_0$ وهذا يثبت أنّ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

② ⇐ ① لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A تسعى إلى a ، نضع تعريفاً $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.
ولتكن متتالية أخرى $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A تسعى إلى a .
نعرّف متتالية جديدة $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A بوضع $z_{2n} = x_n$ و $z_{2n+1} = y_n$ وذلك أيّاً كان n من $\mathbb{N}$. لمّا كانت $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A تسعى إلى a ، كان للمتتالية $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ نهاية في F ، ونجم عن ذلك أنّ للمتتاليتين الجزئيتين منها:

$$\big(f(z_{2n})\big)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{و} \quad \big(f(z_{2n+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

النهاية نفسها. ومنه $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \ell$. بهذا نكون قد أثبتنا وجود عنصر ℓ في F ، يحقق المساواة $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$ أيّاً كانت المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A وتسعى إلى a .

لنفترض جدلاً أنّ التابع f لا يقبل ℓ نهاية له عند a . إذن يوجد جوار W_0 للعنصر ℓ يُحقِّق

$$\forall V \in \mathbb{V}(a), \exists x \in V \cap A, \quad f(x) \notin W_0$$

نعرف، أيّاً كان $1 \le n$ ، الجوار $V_n = B(a, \frac{1}{n})$ للعنصر a ، فنجد عنصراً u_n في $V_n \cap A$ يُحقِّق $f(u_n) \notin W_0$ ، وذلك أيّاً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n . نحصل من ثَمّ على متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تسعى إلى a ، فهي تحقِّق إذن المساواة

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$$

وهذا يناقض الخاصّة $\forall n \ge 1, f(u_n) \notin W_0$. نستنتج من هذا التناقض أنّ التابع f يسعى إلى العنصر ℓ عند a . ❐

5-3. **تعريف**. نقول إنّ متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من E **تحقِّق شرط كوشي** Cauchy إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \left.\begin{array}{c} n>N_\varepsilon \\ m>N_\varepsilon \end{array}\right\}\Rightarrow \left\|x_n-x_m\right\|_E<\varepsilon$$

ونترك للقارئ أن يتيقّن صحةَ الخاصتين الآتيتين:

- كلُّ متتالية تحقّق شرط كوشي في فضاء شعاعي منظّم تكون محدودة.
- كلُّ متتالية متقاربة في فضاء شعاعي منظّم تحقّق شرط كوشي.

5-4. **تعريف**. نقول إنّ الفضاء الشعاعي المنظّم E **فضاء تام** -أو إنّه فضاء باناخ Banach- إذا وفقط إذا تقاربت فيه كل متتالية تحقّق شرط كوشي.

5-5. **أمثلة**

- نعلم أنّ حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ فضاء تام.
- إنّ حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ فضاء تام. في الحقيقة، لتكن $(z_n)_{n\geq 0}$ متتالية من $\mathbb{C}$ تحقّق شرط كوشي. نعرّف $x_n=\mathrm{Re}(z_n)$ و $y_n=\mathrm{Im}(z_n)$ فيكون لدينا

$$\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad |x_n-x_m|\leq|z_n-z_m|$$

و

$$\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad |y_n-y_m|\leq|z_n-z_m|$$

فالمتتاليتان الحقيقيتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان لأنّهما تُحقِّقان شرط كوشي. ومن ثَمّ يمكننا أن نعرّف $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ و $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. ولمّا كان

$$\forall n\geq 0,\quad |z_n-(x+\mathrm{i}\,y)|=\sqrt{|x_n-x|^2+|y_n-y|^2}$$

استنتجنا تقارب $(z_n)_{n\geq 0}$ من $x+\mathrm{i}\,y$.

- إنّ الفضاء الشعاعي المنظّم $E=\left(\mathbb{K}^p,\|\cdot\|_\infty\right)$ المزوَّد بالنظيم الآتي:

$$\forall X=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{K}^p,\quad \|X\|_\infty=\max\left(|x_1|,\ldots,|x_p|\right)$$

فضاءٌ شعاعيٌّ تام.

في الحقيقة، لتكن $(X_n)_{n\geq 0}$ متتالية من E تحقّق شرط كوشي. يُكتب العنصر X_n بالشكل

$$X_n=(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(p)})\in\mathbb{K}^p$$

ولمّا كان

$$\forall k \in \{1,\ldots,p\}, \forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad \left|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\right| \leq \|X_n - X_m\|_\infty$$

فإننا نستنتج أنّه، أياً كانت k من $\{1,\ldots,p\}$، حقّقت المتتالية $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ شرط كوشي في $\mathbb{K}$ فهي متقاربة من عنصر $x^{(k)}$ في $\mathbb{K}$. لنعرّف إذن $X = (x^{(1)},\ldots,,x^{(p)})$ من $\mathbb{K}^p$، فيكون لدينا

$$\forall n \geq 0,\quad \|X_n - X\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{p}\left|x_n^{(k)} - x^{(k)}\right|$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n - X\|_\infty = 0$ ، فالمتتالية $(X_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من X.

- إنّ الفضاء الشعاعيّ المنظّم $E = \left(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty\right)$ حيث
$$\forall f\in E,\quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

فضاءٌ شعاعيٌ تام. هذه في الواقع نتيجة لِما درسناه في بحث متتاليات التوابع.

- ليكن الفضاء الشعاعيّ المنظّم $E = \left(\mathbb{K}[X],\|\cdot\|_1\right)$ حيث
$$\forall P\in E,\quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$$

إنّ E ليس فضاء شعاعيّاً تامّاً. في الحقيقة، لتكن $(P_n)_{n\geq 0}$ المتتالية من E المعرّفة بالصيغة:

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k X^k$$

أيّاً كان العددان الطبيعيان n و m حيث $n < m$ و t من $[0,1]$ كانت لدينا المتراجحة

$$|P_m(t) - P_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m}(-t)^k\right| = t^{n+1}\frac{\left|1-(-t)^{m-n}\right|}{1+t} \leq 2\cdot t^{n+1}$$

ومن ثَمّ

$$m > n \Rightarrow \|P_m - P_n\|_1 \leq \frac{2}{n+2}$$

فالمتتالية $(P_n)_{n\geq 0}$ تُحقّق شرط كوشي في E. لنفترض جدلاً أنّ الفضاء E تامٌّ. عندئذ يوجد عنصر $S(X)$ في $\mathbb{K}[X]$ يُحقّق

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n - S\|_1 = 0$$

ولمّا كان $(1+X)P_n(X) = 1-(-X)^{n+1}$، كان

$$(1+X)S(X) - 1 = (1+X)(S(X)-P_n(X)) - (-X)^{n+1}$$

ومن ثَمّ

$$\forall t\in[0,1],\ \forall n\geq 0,\quad \Big|(1+t)\,S(t)-1\Big|\leq 2\,|S(t)-P_n(t)|+t^{n+1}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall n\geq 1,\quad \|(1+X)S(X)-1\|_1\leq 2\|P_n-S\|_1+\frac{1}{n+2}$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ نستنتج أنّ $(1+X)\cdot S(X)=1$ ، ونصل إلى تناقض واضح بمقارنة درجتي طرفي هذه المساواة. هذا التناقض يثبت أنّ الفضاء E ليس تامّاً.

5-6. **تعريف**. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من E. نقول إنّ المتسلسلة $\sum x_n$ **متقاربة** وتقبل العنصر S من E **مجموعاً** إذا وفقط إذا تقاربت متتاليةُ **المجاميع الجزئية** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$، حيث $S_n=\sum_{k=0}^{n}x_k$ ، من S. ونقول إنّ المتسلسلة $\sum x_n$ **متقاربة بالنظيم**، إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum\|x_n\|_E$ متقاربة.

تُبيّن المتراجحة الآتية:

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+m}x_k\right\|_E\leq\sum_{k=n}^{n+m}\|x_k\|_E$$

أنّه **في فضاء شعاعيّ تام** كلُّ متسلسلة متقاربة بالنظيم تكون متقاربة. في الحقيقة، سنرى في التمرينات أنّ هذه الخاصّة لا تتحقّق إلاّ في الفضاءات الشعاعيّة التامّة.

6. المجموعات المتراصّة في الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

1-6. **تعريف**. نقول إنّ مجموعة جزئية A من فضاء شعاعيّ منظّم E **مجموعة متراصّة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط الآتي: مهما تكن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر من A.

2-6. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة متراصّة في فضاء شعاعيّ منظّم E. عندئذ تكون المجموعة A مغلقة ومحدودة.

الإثبات

- إذا لم تكن المجموعة A محدودة، أمكننا إيجاد متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تُحقّق $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|=+\infty$. ولكن استناداً إلى الفرْض يوجد تطبيق متزايدٌ تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر λ ينتمي إلى A. وعندئذ نستنتج من ذلك أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|u_{\varphi(n)}\right\|=\|\lambda\|$ وهذا يناقض الخاصة $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|=+\infty$. فالمجموعة A محدودة.
- ليكن a عنصراً من $\overline{A}$، توجد إذن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A تسعى إلى a. وبمقتضى الفرْض نجد تطبيقاً متزايداً تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر λ ينتمي إلى A. ولمّا كانت $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتقاربة من a فهي أيضاً متقاربة من a. نستنتج أنّ $\lambda=a\in A$، وأنّ المجموعة A مجموعة مغلقة. ❐

3-6. مثال. نبيّن في هذا المثال أنّ عكس المبرهنة السابقة خطأ في الحالة العامّة. لنتأمّل مثلاً $E=\left(C([0,2\pi]),\|\cdot\|_\infty\right)$ فضاء التوابع الحقيقية المستمرّة على المجال $[0,2\pi]$ مزوَّداً بالنظيم

$$\forall f\in E,\quad \left\|f\right\|_\infty=\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|f(x)\right|$$

ولتكن $A=\overline{B}(0,1)$ الكرة الواحديّة المغلقة في E. من الواضح أنّها مجموعة مغلقة ومحدودة في E . لنثبت أنّ A ليست مجموعة متراصّة.

لنتأمّل المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A المعرّفة كما يأتي:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,2\pi],\quad f_n(x)=\sin(nx)$$

لو كانت A مجموعة متراصّة لأمكن إيجاد تطبيق $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ متزايد تماماً يجعل المتتالية الجزئية $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عنصر f ينتمي إلى A . ولكن في حالة p و q من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\int_0^{2\pi}\sin px\sin qx\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}\pi & : \quad p=q\\ 0 & : \quad p\neq q\end{cases}$$

إذن

$$\forall\left(p,q\right)\in\mathbb{N}^{*2},\qquad p\neq q\Rightarrow\int_0^{2\pi}\left|\sin px-\sin qx\right|^2\mathrm{d}x=2\pi$$

ومن ثَمّ

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad p \neq q \Rightarrow 2\pi \leq 2\pi \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} \left|\sin px - \sin qx\right|^2$$

أو

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad p \neq q \Rightarrow 1 \leq \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} \left|\sin px - \sin qx\right|$$

وبصيغة أخرى

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad n \neq m \Rightarrow 1 \leq \left\| f_n - f_m \right\|_\infty$$

وبوجه خاصّ يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq \left\| f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)} \right\|_\infty$$

وهذا يناقض كون المتتالية $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام من تابع f ينتمي إلى A!.

ملاحظة. سنبرهن لاحقاً أنّ الكرة الواحديّة المغلقة في أي فضاء شعاعي منظّم لا تكون متراصّة إلاّ إذا كان الفضاء الشعاعي منتهي البُعد.

4-6. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة متراصّة في فضاء شعاعي منظّم E، ولتكن B مجموعة مغلقة في E ومحتواة في A. عندئذ تكون B مجموعة متراصّة.

الإثبات

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من B. لمّا كانت A متراصّة، يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر x في A. ولكنّ حدود المتتالية $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى B إذن $x \in \overline{B} = B$. فالمجموعة B مجموعة متراصّة. وبذا يكتمل الإثبات. □

6-5. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منظّمين، نزوّد الفضاء الشعاعي $E \times F$ بالنظيم:

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad \|(x,y)\|_{E\times F} = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right)$$

إذا كانت A مجموعة متراصّة في E و B مجموعة متراصّة في F، كانت $A \times B$ مجموعة متراصّة في $E \times F$.

الإثبات

لتكن $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $A \times B$. نكتب في حالة عدد طبيعي n ما يأتي:

$$z_n = (x_n, y_n) \in A \times B$$

لمّا كانت A متراصّة، يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عنصر x في A. ولأنّ $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من المجموعة المتراصّة B يوجد تطبيق متزايد تماماً $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(y_{\varphi\circ\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب في F من عنصر y ينتمي إلى B. فإذا عرّفنا $\psi = \varphi \circ \theta$، كان ψ تطبيقاً متزيداً تماماً وكانت المتتالية $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ فهي تسعى إلى العنصر x من A. ويكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty} x_{\psi(n)} = x \text{ و } \lim_{n\to\infty} y_{\psi(n)} = y.$$

ومن ثَمّ $\lim_{n\to\infty} z_{\psi(n)} = (x,y)$ في $E \times F$، والمجموعة $E \times F$ متراصّة. ❐

6-6. **مبرهنة**. لتكن $E_1, \ldots, E_m$ فضاءات شعاعيّة منظّمة، نرمز بالرمز F إلى الفضاء الشعاعي المنظّم $F = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$ مزوّداً بالنظيم

$$\forall (x_1, \ldots, x_m) \in F, \quad \|(x_1, \ldots, x_m)\|_F = \max_{1\le k\le m} \|x_k\|_{E_k}$$

إذا كانت A_k مجموعة متراصّة في E_k حيث k من $\{1, 2, \ldots, m\}$، كانت المجموعة $A = A_1 \times \cdots \times A_m$ مجموعة متراصّة في F.

الإثبات

إنّ هذه المبرهنة تعميم واضح بالتدريج على العدد m للمبرهنة السابقة. ❐

6-7. **مبرهنة**. ليكن الفضاء الشعاعي المنظّم $E=\left(\mathbb{K}^p,\|\cdot\|_\infty\right)$ مع

$$\forall X=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{K}^p,\quad \|X\|_\infty=\max\left(|x_1|,\ldots,|x_p|\right)$$

ولتكن A مجموعة جزئيّة من E. الخاصّتان الآتيتان متكافئتان:

① المجموعة A مجموعة متراصّة.

② المجموعة A مجموعة مغلقة ومحدودة.

الإثبات

إنّ الاقتضاء ① ⇐ ② هو فحوى المبرهنة 6-2. لنثبت الاقتضاء الثاني ② ⇐ ①.

✠ **حالة $p=1$**. إذا كان الحقل $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ فإن النتيجة المذكورة خاصّة مُثبتة سابقاً. لنفترض أنّ $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. ولتكن $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A. عندئذ يكون $z_n=x_n+\mathrm{i}\,y_n\in A$، أياً كانت $0\le n$. لمّا كانت A محدودة، يوجد عدد $0<M$ يُحقّق:

$$\forall n\ge 0,\quad |z_n|\le M$$

ومن ثمّ فإنّ $\left((x_n,y_n)\right)_{n\ge 0}$ متتالية من المجموعة المتراصّة $[-M,M]\times[-M,M]$، واستناداً إلى المبرهنة 6-5. يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$، ويوجد عنصر $z=x+\mathrm{i}\,y$ في $\mathbb{C}$ يُحقّق

$$\lim_{n\to\infty}\max\left(\left|x_{\varphi(n)}-x\right|,\left|y_{\varphi(n)}-y\right|\right)=0$$

ينتج من ذلك أنّ $\lim_{n\to\infty} z_{\varphi(n)}=z$ في $\mathbb{C}$. ومن ثمّ تنتمي z إلى A لأنّ $z\in\overline{A}$ و A مجموعة مغلقة.

✠ **الحالة العامّة**. لمّا كانت A مجموعة محدودة، يوجد $0<M$، يحقّق $A\subset\overline{B}(0,M)$. لتكن $\Delta=\left\{x\in\mathbb{K}:|x|\le M\right\}$. إنّ Δ مجموعة متراصّة في $\mathbb{K}$ بمقتضى الحالة $p=1$. وباستخدام المبرهنة 6-6. تكون $\Delta^p=\overline{B}(0,M)$ مجموعة متراصّة في الفضاء $E=\left(\mathbb{K}^p,\|\cdot\|_\infty\right)$، ولأنّ A مجموعة مغلقة محتواة في المجموعة المتراصّة $\overline{B}(0,M)$، فإنّها تكون متراصّة استناداً إلى المبرهنة 6-4. ❒

6-8. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية ومتراصّة في فضاء شعاعي منظّم E، وليكن $f : A \to F$ تطبيقاً مستمراً من A إلى فضاء شعاعي منظّم F. عندئذ

① المجموعة $f(A)$ مجموعة متراصّة.

② إذا كان $F = \mathbb{R}$، فإنّ f يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على A.

③ التطبيق f مستمرٌّ بانتظام على A.

الإثبات

① لتكن $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $f(A)$، عندئذ نجد، أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، عنصراً x_n من A يُحقّق $f(x_n) = y_n$. ولمّا كانت المجموعة A متراصّة، أمكننا أن نستخلص من المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر x ينتمي إلى A. ومن ثَمّ تتقارب المتتالية $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ من $f(x)$ لأنّ التابع f مستمرٌّ. أي تتقارب المتتالية $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ الجزئية من $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عنصرٍ $y = f(x)$ من $f(A)$. فالمجموعة $f(A)$ متراصة.

② المجموعة $f(A)$ محدودة -لأنّها متراصّة- فالتابع f محدود على المجموعة A. لنعرّف إذن $m = \inf f(A)$. نجد، تبعاً لِتعريف الحدّ الأدنى، عنصراً y_n من $f(A)$ يُحقّق

$$m \le y_n \le m + \frac{1}{n} \text{ وذلك أياً كان } 1 \le n$$

فالنقطة m لاصقة بالمجموعة المغلقة $f(A)$، فهي تنتمي إلى $f(A)$. أي يوجد عنصر α من A يُحقّق $f(\alpha) = \min f(A)$. ونبرهن بأسلوب مماثل على وجود عنصر β من A يُحقّق $f(\beta) = \max f(X)$.

③ لنفترض أنّ f ليس مستمرّاً بانتظام على A. يوجد إذن $\varepsilon_0 > 0$ ويوجد، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$، عنصر (x_n, y_n) من A^2 يُحقّق

$$\|x_n - y_n\|_E < \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \left\|f(x_n) - f(y_n)\right\|_F > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

ولمّا كانت المجموعة A متراصّة، أمكننا إيجاد تطبيق متزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من عنصر x في A. ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$، يكون :

$$\lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x$$

ولأنّ التابع f مستمرٌّ عند x، استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} f(y_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$$

وهذا ما يثبت أنّ $\lim_{n\to\infty}\left(f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})\right) = 0$. ويناقض $(*)$ لأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left\|f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})\right\|_F > \varepsilon_0$$

ومن ثَمّ لا بدّ أن يكون f مستمرّاً بانتظام على A . ❐

7. التطبيقات الخطّيّة المستمرّة بين فضاءات شعاعيّة منظّمة

7-1. مبرهنة. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منظّمين. وليكن $T : E \to F$ تطبيقاً خطّياً. عندئذ تكون الخواصّ الآتية متكافئة:

1. إنّ T تطبيق مستمرٌّ.
2. إنّ T تطبيق مستمرٌّ عند 0 .
3. يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عددٌ M يُحقّق $\forall x \in E,\ \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

الإثبات

.1 $\Leftarrow$ .2 إنّ هذا الاقتضاء تافه.

.2 $\Leftarrow$ .3 لنختر $\varepsilon = 1$ في تعريف استمرار T عند 0، فنجد $\eta > 0$ يُحقّق

$$\forall z \in E,\quad \|z\|_E \leq \eta \Rightarrow \left\|T(z)\right\|_F \leq 1$$

ليكن x عنصراً من $E\backslash\{0\}$، عندئذ يحقق العنصر $z = \dfrac{\eta}{\|x\|_E}x$ المتراجحة $\|z\|_E \leq \eta$ ومن ثَمّ يكون

$$\left\|T\left(\frac{\eta}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F \leq 1$$

وهذا يكافئ $\left\|T(x)\right\|_F \leq \dfrac{1}{\eta}\|x\|_E$. ومنه 3.

.3 $\Leftarrow$ .1 من الواضح باستخدام خطيّة التطبيق T أنّ

$$\forall (x,y) \in E\times E,\quad \|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x-y)\|_F \leq M\|x-y\|_E$$

فالتطبيق T يُحقّق شرط لِبشتز وهو، إذن، مستمر. ❐

2-7. **مبرهنة** : لتكن E و F و G فضاءات شعاعيّة منظّمة على الحقل $\mathbb{K}$.

1. إذا كان $T : E \to F$ تطبيقاً خطّياً مستمرّاً. كانت المجموعة
$$\mathcal{M} = \left\{ M \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E \right\}$$
مجالاً مغلقاً من النمط $[\beta, +\infty[$ محتوى في $\mathbb{R}_+$. وإذا عرّفنا $\|T\| = \min \mathcal{M}$ كان
$$\|T\| = \sup\left\{ \|T(x)\|_F : x \in E,\ \|x\|_E \leq 1 \right\}$$
2. إذا رمزنا بالرمز $\mathcal{L}_c(E,F)$ إلى فضاء التوابع الخطّية المستمرّة من E إلى F. كان التطبيق $\|T\| \mapsto T$ نظيماً على $\mathcal{L}_c(E,F)$.
3. أيّاً كان T من $\mathcal{L}_c(E,F)$ و S من $\mathcal{L}_c(F,G)$ كان $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.
4. إذا كان F فضاء تامّاً، كان $\mathcal{L}_c(E,F)$ فضاء تامّاً أيضاً.

الإثبات

1. نلاحظ أنّ $\mathcal{M} \neq \varnothing$ لأنّ T مستمر، وأنه إذا كانت M عنصراً من $\mathcal{M}$، كان لدينا $[M, +\infty[\subset \mathcal{M}$، وأخيراً نلاحظ أنّ $\mathcal{M}$ محدودة من الأدنى بالصّفر. ينتج من ذلك أنه إذا كان $\beta = \inf \mathcal{M}$ فإمّا أن يكون $\mathcal{M} =]\beta, +\infty[$ أو $\mathcal{M} = [\beta, +\infty[$ حيث $0 \leq \beta$. في الحقيقة $\beta \in \mathcal{M}$، لأنّه أيّاً كان $1 \leq n$، لدينا $\beta + 2^{-n} \in \mathcal{M}$ ومن ثَمّ
$$\forall n \geq 1, \forall x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq (\beta + 2^{-n})\, \|x\|_E$$
أو
$$\forall x \in E, \forall n \geq 1, \quad \|T(x)\|_F \leq (\beta + 2^{-n})\, \|x\|_E$$
وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد $\forall x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq \beta \|x\|_E$.
ومنه $\mathcal{M} = [\beta, +\infty[$. لنضع كما في نصّ المبرهنة $\|T\| = \beta = \min \mathcal{M}$.

ينتج من تعريف $\|T\|$ أنّ $\|T(x)\|_F \leq \|T\|$ في حالة $\|x\|_E \leq 1$، فالعدد $\|T\|$ عنصر راجح على المجموعة $\left\{ \|T(x)\|_F : \|x\|_E \leq 1 \right\}$ وهي لهذا محدودة من الأعلى. ليكن إذن
$$\alpha = \sup\left\{ \|T(x)\|_F : x \in E,\ \|x\|_E \leq 1 \right\} \leq \|T\|$$
وبالعكس، في حالة عنصر x من $E \backslash \{0\}$، يحقّق $z = x / \|x\|_E$ المتراجحة $\|z\|_E \leq 1$ ومن ثَمّ يكون $\left\| T(x/\|x\|_E) \right\|_F \leq \alpha$ أو $\|T(x)\|_F \leq \alpha\, \|x\|_E$. ينتج من ذلك أنّ $\alpha \in \mathcal{M}$، ومن ثَمّ $\|T\| \leq \alpha$. وهذا ما يثبت صحة المساواة $\alpha = \|T\|$.

2. من الواضح أنّ التطبيق $\|T\| \mapsto T$ يُحقِّق الخاصّتين $\mathcal{N}_1$ و $\mathcal{N}_2$ من تعريف النظيم. لنثبت الخاصّة $\mathcal{N}_3$. ليكن S و T عنصرين من $\mathcal{L}_c(E,F)$. وليكن x عنصراً من E يُحقّق $\|x\|_E \leq 1$. عندئذ يكون

$$\|(T+S)(x)\|_F \leq \|T(x)\|_F + \|S(x)\|_F \leq \|T\| + \|S\|$$

ومن ثَمّ $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$ والخاصّة $\mathcal{N}_3$ محقّقة.

3. ليكن T من $\mathcal{L}_c(E,F)$ و S من $\mathcal{L}_c(F,G)$، وليكن x عنصراً من E. عندئذ

$$\|S\circ T(x)\|_G \leq \|S(T(x))\|_G \leq \|S\|\cdot\|T(x)\|_F \leq \|S\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|_E$$

ومن ثَمّ يكون $\|S\circ T\| \leq \|S\|\cdot\|T\|$ والخاصّة المطلوبة محقّقة.

4. لتكن $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي في $\mathcal{L}_c(E,F)$. أياً كان x من E تتحقق المتراجحة

$$\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2,\quad \|T_n(x)-T_m(x)\|_F \leq \|T_n - T_m\|\cdot\|x\|_E$$

نستنتج من ذلك أنه أياً كان x من E، تُحقّق المتتالية $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ شرط كوشي في الفضاء التام F، فهي إذن متقاربة من عنصر ينتمي إلى F نرمز إليه بالرمز $T(x)$.

- إنّ التطبيق $T(x) \mapsto x$ تطبيق خطيّ من E إلى F، وذلك لأنّه أياً كانت (x,y) من E^2 وأيّاً كانت λ من $\mathbb{K}$ لدينا

$$\begin{aligned}T(x+\lambda y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty}\big(T_n(x)+\lambda T_n(y)\big)\\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lambda\lim_{n\to\infty} T_n(y)\\ &= T(x)+\lambda T(y)\end{aligned}$$

- المتتالية $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة لأنّها تُحقّق شرط كوشي، ومن ثَمّ يمكننا أن نُعرّف العدد الحقيقي $\Lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|$، فيكون

$$\forall n\geq 0, \forall x\in E,\quad \|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|\cdot\|x\|_E \leq \Lambda\|x\|_E$$

ومنه، نجد بجعل n تسعى إلى $+\infty$، أنّ $\forall x\in E, \|T(x)\|_F \leq \Lambda\|x\|_E$، ويكون التطبيق T تطبيقاً خطّياً مستمراً من E إلى F، أي ينتمي T إلى $\mathcal{L}_c(E,F)$.

- لنثبت أنّ $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. لتكن $0<\varepsilon$، نجد، تِبعاً لِتعريف متتاليات كوشي، عدداً N_ε من $\mathbb{N}$، يُحقِّق :

$$(n>N_\varepsilon)\wedge(m>N_\varepsilon) \Rightarrow \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$$

ومنه

$$(n > N_\varepsilon) \Rightarrow \left(\forall m > N_\varepsilon, \forall x \in E, \quad \left\|T_n(x) - T_m(x)\right\|_F \leq \varepsilon \left\|x\right\|_E\right)$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة وجدنا

$$(n > N_\varepsilon) \Rightarrow \left(\forall x \in E, \quad \left\|T_n(x) - T(x)\right\|_F \leq \varepsilon \left\|x\right\|_E\right)$$

وهذا يقتضي أنّ

$$(n > N_\varepsilon) \Rightarrow \left\|T_n - T\right\|_F \leq \varepsilon$$

ومن ثَمّ $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ ، والفضاء $\mathcal{L}_c(E,F)$ فضاء تام. ❐

3-7. نتيجة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً تامّاً. وليكن u من $\mathcal{L}_c(E,E)$ تطبيقاً خطيّاً مستمراً من E إلى E . نفترض أنّ $\|u\| < 1$، حينئذ يكون التطبيق الخطي $I_E - u$ [1] قلوباً ومقلوبه مستمرٌّ ويُحقّق $\left\|(I_E - u)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{1 - \|u\|}$.

الإثبات

لمّا كان $\forall n \geq 0, \|u^n\| \leq \|u\|^n$، استناداً إلى الخاصّة 3. من المبرهنة السابقة، ولمّا كان $\|u\| < 1$، كانت المتسلسلة $\sum \|u^n\|$ متقاربة بالإطلاق. ولكنّ الفضاء $\mathcal{L}_c(E,E)$ فضاء تامٌّ، ينتج من ذلك أنّ المتسلسلة $\sum u^n$ متقاربة.

لنضع

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E,E)$$

ولنعرّف أيضاً $S_n = \sum_{k=0}^{n} u^k$. نلاحظ أنه أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، لدينا

$$(I_E - u) \circ S_n = S_n \circ (I_E - u) = I_E - u^{n+1}$$

ومن ثَمّ

$$(I_E - u) \circ S - I_E = (I_E - u) \circ (S - S_n) - u^{n+1}$$
$$S \circ (I_E - u) - I_E = (S - S_n) \circ (I_E - u) - u^{n+1}$$

---

[1] إنّ I_E هو التطبيق المطابق من E إلى E .

وأخيراً

$$\|(I_E - u)\circ S - I_E\| \le \|I_E - u\|\cdot\|S - S_n\| + \|u\|^{n+1}$$
$$\|S\circ(I_E - u) - I_E\| \le \|I_E - u\|\cdot\|S - S_n\| + \|u\|^{n+1}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ وجدنا

$$S\circ(I_E - u) = (I_E - u)\circ S = I_E$$

فالتطبيق الخطّيّ $I_E - u$ قَلوب ومقلوبه هو التطبيق الخطّي المستمر S. أخيراً ينتج من العلاقة $(I_E - u)\circ S = I_E$ أنّ $S = I_E + u\circ S$، ولأنّ $\|I_E\| = 1$ يكون

$$\|S\| \le 1 + \|u\|\cdot\|S\|$$

وهذا يثبت أنّ $\|S\| \le (1 - \|u\|)^{-1}$. ❒

7-4. أمثلة

➢ ليكن $E = \left(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$ أي فضاء التوابع الحقيقية المستمرّة على $[0,1]$، مزوّداً بالنظيم المنتظم:

$$\forall f \in E,\quad \|f\|_\infty = \sup_{[0,1]}|f|$$

ولنتأمّل التطبيق الخطّي $T : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$.

إنّ التطبيق T مستمرٌّ لأن

$$\forall f \in E,\quad \left|T(f)\right| = \left|f(0)\right| \le \sup_{[0,1]}\left|f\right| = \|f\|_\infty$$

ويكون $\|T\| \le 1$. من ناحية أخرى إذا كان $\mathbb{1}$ هو التابع الثابت الذي يساوي 1 على المجال $[0,1]$ كان

$$1 = \left|\mathbb{1}(0)\right| \le \|T\|\cdot\|\mathbb{1}\|_\infty = \|T\|$$

ومنه $\|T\| = 1$.

➢ ليكن $E = \left(C([0,1]), \|\cdot\|_1\right)$ أي فضاء التوابع الحقيقية المستمرّة على $[0,1]$، مزوّداً بالنظيم المعرّف كما يأتي:

$$\forall f \in E,\quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f|$$

ولنتأمّل التطبيق الخطّي $\delta : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(0)$. التطبيق δ ليس مستمراً.

لأنه لو افترضنا جدلاً استمرار δ، وتأملنا التابع

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(t) = (n+1)(1-t)^n$$

لوجدنا

$$\forall n \geq 0, \quad n+1 = \left|f_n(0)\right| = \left|\delta(f_n)\right| \leq \left\|\delta\right\| \cdot \left\|f_n\right\|_1 = \left\|\delta\right\|$$

وهذا تناقض واضح.

➤ ليكن $E = \left(\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$، فضاء المصفوفات الحقيقيّة التي لها n سطراً وعموداً واحداً، مزوّداً بالنظيم:

$$\forall X = {}^t[x_1,\ldots,x_n] \in E, \quad \|X\|_\infty = \max\left(|x_1|,\ldots,|x_n|\right)$$

ولتكن $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ مصفوفة مربّعة غير صفرية من $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. عندئذ نعرّف التطبيق الخطّي $T_A : E \to E,\ X \mapsto AX$. نهدف إلى إثبات استمرار التطبيق الخطّي T_A وحساب نظيمه.

لتكن $X = {}^t[x_1,\ldots,x_n]$ من E ولنضع $Y = {}^t[y_1,\ldots,y_n] = AX$ فيكون

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad \text{أياً كانت } i \text{ من } \{1,\ldots,n\}$$

ومن ثَمّ

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, |y_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \cdot \max\left(|x_1|,\ldots,|x_n|\right)$$

وهذا يقتضي أنّ $\|AX\|_\infty \leq \Lambda_A \|X\|_\infty$ إذ عرّفنا $\Lambda_A = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

ينتج مما سبق أنّ

$$\forall X \in E, \quad \|T_A(X)\|_\infty \leq \Lambda_A \|X\|_\infty$$

فالتطبيق T_A مستمرٌّ ونظيمه يحقّق $\|T_A\| \leq \Lambda_A$.

وبالعكس، نجد استناداً إلى تعريف Λ_A دليلاً k يُحقّق

$$\Lambda_A = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

لنعرفّ الشعاع $Z = {}^t[z_1, \dots, z_n]$ من E كما يأتي: نضع $z_j = 0$ إذا كان $a_{kj} = 0$ وإذا كان $a_{kj} \neq 0$ وضعنا $z_j = a_{kj} / |a_{kj}|$. ينتج من هذا التعريف أنّ المُركّبة ذات الدليل k في $T_A(Z)$ تُعطى بالعلاقة:

$$(T_A(Z))_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} z_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \Lambda_A$$

ومن ثَمّ يكون

$$\Lambda_A \leq \|T_A(Z)\|_\infty \leq \|T_A\| \cdot \|Z\|_\infty \leq \|T_A\|$$

نستنتج من هذه الدراسة أنّ التطبيق الخطّي T_A مستمرٌّ وأنّ نظيمه يحقّق

$$\|T_A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

7-5. **مبرهنة**. لتكن E_1 و E_2 و F فضاءات شعاعيّة منظّمة. نزوّد $E_1 \times E_2$ بالنظيم

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad \|(x_1, x_2)\| = \max\left(\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2} \right)$$

وليكن $B : E_1 \times E_2 \to F$ تطبيقاً ثنائي الخطّية. عندئذ تكون الخواصّ الآتية متكافئة

1. إنّ B تطبيق مستمرٌّ.
2. إنّ B تطبيق مستمرٌّ عند $(0,0)$.
3. يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عددٌ M يُحقّق

$\forall x \in E_1 \times E_2, \; \|B(x_1, x_2)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}$.

الإثبات

1. $\Leftarrow$ 2. إنّ هذا الاقتضاء تافه.

2. $\Leftarrow$ 3. لنختر $\varepsilon = 1$ في تعريف استمرار B عند $(0,0)$، فنجد $0 < \eta$ يُحقّق

$$\forall (z_1, z_2) \in E_1 \times E_2, \max\left(\|z_1\|_{E_1}, \|z_2\|_{E_2} \right) \leq \eta \Rightarrow \left\| B(z_1, z_2) \right\|_F \leq 1$$

لتكن x_1 من $E_1 \backslash \{0\}$، و x_2 من $E_2 \backslash \{0\}$ عندئذ يحقق العنصران:

$$z_1 = \frac{\eta x_1}{\|x_1\|_{E_1}} \text{ من } E_1 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{\eta x_2}{\|x_2\|_{E_2}} \text{ من } E_2$$

المتراجحة $\max\left(\|z_1\|_{E_1}, \|z_2\|_{E_2} \right) \leq \eta$.

ومن ثَمّ يكون

$$\left\| B\left(\frac{\eta x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, \frac{\eta x_2}{\|x_2\|_{E_2}}\right)\right\|_F \leq 1$$

وهذا يكافئ

$$\left\| B(x_1, x_2)\right\|_F \leq \frac{1}{\eta^2}\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}$$

ومنه 3.

3. $\Leftarrow$ 1. ليكن (α,β) من $E_1\times E_2$ ، أياً كان (x,y) من $E_1\times E_2$ تتحقّق المساواة

$$B(x,y)-B(\alpha,\beta)=B(x-\alpha,y-\beta)+B(\alpha,y-\beta)+B(x-\alpha,\beta)$$

لأنّ B ثنائي الخطيّة. فإذا كان $\left\|(x,y)-(\alpha,\beta)\right\|\leq 1$ أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\left\|B(x,y)-B(\alpha,\beta)\right\|_F &\leq \\ &\leq M(\|x-\alpha\|_{E_1}\|y-\beta\|_{E_2}+\|\alpha\|_{E_1}\|y-\beta\|_{E_2}+\|x-\alpha\|_{E_1}\|\beta\|_{E_2})\\ &\leq M(1+\|\alpha\|_{E_1}+\|\beta\|_{E_2})\cdot\max(\|x-\alpha\|_{E_1},\|y-\beta\|_{E_2})\\ &\leq M(1+\|\alpha\|_{E_1}+\|\beta\|_{E_2})\cdot\left\|(x,y)-(\alpha,\beta)\right\|\end{aligned}$$

وهذا يثبت استمرار B عند (α,β). ❐

يمكننا في الحقيقة أن نعمّم المبرهنة السابقة على الوجه الآتي:

6-7. مبرهنة. لتكن E_1 و E_2 و $\cdots$ و E_n و F فضاءات شعاعيّة منظّمة. نزوّد الفضاء $G=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ بالنّظيم

$$\forall X=(x_1,\ldots,x_n)\in G,\quad \|X\|_G=\max_{1\leq k\leq n}(\|x_k\|_{E_k})$$

وليكن $B:G\to F$ تطبيقاً $n-$خطيّاً. عندئذ تكون الخواصّ الآتية متكافئة:

1. إنّ B تطبيق مستمرٌّ.
2. إنّ B تطبيق مستمرٌّ عند $(0,0,\ldots,0)$ من G.
3. يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عددٌ M يُحقِّق

$$\forall(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n,\quad \|B(x_1,\ldots,x_n)\|_F\leq M\prod_{k=1}^{n}\|x_k\|_{E_k}$$

يجري إثبات هذه المبرهنة بأسلوب مماثل للمبرهنة السابقة التي توافق حالة $n=2$ ، ونترك التفاصيل للقارئ.

8. الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة المنتهية البُعد

8-1. **مبرهنة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً بعده منتهٍ على $\mathbb{K}$، وليكن $\dim_{\mathbb{K}} E = m$. وأخيراً ليكن $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_m)$ أساساً للفضاء E. نزوّد الفضاء $\mathbb{K}^m$ بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$ الذي أصبح متعارفاً. عندئذ يكون التطبيق الخطّي

$$\Phi : \mathbb{K}^m \to E, \quad (x_1,\ldots,x_m) \mapsto \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$$

تقابلاً ويكون كلٌّ من Φ و Φ^{-1} مستمراً.

الإثبات

- إنّ كون التطبيق الخطي Φ تقابلاً ناجم عن كون $\mathcal{E}$ أساساً للفضاء E.
- ليكن $X = (x_1,\ldots,x_m)$ عنصراً من $\mathbb{K}^m$، عندئذ تتحقّق المتراجحة :

$$\|\Phi(X)\|_E \le \sum_{k=1}^{m} |x_k| \|e_k\|_E \le \left(\sum_{k=1}^{m} \|e_k\|_E\right) \max_{1\le k\le m}(|x_k|) = \left(\sum_{k=1}^{m} \|e_k\|_E\right) \|X\|_\infty$$

وهذا يثبت استمرار التطبيق الخطّي Φ، وأنّ $\|\Phi\| \le \sum_{k=1}^{m} \|e_k\|_E$.

- من ناحية أخرى، لمّا كانت المجموعة $S = \{X \in \mathbb{K}^m : \|X\|_\infty = 1\}$ متراصّة، لأنّها مجموعة مغلقة ومحدودة في $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$ وذلك بناءً على المبرهنة 6-7.، ولمّا كان التطبيق

$$\varphi : S \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \left\|\Phi(X)\right\|_E$$

مستمراً، بصفته تركيب توابع مستمرّة، فإنه يبلغ حده الأدنى، أي

$$\exists X_0 \in S : \quad \mu = \varphi(X_0) = \min\left\{\left\|\Phi(X)\right\|_E : \|X\|_\infty = 1\right\}$$

من الواضح أنّ $\mu > 0$ لأنّ $\mu = 0$ يقتضي أنّ $\Phi(X_0) = 0$، ومنه $X_0 = 0$ لأنّ Φ متباينٌ وهذا يناقض كون $\|X_0\|_\infty = 1$.

لتكن X من $\mathbb{K}^m \backslash \{0\}$، فيكون $\left\|\Phi\left(\frac{X}{\|X\|_\infty}\right)\right\|_E \ge \mu$ لأنّ العنصر $\frac{X}{\|X\|_\infty}$ عنصرٌ من S، ومن ثَمّ ينتج أنّ

$$\forall X \in \mathbb{K}^m, \quad \mu \|X\|_\infty \le \|\Phi(X)\|_E$$

وهذا يكافئ

$$\forall x \in E, \quad \left\|\Phi^{-1}(x)\right\|_\infty \leq \frac{1}{\mu}\|x\|_E$$

فالتطبيق الخطّي Φ^{-1} مستمر. ❐

2-8. **نتيجة**. ليكن E فضاءً شعاعياً منظماً منتهي البعد على $\mathbb{K}$، عندئذ يكون E فضاءً تامّاً، وتكون المجموعات المتراصّة فيه هي المجموعات المغلقة والمحدودة.

الإثبات

- ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ أساساً للفضاء E، ولنتأمّل التطبيق

$$\Phi : \mathbb{K}^m \to E, (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$$

وقد زوّدنا $\mathbb{K}^m$ بالنظيم المتعارف $\|\cdot\|_\infty$. نعلم بمقتضى المبرهنة السابقة أنّ التطبيقين Φ و Φ^{-1} مستمران.

لتكن $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً تُحقّق شرط كوشي في E. تُبيّن المتراجحة الآتية

$$\forall(n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \left\|\Phi^{-1}(y_n) - \Phi^{-1}(y_m)\right\|_\infty \leq \left\|\Phi^{-1}\right\| \cdot \|y_n - y_m\|_E$$

أنّ المتتالية $\left(\Phi^{-1}(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقّق شرط كوشي في الفضاء التام $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$ فهي متقاربة من X في $\mathbb{K}^m$. ولأنّ التطبيق Φ تطبيق مستمرٌّ نتج لدينا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\Phi^{-1}(y_n)) = \Phi(X)$$

أو $\lim_{n\to\infty} y_n = \Phi(X)$، فالمتتالية $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة. وهذا يثبت أنّ الفضاء E فضاءٌ تامٌّ.

- لتكن A مجموعة مغلقة ومحدودة في E. يُبيّن استمرار التطبيق Φ أنّ المجموعة F مجموعة مغلقة في $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$، وكذلك فإن استمرار التطبيق Φ^{-1} يُبيّن أنّ المجموعة F محدودة لأنّ الاحتواء $A \subset B(0, M)$ يقتضي الاحتواء $\Phi^{-1}(A) \subset B(0, M\|\Phi^{-1}\|)$. فالمجموعة F مجموعة مغلقة ومحدودة في $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$، وهذا يثبت أنها مجموعة متراصّة بتطبق المبرهنة 6-7.

إذن المجموعة $A = \Phi(\Phi^{-1}(A))$ متراصّة لأن Φ مستمر. ❐

3-8. **مبرهنة**. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منظّمين على الحقل $\mathbb{K}$. نفترض أنّ الفضاء E منتهي البعد. عندئذ يكون كلُّ تطبيق خطّي $u : E \to F$ مستمراً.

الإثبات

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ أساساً للفضاء E. ولنعرّف التطبيق $v = u \circ \Phi$، حيث Φ هو التقابل الخطّي الذي أصبح مألوفاً

$$\Phi : \mathbb{K}^m \to E, (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$$

مهما تكن $X = (x_1, \ldots, x_m)$ من $\mathbb{K}^m$، لدينا المتراجحة:

$$\|v(X)\|_F \leq \sum_{k=1}^{m} |x_k| \cdot \|u(e_k)\|_F \leq (\sum_{k=1}^{m} \|u(e_k)\|_F) \cdot \|X\|_\infty$$

هذا يثبت استمرار التطبيق الخطّي v، ولأنّ Φ^{-1} مستمرٌّ، نستنتج كذلك استمرار التطبيق $u = v \circ \Phi^{-1}$ وهي النتيجة المرجوّة. ❐

4-8. **مبرهنة**. جميع النظم على فضاء شعاعي منتهي البُعد متكافئة.

الإثبات

ليكن N_1 و N_2 نظيمين على فضاء شعاعيّ منتهي البعد E. ولنتأمّل الفضاءين الشعاعيين المنظّمين $E_1 = (E, N_1)$ و $E_2 = (E, N_2)$. وكذلك لنتأمّل التطبيقين الخطيّين

$$\alpha : E_1 \to E_2, \quad x \mapsto x \quad \text{و} \quad \beta : E_2 \to E_1, \quad x \mapsto x .$$

لمّا كان هذان التطبيقان مستمرين بمقتضى المبرهنة السابقة، أمكننا أن نكتب

$$\forall x \in E, \ \ N_2(x) = N_2(\alpha(x)) \leq \|\alpha\| \cdot N_1(x)$$

و

$$\forall x \in E, \ \ N_1(x) = N_1(\beta(x)) \leq \|\beta\| \cdot N_2(x)$$

وهذا يثبت تكافؤ النظيمين N_1 و N_2. ❐

8-5. **مبرهنة**. إذا كان F فضاءً شعاعيّاً جزئياً **منتهي البُعد** من فضاء شعاعي منظّم E. كانت F مجموعة مغلقة في E.

الإثبات:

هذه النتيجة واضحة لِكون الفضاء F فضاءً تاماً في هذه الحالة. ❐

نختتم هذا البحث بذكر خاصة مميزة للفضاءات الشعاعية المنظمة المنتهية البعد. لنبدأ بالتمهيد البسيط التالي:

8-6. **تمهيد**. ليكن E فضاء شعاعياً منظماً. وليكن F فضاء شعاعياً جزئياً من E. نفترض أنّ F مجموعة مغلقة، وأنّ $F \neq E$. عندئذ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in E, \quad \left(\|y\| = 1\right) \wedge \left(d(y,F) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\right)$$

الإثبات

ليكن a عنصراً من $E \backslash F$. لمّا كان F مجموعة مغلقة، كان $d(a,F) = d > 0$. نجد إذن في F عنصراً b يُحقّق $\|a-b\| \leq (1+\varepsilon)d$. لنعرّف

$$y = \frac{a-b}{\|a-b\|}$$

فيكون من جهة أولى $\|y\| = 1$. ومن جهة ثانية، مهما يكن x من F، يكن العنصرُ $b + \|a-b\| x$ عنصراً من F، ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} \|y - x\| &= \frac{1}{\|a-b\|} \big\| a - b - \|a-b\| \, x \big\| \\ &\geq \frac{d}{(1+\varepsilon)d} = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \end{aligned}$$

وبذلك يكتمل إثبات التمهيد. ❐

8-7. **مبرهنة**-Riesz. ليكن E فضاء شعاعياً منظماً. إذا كانت الكرة الواحدية المغلقة $\overline{B}(0,1)$ في E متراصةً، كان E فضاءً منتهي البعد.

الإثبات

لنفترض أنّ بُعد الفضاء الشعاعي E غير منته، يمكننا عندئذ أن ننشئ متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من عناصر E تحقّق:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\|x_n\| = 1) \wedge \left(d(x_n, \mathrm{vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})) \geq \frac{1}{2}\right)$$

في الحقيقة نختار x_1 عنصراً ما يحقّق $\|x_1\| = 1$، لنفترض أننا قد أنشأنا الحدود $x_1,\ldots,x_{n-1}$ ولنعرّف $F = \mathrm{vect}(x_1,\ldots,x_{n-1})$. لمّا كان F فضاءً منتهي البعد كان $F \neq E$، وكان F مجموعة مغلقة وبمقتضى التمهيد السابق، بوضع $\varepsilon = 1$ نجد x_n تُحقّق الشرطين :

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{و} \quad d(x_n, F) \geq \frac{1}{2}$$

نكون إذن قد أوجدنا ضمن $\overline{B}(0,1)$ متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تحقّق

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad n \neq m \Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

ومن ثمّ لا توجد أية متتالية جزئية من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة في E، وهذا يناقض كون المجموعة $\overline{B}(0,1)$ مجموعة متراصة. ❐

تمرينات

التمرين 1. ليكن E فضاءً شعاعيّاً مزوّداً بنظيم.

1. أثبت أنّه إذا كان x و y من $E\backslash\{0\}$ و $x \neq y$ فإنّ:

$$\|x-y\| \geq \frac{\max\left(\|x\|,\|y\|\right)}{1+\left|\dfrac{\|x\|-\|y\|}{\|x-y\|}\right|}\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

2. استنتج أنّه أيّاً كان العنصران x و y من $E\backslash\{0\}$، لدينا:

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\max\left(\|x\|,\|y\|\right)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

3. هل يمكن الاستعاضة عن الثّابت $\frac{1}{2}$ بثابت أكبر؟

الحل

1. يمكننا أن نفترض أنّ $\|x\| \geq \|y\|$ دون الإنقاص من العموميّة، وعندئذ يكون

$$\begin{aligned}
\max\left(\|x\|,\|y\|\right)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| &= \left\|x-\frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| \\
&\leq \|x-y\| + \left\|y-\frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| \\
&\leq \|x-y\| + \|y\|\left|1-\frac{\|x\|}{\|y\|}\right| \\
&\leq \|x-y\| \cdot \left(1+\frac{\left|\|y\|-\|x\|\right|}{\|x-y\|}\right)
\end{aligned}$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

2. بالاستفادة من المتراجحة $\left|\|x\|-\|y\|\right| \leq \|x-y\|$ نستنتج أنّ

$$\max\left(\|x\|,\|y\|\right)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq 2\,\|x-y\|$$

وهذا يُكافئ المتراجحة المطلوبة.

3. الثابت $\frac{1}{2}$ هو أفضل ما يمكن في المتراجحة السابقة، فمثلاً في حالة $E = \mathbb{R}^2$ ، مزوّداً بالنظيم $\left\|(a,b)\right\|_1 = \left|a\right| + \left|b\right|$ ، إذا تأمّلنا $x = (2^n, 0)$ و $y = (0, -2^{-n})$ نرى أنّ المتراجحة

$$\left\|x - y\right\| \geq c \max\left(\|x\|, \|y\|\right) \cdot \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|$$

تُكافئ $2^n + 2^{-n} \geq c 2^{n+1}$ ، ومن ثَمّ $2c \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 2^{-2n}\right) = 1$. ■

التمرين 2. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، ولتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من E ، و x عنصراً من E . أثبت أنّ $d(x,A) = d(x,\bar{A})$ وأنّ

$$d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$$

الحل

- لمّا كان $A \subset \bar{A}$ كان من الواضح أنّ $d(x,A) \geq d(x,\bar{A})$.
- ومن جهة أخرى، لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ يوجد عنصر y في $\bar{A}$ يُحقّق

$$\left\|x - y\right\| \leq d(x,\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ولكن $y \in \bar{A}$ إذن يوجد z في A يُحقّق

$$\left\|y - z\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

وعليه يكون

$$d(x,A) \leq \left\|x - z\right\| \leq \left\|x - y\right\| + \left\|y - z\right\| \leq d(x,\bar{A}) + \varepsilon$$

وهذا يثبت المساواة المطلوبة لأنّ ε عددٌ موجبٌ تماماً كيفيّ.

- من الواضح أنّ $x \in \bar{A}$ يقتضي $d(x,\bar{A}) = 0$ ، ومن ثَمّ $d(x,A) = 0$ استناداً إلى ما سبق.
- لنفترض إذن أنّ $d(x,A) = 0$ ، عندئذ مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$ يوجد x_n في A يُحقّق

$$\left\|x - x_n\right\| \leq \frac{1}{n}$$

وهذا يقتضي أنّ x هي نهاية لمتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من عناصر A ، فهي إذن نقطة لاصقة بالمجموعة A . أي $x \in \bar{A}$. ■

التمرين 3. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، ولتكن F_1 و F_2 مجموعتين مغلقتين من الفضاء E . نفترض أنّ $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. أثبت أنّه توجد مجموعتان مفتوحتان O_1 و O_2 تُحقّقان

$$F_1 \subset O_1 \text{ و } F_2 \subset O_2 \text{ و } O_1 \cap O_2 = \varnothing$$

الحل

استناداً إلى التمرين السابق نرى أنّ

$$\forall x \in E, \quad d(x, F_1) + d(x, F_2) > 0$$

وذلك لأنّ $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. يمكننا إذن أن نعرّف التابع

$$g : E \to \mathbb{R}, \, g(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

فنرى أنّ هذا التابع مستمرٌّ بسبب استمرار تابع المسافة إلى مجموعة. ويُحقّق الشرطين:

$$F_1 = g^{-1}\big(\{0\}\big) \text{ و } F_2 = g^{-1}\big(\{1\}\big)$$

لنعرّف إذن

$$O_1 = g^{-1}\big(]-\infty, 1/2[\big) \quad \text{و} \quad O_2 = g^{-1}\big(]1/2, +\infty[\big)$$

فنلاحظ فعلاً أن

$$F_1 \subset O_1 \text{ و } F_2 \subset O_2 \text{ و } O_1 \cap O_2 = \varnothing$$

بقي أن نبرهن أنّ المجموعتين O_1 و O_2 مفتوحتان. لتكن a من O_1، عندئذ يكون $g(a) < 1/2$. وبسبب استمرار g عند a يوجد عدد حقيقي $0 < \eta$، يُحقّق

$$\forall x \in E, \quad \left\|x - a\right\| < \eta \Rightarrow \left|g(x) - g(a)\right| < \frac{1}{2} - g(a)$$

وهذا يقتضي

$$\forall x \in E, \quad \left\|x - a\right\| < \eta \Rightarrow g(x) < \frac{1}{2}$$

إذن $B(a, \eta) \subset O_1$ فالمجموعة O_1 هي جوار للنقطة a . والمجموعة O_1 مجموعة مفتوحة لأنها جوار لكل عنصر من عناصرها. ونجد بأسلوب مماثل أنّ المجموعة O_2 مجموعة مفتوحة أيضاً فيتم إثبات المطلوب. ■

التمرين 4. لتكن A و B مجموعتين من فضاء شعاعيّ منظّم E . أثبت أنّ

$$\operatorname{int}(A\setminus B) = \operatorname{int}(A)\setminus\overline{B}$$

الحل

من الواضح أنّ $\operatorname{int}(A)\setminus\overline{B}$ هي مجموعة مفتوحة محتواة في $A\setminus B$. إذن لا بُدّ أن يكون

$$\operatorname{int}(A)\setminus\overline{B} \subset \operatorname{int}(A\setminus B)$$

وبالعكس، ليكن x من $\operatorname{int}(A\setminus B)$ ، عندئذ تكون المجموعة $V = A\setminus B$ جواراً للعنصر x .
وعلى هذا تكون المجموعة A جواراً للعنصر x ، لأنّها تحوي V ، أي $x \in \operatorname{int}(A)$ ، وكذلك لا تنتمي x إلى $\overline{B}$ لأنّ $V \cap B = \varnothing$ ، أي $x \in \operatorname{int}(A)\setminus\overline{B}$. ■

التمرين 5. لتكن A مجموعة مفتوحة من فضاء شعاعيّ منظّم E ، و B مجموعة جزئيّة من E .

أثبت أنّ $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$.

الحل

- لمّا كان $A \cap \overline{B} \supset A \cap B$ ، استنتجنا مباشرة أنّ $\overline{A \cap \overline{B}} \supset \overline{A \cap B}$.
- وبالعكس، لتكن x من $\overline{A \cap \overline{B}}$. إذن مهما تكن $\varepsilon > 0$ يكن

$$B(x,\varepsilon) \cap (A \cap \overline{B}) \neq \varnothing$$

لنختر إذن عنصراً y من $B(x,\varepsilon) \cap (A \cap \overline{B})$ عندئذ تكون المجموعة $B(x,\varepsilon) \cap A$ جواراً للعنصر y ، لأنّ المجموعة A مفتوحة، ويكون من ثَمّ

$$(B(x,\varepsilon) \cap A) \cap \overline{B} \neq \varnothing$$

لأنّ y عنصرٌ من $\overline{B}$. وعليه نكون قد أثبتنا أنّه

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \cap (A \cap B) \neq \varnothing$$

أي إنّ $x \in \overline{A \cap B}$. ■

التمرين 6. لتكن U و V مجموعتين مفتوحتين من فضاء شعاعيّ منظّم E . أثبت أنّ

$$\overline{U} = \overline{V} = E \Leftrightarrow \overline{U \cap V} = E$$

الحل

- لمّا كان $U \supset U \cap V$ و $V \supset U \cap V$ كان من الواضح أنّ المساواة $\overline{U \cap V} = E$ تقتضي أنّ $\overline{U} = \overline{V} = E$. يجب إذن برهان صحة الاقتضاء المُعاكس.

▪ لنفترض جدلاً أنّه يوجد عنصر x في $E\backslash\overline{U \cap V}$. يوجد إذن $\varepsilon > 0$ يُحقّق

$$B(x,\varepsilon) \cap (U \cap V) = \varnothing$$

ولكن $x \in E = \bar{U}$ إذن المجموعة $B(x,\varepsilon) \cap U$ غير خالية ويوجد عنصر y ينتمي إليها. ولكنّ المجموعة $B(x,\varepsilon) \cap U$ مجموعة مفتوحة، فهي من ثَمّ جوار للعنصر y . ولأنّ $y \in \bar{V}$ استنتجنا أنّ

$$\big(B(x,\varepsilon) \cap U\big) \cap V \neq \varnothing$$

وهذا تناقض. إذن لا بُد أن تتحقّق المساواة $E = \overline{U \cap V}$.

التمرين 7. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً على الحقل $\mathbb{K}$. نعرّف، أياً كانت المجموعتان A و B من E وأياً كان λ من $\mathbb{K}$ ، المجموعتين:

$$A + B = \{a + b : (a,b) \in A \times B\}$$
$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$$

أثبت صحّة الخواص الآتية:

$$\overline{\lambda A} = \lambda \bar{A} \text{ و } \operatorname{int}(A) + \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A+B) \text{ و } \bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A+B}$$
$$\text{و } \operatorname{int}(\lambda A) = \lambda \operatorname{int}(A)$$

الحل

❖ لتكن $x = a + b \in \bar{A} + \bar{B}$ ، عندئذ توجد متتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A ، وتوجد متتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من B بحيث $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ، و $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. وعندئذ نكون قد وجدنا في $A + B$ متتالية $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعى إلى x . إذن $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A+B}$.

❖ لنلاحظ أنّ $\operatorname{int}(A) + \operatorname{int}(B)$ مجموعة مفتوحة، لأنّها اجتماع جماعة من المجموعات المفتوحة:

$$\operatorname{int}(A) + \operatorname{int}(B) = \bigcup_{b\in\operatorname{int}(B)} (\operatorname{int}(A) + b)$$

ولمّا كانت هذه المجموعة المفتوحة محتواة في $A + B$ استنتجنا أنّها محتواة في $\operatorname{int}(A+B)$.

❖ إثبات الخاصّتين $\overline{\lambda A} = \lambda \bar{A}$ و $\operatorname{int}(\lambda A) = \lambda \operatorname{int}(A)$ بسيطٌ، وينتج مباشرةً من كوْن التقابل $x \mapsto \lambda x$ (في حالة $\lambda \neq 0$) مستمراً هو وتقابله العكسي.

التمرين 8. لتكن U مجموعة مفتوحة من فضاء شعاعيّ منظّم E. أثبت أنّ U مجموعة محدّبة إذا وفقط إذا تحقّق الشّرط : $\forall (x,y) \in U^2, \quad \frac{x+y}{2} \in U$.

الحل

لنرمز بالرمز b_k^n إلى الكسر الإثناني $k2^{-n}$، ولتكن $\mathcal{P}_n$ الخاصّة الآتية:

$$\forall (x,y) \in U^2, \forall k \in \{0,1,\ldots,2^n\}, \quad b_k^n x + (1-b_k^n)y \in U$$

نلاحظ أنّ $\mathcal{P}_1$ صحيحة استناداً إلى الفرْض.

لنفترض صحّة $\mathcal{P}_n$ عندئذ، مهما تكن (x,y) من U^2، ومهما تكن k من $\{0,1,\ldots,2^n\}$ لدينا

$$b_{2k}^{n+1} x + (1-b_{2k}^{n+1})y \in U$$

لأنّ $b_{2k}^{n+1} = b_k^n$، وكذلك، لأنّ $b_{2k+1}^{n+1} = (b_k^n + b_{k+1}^n)/2$ نجد

$$b_{2k+1}^{n+1} x + (1-b_{2k+1}^{n+1})y = \frac{\Big(b_k^n x + (1-b_k^n)y\Big) + \Big(b_{k+1}^n x + (1-b_{k+1}^n)y\Big)}{2} \in U$$

وهذا يثبت صحّة $\mathcal{P}_{n+1}$. وعليه نرى أنّ الخاصّة $\mathcal{P}_n$ صحيحة أيّاً كانت قيمة n من $\mathbb{N}^*$.

لتكن (x,y) من $U \times U$، ولتكن λ من $]0,1[$. لمّا كانت المجموعة U مفتوحة استنتجنا وجود عدد $\varepsilon > 0$، يُحقّق $B(x,\varepsilon) \subset U$ و $B(y,\varepsilon) \subset U$. ولنتأمّل عدداً n من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق المتراجحة $\|x-y\|\, 2^{-n} < \varepsilon$. عندئذ نختار $k = \lfloor 2^n \lambda \rfloor$ فيكون k عنصراً من $\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ ويكون $\lambda \in [b_k^n, b_{k+1}^n[$. ثُمّ نعرّف

$$z = (\lambda - b_k^n)(x-y)$$

عندئذ نجد استناداً إلى هذا التعريف أنّ $\|z\| < \varepsilon$. وعليه يكون $x+z \in B(x,\varepsilon) \subset U$، ويكون $y+z \in B(y,\varepsilon) \subset U$. وعندئذ

$$\lambda x + (1-\lambda)y = b_k^n(x+z) + (1-b_k^n)(x+z) \underset{\mathcal{P}_n}{\in} U$$

وهذا يثبت المطلوب. ■

التمرين 9. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً.

1. لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر E تحقّق الشّرط:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2^n} \tag{$*$}$$

أثبت أنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تحقّق شرط كوشي.

2. أثبت أنّه إذا كانت $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من E تحقّق شرط كوشي، فتوجد متتالية جزئيّة منها تحقّق الشّرط $(*)$.

3. أثبت أنّ E فضاء تامّ إذا وفقط إذا كانت كلّ متتالية محقّقة للشّرط $(*)$ متقاربة.

4. أثبت أنّ E فضاء تامّ إذا وفقط إذا كانت كلّ متسلسلة متقاربة بالنظيم متقاربة.

الحل

1. ليكن ε عدداً موجباً تماماً، عندئذ يوجد N_ε يُحقّق $2^{-n+1} < \varepsilon$ أيّاً كانت $N_\varepsilon < n$.
وعلى هذا، مهما تكن (n,m) من $\mathbb{N}^2$ فإنّ الشرط $m > n > N_\varepsilon$ يقتضي

$$\left\|x_m - x_n\right\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \left\|x_{k+1} - x_k\right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

2. لنعرّف $X_n = \{x_k : k \geq n\}$ ، و

$$\delta_n = \operatorname{diam}(X_n) = \sup\{\|x-y\| : x \in X_n, y \in X_n\}.$$

من الواضح أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \Leftrightarrow \text{تُحقّق شرط كوشي } (x_n)_{n\geq 1}$$

نعرّف التابع المتزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بالتدريج كما يأتي:

$$\varphi(0) = \min\left\{n : \delta_n \leq 1\right\}$$
$$\varphi(n) = \min\left\{k > \varphi(n-1) : \delta_k \leq 2^{-n}\right\} : \quad n \geq 1$$

لمّا كان $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ استنتجنا أنّ $x_{\varphi(n+1)} \in X_{\varphi(n)}$ ومن ثَمّ

$$\left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq \delta_{\varphi(n)} \leq \frac{1}{2^n}$$

وعلى هذا تُحقّق المتتالية الجزئيّة $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ الشرط $(*)$.

3. لنفترض أوّلاً أنّ E فضاء تامّ. ولتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية تُحقّق الشرط $(*)$، عندئذ تُحقِّق هذه المتتالية شرط كوشي استناداً إلى نتيجة السؤال 1، وهي من ثَمّ متقاربة لأنّ E فضاء تام.
وبالعكس، لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من E تحقّق شرط كوشي، إذن توجد متتالية جزئيّة منها $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق الشرط $(*)$، وتكون من ثَمّ متقاربة. ولكن تكون متقاربة كلُّ متتالية تُحقّق شرط كوشي ويمكن أن نستخلص منها متتالية جزئيّة متقاربة. إذن $(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة والفضاء E تام.

4. لنفترض أنّ الفضاء E تامٌّ. عندئذ تحقّق متتالية المجاميع الجزئيّة لكلّ متسلسلة متقاربة بالنظيم، شرطَ كوشي وتكون من ثَمّ متقاربة.
وبالعكس، لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية تُحقّق الشرط $(*)$، عندئذ تكون المتسلسلة $\sum(x_{n+1}-x_n)$ متقاربة بالنظيم، ومن ثَمّ متقاربة. ولكنّ تقارب هذه المتسلسلة يُكافئ تقارب المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$. إذن أثبتنا أنّ كلّ متتالية تُحقّق الشرط $(*)$ تكون متقاربة، وهذا يقتضي أنّ الفضاء E تامٌّ. ■

التمرين 10. لتكن A **مجموعة متراصّة** من فضاء شعاعيّ منظّم E، وليكن f تطبيقاً من A إلى A يحقّق :

$$\forall(x,y)\in A^2,\quad x\neq y \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$$

أثبت أنّ f يقبل نقطة ثابتة وحيدة وأنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً كما يلي $x_0\in A$ و $x_{n+1}=f(x_n)$ تتقارب من هذه النّقطة الثّابتة. أثبت أخيراً أنّ شرط التّراصّ ضروري وذلك بدراسة التابع

$$f:[1,+\infty[\,\to[1,+\infty[,\ x\mapsto x+\frac{1}{x}$$

الحل

- لنثبت أوّلاً الوحدانيّة. ليكن x و y من A يحققان $f(x)=x$ و $f(y)=y$. ولنفترض جدلاً أنّ $y\neq x$. عندئذ يكون لدينا

$$\|x-y\|=\|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|$$

وهذا تناقض واضح. إذن $y=x$.

- لنتأمّل التابع $\varphi: A\to\mathbb{R},\, t\mapsto \|t-f(t)\|$. من الواضح أنّ φ تابعٌ مستمرٌّ لأنّه ناتج تركيب توابع مستمرّة، والمجموعة A مجموعة متراصّة، فهو يبلغ حده الأدنى عليها.

إذن يوجد عنصر x في A يُحقّق

$$\varphi(x) = \min\{\varphi(t) : t \in A\}$$

لنفترض جدلاً أنّ $\varphi(x) \neq 0$ أي $f(x) \neq x$ عندئذ يكون

$$\varphi(f(x)) = \|f(x) - f(f(x))\| < \|x - f(x)\| = \varphi(x)$$

وهذا يتعارض مع كون $\varphi(x)$ حدّاً أدنى. إذن لا بُدّ أن يكون $\varphi(x) = 0$، أي إنّ النقطة x هي النقطة الثابتة الوحيدة للتابع f.

- لنعرّف إذن $\delta_n = \|x - x_n\|$. نلاحظ أنّ المتتالية $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة لأنّ

$$\delta_{n+1} = \|x - x_{n+1}\| = \|f(x) - f(x_n)\| \leq \|x - x_n\| = \delta_n$$

إذن يوجد في $\mathbb{R}_+$ عدد ℓ يُحقّق $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \ell$.

لنبرهن أنّ $\ell = 0$ فيتم الإثبات. في الحقيقة، إنّ تراصّ المجموعة A يثبت وجود متتالية جزئيّة $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = a \in A$. يقتضي هذا أنّ

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \delta_{\varphi(n)} = \|x - a\|$$

ولكنّ استمرار f يقتضي أيضاً أنّ $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(a)$. ومنه

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \delta_{\varphi(n)+1} = \|x - f(a)\|$$

ومنه

$$\|f(x) - f(a)\| = \|x - f(a)\| = \ell = \|x - a\|$$

إذن لا بُدّ أن يكون $x = a$، و $\ell = \|x - a\| = 0$، أي إنّ $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$. ويتمّ إثبات المطلوب.

- في الحقيقة إنّ شرط تراصّ المجموعة A ضروري كما يثبت ذلك مثال التابع

$$f : [1,+\infty[\to [1,+\infty[, x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

الذي نرى بسهولة أنّه يُحقّق المتراجحة المطلوبة، ولا يقبل نقطة ثابتة. ■

التمرين 11. لتكن F مجموعة مغلقة وغير خالية من فضاء شعاعيّ منظّم وتامّ E . وليكن k من $]0,1[$ ، و φ تطبيقاً من F إلى F يحقّق الشّرط :

$$\forall(x,y)\in F^2,\quad \left\|\varphi(x)-\varphi(y)\right\|\le k\left\|x-y\right\|$$

نعرّف أياً كانت x_0 من F المتتالية $(x_n)_{n\ge 0}$ بالعلاقة $x_{n+1}=\varphi(x_n)$.

1. أثبت أنّه أياً كان $n\ge 0$ فلدينا $\left\|x_{n+1}-x_n\right\|\le k^n\left\|x_1-x_0\right\|$.
2. أثبت أنّ المتسلسلة $\sum(x_{n+1}-x_n)$ متقاربة.
3. استنتج أنّ المتتالية $(x_n)_{n\ge 0}$ متقاربة من عنصر x ينتمي إلى F .
4. أثبت أنّ $x=\varphi(x)$ وأنّه إذا كان y من F يحقّق $\varphi(y)=y$ ، كان $x=y$.
5. أثبت أنّ $\forall n\ge 1,\quad \left\|x-x_n\right\|\le \dfrac{k}{1-k}\left\|x_{n-1}-x_n\right\|$.

الحل

1. نبرهن بالتدريج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left\|x_{n+1}-x_n\right\|\le k^n\left\|x_1-x_0\right\|$$

2. لمّا كان k ينتمي إلى $]0,1[$ ، استنتجنا أنّ المتسلسلة $\sum k^n$ متقاربة، ومن ثَمّ تكون المتسلسلة التي حدّها العام $(x_{n+1}-x_n)$ متقاربة بالنظيم، وينتج من ذلك أنّ المتسلسلة متقاربة لأنّ الفضاء E فضاءٌ تامٌّ.

3. بملاحظة أنّ $x_n=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$ ، نستنتج أنّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر x ، وهذا العنصر ينتمي إلى F لأنّها مجموعة مغلقة.

4. لنلاحظ أنّه، مهما تكن n من $\mathbb{N}$ ، فلدينا

$$\begin{aligned}\left\|x-\varphi(x)\right\|&\le\left\|x-x_{n+1}\right\|+\left\|\varphi(x_n)-\varphi(x)\right\|\\&\le\left\|x-x_{n+1}\right\|+\left\|x-x_n\right\|\end{aligned}$$

إذن يكفي أن نجعل n تسعى إلى $+\infty$ حتّى نستنتج أنّ $x=\varphi(x)$.

وإذا كان y عنصراً من F يُحقّق $\varphi(y)=y$ استنتجنا أنّ

$$\left\|x-y\right\|=\left\|\varphi(x)-\varphi(z)\right\|\le k\left\|x-y\right\|$$

أو $(1-k)\left\|x-y\right\|\le 0$ ، ولكن $0<k<1$ إذن $\left\|x-y\right\|=0$ أو $x=y$.

5.لتكن $n > 0$ عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\|x - x_n\| &\le \|x - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|\\ &\le \|\varphi(x) - \varphi(x_n)\| + \|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})\|\\ &\le k\|x - x_n\| + k\|x_n - x_{n-1}\|\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x - x_n\| \le \frac{k}{1-k} \cdot \|x_n - x_{n-1}\|$$

وبذا يتم إثبات المطلوب.

التمرين 12. ليكن E و F فضاءين شعاعيّين منظّمين، و u تطبيقاً خطّيّاً من E إلى F. أثبت أنّه إذا كانت المتتالية $\left(u(x_n)\right)_{n\ge 0}$ محدودةً أياً كانت المتتالية $(x_n)_{n\ge 0}$ المتقاربة من الصّفر كان u مستمرّاً.

الحل

- من جهة أولى، إذا كان u مستمرّاً استنتجنا من المتراجحة

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \le \|u\|\|x\|$$

أنّ صورة أيّ متتالية متقاربة من الصفر متتالية محدودة لأنّها تكون في الحقيقة متقاربة من الصفر.

- وبالعكس، لنفترض أنّ صورة أيّ متتالية متقاربة من الصفر وفق u متتالية محدودة. ولنفترض جدلاً أنّ u غير مستمر، إذن $\sup_{\|x\|\le 1} \|u(x)\| = +\infty$ ، أي

$$\forall n \ge 1, \quad \exists z_n \in B(0,1) : \|u(z_n)\| \ge n^2$$

وعندئذ تسعى المتتالية $(x_n)_{n\ge 0}$ التي حدّها العام $x_n = z_n / n$ إلى الصفر دون أن تكون صورتها محدودة.

التمرين 13. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، وليكن f شكلاً خطّيّاً غير معدوم على E. أثبت أنّ f يكون مستمرّاً إذا وفقط إذا كانت نواة التّطبيق f مجموعة مغلقة.

الحل

- لنفترض أوّلاً أنّ f مستمر. ولتكن $F = \ker f$ ، ولنتأمّل متتالية ما $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من F متقاربة من عنصر x ينتمي إلى E . لمّا كان $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 0$ ، استنتجنا من استمرار f وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ ، أنّ $f(x) = 0$ ، أو $x \in F$. هذا يثبتُ أنّ $F = \overline{F}$ ، أي إنّ F مجموعة مغلقة.

- وبالعكس، لنفترض أنّ $F = \ker f$ مجموعة مغلقة. لمّا كان f غير معدوم استنتجنا أنّه يوجد عنصر a في E يُحقِّق $f(a) = 1$. وتكون المجموعة

$$a + F = \{a + x : x \in F\} = f^{-1}(\{1\})$$

مجموعة مغلقة استناداً إلى الفرْض. ولمّا كان 0 لا ينتمي إلى $a + F$ استنتجنا أنّه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً ε يُحقِّق :

$$B(0,\varepsilon) \cap (a + F) = \varnothing$$

ليكن y عنصراً من $(E\backslash F)$، عندئذ نرى مباشرة أنّ $f\left(\dfrac{y}{f(y)}\right) = 1$ ومن ثَمّ $\dfrac{y}{f(y)} \in a + F$ أي $\dfrac{y}{f(y)} \notin B(0,\varepsilon)$ ، وهذا يعني أنّ $\left\|\dfrac{y}{f(y)}\right\| \geq \varepsilon$ أو

$$\left|f(y)\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\left\|y\right\|$$

وتبقى هذه المتراجحة صحيحة في حالة $y \in F$ أيضاً. إذن الشكل الخطّي f مستمر، ويحقّق $\left\|f\right\| \leq \varepsilon$. وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 14. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، أثبت أنّه لا يوجد تطبيقان خطيّان مستمرّان u و v من E إلى E يُحقِّقان $u \circ v - v \circ u = I_E$.

الحل

لنفترض جدلاً وجود تطبيقين خطيّين مستمرّين u و v من E إلى E يُحقِّقان

$$u \circ v - v \circ u = I_E$$

يمكننا عندئذ أن نثبت، بالتدريج على n من $\mathbb{N}^*$ ، أنّ

$$u^n \circ v - v \circ u^n = n u^{n-1} \tag{1}$$

في الحقيقة، هذه النتيجة صحيحة في حالة $n=1$ ، وإذا افترضنا صحّتها في حالة n استنتجنا أنّ

$$u^{n+1}\circ v-u\circ v\circ u^{n}=nu^{n}$$

ولكن $u\circ v=I+v\circ u$ ، إذن

$$u^{n+1}\circ v-\big(I+v\circ u\big)\circ u^{n}=nu^{n}$$

ومنه $u^{n+1}\circ v-v\circ u^{n+1}=(n+1)u^{n}$ ، فالخاصّة (1) صحيحة في حالة $n+1$.

ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي $1+\|u\|\|v\|2$ ، عندئذ نرى انطلاقاً من (1) ، أنّ

$$n\left\|u^{n-1}\right\|\leq 2\left\|u^{n-1}\right\|\|u\|\|v\|$$

وهذا يقتضي أن يكون $\left\|u^{n-1}\right\|=0$ أو $u^{n-1}=0$. وعلى هذا تكون المجموعة

$$\mathcal{K}=\left\{k\in\mathbb{N}^{*}:u^{k}=0\right\}$$

غير خالية، مما يسمح لنا بتعريف $m=\min\mathcal{K}$. فإذا كان $m>1$ استنتجنا من المساواة

$$u^{m}\circ v-v\circ u^{m}=mu^{m-1}$$

ومن $u^{m}=0$ أنّ $u^{m-1}=0$ أيضاً، وهذا يناقض تعريف m . إذن لا بُدّ أن يكون $m=1$ ، أي $u=0$ ومن ثَمّ $I=u\circ v-v\circ u=0$ أي $I=0$ وهذا غير ممكن إلاّ في الحالة التافهة الموافقة للمساواة $E=\{0\}$. ■

ملاحظة. لنتأمّل فضاء كثيرات الحدود $E=\mathbb{K}[X]$ ولنعرّف التطبيقين الخطيين

$$u:E\rightarrow E,P\mapsto P'$$
$$v:E\rightarrow E,P\mapsto XP$$

عندئذ يكون لدينا

$$u\circ v(P)=(XP)'=P+XP'=P+v\circ u(P)$$

أي

$$u\circ v-v\circ u=I$$

وعليه مهما كان النظيم المُختار على E فلا يمكن أن يكون التطبيقان u و v مستمرين في آن معاً.

التمرين 15. ليكن $\varphi : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto x^2$، ولنتأمّل التّطبيق

$\psi : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R}),\ f \mapsto f \circ \varphi$.

1. أثبت أنّه إذا زوّدنا الفضاء $C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ بالنّظيم $\|\cdot\|_\infty$ فإنّ ψ مستمرّ وجِدْ نظيمه.
2. أثبت أنّه إذا زوّدنا الفضاء $C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ بالنّظيم $\|\cdot\|_1$ فإنّ ψ غير مستمرّ.

الحل

1. لنرمز بالرمز E_∞ إلى الفضاء $C([0,1],\mathbb{R})$ مزوّداً بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$. لمّا كان φ تقابلاً على المجال $[0,1]$ استنتجنا أنّ

$$\forall f \in E_\infty,\quad \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]} \left|f(\varphi(x))\right|$$

أي

$$\forall f \in E_\infty,\quad \left\|f\right\|_\infty = \left\|f \circ \varphi\right\|_\infty = \left\|\psi(f)\right\|_\infty$$

وهذا يثبت أنّ $\psi : E_\infty \to E_\infty$ مستمرٌّ وأنّ $\left\|\psi : E_\infty \to E_\infty\right\| = 1$.

2. لنرمز بالرمز E_1 إلى الفضاء $C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ مزوّداً بالنظيم $\|\cdot\|_1$. ولنتأمّل، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التابع

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x}$$

فإذا افترضنا أنّ $\psi : E_1 \to E_1$ تابع خطّي مستمرٌّ، كان لدينا

$$\forall n \geq 1,\quad \left\|\psi\left(f_n\right)\right\|_1 \leq \left\|\psi\right\| \cdot \left\|f_n\right\|_1$$

ولكن

$$\left\|f_n \circ \varphi\right\|_1 = \arctan(n) \quad \text{و} \quad \left\|f_n\right\|_1 = \frac{1}{n}\ln(1+n^2)$$

وعلى هذا تقتضي المتراجحة السابقة أنّ

$$\forall n \geq 1,\quad \frac{n\arctan(n)}{\ln(1+n^2)} \leq \left\|\psi\right\|$$

وهذا تناقض لأنّ الطرف الأيسر في المتراجحة السابقة يسعى إلى $+\infty$، إذن التابع الخطي $\psi : E_1 \to E_1$ ليس مستمراً. ■

التمرين 16. أثبت أنّ الشكلين الخطيّين التاليين مستمران وأوجد نظيم كل منهما.

$$T_1 : C\big([-1,+1],\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R},\ T_1(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$T_2 : C\big([-1,+1],\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R},\ T_2(f) = \int_{-1}^{1} \sin(\pi x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

- الفضاء $C\left([-1,+1],\mathbb{R}\right)$ مزوّد بالنّظيم المنتظم $\|\cdot\|_\infty$:
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} \|f(t)\|$$
- أعد السؤال نفسه بعد تزويد $C\left([-1,+1],\mathbb{R}\right)$ بالنّظيم $\|\cdot\|_1$:
$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

الحل

﴿**لنرمز بالرمز E_∞ إلى $C\left([-1,+1],\mathbb{R}\right)$ مزوّداً بالنظيم المنتظم $\|\cdot\|_\infty$.**﴾

- من الواضح أنّه مهما يكن f من E_∞ فلدينا

$$\left|T_1(f)\right| \le \int_{-1}^{1} \frac{\left|f(x)\right|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \left\|f\right\|_\infty \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left\|f\right\|_\infty$$

أي إنّ $T_1 : E_\infty \to \mathbb{R}$ مستمرٌّ، و $\left\|T_1 : E_\infty \to \mathbb{R}\right\| \le \frac{\pi}{2}$.

وإذا كان $\mathbb{1}$ هو التطبيق الثابت الذي يساوي 1 على المجال $[-1,+1]$ كان لدينا

$$\frac{\pi}{2} = T_1(\mathbb{1}) \le \left\|T_1 : E_\infty \to \mathbb{R}\right\| \cdot \|\mathbb{1}\|_\infty = \left\|T_1 : E_\infty \to \mathbb{R}\right\|$$

وهذا يثبت أنّ $\left\|T_1 : E_\infty \to \mathbb{R}\right\| = \frac{\pi}{2}$.

- وكذلك فإنّه من الواضح أيضاً أنّه مهما يكن f من E_∞ فلدينا

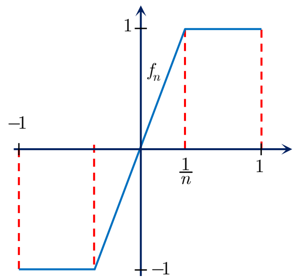
$$\left|T_2(f)\right| \le \int_{-1}^{1} \left|f(x)\right|\left|\sin \pi x\right|\mathrm{d}x \le \left\|f\right\|_\infty \int_{-1}^{1} \left|\sin \pi x\right|\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\left\|f\right\|_\infty$$

أي إنّ $T_2 : E_\infty \to \mathbb{R}$ مستمرٌّ، و $\left\|T_2 : E_\infty \to \mathbb{R}\right\| \le \frac{4}{\pi}$.

ومن جهة أخرى، إذا عرّفنا، في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ، التابع f_n من E_∞ بالعلاقة :

$$\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = \max(\min(nx,1),-1)$$

المبيّن في الشكل:



وجدنا

$$\frac{4}{\pi} - T_2\left(f_n\right) = 2\int_0^{1/n} (1-nx)\sin \pi x \,\mathrm{d}\,x$$

إذن، بالاستفادة من المتراجحة $\forall x \in [0,\pi],\ 0 \le \sin x \le x$ ، نرى أنّ

$$0 \le \frac{4}{\pi} - T_2(f_n) \le 2\pi \int_0^{1/n} (1-nx)x \,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{3n^2}$$

وعليه، نجد أنّه مهما تكن $1 \le n$،

$$\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{3n^2} \le T_2\left(f_n\right) \le \left\| T_2 : E_\infty \to \mathbb{R} \right\| \cdot \left\| f_n \right\|_\infty = \left\| T_2 : E_\infty \to \mathbb{R} \right\| \le \frac{4}{\pi}$$

وهذا يثبت، بجعل n تسعى إلى $+\infty$ ، أنّ $\left\| T_2 : E_\infty \to \mathbb{R} \right\| = \dfrac{4}{\pi}$.

﴿لنرمز بالرمز E_1 إلى الفضاء الشعاعي $C\left([-1,+1],\mathbb{R}\right)$ مزوّداً بالنظيم $\|\cdot\|_1$﴾

- من الواضح أنّه مهما يكن f من $C\left([-1,+1],\mathbb{R}\right)$ فلدينا

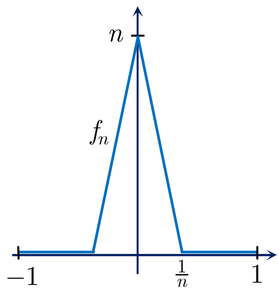
$$\left|T_1(f)\right| \le \int_{-1}^{1} \frac{\left|f(x)\right|}{1+x^2} \mathrm{d}\,x \le \int_{-1}^{1} \left|f(x)\right| \mathrm{d}\,x = \left\|f\right\|_1$$

أي إنّ $T_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ مستمرٌّ، و $\left\| T_1 : E_1 \to \mathbb{R} \right\| \le 1$.

ومن جهة أخرى، إذا عرّفنا، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التابع f_n من E_1 بالعلاقة :

$$\forall x \in [-1,1], \; f_n(x) = \max(n - n^2|x|, 0)$$

المبين في الشكل



وجدنا

$$\|f_n\|_1 - T_1(f_n) = 2\int_0^{1/n} \frac{n(1-nx)x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

إذن، نرى مباشرة أنّ

$$0 \le \|f_n\|_1 - T_1(f_n) \le 2\int_0^{1/n} n(1-nx)x^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{6n^2}$$

وعليه، نجد أنّه مهما تكن $n \ge 1$ يكن

$$1 - \frac{1}{6n^2} \le T_1(f_n) \le \|T_1 : E_1 \to \mathbb{R}\| \cdot \|f_n\|_1 = \|T_1 : E_1 \to \mathbb{R}\| \le 1$$

وهذا يثبت، بجعل n تسعى إلى $+\infty$، أنّ $\|T_1 : E_1 \to \mathbb{R}\| = 1$.

- وكذلك لدينا أيّاً كان f من $C([-1,+1],\mathbb{R})$ فلدينا:

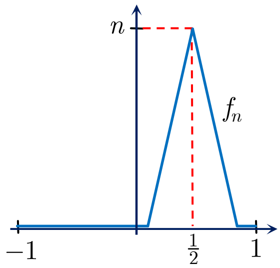
$$|T_2(f)| \le \int_{-1}^{1} |f(x)||\sin \pi x|\,\mathrm{d}\,x \le \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}\,x = \|f\|_1$$

أي إنّ $T_2 : E_1 \to \mathbb{R}$ مستمرٌّ، و $\|T_2 : E_1 \to \mathbb{R}\| \le 1$.

ومن جهة أخرى، إذا عرّفنا، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التابع f_n من E_1 بالعلاقة :

$$\forall x \in [-1,1], \; f_n(x) = \max\left(n - n^2\left|x - \tfrac{1}{2}\right|, 0\right)$$

المبيّن في الشكل الآتي:



وجدنا

$$\left\| f_n \right\|_1 - T_2\left(f_n\right) = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} n\left(1 - n\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)(1 - \sin \pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{2n}{\pi^2}\int_0^{\pi/n} (\pi - nu)(1 - \cos u)\,\mathrm{d}\,u \qquad : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{u}{\pi}$$

إذن، بالاستفادة من المتراجحة $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \le 1 - \cos x \le \dfrac{x^2}{2}$ ، نرى أنّ

$$0 \le 1 - T_2\left(f_n\right) \le \frac{n}{\pi^2}\int_0^{\pi/n} (\pi - nu)u^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi^2}{12n^2} < \frac{1}{n^2}$$

وعليه، نجد أنّه مهما تكن $n \ge 1$ يكن

$$1 - \frac{1}{n^2} \le T_2\left(f_n\right) \le \left\| T_2 : E_1 \to \mathbb{R} \right\| \cdot \left\| f_n \right\|_1 = \left\| T_2 : E_1 \to \mathbb{R} \right\| \le 1$$

وهذا يثبت، بجعل n تسعى إلى $+\infty$ ، أنّ $\left\| T_2 : E_1 \to \mathbb{R} \right\| = 1$.

التمرين 17. ليكن E الفضاء الشّعاعي الجزئيّ من $C\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ المكوّن من التوابع f التي تحقّق $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$ والمزوّد بالنّظيم $\|\cdot\|_\infty$.

أثبت أنّه أيّاً كان العنصر f من E يوجد عنصر وحيد $g = T(f)$ من E يُحقّق $g' = f$. ثُمّ أثبت أنّ التطبيق

$$T : E \to E, f \mapsto T(f)$$

تطبيق خطيّ مستمرٌّ، ثُمّ احسب نظيمه.

الحل

- ليكن f من E، لنفترض أنّه يوجد g في E يُحقِّق $g' = f$. عندئذ يوجد ثابت حقيقي c يُحقّق

$$g(x) = c + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$ إذن

$$0 = c + \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t \right) \mathrm{d}\,x = c + \left[x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ولأنّ f ينتمي إلى E نستنتج أنّ $c = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x$ ، وعلى هذا لا بُدّ أن يكون

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

وهذا يثبت أنّ g وحيد في حال وجوده.

- لإثبات الوجود، يكفي أن نعرّف

$$\forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

فنتحقّق مباشرة أنّ $g = T(f)$ ينتمي إلى E وأنّ $g' = f$. كما إنّه من الواضح أنّ $f \mapsto T(f)$ هو تطبيق خطّي من E إلى E .

- الفكرة الرابحة لإيجاد نظيم T وإثبات استمراره تكمن في كتابة عبارة T كما يأتي:

$$\forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \left(x + \tfrac{1}{2}\right) \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

أو

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^1 \left(t - x - \tfrac{1}{2}\right) f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^x \left(t - x + \tfrac{1}{2}\right) f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_x^1 \left(t - x - \tfrac{1}{2}\right) f(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_{1/2-x}^{1/2} u f\left(u + x - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}\,u + \int_{-1/2}^{1/2-x} u f\left(u + x + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}\,u \end{aligned}$$

وعليه، أياً كانت f من E، وأيّاً كانت x من $[0,1]$، يكن لدينا

$$\left|T\left(f\right)\left(x\right)\right| \le \int_{\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}} |u| \left\|f\right\|_\infty \mathrm{d}\,u + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-x} |u| \left\|f\right\|_\infty \mathrm{d}\,u = \left\|f\right\|_\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |u|\,\mathrm{d}\,u$$

ولكن $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} |u|\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{4}$ إذن:

$$\forall f \in E, \quad \left\|T\left(f\right)\right\|_\infty \le \frac{1}{4}\left\|f\right\|_\infty$$

هذا يثبت استمرار T، ويبرهن على أنّ $\left\|T : E \to E\right\| \le \dfrac{1}{4}$.

ومن جهة أخرى، إذا عرّفنا $\left(f_n\right)_{n\ge1}$ بالعلاقة

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) &= \left|1 - (2x)^n\right| - (2^n - 1)x^n \\ &= \begin{cases} 1 - (2^{n+1} - 1)x^n & : \quad x \le \frac{1}{2} \\ x^n - 1 & : \quad \frac{1}{2} \le x \end{cases} \end{aligned}$$

وجدنا بتحقّق بسيط أنّ f_n ينتمي إلى E، وأنّ

$$\left\|f_n\right\|_\infty = f_n(0) = 1$$

وكذلك نجد بحساب بسيط أنّ

$$T\left(f_n\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{n+3}{2(n+1)(n+2)}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ومن ثَمّ

$$\frac{1}{4} - T\left(f_n\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) < \frac{1}{n+1}$$

وعليه يكون

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}\leq T\left(f_n\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\leq\left\|T\left(f_n\right)\right\|_\infty$$
$$\leq\left\|T:E\to E\right\|\left\|f_n\right\|_\infty=\left\|T:E\to E\right\|\leq\frac{1}{4}$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$، نستنتج أنّ $\left\|T:E\to E\right\|=\frac{1}{4}$. ويتم المطلوب. ■

التمرين 18. ليكن P_n فضاء كثيرات الحدود بأمثال حقيقيّة ولا تزيد درجتها على n.

1. أثبت أنّه يوجد ثابتان حقيقيّان موجبان تماماً α و β بحيث يكون، أياً كان كثير الحدود $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$، لدينا :

$$\beta\sup_{t\in[0,1]}\left|P(t)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|a_k\right|\leq\alpha\sup_{t\in[0,1]}\left|P(t)\right|$$

2. أعطِ مثالاً على تابع f محدود ومن الصّفّ C^1 على مجموعة الأعداد الحقيقيّة ومشتقّه f' غير محدود.

3. ليكن $f\in C^{n+1}(\mathbb{R})$. نفترض أنّ f و $f^{(n+1)}$ محدودان على $\mathbb{R}$. أثبت باستخدام علاقة تايلور أنّ :

$$\exists M\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall y\in\mathbb{R},\ \forall x\in[0,1],\quad\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}x^k\right|\leq M$$

واستنتج أنّ المشتقّات $(f^{(k)})_{1\leq k\leq n}$ للتابع f محدودة.

الحل

1. لنلاحظ أنّنا نعرّف على P_n نظيمين بالعلاقتين :

$$N_\infty(P)=\sup_{t\in[0,1]}\left|P(t)\right|\quad\text{و}\quad N_1\left(\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\left|a_k\right|$$

ولكن الفضاء الشعاعي P_n فضاء منتهي البُعد، إذن لا بُدّ أن يكون النظيمان N_1 و N_∞ متكافئين فيوجد (α,β) في $\mathbb{R}_+^{*2}$ يُحقّق $\alpha N_\infty\leq N_1\leq\beta N_\infty$. وهي المتراجحة المطلوبة.

2. لاحظ أنّ التابع $x \mapsto \sin x^2$ تابع محدود دون أن يكون مشتقّه محدوداً.

3. لنفترض أنّ $M_{n+1} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$. عندئذ نكتب، استناداً إلى متراجحة تايلور–لاغرانج،

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| f(x+y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k\,!}\, x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

وإذا عرّفنا $M_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f(t) \right|$، واستفدنا من متراجحة المثلّث وجدنا

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k\,!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} + M_0$$

ومنه، إذا عرّفنا $M = \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} + M_0$، وجدنا

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], \quad \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k\,!} x^k \right| \leq M$$

وإذا عرّفنا كثير الحدود $P_y(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k\,!} X^k$ من P_n، استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad N_\infty(P_y) \leq M$$

ويقتضي هذا، استناداً إلى السؤال الأوّل، ما يلي :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad N_1(P_y) \leq \beta M$$

وعليه نرى أن

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \left| f^{(k)}(y) \right| \leq (k\,!) \cdot \beta M$$

أي إنّ جميع المشتقّات $(f^{(k)})_{1\leq k\leq n}$ محدودة. ■

التمرين 19. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً، وليكن f شكلاً خطيّاً مستمرّاً وغير معدوم على E. أثبت أنّ:

$$\forall x \in E, \quad d(x, \ker f) = \frac{\left| f(x) \right|}{\| f \|}$$

الحل

لنتأمّل عنصراً x من E.

❖ مهما تكن y من $\ker f$ يكن $f(x-y)=f(x)$ إذن

$$\left|f(x)\right| = \left|f(x-y)\right| \le \|f\|\|x-y\|$$

وعليه

$$\frac{\left|f(x)\right|}{\|f\|} \le \inf\left\{\|x-y\|:\ y\in\ker f\right\} = d(x,\ker f)$$

وهو المطلوب في حالة $d(x,\ker f)=0$، لذلك سنفترض فيما يأتي أنّ $d(x,\ker f)\neq 0$.

❖ وبالعكس، ليكن y عنصراً من $E\backslash\ker f$ عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$\left(x-\frac{f(x)}{f(y)}y\right)\in\ker f$$

إذن

$$\left\|\frac{f(x)}{f(y)}y\right\| = \left\|x-\left(x-\frac{f(x)}{f(y)}y\right)\right\| \ge d(x,\ker f)$$

أو

$$\|y\|\frac{\left|f(x)\right|}{d(x,\ker f)} \ge \left|f(y)\right|$$

ونلاحظ أنّ هذه المتراجحة الأخيرة تبقى صحيحة في حالة $y\in\ker f$. إذن

$$\forall y\in E,\quad \left|f(y)\right| \le \|y\|\frac{\left|f(x)\right|}{d(x,\ker f)}$$

وهذا يبرهن على أنّ $\|f\| \le \dfrac{\left|f(x)\right|}{d(x,\ker f)}$، ونحصل من ثَمّ على المساواة المطلوبة. ■

التمرين 20. ليكن $E=C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ جبر التّوابع الحقيقيّة المستمرّة على $[0,1]$ مزوّداً بالنّظيم $\|\cdot\|_\infty$. أثبت أنّ كلّ تشاكل تقابلي φ (تشاكل منسجم مع بنية الجبر) يحقّق :

$$\forall f\in E,\quad \left\|\varphi(f)\right\|_\infty = \left\|f\right\|_\infty$$

الحل

ليكن φ تشاكلاً تقابليّاً منسجماً مع بنية الجبر E .

- لنلاحظ أوّلاً أنّه إذا كان f من E وكان $f \geq 0$ ، أي $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0$ ، وُجِدَ تابع g من E يُحقّق $g^2 = f$ ، $(g = \sqrt{f})$. وهذا يقتضي أن يكون $\varphi(f) = (\varphi(g))^2$ ومن ثَمّ $\varphi(f) \geq 0$.
- ليكن $\mathbb{1}$ التابع الثابت الذي يأخذ القيمة 1 على $[0,1]$. عندئذ بملاحظة أنّ $\mathbb{1}^2 = \mathbb{1}$ نستنتج أنّ $\varphi(\mathbb{1}) = (\varphi(\mathbb{1}))^2$ ، أي

$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(\mathbb{1})(x) \cdot \big(1 - \varphi(\mathbb{1})(x)\big) = 0$$

فالتابع المستمر $\varphi(\mathbb{1})$ يأخذ قيمه في المجموعة $\{0,1\}$ ، وحتّى لا يناقض ذلك مبرهنة القيمة الوسطى يجب أن يكون هذا التابع ثابتاً. ولكن بافتراض $\forall x \in [0,1],\ \varphi(\mathbb{1})(x) = 0$ ، نجد أنّ φ صفري دوماً، لأنّ $\varphi(f) = \varphi(f\mathbb{1}) = \varphi(f)\varphi(\mathbb{1})$ ، وهذا يناقض كونه تقابلاً. إذن لا بُدّ أنّ يكون

$$\forall x \in [0,1],\ \ \varphi(\mathbb{1})(x) = 1$$

أو $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

- ليكن f من E عندئذ يكون التابعان $\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1} - f$ و $\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1} + f$ موجبين، واستناداً إلى ما سبق يكون لدينا أيضاً :

$$\varphi\big(\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1} + f\big) \geq 0 \quad \text{و} \quad \varphi\big(\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1} - f\big) \geq 0$$

أو

$$\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1} \geq \varphi(f) \geq -\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1}$$

وهذا يُكافئ

$$\forall x \in [0,1],\ \big|\varphi(f)(x)\big| \leq \|f\|_\infty$$

أو $\big\|\varphi(f)\big\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. نكون بذلك قد أثبتنا أنّ

$$\big\|\varphi : E \to E\big\| \leq 1$$

وبتطبيق ما سبق على φ^{-1} الذي هو أيضاً تشاكل تقابلي منسجم مع بنية الجبر نجد كذلك

$$\big\|\varphi^{-1} : E \to E\big\| \leq 1$$

- فإذا كان f عنصراً من E كان

$$\|f\|_\infty = \left\|\varphi^{-1} \circ \varphi(f)\right\|_\infty \leq \left\|\varphi(f)\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

ومنه النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 21. ليكن E و F فضاءَيْن شعاعيين منظّمين. وليكن $f : E \to F$ تابعاً مستمرّاً. أثبت أنّ المجموعة $\mathcal{G} = \left\{(x, f(x)) \in E \times F : x \in E\right\}$ مجموعة مغلقة في $E \times F$.

الحل

لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $a_n = (x_n, f(x_n))$ متتالية من $\mathcal{G}$ متقاربة من العنصر $a = (x, y)$ من $E \times F$. عندئذ يكون

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

ولكنّ التابع f مستمرٌّ عند x، إذن ينتج من الشرط $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ أنّ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

وبسبب وحدانية النهاية نستنتج أنّ $y = f(x)$، أي إنّ $a = (x, f(x)) \in \mathcal{G}$. إذن $\mathcal{G}$ مجموعة مغلقة. وهذه هي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 22. لنتأمّل الفضاء الشعاعي المنظّم $E = \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ المزوّد بالنظيم الإقليدي المألوف $\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. ولتكن $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$، والتطبيق الخطّي :

$$T_M : E \to E, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

1. اشرح لماذا يكون التطبيق الخطّي T_M مستمرّاً.
2. أعطِ تمثيلاً وسيطيّاً للمجموعة $\{X \in E : \|X\|_2 = 1\}$، ثُمّ احسب $\|T_M\|$.

ملاحظة : تمكن الاستفادة من الرموز $C = ac + bd$ و

$$B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} \text{ و } A = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2}$$

الحل

1. الفضاء E فضاء شعاعي منتهي البُعد فجميع التطبيقات الخطيّة عليه مستمرّة.

2. في الحقيقة

$$S_2 = \left\{X \in E : \|X\|_2 = 1\right\} = \left\{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

ولمّا كان $\|T_M\| = \sup_{X \in S_2} \|T_M(X)\|_2$. استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
\|T_M\|^2 &= \sup_{X \in S_2} \|T_M(X)\|_2^2 = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left\| \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\
&= \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left((a\cos\theta + c\sin\theta)^2 + (b\cos\theta + d\sin\theta)^2 \right)
\end{aligned}$$

ولكن إذا عرّفنا

$$f(\theta) = (a\cos\theta + c\sin\theta)^2 + (b\cos\theta + d\sin\theta)^2$$

كان

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= (a^2 + b^2)\cos^2\theta + (c^2 + d^2)\sin^2\theta + 2(ac + bd)\cos\theta\sin\theta \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\cos 2\theta + (ac + bd)\sin 2\theta \\
&= A + B\cos 2\theta + C\sin 2\theta
\end{aligned}$$

حيث

$$C = ac + bd \text{ و } B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} \text{ و } A = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2}$$

في حالة $B^2 + C^2 = 0$ يكون الحدُّ الأعلى المطلوب مساوياً A . أمّا إذا كان $B^2 + C^2 \neq 0$ عرّفنا الزاوية α بالعلاقتين:

$$\sin\alpha = \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}} \quad \text{و} \quad \cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}$$

وصار لدينا:

$$f(\theta) = A + \sqrt{B^2 + C^2}\cos(2\theta - \alpha)$$

إذن

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} f(\theta) = A + \sqrt{B^2 + C^2}$$

لأنّ $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \cos(2\theta - \alpha) = 1$، وهكذا نجد أنّ

$$\|T_M\| = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2-c^2-b^2}{2}\right)^2 + \left(ac+bd\right)^2}}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 23. ليكن $E = \left(C([0,1]), \|\cdot\|_1\right)$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $[0,1]$ مزوّداً بالنظيم $\|\cdot\|_1$ المعرّف كما يأتي :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}\, t$$

1. إذا كان f تابعاً من E عرّفنا التابع g بالعلاقة $T(f) = g$

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}\, t$$

يسمح لنا هذا بتعريف تطبيق خطّي $T : E \to E, f \mapsto T(f)$. أثبت أنّ T مستمر.

2. احسب $\|T\|$. **مساعدة** : تمكن الاستفادة من متتالية التوابع $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ مع

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \text{ أو } f_n(x) = \max\left(2n(1-nx), 0\right)،$$

3. نتأمّل الشكل الخطّي $\delta : E \to \mathbb{R}, \delta\left(f\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. أثبت أنّ δ غير مستمر.

الحل

1. في الحقيقة، ليكن f عنصراً ما من E. عندئذ، أيّاً كان x من $[0,1]$، فلدينا

$$\left|T(f)(x)\right| = \left|\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}\, t\right| \leq \int_0^x \left|f(t)\right| \mathrm{d}\, t \leq \int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}\, t = \left\|f\right\|_1$$

فإذا كاملنا الطرفين على المجال $[0,1]$ استنتجنا أنّ $\left\|T(f)\right\|_1 \leq \left\|f\right\|_1$. وهذا يبرهن استمرار T وأنّ $\left\|T\right\| \leq 1$.

2. إذا تأمّلنا متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة $f_n(x) = \max\left(2n(1-nx),0\right)$ على المجال $[0,1]$، لاحظنا ما يأتي:

- التابع f_n ينتمي إلى E.
- لدينا $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n}\times 2n = 1$ لأنّ f_n يأخذ الصيغة:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n(1-nx) & : \quad x \in \left[0,\frac{1}{n}\right] \\ 0 & : \quad x \in \left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$$

- والتابع $T(f_n)$ معرّف على المجال $[0,1]$ بالصيغة:

$$T(f_n)(x) = \begin{cases} 1-(1-nx)^2 & : \quad x \in \left[0,\frac{1}{n}\right] \\ 1 & : \quad x \in \left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$$

إذن

$$\left\|T(f_n)\right\|_1 = \left[\frac{(1-nx)^3}{3n}\right]_0^{1/n} + 1 = 1 - \frac{1}{3n}$$

وعليه

$$1 - \frac{1}{3n} = \left\|T(f_n)\right\|_1 \leq \|T\|\cdot\left\|f_n\right\|_1 = \|T\|$$

ولأنّ n عددٌ كيفي استنتجنا من المتراجحة السابقة أنّ $\|T\| \geq 1$. وهذا مع الطلب السابق يبرهن أنّ $\|T\| = 1$.

أمّا إذا تأمّلنا متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ على المجال $[0,1]$ لاحظنا أنّ التابع f_n ينتمي إلى E. وأنّ

$$\left\|f_n\right\|_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{1+nt} = \frac{\ln(1+n)}{n}$$

أمّا التابع $T(f_n)$ فهو معرّف على المجال $[0,1]$ بالعلاقة : $T(f_n)(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{n}$.

إذن

$$\left\|T\left(f_n\right)\right\|_1=\int_0^1\frac{\ln(1+nt)}{n}\mathrm{d}t=\left[(1+nt)\frac{\ln(1+nt)}{n^2}-\frac{t}{n}\right]_0^1$$
$$=(n+1)\frac{\ln(n+1)}{n^2}-\frac{1}{n}$$

وعليه

$$(n+1)\frac{\ln(n+1)}{n^2}-\frac{1}{n}=\left\|T(f_n)\right\|_1\leq\|T\|\cdot\left\|f_n\right\|_1=\|T\|\frac{\ln(n+1)}{n}$$

أو $\|T\|\geq 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{\ln(n+1)}$. ولأنّ n عددٌ كيفي استنتجنا من المتراجحة السابقة أنّ $\|T\|\geq 1$. وهذا يثبت مجدداً أنّ $\|T\|=1$.

3. إذا تأمّلنا متتالية التوابع $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ المعرّفة على المجال $[0,1]$ بالصيغة

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2\left(\frac{1}{n}-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right) & : \quad x\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & : \quad x\notin\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]\end{cases}$$

لاحظنا أنّ التابع f_n ينتمي إلى E. و $\left\|f_n\right\|_1=1$. و $\delta\left(f_n\right)=f_n\left(\frac{1}{2}\right)=n$. إذن

$$\sup_{\|f\|_1=1}\left|\delta(f)\right|=+\infty$$

والتابع δ ليس مستمرّاً على E. ■

التمرين 24. في حالة (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نعرّف $N(x,y)=\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{|tx+y|}{t^2+t+1}$.

1. لتكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$. علّل كون التابع $t\mapsto\frac{|tx+y|}{t^2+t+1}$ محدوداً على $\mathbb{R}$؟
2. أثبت أنّ التابع $(x,y)\mapsto N(x,y)$ يعرّف نظيماً على $\mathbb{R}^2$.
3. لتكن $B=\overline{B}_N(0,1)$ الكرة الواحديّة المغلقة في $\left(\mathbb{R}^2,N\right)$. عبّر عن الشرط $(x,y)\in B$ بمتراجحة بسيطة لا تحوي الرمز sup، ثمّ أوجد الشرط اللازم والكافي على (x,y) حتّى يكون $(x,y)\in B$.
4. ارسم المجموعة B.

الحل

1.لتكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$. التابع $t \mapsto \dfrac{|tx+y|}{t^2+t+1}$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$ ويسعى إلى 0 عند كلٍّ من $+\infty$ و $-\infty$. فهو محدود.

2. في حالة $N(x,y)=0$ يكون $tx+y=0$ أيّاً كانت قيمة t من $\mathbb{R}$. يكفي أن نأخذ $t=0$ ثُمّ $t=1$ حتّى نستنتج أنّ $(x,y)=(0,0)$.

من جهة ثانية من الواضح أنّ

$$\begin{aligned} N(\lambda x,\lambda y) &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|t\lambda x+\lambda y|}{1+t+t^2} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(|\lambda|\,\frac{|tx+y|}{1+t+t^2}\right) \\ &= |\lambda|\,\sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\frac{|tx+y|}{1+t+t^2}\right) = |\lambda|\,N(x,y) \end{aligned}$$

وأخيراً، مهما تكن t من $\mathbb{R}$ فلدينا

$$\begin{aligned} \left|t(x+x')+(y+y')\right| &\leq \left|tx+y\right| + \left|tx'+y'\right| \\ &\leq \Big(N(x,y)+N(x',y')\Big)(1+t+t^2) \end{aligned}$$

وعليه بالقسمة على $1+t+t^2$، ثُمّ أخذ الحد الأعلى، نجد

$$N(x+x',y+y') \leq N(x,y)+N(x',y')$$

وبذا نكون قد أثبتنا أنّ $(x,y)\mapsto N(x,y)$ نظيم على $\mathbb{R}^2$.

3. في الحقيقة:

$$\begin{aligned} (x,y)\in B \;\Leftrightarrow\; N\big(x,y\big)\leq 1 &\Leftrightarrow \left(\forall t\in\mathbb{R},\; \frac{|tx+y|}{1+t+t^2}\leq 1\right) \\ &\Leftrightarrow \Big(\forall t\in\mathbb{R},\; |tx+y| \leq 1+t+t^2\Big) \end{aligned}$$

ولكنّ المتراجحة $\left|tx+y\right| \leq 1+t+t^2$ تُكافئ :

$$-1-t-t^2 \leq tx+y \leq 1+t+t^2$$

إذن

$$(x,y)\in B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t\in\mathbb{R}, & t^2+(1-x)t+1-y\geq 0 \\ & \text{و} \\ \forall t\in\mathbb{R}, & t^2+(1+x)t+1+y\geq 0 \end{cases}$$

ولكن، حتّى لا يغيّر كثير حدود من الدرجة الثانية إشارته، يجب أن يكون مميزه سالباً إذن

$$(x,y)\in B \Leftrightarrow \begin{cases}(1-x)^2-4(1-y)\leq 0\\ \text{و}\\ (1+x)^2-4(1+y)\leq 0\end{cases}$$

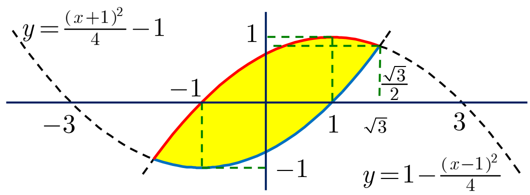
أو

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R} : \left(\frac{1+x}{2}\right)^2-1\leq y\leq 1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right\}$$

4. فالمجموعة B هي مجموعة نقاط المستوي الواقعة في تقاطع القطعَيْن المكافِئَيْن :

$$y=1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \quad \text{و} \quad y=\left(\frac{1+x}{2}\right)^2-1$$

ومنه الشكل التالي للمجموعة B:



وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 25. ليكن $E=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة التي لا تزيد درجتها على n.

ولتكن $\mathbb{A}$ المجموعة الجزئيّة من $\mathbb{R}^{n+1}$ المكوّنة من العناصر $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ التي تُحقّق $a_0<a_1<\cdots<a_n$.

إذا كان $A=(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{A}$ عرّفنا النظيم $N_A:E\to\mathbb{R}_+$ على E بالعلاقة :

$$\forall P\in E,\quad N_A(P)=\max\{|P(a_0)|,|P(a_1)|,\ldots,|P(a_n)|\}$$

ورمزنا بالرمز E_A إلى الفضاء الشعاعي المنظّم (E,N_A).

ليكن $A=(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ و $B=(b_0,b_1,\ldots,b_n)$ عنصرين من $\mathbb{A}$، ولنتأمّل التطبيق الخطّي : $I:E_A\to E_B,\ P\mapsto P$.

1. أثبت أنّ التطبيق الخطّي $I : E_A \to E_B$ مستمرٌّ.
2. نذكّر أنّ كثيرات حدود لاغرانج الموافقة لـ A هي كثيرات الحدود $(\ell_j)_{0\leq j\leq n}$ المعرّفة بالعلاقة :

$$\ell_j(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{X-a_k}{a_j-a_k}\right)$$

استفدْ من كثيرات حدود لاغرانج لتحسب $P(b_j)$ بدلالة $(P(a_k))_{0\leq k\leq n}$، ثُمّ احسب بدلالة A و B، قيمة النظيم $\|I\|$.
3. **تطبيق**: نختار $n=2$ ونضع بالتعريف $a_k = k$ و $b_k = -1-k$ في حالة k من المجموعة $\{0,\ldots,n\}$. احسب بأبسط صيغة قيمة $\|I\|$.

الحل

1. لمّا كان $\dim E = n+1$ أي منتهي البُعد، استنتجنا مباشرة أنّ التطبيق الخطّي I مستمرٌّ.

2. لنعرّف في حالة j من $\{0,1,\ldots,n\}$ كثير الحدود $\ell_j(X) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{X-a_i}{a_j-a_i}\right)$. عندئذ

$$\forall P\in E,\quad P(X) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)\ell_j(X)$$

ومن ثَمّ

$$\forall P\in E, \forall i\in\{0,1,\ldots,n\},\quad P(b_i) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)\ell_j(b_i)$$

إذن

$$\forall P\in E, \forall i\in\{0,1,\ldots,n\},\quad \left|P(b_i)\right| \leq \left(\sum_{j=0}^{n}\left|\ell_j(b_i)\right|\right)\cdot N_A(P)$$

أو

$$\begin{gathered}\forall P\in E, \forall i\in\{0,\ldots,n\},\\ \left|P(b_i)\right| \leq \sum_{j=0}^{n}\left|P(a_j)\right|\left|\ell_j(b_i)\right| \leq \max_{0\leq i\leq n}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\ell_j(b_i)\right|\right)\cdot N_A(P)\end{gathered}$$

أو

$$\forall P \in E, \quad N_B(P) \leq M \cdot N_A(P)$$

حيث $M = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^{n} \left| \ell_j(b_i) \right|$. وهذا يبرهن أنّ

$$\left\| I : E_A \to E_B \right\| \leq \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^{n} \left| \ell_j(b_i) \right|$$

وبالعكس، لنفترض أنّ $\sum_{j=0}^{n} \left| \ell_j(b_k) \right| = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^{n} \left| \ell_j(b_i) \right|$. ولنعرّف في حالة j من $\{0,1,\ldots,n\}$ العدد λ_j كما يأتي:

$$\lambda_j = \begin{cases} +1 & : \quad \ell_j(b_i) > 0 \\ 0 & : \quad \ell_j(b_i) = 0 \\ -1 & : \quad \ell_j(b_i) < 0 \end{cases}$$

ثُمّ لنضع $P(X) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \ell_j(X)$. عندئذ

$$N_A(P) = \max_{0 \leq j \leq n} \left| \lambda_j \right| \leq 1 \text{ و } P(b_k) = \sum_{j=0}^{n} \left| \ell_j(b_k) \right|$$

إذن

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^{n} \left| \ell_j(b_i) \right| = \sum_{j=0}^{n} \left| \ell_j(b_k) \right| &= P(b_k) \\ &\leq \left\| I : E_A \to E_B \right\| N_A(P) \\ &\leq \left\| I : E_A \to E_B \right\| \end{aligned}$$

ومنه

$$\left\| I : E_A \to E_B \right\| = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^{n} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \left| \frac{b_i - a_k}{a_j - a_k} \right|$$

3. سنحلّ هذا السؤال في حالة $A = (0,1,\ldots,n)$ و $B = (-n-1, -n, \ldots, -1)$.

نلاحظ أنّه في حالة i و j من $\{0,\ldots,n\}$ لدينا

$$\begin{aligned}
\ell_j(-1-i) &= \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{-i-1-k}{j-k}\right)\\
&= \frac{(-1)^n(i+1)\cdots(n+i+1)}{(i+j+1)j(j-1)\cdots 1\cdot(-1)(-2)\cdots(j-n)}\\
&= \frac{(-1)^j}{i+j+1}\cdot\frac{(n+i+1)!}{i!}\cdot\frac{1}{j!(n-j)!}\\
&= \frac{(-1)^j(n+1)}{i+j+1}C_{n+i+1}^{n+1}C_n^j
\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \sum_{j=0}^{n}\left|\ell_j(-1-i)\right| = (n+1)C_{n+i+1}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{i+j+1}C_n^j\\
&= \frac{(i+1)\cdots(n+i+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{i+j+1}C_n^j
\end{aligned}$$

وهنا نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\Delta_{i+1}-\Delta_i &= \frac{(i+2)\cdots(n+i+2)}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{C_n^j}{i+j+2}\\
&\quad -\frac{(i+1)\cdots(n+i+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{C_n^j}{i+j+1}\\
&= \frac{(i+2)\cdots(n+i+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n+i+2}{i+j+2}-\frac{i+1}{i+j+1}\right)C_n^j\\
&= \frac{(i+2)\cdots(n+i+1)}{n!}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n(i+j+1)+j}{(i+j+2)(i+j+1)}\right)C_n^j \geq 0
\end{aligned}$$

إذن

$$\left\|I : E_A \to E_B\right\| = \max_{0\leq i\leq n}\Delta_i = \Delta_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\sum_{j=0}^{n}\frac{C_n^j}{n+j+1}$$

وفي حالة $n=2$ نجد

$$\left\|I : E_{(0,1,2)} \to E_{(-3,-2,-1)}\right\| = 31$$

تتمّة. لنبحث عن قيمة مُقاربة للمقدار Δ_n.

نلاحظ أنّ

$$\Delta_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\sum_{j=0}^{n} C_n^j \int_0^1 x^{n+j}\,\mathrm{d}\,x = C_{2n+1}^n I_n$$

حيث

$$I_n = (n+1)\int_0^1 x^n(1+x)^n\,\mathrm{d}\,x$$

باستعمال تغيير المتحوّل $x = (\sqrt{4v+1}-1)\,/\,2$ بحيث $x(1+x) = v$ نجد أنّ

$$I_n = \int_0^2 \frac{(n+1)v^n}{\sqrt{4v+1}}\,dv$$

وبإجراء مكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{v^{n+1}}{\sqrt{4v+1}}\right]_0^2 + 2\int_0^2 \frac{v^{n+1}}{(4v+1)^{3/2}}\,dv \\ &= \frac{2^{n+1}}{3} + 2\int_0^2 \frac{v^{n+1}}{(4v+1)^{3/2}}\,dv \end{aligned}$$

ووضوحاً لدينا

$$0 \le \int_0^2 \frac{v^{n+1}}{(4v+1)^{3/2}}\,dv \le \int_0^2 v^{n+1}dv = \frac{2^{n+2}}{n+2}$$

وعليه $\frac{2^{n+1}}{3} \sim I_n$ إذن

$$\Delta_n \sim \frac{2}{3}2^n C_{2n+1}^n \sim \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التوابع لعدّة متحولات

في هذا الفصل ننظر إلى الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ (حيث n من $\mathbb{N}^*$) بصفته فضاءً شعاعياً مزوّداً بنظيم $\|\cdot\|$، ويتيح لنا تكافؤ جميع النّظم على هذا الفضاء عدم تحديد هذا النظيم إلّا في حالات نادرة.

- نسمّي **تابعاً ذا n متحوّلاً** كلَّ تطبيق معرّف على مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^n$. ونقول إنه **تابع عددي** إذا أخذ قيمه في $\mathbb{R}$. وبوجه عام، جميع التوابع التي سندرسها في هذا البحث تأخذ قيمها في $\mathbb{R}^m$ (حيث m من $\mathbb{N}^*$) ما لم نذكر خلاف ذلك.
- إذا كانت A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، وكان $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعاً ذا n متحوّلاً، فإننا نسمّي **مركّبات التابع f**، التوابع $f_1, f_2, \ldots, f_m$ حيث $f_i = p_i \circ f$ و p_i هو الإسقاط القانونيّ المعرّف على الوجه الآتي:

$$p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto x_i$$

فيكون لدينا عندئذ

$$\forall x \in A, \;\; f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

1. استمرار التوابع لعدّة متحولات

لقد درسنا بتوسّع، مفهومي نهاية واستمرار التوابع المعرّفة على مجموعة جزئيّة من فضاء شعاعي منظّم، والتي تأخذ قيمها في فضاء شعاعي منظّم، وما حالة التوابع لعدة متحولات إلاّ حالة خاصّة من ذلك الوضع العامّ. لذلك سنذكّر فقط ببعض الخواص، لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعاً معرّفاً على A:

- يكون التابع f مستمراً عند a من A إذا وفقط إذا كانت النهاية $\lim_a f$ موجودة.
- يكون التابع f مستمراً عند a من A، إذا وفقط إذا كانت مركّباته $f_1, f_2, \ldots, f_m$ توابع مستمرة عند a.

- إذا كانت A مجموعة متراصّة، (أي مغلقة ومحدودة) وكان f تابعاً مستمراً على A، فإنّه يكون مستمراً بانتظام على A.
- إذا كانت A مجموعة متراصّة، (أي مغلقة ومحدودة) وكان f تابعاً عددياً مستمراً على A، فإنه يكون محدوداً ويبلغ قيمتيه العظمى والصغرى.
- إن ناتج تركيب تابعين مستمرين تابع مستمر.

1-1. تعريف. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعاً معرّفاً على A. ولتكن $a = (a_1, \ldots, a_n)$ من A. نعرّف، أياً كان i من $\mathbb{N}_n$، المجموعة

$$A_i^a = \{x_i \in \mathbb{R} : (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in A\}$$

ثُمّ نعرّف **التابع الجزئي**

$$\varphi_i^a : A_i^a \to \mathbb{R}^m, \ x_i \mapsto \varphi_i^a(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

عندئذ نقول إنّ التابع f مستمر بالنسبة إلى المتحوّل ذي الدليل i، أو بالنسبة إلى x_i، عند النقطة a، إذا وفقط إذا كان φ_i^a مستمراً عند النقطة a_i.

إنّ المبرهنة الآتية واضحة:

2-1. مبرهنة : لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعاً مستمراً على A. عندئذ يكون f مستمراً بالنسبة إلى كلِّ متحوّلٍ من متحوّلاته.

3-1. ملاحظة : إنّ عكس المبرهنة السابقة خطأ. كما يبيِّن ذلك مثال التابع:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 + x^3y}{x^4 + y^4} & : \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

فهو مستمرٌّ بالنسبة إلى كلٍّ من x و y عند $a = (0,0)$، لأنّ $\varphi_1^a = 0$ و $\varphi_2^a = 0$، ولكن f ليس مستمراً عند a، لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \neq f(0,0)$.

2. قابليّة مفاضلة التوابع لعدّة متحولات

1-2. توطئة. لتكن A مجموعة جزئيّة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$، وأخيراً لتكن a من A. لنفترض أنّه يوجد تطبيق خطّي $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ يُحقّق

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|f(a+h)-f(a)-u(h)\|}{\|h\|} = 0 \qquad (\mathcal{D})$$

عندئذ يكون u وحيداً.

الإثبات

في الحقيقة تنتج وحدانية u من أنّ العلاقة $(\mathcal{D})$ تقتضي المساواة التالية:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \ u(h) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(f(a+t\cdot h)-f(a)\right) \qquad \square$$

تفيدنا التوطئة السابقة في وضع التعريف الآتي:

2-2. تعريف. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$، وأخيراً لتكن a من A. نقول إنّ f **يقبل المفاضلة عند a**، إذا وفقط إذا وجِدَ تطبيق خطّي $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ يُحقّق

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|f(a+h)-f(a)-u(h)\|}{\|h\|} = 0$$

وعندها نسمّي التطبيق الخطّي الوحيد u **تفاضل التابع** f عند a ونرمز إليه بالرمز $\mathrm{d}\, f_a$.

في الحقيقة ، إذا قَبِلَ التابع f المفاضلة عند a فإنّه يوجد تطبيق ε معرّف في جوارٍ W للعنصر 0 من $\mathbb{R}^n$، ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$ ويُحقّق $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ و

$$\forall h \in W, \quad f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}\, f_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

3-2. تعريف. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$. نقول إنّ f **قابل للمفاضلة على A**، إذا وفقط إذا قَبِلَ التابع f المفاضلة عند كلِّ a من A.

وعندها نسمّي تفاضل f التطبيق التالي، ونرمز إليه بالرمز $\mathrm{d}\, f$:

$$\mathrm{d}f : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), \quad x \mapsto \mathrm{d}\, f_x$$

4-2. أمثلة

- ❖ إذا كان $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعاً ثابتاً على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$، فإنّه يقبل المفاضلة على A، ويكون $\forall x \in A, \mathrm{d} f_x = 0$، أو $\mathrm{d}f = 0$.
- ❖ إذا كان $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً معرّفاً على مجال مفتوح وغير خالٍ من $\mathbb{R}$، وكان f قابلاً للاشتقاق عند a من I، عندئذ يكون f قابلاً للمفاضلة عند a ويكون

$$\forall h \in \mathbb{R}, \mathrm{d}f_a(h) = f'(a) \cdot h$$

وذلك لأنّ

$$\frac{\left|f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h\right|}{|h|} = \left|\Delta_{f,a}(a+h) - f'(a)\right|$$

و $\Delta_{f,a}$ هو تابع نسبة التغير f عند a.

- ❖ إذا كان $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تطبيقاً خطّياً، فإنّه يقبل المفاضلة على $\mathbb{R}^n$ ويكون

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}f_a = f$$

ذلك لأنّ $\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f(a+h) - f(a) - f(h) = 0$

- ❖ لنتأمّل التابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|^2$. إنّ f قابلٌ للمفاضلة عند كلّ نقطة a من $\mathbb{R}^n$، ويكون

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d} f_a(h) = 2\sum_{k=1}^{n} a_k h_k = 2\left\langle a, h \right\rangle$$

حيث $\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle$ هو الجداء السلّمي الإقليديّ المألوف.

في الحقيقة، نلاحظ أنّ

$$f(a+h) = \|a+h\|^2 = \|a\|^2 + 2\left\langle a,h \right\rangle + \|h\|^2$$

ومنه

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{\|h\|}\left| f(a+h) - f(a) - 2\left\langle a,h \right\rangle \right| = \|h\|$$

وهذا يُثبت الخاصّة المطلوبة.

إنّ الخاصّتين الآتيتين بسيطتان ونترك إثباتهما المباشر تمريناً للقارئ :

2-5. مبرهنة. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$ ، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعاً قابلاً للمفاضلة عند a من A . عندئذ يكون f مستمراً عند a .

2-6. مبرهنة. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$. ليكن التابعان $f : A \to \mathbb{R}^m$ و $g : A \to \mathbb{R}^m$ القابلين للمفاضلة عند a من A . عندئذ يكون كلٌّ من التابعين $f + g$ و λf (مع λ من $\mathbb{R}$) قابلاً للمفاضلة عند a ويكون

$$\mathrm{d}(\lambda f)_a = \lambda\,\mathrm{d}f_a \quad \text{و} \quad \mathrm{d}(f+g)_a = \mathrm{d}f_a + \mathrm{d}g_a$$

2-7. مبرهنة. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن B مجموعة جزئيّة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^m$. وليكن التابعان $f : B \to \mathbb{R}^p$ و $g : A \to \mathbb{R}^m$. ثمّ لنفترض أنّ $g(A) \subset B$. نفترض أنّ g قابلٌ للمفاضلة عند a من A ، وأنّ f قابلٌ للمفاضلة عند $g(a)$ من B ، عندئذ يكون التابع $f \circ g$ قابلاً للمفاضلة عند a ويكون

$$\mathrm{d}(f \circ g)_a = \mathrm{d}f_{g(a)} \circ \mathrm{d}g_a$$

الإثبات

في الحقيقة، يوجد تطبيق φ معرّف في جوارٍ V للعنصر 0 في $\mathbb{R}^n$ ، ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$ ويُحقّق

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

و
$$\forall h \in V,\ \ g(a+h) = g(a) + \mathrm{d}\,g_a(h) + \|h\|\varphi(h)$$

وكذلك يوجد تطبيق ψ معرّف في جوارٍ W للعنصر 0 في $\mathbb{R}^m$ ، ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^p$ ويُحقّق

$$\lim_{h \to 0} \psi(h) = 0$$

و
$$\forall k \in W,\ \ f(g(a)+k) = f(g(a)) + \mathrm{d}\,f_{g(a)}(k) + \|k\|\psi(k)$$

لنضع، بالتعريف،

$$k(h) = \mathrm{d}g_a(h) + \|h\|\varphi(h)$$

حين يكون h عنصراً من V . عندئذ نلاحظ أنّ

$$\|k(h)\| \le \|h\|\big(\|\mathrm{d}g_a\| + \|\varphi(h)\|\big)$$

فيوجد جوار V' للعنصر 0 في $\mathbb{R}^n$، يُحقّق الشرط

$$h \in V' \Rightarrow k(h) \in W$$

نعرّف إذن الجوار $U = V \cap V'$ للعنصر 0 في $\mathbb{R}^n$. عندئذ، مهما يكن h من U، يكن

$$k(h) \in W \quad \text{و} \quad g(a+h) = g(a) + k(h)$$

ومن ثَمّ، مهما يكن h من $U \backslash \{0\}$، يكن

$$\begin{aligned} f\big(g\big(a+h\big)\big) &= f(g(a)) + \mathrm{d}\, f_{g(a)}(k(h)) + \big\|k(h)\big\|\,\psi(k(h)) \\ &= f(g(a)) + \mathrm{d}\, f_{g(a)}(\mathrm{d}\, g_a(h)) + \big\|h\big\|\varepsilon(h) \end{aligned}$$

مع $\varepsilon(h) = \mathrm{d}f_a(\varphi(h)) + \dfrac{\|k(h)\|}{\|h\|}\psi(k(h))$. ولكن، في حالة h من $U \backslash \{0\}$ لدينا

$$\|\varepsilon(h)\| \leq \|\mathrm{d}f_a\| \cdot \|\varphi(h)\| + (\|\mathrm{d}g_a\| + \|\varphi(h)\|)\,\|\psi(k(h))\|$$

نستنتج من ذلك أنّ $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$، والمساواة

$$\forall h \in U \backslash \{0\}, \;\; f(g(a+h)) = f(g(a)) + \mathrm{d}f_{g(a)}(\mathrm{d}g_a(h)) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

تُثبتُ المطلوب. ❐

2-8. مبرهنة. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، وليكن التابعان $f : A \to \mathbb{R}^m$ و $g : A \to \mathbb{R}^p$. نعرّف التطبيق

$$\Psi : A \to \mathbb{R}^{m+p},\; x \mapsto (f(x), g(x))$$

عندئذ يكون Ψ قابلاً للمفاضلة عند a من A، إذا وفقط إذا كان كلٌّ من f و g قابلاً للمفاضلة عند a من A، وحينئذ يكون

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\;\; \mathrm{d}\,\Psi_a(h) = (\mathrm{d}f_a(h), \mathrm{d}g_a(h))$$

الإثبات

إنّ الإثبات تحقُّق مباشر من التعاريف ونتركه للقارئ. ❐

نستنتج من ذلك الخاصّة المهمّة التالية، التي تتيح لنا في كثير من الحالات الاكتفاء بدراسة التوابع العدديّة والنظر إلى مركّبات التوابع التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}^m$.

2-9. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$، عندئذ يكون f قابلاً للمفاضلة عند a من A، إذا وفقط إذا كانت كلُّ مركّبات التابع f، أي $f_1, f_2, \ldots, f_m$ قابلةً للمفاضلة عند a، وحينئذ يكون

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}f_a(h) = (\mathrm{d}(f_1)_a(h), \mathrm{d}(f_2)_a(h), \ldots, \mathrm{d}(f_m)_a(h))$$

2-10. **مبرهنة**. لتكن A و B مجموعتين جزئيّتين مفتوحتين غير خاليتين في $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to B$ تقابلاً مستمراً هو وتابعه العكسيّ. فإذا كان f قابلاً للمفاضلة عند النقطة a من A وكان تفاضله $\mathrm{d}f_a$ تطبيقاً خطيّاً قَلوباً، أي كان $\mathrm{d}f_a$ عنصراً من $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$، كان التابع العكسي f^{-1} قابلاً للمفاضلة عند $f(a)$ من B، وتحقّقت العلاقة :

$$\mathrm{d}(f^{-1})_{f(a)} = (\mathrm{d}f_a)^{-1}$$

الإثبات

نبدأ أوّلاً بدراسة حالة خاصّة هي حالة $A \ni 0 = a$، و $f(0) = 0$ و $\mathrm{d}f_0 = I$ إذْ زمزنا بالرمز I إلى التطبيق المطابق في $\mathbb{R}^n$.

لتكن ε من $]0,1[$، ولنضع $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. إنّ تعريف قابليّة اشتقاق f عند 0 يُثبت وجود $0 < \eta_1$ تُحقّق

$$\|h\| < \eta_1 \Rightarrow \|f(h) - h\| \leq \delta\|h\|$$

أمّا استمرار f^{-1} عند 0 فيثبت وجود $0 < \eta_2$ تُحقّق

$$\|k\| < \eta_2 \Rightarrow \|f^{-1}(k)\| \leq \eta_1$$

ينتج من ذلك أنّ

$$\|k\| < \eta_2 \Rightarrow \|f(f^{-1}(k)) - f^{-1}(k)\| \leq \delta\|f^{-1}(k)\|$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\|k\| < \eta_2 \quad \Rightarrow \quad \|f^{-1}(k) - k\| &\leq \delta\|f^{-1}(k) - k + k\| \\
\Rightarrow \quad \|f^{-1}(k) - k\| &\leq \delta\|f^{-1}(k) - k\| + \delta\|k\| \\
\Rightarrow \quad \|f^{-1}(k) - k\| &\leq \frac{\delta}{1-\delta}\|k\| = \varepsilon\|k\|
\end{aligned}$$

وهذا ما يثبت أنّ

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{\|k\|}\left\|f^{-1}(k)-f^{-1}(0)-k\right\|=0$$

أي إنّ f^{-1} قابل للمفاضلة عند 0 وتفاضله هو $\mathrm{d}(f^{-1})_0=I$.

لنأتِ إلى الحالة العامّة. ولنعرّف المجموعتين المفتوحتين:

$$\widetilde{B}=\{x-f(a): x\in B\} \quad \text{و} \quad \widetilde{A}=\{x-a: x\in A\}$$

ثُمّ لنعرّف التابع

$$\tilde{f}:\widetilde{A}\to\widetilde{B},\quad \tilde{f}(x)=(\mathrm{d}f_a)^{-1}(f(x+a)-f(a))$$

يتحقّق القارئ بسهولة أنّ $\tilde{f}$ تقابل بين المجموعتين المفتوحتين $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ وأنّ $\tilde{f}$ و $\tilde{f}^{-1}$ مستمران وكذلك أنّ $0\in\widetilde{A}$، و $\tilde{f}(0)=0$، و $\mathrm{d}\tilde{f}_0=I$. إذن، استناداً إلى الحالة الخاصّة السابقة، يكون $(\tilde{f})^{-1}$ قابلاً للمفاضلة عند 0 ويكون $\mathrm{d}(\tilde{f}^{-1})_0=I$.

ومن ناحية أخرى، نرى أنّ التطبيق

$$\lambda:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ \lambda(x)=(\mathrm{d}f_a)^{-1}(x-f(a))$$

قابل للمفاضلة على $\mathbb{R}^n$ وأنّ تفاضله ثابت ويساوي $(\mathrm{d}f_a)^{-1}$ أي

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}\lambda_x=(\mathrm{d}f_a)^{-1}$$

نستنتج من ذلك أنّ التابع $h=\tilde{f}^{-1}\circ\lambda$ المعرّف فقط في جوار للنقطة $f(a)$ قابل للمفاضلة عند $f(a)$ ويكون

$$\mathrm{d}h_{f(a)}=\mathrm{d}(\tilde{f}^{-1})_0\circ\mathrm{d}\lambda_{f(a)}=(\mathrm{d}f_a)^{-1}$$

ولكن في جوار للنقطة $f(a)$ لدينا $h(x)=f^{-1}(x)-a$ إذن f^{-1} قابل للمفاضلة عند $f(a)$ وتفاضله يحقّق

$$\mathrm{d}(f^{-1})_{f(a)}=(\mathrm{d}f_a)^{-1}$$ □

3. المشتقات الجزئيّة للتوابع لعدّة متحولات

3-1. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً عددياً معرّفاً على A . ولتكن $a = (a_1, \ldots, a_n)$ من A . نعرّف، كما فعلنا سابقاً، وأياً كانت i من $\mathbb{N}_n$، المجموعة

$$A_i = \{x_i \in \mathbb{R} : \ (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in A\}$$

ثُمّ نعرّف **التابع الجزئي**

$$\varphi_i : A_i \to \mathbb{R}, x_i \mapsto \varphi_i(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

نقول إنّ f **قابل للاشتقاق بالنسبة إلى المتحوّل ذي الدليل i** عند a إذا وفقط إذا كان التطبيق الجزئي φ_i قابلاً للاشتقاق عند النقطة a_i . وفي هذه الحالة نسمّي العدد $\varphi_i'(a_i)$ **المشتق الجزئي** للتابع f بالنسبة إلى المتحوّل x_i عند a، ونرمز إليه بالرمز $D_i f(a)$، أو $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ أو $f_{x_i}'(a)$.

وإذا قَبِلَ f مشتقاً جزئياً بالنسبة إلى المتحوّل x_i عند كلّ نقطة من A رمزنا بأحد الرموز $D_i f$، أو $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ أو f_{x_i}' إلى التابع المعرّف على A والذي يقرن بكل نقطة منها قيمة المشتق الجزئي بالنسبة إلى المتحوّل x_i عند هذه النقطة.

3-2. **رموز جديدة**. لتكن i من $\mathbb{N}_n$، عندئذ نرمز بالرمز $\mathrm{d}\,x_i$ إلى الشكل الخطّي

$$\mathrm{d}\,x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h = (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \mathrm{d}\,x_i(h) = h_i$$

إنّ الجملة $(\mathrm{d}\,x_1, \ldots, \mathrm{d}\,x_n)$ هي أساسٌ للفضاء $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ثنويُّ الفضاء $\mathbb{R}^n$، وهي في الحقيقة، الأساس الثنوي للأساس القانوني.

3-3. **مبرهنة**. ليكن f تابعاً عددياً معرّفاً على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. ولنفترض أنّ f قابلٌ للمفاضلة عند a من A . عندئذ يقبل f مشتقّاً جزئياً عند a بالنسبة إلى كلّ متحوّل من متحولاته، ويكون

$$\mathrm{d}\,f_a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,\mathrm{d}\,x_k$$

الإثبات

لمّا كان f قابلاً للمفاضلة عند a من A، فإننا نجد جواراً V للعنصر 0 من $\mathbb{R}^n$، وتابعاً ε معرفاً على V ويحقّق

$$\forall h \in V,\ f(a+h) = f(a) + \mathrm{d} f_a(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

فإذا كان $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ هو الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^n$، وطبّقنا النتيجة السابقة بأخذ $h = te_i$ حيث i من $\mathbb{N}_n$، و t عدد حقيقي صغير بقدرٍ كافٍ، وجدنا

$$\varphi_i(a_i + t) = \varphi_i(a_i) + t\,\mathrm{d} f_a(e_i) + t\tilde{\varepsilon}(t)$$

حيث $\lim_{t\to 0}\tilde{\varepsilon}(t) = 0$، و φ_i هو التطبيق الجزئي الموافق للمتحوّل x_i عند a.

نستنتج من ذلك أنّ f يقبل مشتقاً جزئياً بالنسبة إلى المتحوّل x_i، وأنّ هذا المشتق يساوي $\varphi_i'(a_i) = \mathrm{d} f_a(e_i)$. أي $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d} f_a(e_i)$.

ولكن مهما يكن h من $\mathbb{R}^n$ يكن

$$h = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\, x_k(h) e_k$$

وهذا يثبت أنّ

$$\mathrm{d} f_a(h) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\, x_k(h)\,\mathrm{d} f_a(e_k)$$

ومن ثَمّ

$$\mathrm{d} f_a(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,\mathrm{d}\, x_k(h)$$

وبذلك يكتمل الإثبات. ❐

3-4. ملاحظة. إنّ عكس المبرهنة 3-3. خطأ، إذ يمكن لتابع عددي لعدة متحوّلات أن يقبل مشتقات جزئية بالنسبة إلى كلٍّ من متحوّلاته عند نقطة داخل مجموعة تعريفه دون أن يقبل المفاضلة عند تلك النقطة. كما يبيِّن مثال التابع الآتي:

3-5. **مثال**. لنتأمّل التابع

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3+x^3y}{x^4+y^4} & : \ (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & : \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

فهو يقبل الاشتقاق بالنسبة إلى كلٍّ من x و y عند $a=(0,0)$، لأنّ التطبيقين الجزئيين φ_1 و φ_2 عند هذه النقطة معدومان، أي $\varphi_1=0$ و $\varphi_2=0$، ومنه

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

ولكنّ التابع f لا يقبل المفاضلة عند a لأنّه ليس مستمراً عندها، راجع الملاحظة 3-1.

تعطي المبرهنة الآتية حلاً مفيداً لمسألة العكس السابقة:

3-6. **مبرهنة**. ليكن f تابعاً عددياً معرّفاً على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. ولنفترض أنّ f يقبل مشتقات جزئية بالنسبة إلى كلِّ متحوّل من متحولاته وأنّ هذه المشتقات مستمرة عند a، عندئذ يكون f قابلاً للمفاضلة عند a من A. ويكون

$$\mathrm{d}\, f_a=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,\mathrm{d}\, x_k$$

الإثبات

سنعرض الإثبات في حالة $n=2$ تبسيطاً للكتابة، مع العلم أنّ هذا لا يغيِّر فكرة البرهان.
لتكن إذن $a=(a_1,a_2)$ من A. ولتكن $\varepsilon>0$. إنّ استمرار المشتقّين الجزئيَّين D_1f و D_2f عند a يقتضي وجود $\eta>0$ تُحقّق في حالة (α,β) من $\mathbb{R}^2$ ما يلي :

$$\max(|\alpha|,|\beta|)<\eta\Rightarrow\begin{cases}\left|D_1f(a_1+\alpha,a_2+\beta)-D_1f(a_1,a_2)\right| & <\dfrac{\varepsilon}{2}\\[1ex] \left|D_2f(a_1+\alpha,a_2+\beta)-D_2f(a_1,a_2)\right| & <\dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

لتكن إذن $h=(h_1,h_2)$ من $\mathbb{R}^2$، تحقّق $\|h\|=\max(|h_1|,|h_2|)<\eta$. فإذا طبّقنا مبرهنة التزايدات المحدودة على التابع $x_1\mapsto f(x_1,a_2)$ وجدنا عدداً θ_1 من $]0,1[$ يُحقّق

$$f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)=h_1D_1f(a_1+\theta_1h_1,a_2)$$

ولمّا كان $|\theta_1h_1|<\eta$ أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}&\left|f(a_1+h_1,a_2)-f(a)-h_1D_1f(a)\right|\\&\qquad=|h_1|\cdot\left|D_1f(a_1+\theta_1h_1,a_2)-D_1f(a)\right|<|h_1|\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\qquad ①$$

وكذلك إذا طبّقنا مبرهنة التزايدات المحدودة على التابع $x_2\mapsto f(a_1+h_1,x_2)$ وجدنا عدداً θ_2 من $]0,1[$ يُحقّق

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)=h_2D_2f(a_1+h_1,a_2+\theta_2h_2)$$

ولمّا كان $\max(|h_1|,|\theta_2h_2|)<\eta$ أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}&\left|f(a+h)-f(a_1+h_1,a_2)-h_2D_2f(a)\right|\\&\qquad=|h_2|\cdot\left|D_2f(a_1+h_1,a_2+\theta_2h_2)-D_2f(a)\right|<|h_2|\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\qquad ②$$

وبجمع العلاقتين ① و ② والاستفادة من متراجحة المثلّث نجد

$$\left|f(a+h)-f(a)-h_1D_1f(a)-h_2D_2f(a)\right|<\left(|h_1|+|h_2|\right)\frac{\varepsilon}{2}$$

إذن لقد أثبتنا أنه، مهما تكن ε من $\mathbb{R}_+^*$ يوجد η في $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق

$$\|h\|<\eta\Rightarrow\left|f(a+h)-f(a)-h_1D_1f(a)-h_2D_2f(a)\right|<\|h\|\varepsilon$$

وهذا يثبت أنّ f قابل للمفاضلة عند a وأنّ

$$\mathrm{d}f_a(h)=h_1D_1f(a)+h_2D_2f(a)$$

وهو المطلوب. ❐

نستنتج من المبرهنة السابقة مباشرة النتيجتين الآتيتين:

3-7. نتيجة. ليكن f تابعاً عددياً معرّفاً على مجموعة مفتوحة غير خالية A من $\mathbb{R}^n$. لنفترض أنّ f يقبل مشتقات جزئية مستمرّة على A بالنسبة إلى كلِّ متحوّل من متحولاته، عندئذ يقبل f تفاضلاً مستمراً على A . ويكون

$$\mathrm{d}\, f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, \mathrm{d}\, x_k$$

3-8. نتيجة. ليكن f تابعاً معرّفاً على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$ ، ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$. ولنرمز بالرموز $f_1, \ldots, f_m$ إلى مركّباته. ولنفترض أنّ جميع المشتقات الجزئية $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ، حيث (i,j) من $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ ، موجودة ومستمرّة على A . عندئذ يقبل f تفاضلاً مستمراً على A .

3-9. ملاحظة. إنّ شروط المبرهنة 3-6. ليست ضروريّة حتى يقبل تابعٌ المفاضلة عند نقطة، وهذا ما نبيّنه في المثال الآتي إذ نتأمّل التابع

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ونزوّد الفضاء $\mathbb{R}^2$ بالنظيم الإقليدي $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. عندئذ نلاحظ أنّه عندما (x,y) لايساوي $(0,0)$ لدينا

$$\frac{\left|f(x,y) - f(0,0)\right|}{\|(x,y)\|} = \|(x,y)\| \cdot \left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \|(x,y)\|$$

وهذا يثبت أنّ f قابل للمفاضلة عند $(0,0)$ وأنّ $\mathrm{d}\, f_{(0,0)} = 0$.

ولكن، من جهة أخرى، مهما تكن (x,y) غير $(0,0)$ فلدينا

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

والتابعان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ غير مستمرين عند $(0,0)$، لأنه أيّاً كانت $t > 0$ كان

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = 2t \sin\frac{1}{\sqrt{2}\,t} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,t}$$

وليس لهذا لمقدار نهاية عند 0.

3-10. **تعريف**. ليكن f تابعاً معرّفاً على مجموعة مفتوحة غير خالية A من $\mathbb{R}^n$، ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$. ولنرمز بالرموز $f_1,\ldots,f_m$ إلى مركّباته. نفترض أنّ f يقبل المفاضلة عند نقطة a من A. عندئذ تقبل التوابع العدديّة $f_1,\ldots,f_m$ المفاضلة عند النقطة a من A، ويمكننا أن نكتب♣:

$$\forall h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}\, f_a(h) = \begin{bmatrix} \mathrm{d}(f_1)_a(h) \\ \vdots \\ \mathrm{d}(f_m)_a(h) \end{bmatrix}$$

ولكن، أياً كان i من $\mathbb{N}_m$، كان $\mathrm{d}(f_i)_a(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) h_j$، إذن

$$\mathrm{d}\, f_a(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

نسمّي **مصفوفة جاكوبي** للتابع f عند النقطة a، المصفوفة

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

وعندئذ يمكن التعبير عن تفاضل التابع f عند a بالكتابة الرمزيّة التالية

$$\mathrm{d}\, f_a = J_a(f) \begin{bmatrix} \mathrm{d}\, x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\, x_n \end{bmatrix}$$

♣ قرّرنا أن نكتب عناصر $\mathbb{R}^m$ و $\mathbb{R}^n$ في أعمدة.

وأخيراً، في حالة $n = m$ تصبح مصفوفة جاكوبي للتابع f عند a مربّعة، ونسمّي **مُحدِّد جاكوبي** للتابع f عند a، مُحدِّد المصفوفة $J_a(f)$ ونرمز إليه عادة بالرمز $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$.

3-11. **ملاحظات**. يمكننا باستخدام مصفوفات جاكوبي إعادة صياغة المبرهنتين 2-7. و 2-9. كما يأتي:

❖ لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، ولتكن B مجموعة مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^m$. وليكن التابعان $f : B \to \mathbb{R}^p$ و $g : A \to \mathbb{R}^m$ حيث $g(A) \subset B$.
نفترض أنّ g قابلٌ للمفاضلة عند a من A، وأنّ f قابلٌ للمفاضلة عند $g(a)$ من B، عندئذ يقبل التابع $f \circ g$ المفاضلة عند a ويكون

$$J_a(f \circ g) = J_{g(a)}(f) \times J_a(g)$$

وبوجه خاصٍّ إذا كان f تابعاً عددياً فإنّ

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \frac{\partial h}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}(g(a)) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)$$

إذ استعملنا رموزاً أصبحت الآن واضحة للقارئ.

❖ لتكن A و B مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين في $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to B$ تقابلاً مستمراً هو وتابعه العكسيّ. فإذا كان f قابلاً للمفاضلة عند النقطة a من A، وكان

$$\det J_a(f) = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$$

كان التابع العكسي f^{-1} قابلاً للمفاضلة عند $f(a)$ من B. وتحقّقت العلاقة:

$$J_{f(a)}(f^{-1}) = (J_a(f))^{-1}$$

3-12. **مثال**. لنتأمّل التابع

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

عندئذ نرى مباشرة أنّ f قابل للمفاضلة على $\mathbb{R}^3$ وأنّ مصفوفة جاكوبي عند (r,θ,φ) هي

$$J_{(r,\theta,\varphi)}(f)=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi\end{bmatrix}$$

وبحساب محدّد جاكوبي للتابع f عند (r,θ,φ) نجد $\det J_{(r,\theta,\varphi)}(f)=r^2\cos\varphi$.

3-13. تعريف. ليكن f تابعاً عددياً معرّفاً على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. إذا كان f مستمراً قلنا إنه ينتمي إلى الصف C^0 على A ، وإذا قَبِل f مشتقات جزئيّة $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i\in\mathbb{N}_n}$ مستمرّة على A قلنا إنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على A .

وبوجه عام نقول إنّ f ينتمي إلى **الصف C^p** على A (حيث p من $\mathbb{N}^*$)، إذا قَبِل f مشتقات جزئيّة $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i\in\mathbb{N}_n}$ ينتمي كلٌّ منها إلى الصف C^{p-1} على A . ونقول إنّ التابع f ينتمي إلى **الصف C^∞** على A ، إذا انتمى إلى كلِّ الصفوف C^p . ونقول إنّ $g:A\rightarrow\mathbb{R}^m$ ينتمي إلى الصف C^p إذا انتمت كلُّ مركّباته إلى الصف C^p .

نكتب عادة $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$ للدلالة على المشتق الجزئيّ للتابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ بالنسبة إلى المتحوّل x_j عند a . ونعرّف بالمثل الرمز $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}}(a)$. ونكتب اختصاراً $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ عوضاً عن $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_i}$.

لقد أثبتنا في المبرهنة 3-6. أنّ التابع f يكون من الصف C^1 على A إذا وفقط إذا قَبِلَ المفاضلة عند كلِّ نقطة من A ، وكان تفاضله $\mathrm{d}f:A\rightarrow\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ مستمراً على A .

3-14. مبرهنة. لتكن A و B مجموعتين جزئيّتين مفتوحتين وغير خاليتين من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$، بالترتيب. وليكن التابعان $f:B\rightarrow\mathbb{R}^p$ و $g:A\rightarrow\mathbb{R}^m$ حيث $g(A)\subset B$. نفترض أنّ كلّاً من g و f ينتمي إلى الصف C^k . عندئذ ينتمي التابع $f\circ g$ أيضاً إلى الصف C^k .

الإثبات

الإثبات تحقُّقٌ مباشر ويجري بالتدريج على العدد k . ❐

3-15. مبرهنة -Schwarz. ليكن f تابعاً عددياً معرّفاً على مجموعة مفتوحة، وغير خالية A من $\mathbb{R}^2$. ولنفترض أنّ المشتقات الجزئيّة $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ موجودة. فإذا كان التابعان $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ مستمرين عند (a,b) من A تحقّقت المساواة:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

الإثبات

ليكن V جواراً للنقطة $(0,0)$ يُحقّق

$$\forall (h,k) \in V, \;\; (a+h, b+k) \in A$$

ولنعرّف على V التابع F بالعلاقة

$$F(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$$

وكذلك لنعرّف عند قيمة ثابتة للمتحوّل k، التابع الحقيقي φ بالعلاقة

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x,b)$$

فنلاحظ من جهة أولى أنّ $F(h,k) = \varphi(h+a) - \varphi(a)$ ، ونرى من جهة ثانية أنّ

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,b)$$

فيوجد، استناداً إلى مبرهنة التزايدات المحدودة، عدد θ_1 ينتمي إلى $]0,1[$ يُحقّق

$$F(h,k) = h\varphi'(a+\theta_1 h) = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b)\right)$$

ولكنّ التابع $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, y)$ قابلٌ للاشتقاق، وتطبيق جديد لمبرهنة التزايدات المحدودة يُثبتُ وجود θ_2 ينتمي إلى $]0,1[$ يُحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b) = k\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

ومنه

$$F(h,k)=hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a+\theta_1 h,b+\theta_2 k)$$

ولمّا كان $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ مستمراً عند (a,b)، فإننا نستنتج مما سبق أنّ

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F(h,k)}{hk}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) \qquad ①$$

من ناحية أخرى، لنعرّف عند قيمة ثابتة للمتحوّل h، التابع الحقيقي ψ بالعلاقة

$$\psi(x)=f(a+h,y)-f(a,y)$$

فيوجد، استناداً إلى مبرهنة التزايدات المحدودة، عدد θ_1 ينتمي إلى $]0,1[$ يُحقّق

$$\begin{aligned}F(h,k)&=\psi(b+k)-\psi(b)=k\,\psi'(b+\theta_1 k)\\&=k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_1 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\theta_1 k)\right)\end{aligned}$$

ويوجد θ_2 ينتمي إلى $]0,1[$ يُحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_1 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\theta_1 k)=k\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta_2 h,b+\theta_1 k)$$

ومنه

$$F(h,k)=hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta_2 h,b+\theta_1 k)$$

ولمّا كان $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ مستمراً عند (a,b)، فإننا نستنتج مما سبق أنّ

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F(h,k)}{hk}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \qquad ②$$

ويكتمل الإثبات بمقارنة ① و②. ❐

إنّ النتيجة الآتية تعميمٌ واضح وبالتدريج للمبرهنة السابقة.

3-16. **نتيجة** : ليكن f تابعاً عددياً ينتمي إلى الصف C^p على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. ولتكن $i_1, \ldots, i_n$ أعداداً طبيعيّة تُحقِّق الشرط $i_1 + \cdots + i_n = p$. عندئذ تكون جميع المشتقات الجزئيّة من المرتبة p والتي نحصل عليها من اشتقاق f بالنسبة إلى المتحوّل x_k عدداً من المرات يساوي i_k، مع $(1 \leq k \leq n)$، متساوية.

3-17. **ملاحظات**

❖ يمكن للمساواة $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ ألاّ تتحقّق في حالة كون المشتقين الجزئيّين $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ موجودين فقط عند النقطة (a,b)، أو في حالة كونهما موجودين على A دون أن يكونا مستمرين عند (a,b) . كما يبيِّن المثال الآتي:

لنتأمّل التابع العدديّ

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & : \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

نجد بحساب بسيط أنّ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & : \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2} & : \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ومن ثَمّ نجد

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{y \to 0} \frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = +1. \end{aligned}$$

❖ إنّ وجود واستمرار المشتقين الجزئيين $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ لتابع في جوار النقطة (a,b) لا يقتضي، بوجه عام، وجود المشتقّين الجزئيين $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ عند (a,b).

يبيِّن ذلك مثال التابع f الآتي في جوار النقطة $(0,0)$.

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+y^2\sin\dfrac{1}{y} & : (x,y)\in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* \\ x^2\sin\dfrac{1}{x} & : (x,y)\in \mathbb{R}^*\times\{0\} \\ y^2\sin\dfrac{1}{y} & : (x,y)\in \{0\}\times\mathbb{R}^* \\ 0 & : (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

نختم هذه الفقرة بالمبرهنة التية، التي نقبلها صحّتها دون إثبات:

3-18. مبرهنة : لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f:A\to\mathbb{R}^n$ تابعاً متبايناً ومن الصف C^p، مع $(1\le p)$، على A. نفترض أنه أياً كانت a من A فلدينا $\det J_a(f)\neq 0$. عندئذ تكون المجموعة $B=f(A)$ مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$، وينتمي كلٌّ من التطبيقين $\tilde{f}:A\to B:x\mapsto f(x)$ و $\tilde{f}^{-1}$ إلى الصف C^p.

4. متراجحة التزايدات المحدودة

في هذه الفقرة، نفترض أنّ الفضاء $\mathbb{R}^p$ مزوّد بالنظيم الإقليدي المألوف $\|\cdot\|_2$، أي

$$\forall X=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p,\quad \|X\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{p}|x_k|^2}$$

4-1. مبرهنة. لتكن A مجموعة **محدّبة** ومفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f:A\to\mathbb{R}$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة على A، ويُحقِّق الشرط

$$\forall a\in A,\quad \|J_a(f)\|_2\le M$$

عندئذ

$$\forall (x,y)\in A^2,\quad |f(x)-f(y)|\le M\|x-y\|_2$$

الإثبات

لتكن (x,y) من A^2 . لمّا كانت المجموعة A محدّبة كان $ty+(1-t)x \in A$ أيّاً كانت t من $[0,1]$. لنعرّف إذن

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(x+t(y-x))$$

إنّ φ تابع مستمرٌّ وقابل للاشتقاق على $[0,1]$، ويُحقّق

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x+t(y-x)) \cdot (y_k - x_k)$$

وإذا استخدمنا متراجحة كوشي–شوارتز أمكننا أن نكتب، في حالة t من $[0,1]$، ما يأتي

$$\left|\varphi'(t)\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x+t(y-x)\big)\right|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|y_k - x_k\right|^2} \leq M \left\|y-x\right\|_2$$

ولكنّ مبرهنة التزايدات المحدودة تفيدنا في إيجاد θ من $\left]0,1\right[$ تُحقّق

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$$

ومنه

$$\left|f(y) - f(x)\right| = \left|\varphi'(\theta)\right| \leq M \left\|y-x\right\|_2$$

وبذلك يتم إثبات المطلوب. ❐

2-4. نتيجة. لتكن A مجموعة **محدّبة** ومفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعاً قابلاً للمفاضلة على A، ويُحقّق الشرط $\mathrm{d}f = 0$. عندئذ يكون f ثابتاً.

الإثبات

يكفي أن نطبّق المبرهنة السابقة على كلِّ مركّبة من مركّبات f بعد أخذ $M = 0$. ❐

نريد فيما يلي تعميم الخاصّة السابقة على مجموعات مفتوحة جزئيّة من $\mathbb{R}^n$ أكثر عموميّة من المجموعات المحدّبة. لذلك سنُدخل التعريف المهمّ الآتي.

3-4. تعريف : لتكن A مجموعة **مفتوحة** في $\mathbb{R}^n$، نقول إنّ A **مجموعة مترابطة**. إذا لم يكن بالإمكان كتابة المجموعة A بشكل اجتماع مجموعتين منفصلتين مفتوحتين، وغير خاليتين.

المبرهنة الآتية مهمّة ولكن يمكن إرجاء إثباتها إلى قراءة ثانية.

4-4. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئيّة **مفتوحة** من $\mathbb{R}^n$. عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة.

1. المجموعة A مترابطة.
2. مهما تكن الثنائية (x,y) من A^2 ، يوجد تابع مستمرٌّ $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ يُحقّق $\varphi\big([0,1]\big) \subset A$ و $\varphi(0) = x$ و $\varphi(1) = y$.
3. مهما تكن الثنائية (x,y) من A^2 ، يوجد تابع $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ من الصف C^1 يُحقّق
$$\psi\big([0,1]\big) \subset A \text{ و } \psi(0) = x \text{ و } \psi(1) = y .$$

الإثبات

1. $\Leftarrow$ 2. لنثبّتْ عنصراً x في A ، ولنعرّف المجموعة $\mathcal{O}_1$ على الوجه الآتي: ينتمي العنصر y إلى $\mathcal{O}_1$ إذا وفقط إذا وُجِدَ تابع مستمرٌّ $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ يحقّق $\varphi\big([0,1]\big) \subset A$ و $\varphi(0) = x$ و $\varphi(1) = y$.

- إنّ المجموعة $\mathcal{O}_1$ **مجموعة غير خالية**. لأنّ التابع المستمر والثابت
$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ \varphi(t) = x$$
يبيّن أن x ينتمي إلى $\mathcal{O}_1$.
- إنّ المجموعة $\mathcal{O}_1$ **مجموعة مفتوحة**.

في الحقيقة، ليكن العنصر z من $\mathcal{O}_1$ ، إذن يوجد تابع مستمرٌّ $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ يُحقّق $\varphi\big([0,1]\big) \subset A$ و $\varphi(0) = x$ و $\varphi(1) = z$. ولمّا كان z ينتمي إلى A وجدنا كرة مفتوحة وغير خالية $B(z,\rho)$ تُحقّق $B(z,\rho) \subset A$. وعندئذ تكون الكرة $B(z,\rho)$ محتواة في $\mathcal{O}_1$ ، وذلك لأنّه مهما يكن العنصر y من $B(z,\rho)$ فإنّه يوجد تابع مستمرٌّ هو

$$\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ \psi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & : \quad t \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ z + (2t-1)(y-z) & : \quad t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

يحقّقُ $\psi(0) = x$ و $\psi(1) = y$ وأخيراً
$$\psi\big([0,1]\big) \subset \varphi\big([0,1]\big) \cup B(z,\rho) \subset A$$

- لتكن $\mathcal{O}_2 = A \setminus \mathcal{O}_1$، ولنثبت أنّ $\mathcal{O}_2$ **مجموعة مفتوحة**.

ليكن z عنصراً من $\mathcal{O}_2$، لمّا كانت A مجموعة مفتوحة وجدنا كرة مفتوحة وغير خالية $B(z,\rho)$ تُحقّق $B(z,\rho) \subset A$. لنفترض جدلاً أنّ $B(z,\rho) \cap \mathcal{O}_1 \neq \varnothing$ فيوجد عنصر y في $B(z,\rho) \cap \mathcal{O}_1$. وعندها يوجد تابع مستمرٌّ $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ يُحقّق

$$\varphi\big([0,1]\big) \subset A \text{ و } \varphi(0) = x \text{ و } \varphi(1) = y$$

وذلك لأنّ $y \in \mathcal{O}_1$، وينتج من ذلك أنّ $z \in \mathcal{O}_1$ لأنّه يوجد تابع مستمرٌّ هو

$$\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ \psi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & : \ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ y + (2t-1)(z-y) & : \ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

يحقّق $\psi(0) = x$ و $\psi(1) = z$ وكذلك

$$\psi\big([0,1]\big) \subset \varphi\big([0,1]\big) \cup B(z,\rho) \subset A$$

وهذا تناقض لأنّ $z \notin \mathcal{O}_2 \Leftarrow z \in \mathcal{O}_1$. نستنتج إذن أنّ $B(z,\rho) \cap \mathcal{O}_1 = \varnothing$ أو $B(z,\rho) \subset \mathcal{O}_2$ فالمجموعة $\mathcal{O}_2$ مفتوحة.

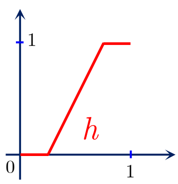
- إنّ ترابط المجموعة A يقتضي إذن أنّ $\mathcal{O}_2 = \varnothing$، ومن ثَمّ $A = \mathcal{O}_1$. وبذا نكون قد أثبتنا الخاصّة 2.

2. $\Leftarrow$ 3. لنثبّت العنصر (x,y) في A^2، وليكن $\tilde{\varphi} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ تابعاً مستمراً يُحقّق $\tilde{\varphi}\big([0,1]\big) \subset A$ و $\tilde{\varphi}(0) = x$ و $\tilde{\varphi}(1) = y$.

ثُمّ لنتأمّل التابع المستمرّ على $[0,1]$ المعرّف بالصيغة

$$h(t) = \min(1, \max(0, 2t - \tfrac{1}{2}))$$

أي



$$h : [0,1] \to [0,1],\ \ h(t) = \begin{cases} 0 & : \ t \in [0, \frac{1}{4}], \\ 2t - \frac{1}{2} & : \ t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ 1 & : \ t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

ولنضع $\varphi = \tilde{\varphi} \circ h$ فيكون $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ تابعاً مستمراً يُحقّق

$$\varphi\big([0,1]\big) \subset A \text{ و } \forall t \in \left[0, \tfrac{1}{4}\right], \varphi(t) = x \text{ و } \forall t \in \left[\tfrac{3}{4}, 1\right], \varphi(t) = y \qquad ①$$

سنفترض فيما يأتي أننا قد زوّدنا $\mathbb{R}^n$ بالنظيم $\|\cdot\|_1$ المعرّف بالعلاقة

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

ولمّا كان φ مستمراً على المجموعة المتراصّة $[0,1]$ كانت صورته $\Gamma = \varphi\big([0,1]\big)$ مجموعة متراصّة محتواة في A . ومن جهة أخرى، لمّا كان التطبيق

$$\delta : \Gamma \to \mathbb{R},\ \delta(x) = d(x, \mathbb{R}^n \setminus A) = \inf\left\{\|x-y\|_1 : y \notin A\right\}$$

تابعاً مستمراً على المجموعة المتراصّة Γ ، فهو يبلغ حدّه الأدنى عليها، أي نجد x_0 ينتمي إلى Γ يُحقّق

$$\varepsilon = \delta(x_0) = \inf_{x\in\Gamma} \delta(x) \qquad ②$$

ولأنّ $\mathbb{R}^n \setminus A$ مجموعة مغلقة، فإنّ $\delta(x_0) = 0$ يقتضي $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ، وهذا يناقض الاحتواء $\Gamma \subset A$ ، إذن $0 < \varepsilon$.

ولأنّ استمرار φ على المجموعة المتراصّة $[0,1]$ يقتضي استمراره المنتظم عليها، فإنّنا نجد عدداً η ينتمي إلى المجال $]0,1/4[$ يُحقّق

$$\forall (u,v) \in [0,1],\quad |u-v| < \eta \Rightarrow \left\|\varphi(u) - \varphi(v)\right\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad ③$$

لنرمز كما جرت العادة بالرموز $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ إلى مركّبات التابع φ. ولنعرّف التابع الجديد $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \psi(t) = \big(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big)$ بالعلاقات

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\eta}\int_0^{\eta} \varphi_k\left(\tfrac{3}{4}t + u\right) \mathrm{d}\,u = \frac{1}{\eta}\int_{3t/4}^{\eta+3t/4} \varphi_k(v)\,\mathrm{d}\,v$$

في حالة t من $[0,1]$ و k من $\mathbb{N}_n$. فنلاحظ أوّلاً أنّ المركّبات $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ توابع من الصف C^1 لأنّ

$$\forall t \in [0,1],\ \ \psi_k'(t) = \frac{3}{4\eta}\Big(\varphi_k(\tfrac{3t}{4} + \eta) - \varphi_k(\tfrac{3t}{4})\Big)$$

نستنتج من ذلك أنّ التابع ψ ينتمي إلى الصف C^1. وإذا استخدمنا ① وجدنا أنّ $\psi(0)=x$ و $\psi(1)=y$ لأنّ $0<\eta<\frac{1}{4}$.

وأخيراً نلاحظ أنّه، مهما تكن t من $[0,1]$ يكن

$$\begin{aligned}
\left\|\psi(t)-\varphi(\tfrac{3}{4}t)\right\|_1 &= \sum_{k=1}^{n}\left|\psi_k(t)-\varphi_k(\tfrac{3}{4}t)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}\left(\varphi_k(\tfrac{3}{4}t+u)-\varphi_k(\tfrac{3}{4}t)\right)\mathrm{d}\,u\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}\left|\varphi_k(\tfrac{3}{4}t+u)-\varphi_k(\tfrac{3}{4}t)\right|\mathrm{d}\,u \\
&= \frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}\left\|\varphi(\tfrac{3}{4}t+u)-\varphi(\tfrac{3}{4}t)\right\|_1\mathrm{d}\,u \le \frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}\,u<\varepsilon
\end{aligned}$$

استناداً إلى ③

لتكن إذن t من $[0,1]$، ولنفترض جدلاً أنّ $\psi(t)\notin A$ عندئذ نصل، بناءً على ②، إلى التناقض الآتي

$$\varepsilon>\left\|\psi(t)-\varphi(\tfrac{3}{4}t)\right\|_1\ge\delta\left(\varphi(\tfrac{3}{4}t)\right)\ge\varepsilon\ .$$

إذن لا بُدّ أن يكون $\psi\left([0,1]\right)\subset A$، ويكتمل إثبات 3.

3. $\Leftarrow$ 1. لنفترض جدلاً أنّ المجموعة A غير مترابطة، فنجد مجموعتين مفتوحتين وغير خاليتين $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$، تُحقّقان $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\varnothing$ و $\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2=A$. لنعرّف إذن التابع f الآتي:

$$f:A\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}1 & : \quad x\in\mathcal{O}_1\\ 2 & : \quad x\in\mathcal{O}_2\end{cases}$$

نتيقّن بسهولة أنّ التابع f ثابت في جوار كلّ نقطة من A، فهو مستمر ويحقّقُ $f(A)=\{1,2\}$. لتكن إذن (x,y) من $\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2$، يوجد، بناءً على الفرْض، تابعٌ مستمرٌّ $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ يُحقّق $\varphi\left([0,1]\right)\subset A$ و $\varphi(0)=x$ و $\varphi(1)=y$.

وعندئذ يكون التابع $f\circ\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً لا يُحقّقُ مبرهنة القيمة الوسطى!

هذا التناقض يبيّن أنّ المجموعة A لا بُدّ أن تكون مترابطة. ويتمّ الإثبات. ❐

4-5. أمثلة

- ❖ كلُّ مجموعة مفتوحة ومحدبة مترابطة.
- ❖ إذا كان $0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$، فإنّ الحلقة:

$$A_{\alpha,\beta} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < \sqrt{x^2 + y^2} < \beta\right\}$$

مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}^2$ ولكنها ليست محدّبة.

4-6. تعريف. لتكن A مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$، ولتكن (x,y) من A^2، نسمّي **منحنياً وسيطياً** (من الصف C^1، أو من الصف C^1 قِطَعيّاً) في A **بدايته** x و**نهايته** y، كلَّ تابع $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ مستمرٍّ (وينتمي إلى الصف C^1، أو تنتمي كلُّ واحدة من مركّباته إلى الصف C^1 قِطَعيّاً) يحقّق الشروط:

$$\psi(b) = y \text{ و } \psi(a) = x \text{ و } \psi\big([a,b]\big) \subset A$$

وإذا كان $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ منحنياً وسيطياً ينتمي إلى الصف C^1 في A بدايته x ونهايته y أسمينا العدد

$$L(\psi) = \int_a^b \left\|\psi'(t)\right\|_2 \mathrm{d}\,t = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n \left|\psi_k'(t)\right|^2} \mathrm{d}\,t$$

طول المنحني ψ. أمّا إذا كان $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ينتمي إلى الصف C^1 قِطَعيّاً فيمكن تعميم التعريف السابق على هذه الحالة بسهولة بالاستفادة من علاقة شال. نترك صياغة ذلك للقارئ.

4-7. تعريف. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، نعرّف على A علاقة تكافؤ $(\sim)$ كما يلي: أياً يكن (x,y) من A^2، نَقُلْ إنّ $x \sim y$ إذا وفقط إذا وُجِدَ منحن وسيطي في A بدايته x ونهايته y. إذ يتيقّن القارئ بسهولة أنّ هذه العلاقة علاقة تكافؤ، وأنّ صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي مجموعات مفتوحة ومترابطة أعظميّة محتواة في A، نسميها **المركّبات المترابطة** للمجموعة A.

تمثّل المبرهنة الآتية التعميم الطبيعي لمبرهنة القيمة الوسطى.

4-8. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة **مفتوحة مترابطة** وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f:A\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً. عندئذ تكون المجموعة $f(A)$ مجالاً.

الإثبات

لتكن $f(a)$ و $f(b)$ نقطتين من $f(A)$. لمّا كان (a,b) عنصراً من A^2 فهناك منحن وسيطي $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^n$، يُحقّق $\varphi\big([0,1]\big)\subset A$ و $\varphi(0)=a$ و $\varphi(1)=b$. عندئذ يكون $f\circ\varphi$ تابعاً مستمراً على $[0,1]$ وهو من ثَمّ يحقّق مبرهنة القيمة الوسطى،وعليه تنتمي جميع الأعداد الواقعة بين القيمتين $f\circ\varphi(0)=f(a)$ و $f\circ\varphi(1)=f(b)$ إلى المجموعة $f\circ\varphi\big([0,1]\big)$ المحتواة في $f(A)$. ❐

4-9. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة **مفتوحة ومترابطة** من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f:A\to\mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1 على A، يُحقِّق الشرط $\forall x\in A,\ \|J_x(f)\|_2\le M$. عندئذ مهما تكن (x,y) من A^2، ومهما يكن $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ منحنياً وسيطياً في A من الصف C^1 بدايته x ونهايته y، فلدينا $\big|f(x)-f(y)\big|\le M\,L(\psi)$.

الإثبات

لتكن (x,y) من A^2. وليكن $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ منحنياً وسيطياً في A من الصف C^1 بدايته x ونهايته y. ولنعرّف

$$h:[a,b]\to\mathbb{R},\quad h(t)=f\circ\psi(t)$$

إنّ h تابع حقيقيّ من الصف C^1 على $[a,b]$ يحقّق

$$h'(t)=f'_{x_1}(\psi(t))\psi_1(t)+f'_{x_2}(\psi(t))\psi_2(t)+\cdots+f'_{x_n}(\psi(t))\psi_n(t)$$

حيث $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n$ هي مركّبات التابع ψ. إذن استناداً إلى متراجحة Schwarz يكون

$$\big|h'(t)\big|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\Big|f'_{x_k}(\psi(t))\Big|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\big|\psi'_k(t)\big|^2}\le M\cdot\big\|\psi'(t)\big\|_2$$

ومن ثَمّ

$$\big|f(y)-f(x)\big|=\big|h(b)-h(a)\big|\le\int_a^b\big|h'(t)\big|\,\mathrm{d}t\le M\,L(\psi)$$

وهذه هي المتراجحة المطلوبة. ❐

10-4. **ملاحظة**. تبقى المبرهنة السابقة صحيحة إذا كان المنحني الوسيطي ψ ينتمي إلى الصف C^1 قِطَعِيّاً إذ نُجري تعديلاً بسيطاً على الإثبات بالاستفادة من علاقة شال.

11-4. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة **مفتوحة ومترابطة** من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للمفاضلة على A، ويُحقِّق الشرط $\mathrm{d}\, f = 0$. عندئذ يكون f ثابتاً.

الإثبات

لتكن (x,y) من A^2. يوجد طريق $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ من الصف C^1، يُحقّق

$$\psi\big([0,1]\big) \subset A \quad \text{و} \quad \psi(0) = x \quad \text{و} \quad \psi(1) = y$$

لنعرّف إذن

$$h : [0,1] \to \mathbb{R},\ h(t) = f \circ \psi(t)$$

إنّ h تابع حقيقيّ قابل للاشتقاق على $[0,1]$ ويحقّق

$$\forall t \in [0,1],\ \ h'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\psi(t))\,\psi'_k(t) = 0$$

حيث $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ هي مركّبات التابع ψ. إذن h تابعٌ ثابتٌ، ومنه

$$f(x) = h(0) = h(1) = f(y)$$

وهذا يبيِّنُ أنّ التابع f تابعٌ ثابتٌ أيضاً. ❐

بتطبيق هذه النتيجة على مركبّات تابع يأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$ نصل إلى الخاصّة المهمة الآتية.

12-4. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة **مفتوحة مترابطة** وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن التابع $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعاً قابلاً للمفاضلة على A، ويُحقِّق الشرط $\mathrm{d}\, f = 0$. عندئذ يكون f ثابتاً.

5. القيم الصغرى والعظمى محليّاً لتابع عددي لعدّة متحوّلات

5-1. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^2 على A. ولتكن a من A، و $r > 0$ تُحقّقان $B(a,r) \subset A$. عندئذ يوجد تابع $\delta : B(0,r) \to \mathbb{R}$، يُحقّق، في حالة $\|h\| < r$، ما يلي :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + \delta(h)\|h\|^2$$

حيث $\lim\limits_{h\to 0} \delta(h) = 0$

الإثبات

سنفترض أننا زوّدنا الفضاء $\mathbb{R}^n$ بالنظيم $\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$، وهذا لا يؤثّر على عموميّة الإثبات نظراً إلى تكافؤ جميع النّظم على هذا الفضاء.

ليكن h عنصراً من $B(0,r)$. ولنتأمّل التابع العددي φ المعرّف على المجال $[0,1]$ بالعلاقة

$$\varphi(t) = f(a+th) - f(a) + (1-t)\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a+th)h_k$$

ينتمي هذا التابع إلى الصف C^1 استناداً إلى الفرْض. ونجد مباشرة أنّ

$$\varphi'(t) = (1-t)\sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)h_i h_j$$

إذن تتيح لنا العلاقة

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

أن نكتب

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k \\ = \int_0^1 (1-t)\sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)h_i h_j \,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

لنضع إذن

$$\delta(h)=\frac{1}{\|h\|^2}\left(f(a+h)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k-\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j\right)$$
$$=\frac{1}{\|h\|^2}\int_0^1\left((1-t)\sum_{1\le i,j\le n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(a+th)-\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)h_ih_j\right)\mathrm{d}\,t$$

ومنه

$$\left|\delta(h)\right|\le\frac{1}{\|h\|^2}\int_0^1\left(\sum_{1\le i,j\le n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(a+th)-\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right|\left|h_i\right|\left|h_j\right|\right)\mathrm{d}\,t$$

ليكن $\varepsilon>0$. إنّ استمرار المشتقّات الجزئيّة من المرتبة الثانية عند a يسمح لنا بإيجاد $\eta>0$ تجعل الشرط $\|h\|<\eta$ يقتضي ما يأتي:

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\forall t\in[0,1],\quad\left|\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(a+th)-\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right|<\varepsilon$$

وعليه تتحقّق، في حالة $\|h\|<\eta$، المتراجحة

$$\left|\delta(h)\right|\le\frac{\varepsilon}{\|h\|^2}\int_0^1\left(\sum_{1\le i,j\le n}\left|h_i\right|\cdot\left|h_j\right|\right)\mathrm{d}\,t=\varepsilon$$

إذن لقد أثبتنا أنّ $\lim_{h\to 0}\delta(h)=0$. وهي النتيجة المطلوبة. ❐

5-2. **تعريف**. ليكن f تابعاً عددياً معرّفاً على مجموعة A جزئيّة من $\mathbb{R}^n$. نقول إن التابع f يبلغ عند a من A **قيمة عظمى محليّاً** إذا وفقط إذا وُجِدَ جوار V للنقطة a يُحقّق

$$\forall x\in V\cap A,\quad f(x)\le f(a)$$

ونقول إن التابع f يبلغ عند a من A **قيمة صُغرى محليّاً** إذا وفقط إذا وُجِدَ جوار V للنقطة a يُحقّق

$$\forall x\in V\cap A,\quad f(x)\ge f(a)$$

ونقول إنّ القيمة العظمى أو الصغرى محليّاً تامّةٌ إذا أمكن اختيار الجوار V بأسلوب تكون فيه المتراجحة تامّة في حالة $x\neq a$.

3-5. **تعريف**. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً عددياً على A. نقول إنّ النقطة a من A **نقطة حرجة** للتابع f، إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئيّة $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1\le i\le n}$ موجودة و**صفريّة**.

4-5. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً عددياً على A يأخذ قيمة عظمى أو صغرى محلّيّاً عند a من A. نفترض أنّ للتابع f مشتقات جزئيّة $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1\le i\le n}$ عند a. عندئذ تكون a نقطة حرجة للتابع f.

الإثبات

في الحقيقة، إذا أخذ التابع f قيمة عظمى أو صغرى محلّياً عند $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ من A، أخذ التابع الجزئي

$$\varphi_j : x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

قيمة عظمى أو صغرى محلّياً عند a_j، وذلك أياً كانت j من $\mathbb{N}_n$. ولكنّ التابع الحقيقي φ_j قابل للاشتقاق عند a_j فلا بُدّ أن يكون $\varphi_j'(a_j) = 0$. وهذا يثبت المطلوب. □

☜ نذكّر أنّ كون نقطة ما نقطة حرجة لتابع معرّفٍ في جوارها، هو شرط **لازم** ليأخذ هذا التابع قيمة عظمى أو صغرى محلياً عند هذه النقطة، ولكنّه **ليس** شرطاً **كافياً** كما يبيِّن مثال التابع $x \mapsto x^3$.

لقد وجدنا عند دراسة المصفوفات المتناظرة أنّه إذا كانت M من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة، شابهت M مصفوفة قطريّة، وكان العددان

$$\lambda_M = \inf_{h\neq 0} \frac{\langle Mh, h\rangle}{\|h\|_2^2} \quad \text{و} \quad \Lambda_M = \sup_{h\neq 0} \frac{\langle Mh, h\rangle}{\|h\|_2^2}$$

أكبر القيم الذاتيّة للمصفوفة M وأصغرها على الترتيب. وعندئذ تتحقّق المتراجحة

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_M \|h\|_2^2 \le \langle Mh, h\rangle \le \Lambda_M \|h\|_2^2$$

مع مساواة في المتراجحة اليمنى في حالة $h = x_\Lambda$ الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتيّة Λ_M، ومساواة في المتراجحة اليسرى في حالة $h = x_\lambda$ الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتيّة λ_M.

5-5. مبرهنة. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً عدديّاً من الصف C^2 على A، ولتكن a من A نقطة حرجة للتابع f. ولتكن $M = \text{Hess}_a(f) \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ المصفوفة المتناظرة التي ثابتُ السطر i والعمود j فيها يساوي $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ $= m_{ij}$. عندئذ

- إذا كانت أكبر القيم الذاتيّة Λ_M للمصفوفة M سالبة تماماً أخذ التابع f قيمة عظمى تامّة محلّياً عند a.
- إذا كانت أصغر القيم الذاتيّة λ_M للمصفوفة M موجبة تماماً أخذ التابع f قيمة صغرى تامّة محلّياً عند a.
- إذا كان $\lambda_M < 0 < \Lambda_M$ لم يكن للتابع f قيمة كبرى أو صغرى محلّياً عند a.
- في غير الحالات السابقة، تتطلّب معرفة طبيعة النقطة الحرجة a، دراسة أعمق للتابع ولا تكفي دراسة المصفوفة $\text{Hess}_a(f)$ لإقرار هذه الطبيعة.

الإثبات

في الحقيقة، استناداً إلى المبرهنة 5-1. يكون لدينا في جوارٍ $B(a,r)$ للنقطة a ما يأتي:

$$\forall h \in B(a,r), \quad f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\left\langle Mh, h \right\rangle + \delta(h)\left\| h \right\|^2$$

- لنفترض أنّ أكبر القيم الذاتيّة Λ_M للمصفوفة M سالبة تماماً. عندئذ يكون

$$\forall h \in B(a,r), \quad f(a+h) - f(a) \leq \left(\frac{1}{2}\Lambda_M + \delta(h)\right)\left\| h \right\|_2^2$$

ولكن $\lim_{h \to 0} \delta(h) = 0$ إذن يوجد η في $]0, r[$ تُحقّق

$$\left\| h \right\| < \eta \Rightarrow \delta(h) < -\frac{\Lambda_M}{4}$$

وعندئذ، مهما تكن h من $B(0,\eta) \backslash \{0\}$، يكن

$$f(a+h) - f(a) \leq \left(\frac{1}{2}\Lambda_M + \delta(h)\right)\left\| h \right\|_2^2 \leq \frac{1}{4}\Lambda_M \left\| h \right\|_2^2 < 0$$

وعليه نجد أنّ $f(a+h) < f(a)$ في حالة $0 < \left\| h \right\| < \eta$ فالتابع f يبلغ قيمة عظمى تامّة محلّياً عند a.

- لنفترض أنّ أصغر القيم الذاتيّة λ_M للمصفوفة M موجبة تماماً. عندئذ يكون

$$\forall h \in B(a,r), \quad f(a+h)-f(a) \geq \left(\frac{1}{2}\lambda_M + \delta(h)\right)\left\|h\right\|_2^2$$

ولكن $\lim_{h\to 0}\delta(h)=0$ إذن يوجد η في $]0,r[$ تُحقّق $\delta(h) > -\frac{\lambda_M}{4}$ في حالة $\|h\| < \eta$، وعندئذ، مهما تكن h من $B(0,\eta)\backslash\{0\}$، يكن

$$f(a+h)-f(a) \geq \left(\frac{1}{2}\lambda_M + \delta(h)\right)\left\|h\right\|_2^2 \geq \frac{1}{4}\lambda_M\left\|h\right\|_2^2 > 0$$

وعليه $f(a+h) > f(a)$ في حالة $0 < \left\|h\right\| < \eta$، فالتابع f يبلغ قيمة صغرى تامّة محلّياً عند a.

- لنفترض أنّ $\lambda_M < 0 < \Lambda_M$. وليكن x_λ شعاعاً ذاتيّاً طوله يساوي 1 يوافق القيمة الذاتيّة λ_M، و x_Λ شعاعاً ذاتيّاً طوله يساوي 1 ويوافق القيمة الذاتيّة Λ_M. عندئذ

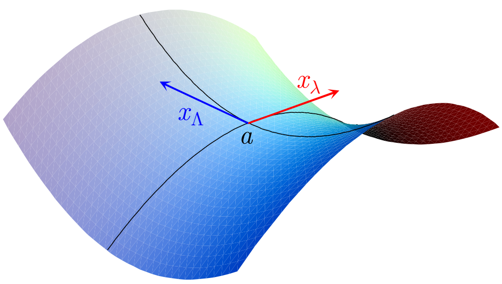
$$\begin{aligned}\forall t \in \left]-r,r\right[, \quad f(a+tx_\lambda)-f(a) &= \left(\frac{\lambda_M}{2}+\delta(tx_\lambda)\right)t^2\\ f(a+tx_\Lambda)-f(a) &= \left(\frac{\Lambda_M}{2}+\delta(tx_\Lambda)\right)t^2\end{aligned}$$

ولكن $\lim_{t\to 0}\delta(tx_\lambda)=\lim_{t\to 0}\delta(tx_\Lambda)=0$ إذن يوجد η في $]0,r[$ تُحقّق

$$|t| < \eta \Rightarrow \left(\left|\delta(tx_\lambda)\right| < -\tfrac{1}{4}\lambda_M\right) \wedge \left(\left|\delta(tx_\Lambda)\right| < \tfrac{1}{4}\Lambda_M\right)$$

وعندئذ

$$\begin{aligned}\forall t \in]-\eta,\eta[\backslash\{0\}, \quad f(a+tx_\lambda)-f(a) &< 0\\ f(a+tx_\Lambda)-f(a) &> 0\end{aligned}$$



فليس للتابع f قيمة محليّة صغرى، ولا قيمة محليّة عظمى عند a، نقول إنها **نقطة سرج**. ❐

5-6. نتيجة. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^2$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً عددياً من الصف C^2 على A، ولتكن a من A نقطة حرجة للتابع f. لنضع

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \quad \text{و} \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad \text{و} \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$$

- في حالة $r > 0$ و $rt - s^2 > 0$ يبلغ f قيمة صغرى تامّة محليّاً عند a.
- في حالة $r < 0$ و $rt - s^2 > 0$ يبلغ f قيمة عظمى تامّة محليّاً عند a.
- في حالة $rt - s^2 < 0$ لا يكون للتابع f قيمة عظمى أو صغرى محليّاً عند a.

الإثبات

في الحقيقة، هنا يكون

$$\operatorname{Hess}_a(f) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

وكثير الحدود المميِّز لهذه المصفوفة هو $X^2 - (r+t)X + rt - s^2$.

- في حالة $rt - s^2 > 0$ يكون للقيم الذاتيّة الإشارة نفسها، وهي إشارة مجموعهما أي إشارة $r + t$، ولكن $rt > 0$، فهي إذن إشارة r، (أو إشارة t).
  - وعليه في حالة $r > 0$ و $rt - s^2 > 0$ تكون القيم الذاتيّة للمصفوفة $\operatorname{Hess}_a(f)$ موجبة تماماً، ويبلغ f قيمة صغرى تامّة محليّاً عند a.
  - وفي حالة $r < 0$ و $rt - s^2 > 0$ تكون القيم الذاتيّة للمصفوفة $\operatorname{Hess}_a(f)$ سالبة تماماً، ويبلغ f قيمة عظمى تامّة محليّاً عند a.
- أمّا عندما يكون $rt - s^2 < 0$، فيكون للمصفوفة $\operatorname{Hess}_a(f)$ قيمتين ذاتيّتين من إشارتين مختلفتين. فلا يكون للتابع f قيمة عظمى أو صغرى محليّاً عند a. ❐

5-7. مثال

لنتأمّل التابع العددي

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$$

نلاحظ أنّ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x^3 - 2x + 2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(y^3 + 2x - 2y)$$

حتّى يأخذ f قيمة عظمى أو صغرى محليّاً عند النقطة (x,y) يلزم أن تكون هذه النقطة نقطةً حرجة؛ أي أن يتحقّق الشرطان

$x^3 - 2x + 2y = 0$ و $y^3 + 2x - 2y = 0$.

ونجد بسهولة حلول هذه الجملة وهي $(0,0)$ و $(2,-2)$ و $(-2,2)$.

لنحسب المشتقات الجزئيّة من المرتبة الثانية فنجد

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &&= 4(3x^2 - 2), \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8, \\ t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &&= 4(3y^2 - 2). \end{aligned}$$

- دراسة النقطتين $(2,-2)$ و $(-2,2)$.

عند هاتين النقطتين لدينا $r = 40$ و $s = 8$ و $t = 40$. إذن $r > 0$ و $rt - s^2 > 0$. والتابع يبلغ قيمة صغرى محلّياً عند هاتين النقطتين.

- دراسة النقطة $(0,0)$.

هنا $r < 0$ و $rt - s^2 = 0$ ولا تفيد المبرهنة في إقرار نوع هذه النقطة الحرجة، ولكن نلاحظ ما يلي:

$$\forall x \neq 0,\ f(x,x) = 2x^4$$

و

$$\forall x \neq 0,\ f(x,-x) = 2x^2\left(x^2 - 8\right)$$

إذن في القرص $D(0,4)$ ، يكون f موجباً على المنصّف الأوّل، ويكون سالباً على المنصف الثاني. ولا يبلغ f عند $(0,0)$ قيمة كبرى محليّاً ولا قيمة صغرى محلّياً.

6. التوابع الضمنيّة

ليكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعاً، ولنفترض وجود نقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$ تُحقّق $f(a,b)=0$ ، ولنتأمّل المعادلة $f(x,y)=0$.

لتكن K مجموعة الأعداد الحقيقيّة x من $\mathbb{R}$ التي تُحقّق الخاصّة الآتية « يوجد على الأقل عددٌ y في $\mathbb{R}$ يجعل الثنائيّة (x,y) حلاً للمعادلة $f(x,y)=0$ » . لمّا كان a عنصراً من K استنتجنا أنّ $K \neq \varnothing$. هناك إذن علاقة تقرن كلَّ عنصر من المجموعة K بحلولٍ للمعادلة $f(x,y)=0$.

نهتمّ بالحالة التي توافق فيها هذه العلاقةُ تابعاً معرّفاً على مجال I محتوى في K ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$. أي مهما يكن x من I يوجد عددٌ وحيد y من $\mathbb{R}$ يجعل من الثنائيّة (x,y) حلّاً للمعادلة $f(x,y)=0$. فنحصل بذلك على تابع $\varphi : I \to \mathbb{R}$ يُحقّق

$$\forall x \in I, \quad f(x,\varphi(x)) = 0$$

ونقول إنّ φ هو **تابع ضمني** معرّف بالمعادلة $f(x,y)=0$.

1-6. مبرهنة. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^2$ ، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. نفترض أنّه توجد نقطة (a,b) في A تُحقّق الشرطين الآتيين:

1. $f(a,b)=0$.
2. المشتق الجزئي f'_y موجود ومستمر على A ويُحقّق $f'_y(a,b) \neq 0$.

عندئذ **يوجد** مجالان مفتوحان I و J من $\mathbb{R}$ يُحقّقان $(a,b) \in I \times J \subset A$ ، و**يوجد** تابع مستمرٌّ وحيد $\varphi : I \to J$ يُحقّق

$$\forall x \in I, \quad f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \text{و} \quad \varphi(a) = b$$

إضافة إلى ما سبق، إذا افترضنا أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على A ، كان φ من الصف C^1 على I وكان

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}$$

الإثبات

لمّا كان $f'_y(a,b) \neq 0$ أمكننا أن نفترض، مثلاً، أنّ $f'_y(a,b) > 0$ ، ولأنّ f'_y مستمرٌّ على A ، و A مجموعة مفتوحة، أمكننا إيجاد عددين $\alpha_1 > 0$ و $\beta > 0$ يُحقِّقان

$$\big(|x-a| \leq \alpha_1,\ |y-b| \leq \beta\big) \Rightarrow \big((x,y) \in A,\ f'_y(x,y) > 0\big)$$

التابع $f(a,y) \mapsto y$ تابعٌ متزايدٌ تماماً على $[b-\beta, b+\beta]$ وينعدم عند $y = b$. إذن $f(a,b+\beta) > 0$ و $f(a,b-\beta) < 0$. وبسبب استمرار التابعين

$$x \mapsto f(x,b-\beta) \quad و \quad x \mapsto f(x,b+\beta)$$

عند a ، استنتجنا أنّه يوجد $\alpha_2 > 0$ و $\alpha_3 > 0$ يُحقّقان

$$|x-a| < \alpha_2 \Rightarrow \big((x,b+\beta) \in A,\ f(x,b+\beta) > 0\big)$$
$$|x-a| < \alpha_3 \Rightarrow \big((x,b-\beta) \in A,\ f(x,b-\beta) < 0\big)$$

لنضع إذن $\alpha = \min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ، ولنعرّف المجالين :

$$J = \big]b-\beta, b+\beta\big[\quad و \quad I = \big]a-\alpha, a+\alpha\big[$$

ليكن x عنصراً من I . التابع $f(x,y) \mapsto y$ تابعٌ مستمرٌّ ومتزايدٌ تماماً على J ، وينتقل من قيمة سالبة $f(x,b-\beta) < 0$ ، إلى قيمة موجبة $f(x,b+\beta) > 0$. إذن توجد قيمة، وقيمة وحيدة، y من المجال J تُحقّق $f(x,y) = 0$. وهكذا نكون قد عرّفنا انطلاقاً من المجالين I و J تابعاً وحيداً $\varphi : I \to J$ يُحقِّق

$$\forall x \in I,\quad f(x,\varphi(x)) = 0 \quad و \quad \varphi(a) = b$$

- لنثبت استمرار التابع φ على I .

ليكن x_0 عنصراً من I ، ولنضع $y_0 = \varphi(x_0)$. ولتكن $0 < \varepsilon$. يمكننا أن نفترض، دون الإقلال من العموميّة أنّ $J \supset \big[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon\big]$. التابع $f(x_0,y) \mapsto y$ تابعٌ متزايدٌ تماماً على J وينعدم عند $y = y_0$. إذن

$$f(x_0,y_0-\varepsilon) < 0 \quad و \quad f(x_0,y_0+\varepsilon) > 0$$

وبسبب استمرار التابعين $x \mapsto f(x,y_0+\varepsilon)$ و $x \mapsto f(x,y_0-\varepsilon)$ عند x_0 استنتجنا أنّه يوجد $0 < \eta_1$ و $0 < \eta_2$ يُحقّقان

$$|x-x_0| \leq \eta_1 \Rightarrow \big((x,y_0+\varepsilon) \in A,\ f(x,y_0+\varepsilon) > 0\big)$$
$$|x-x_0| \leq \eta_2 \Rightarrow \big((x,y_0-\varepsilon) \in A,\ f(x,y_0-\varepsilon) < 0\big)$$

نختار إذن $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. عندئذ إذا كان $|x - x_0| < \eta$ استنتجنا من كون

$$f(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{و} \quad f(x, y_0 + \varepsilon) > 0$$

أنّ $\varphi(x)$ يقع بين $y_0 - \varepsilon$ و $y_0 + \varepsilon$ أو $|\varphi(x) - y_0| < \varepsilon$. وهذا يثبت استمرار φ.

- لنثبت أنّ التابع φ من الصف C^1 على I.

نفترض الآن أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على A. أيّاً كانت x من I وأيّاً كانت (h,k) من $\mathbb{R}^2$ التي تُحقّق $(x + h, \varphi(x) + k) \in I \times J$ فإننا نستنتج من كون f قابلاً للمفاضلة عند $(x, \varphi(x))$ أنّ

$$f(x + h, \varphi(x) + k) = f'_x(x, \varphi(x))h + f'_y(x, \varphi(x))k + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

حيث $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$.

لنختر $k = k_h = \varphi(x + h) - \varphi(x)$ فيكون

$$0 = f'_x(x, \varphi(x))h + f'_y(x, \varphi(x))k_h + \varepsilon(h, k_h)\sqrt{h^2 + k_h^2}$$

فإذا عرّفنا

$$\tilde{\varepsilon}(h, k_h) = \operatorname{sgn}(h)\frac{\varepsilon(h, k_h)}{f'_y(x, \varphi(x))}$$

كان $\lim\limits_{h\to 0} \tilde{\varepsilon}(h, k_h) = 0$ وكان

$$\frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))} + \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = \tilde{\varepsilon}(h, k_h) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{k_h}{h}\right)^2}$$

لنضع إذن $\ell = -f'_x(x, \varphi(x)) / f'_y(x, \varphi(x))$ ولنعرّف

$$\delta(h) = \left|\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} - \ell\right|$$

عندئذ يكون لدينا

$$\delta(h) \leq |\tilde{\varepsilon}(h, k_h)|(1 + |\ell| + \delta(h))$$

لتكن $0 < \varepsilon$، ولنختر $0 < \eta'$ ليتحقّق

$$(x + h \in I,\ |h| < \eta) \Rightarrow |\tilde{\varepsilon}(h, k_h)| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon + |\ell|)}$$

عندئذ في حالة $(x+h \in I,\ |h|<\eta)$، نستنتج من كون $|\tilde{\varepsilon}(h,k_h)| < \frac{1}{2}$ أنّ

$$\delta(h) \le |\tilde{\varepsilon}(h,k_h)|(1+|\ell|) + \frac{\delta(h)}{2}$$

أو

$$\delta(h) \le 2|\tilde{\varepsilon}(h,k_h)|(1+|\ell|) < \varepsilon$$

وهذا يبرهن على أنّ $\lim_{h\to 0}\delta(h) = 0$. أي إنّ φ قابلٌ للاشتقاق عند x ويُعطى مشتقّه بالعلاقة

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}$$ □

في الحقيقة يمكن تعميم المبرهنة السابقة إلى حالة تابع لثلاثة متحوّلات، بإثبات مماثل كما يلي :

6-2. مبرهنة. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^3$، وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. نفترض أنّه توجد نقطة (a,b,c) في A تُحقّق الشرطين :

1. $f(a,b,c) = 0$.
2. المشتق الجزئي f'_z موجود ومستمرّ على A ويُحقّق $f'_z(a,b,c) \neq 0$.

عندئذ **يوجد** قرص مفتوح D مركزه (a,b)، **ويوجد** مجال مفتوح J مركزه c يُحقّقان $D \times J \subset A$، **ويوجد** تابع مستمرٌّ وحيد $\varphi : D \to J$ يُحقّق

$$\varphi(a,b) = c \quad \text{و} \quad \forall (x,y)\in D,\quad f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$$

إضافة إلى ما سبق، إذا افترضنا أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على A، كان φ من الصف C^1 على D وكان

$$\forall (x,y)\in D,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{f'_x(x,y,\varphi(x,y))}{f'_z(x,y,\varphi(x,y))}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{f'_y(x,y,\varphi(x,y))}{f'_z(x,y,\varphi(x,y))}$$

6-3. ملاحظة. إذا افترضنا في المبرهنتين السابقتين أنّ f ينتمي إلى الصف C^p انتمى φ إلى الصف C^p أيضاً.

7. الأشكال التفاضليّة من المرتبة الأولى

1-7. **تعريف** : لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$ ، نسمّي **شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى** على A ، كلَّ تطبيق ω معرّف على A يأخذ قيمه في فضاء الأشكال الخطّية على $\mathbb{R}^n$ ، أي $\omega : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. فالشكل التفاضلي ω يقرن بكلِّ عنصر x من A شكلاً خطياً $\omega_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ويمكننا كتابة الشكل الخطيّ ω_x بأسلوب وحيد عبارةً خطّية بعناصر الأساس القانوني في $(\mathbb{R}^n)^*$ أي $(\mathrm{d}\,x_1, \ldots, \mathrm{d}\,x_n)$. فيكون

$$\omega_x = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\,\mathrm{d}\,x_k$$

فمثلاً إذا كان $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً عددياً قابلاً للمفاضلة على مجموعة مفتوحة غير خالية A من $\mathbb{R}^n$ ، كان تفاضله $\mathrm{d}\,f$ شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى على A :

$$\mathrm{d}\,f : A \to (\mathbb{R}^n)^*, \quad x \mapsto \mathrm{d}\,f_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\,\mathrm{d}\,x_k$$

ومنه التعريف الآتي.

2-7. **تعريف**. ليكن ω شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. نقول إنّ ω **شكل تفاضلي تامٌّ**، إذا وفقط إذا وُجِدَ تابع عددي $f : A \to \mathbb{R}$ قابل للمفاضلة على A ، ويُحقِّق $\omega = \mathrm{d}\,f$. (لاحظ أنّ التابع f ، إن وُجِدَ، لا يكون وحيداً لأنّه في تلك الحالة يكون $(\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{d}(\alpha + f) = \omega)$. نسمّي f **تابعاً أصلياً** للشكل التفاضلي ω على A .

3-7. **تعريف**. ليكن $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\,\mathrm{d}\,x_k$ شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$ ، $(2 \le n)$، نقول إنّ ω **شكل تفاضلي مغلق**، إذا وفقط إذا انتمت التوابع $\omega_1, \ldots, \omega_n$ إلى الصف C^1 على A ، وتحقّق الشرط الآتي :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

7-4. مبرهنة. ليكن $\omega=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\,\mathrm{d}\,x_k$ شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$، مع $(2\le n)$. ولنفترض أنّ الشكل التفاضلي ω تامٌّ وأنّ التوابع $\omega_1,\ldots,\omega_n$ تنتمي إلى الصف C^1 على A. عندئذ يكون الشكل التفاضلي ω مغلقاً على A.

الإثبات

لمّا كان ω تاماً، فهناك تابع عددي $f:A\to\mathbb{R}$ قابلٌ للمفاضلة على A يُحقّق $\omega=\mathrm{d}\,f$. ومن ثَمّ يكون لدينا

$$\forall i\in\mathbb{N}_n,\quad \omega_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ولكنّ التوابع $\omega_1,\ldots,\omega_n$ تنتمي إلى الصف C^1 على A. إذن، يقبل التابع f مشتقات جزئيّة مستمرّة من المرتبة الثانية على A. واستناداً إلى المبرهنة 3-15. يكون لدينا

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\quad \frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}$$

والشكل التفاضلي ω مغلقٌ. ❒

يبيّن المثال الآتي أنّ عكس المبرهنة السابقة خطأ بوجه عام، إذ يمكن لشكلٍ تفاضليٍّ أن يكون مغلقاً على مجموعة مفتوحة دون أن يكون تامّاً عليها.

7-5. مثال. ليكن الشكل التفاضلي من المرتبة الأولى ω المعرّف على المجموعة المفتوحة $A=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ كما يأتي:

$$\omega_{(x,y)}=\frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x+\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

إنّ ω مغلق على A لأنّ

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$$

لنفترض جدلاً أنّ الشكل التفاضلي ω تامٌّ، إذن يوجد تابع عددي $f : A \to \mathbb{R}$ قابل للمفاضلة على A يحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

لنعرّف إذن التابع الحقيقي

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \theta \mapsto f(\cos\theta, \sin\theta)$$

فنلاحظ أنّ h يقبل الاشتقاق وأنّ

$$h'(\theta) = -\sin\theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta,\sin\theta) + \cos\theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta,\sin\theta) = 1$$

نستنتج من ذلك أنّ

$$2\pi = \int_0^{2\pi} h'(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = h(2\pi) - h(0) = 0$$

وهذا تناقض واضح. فالشكل التفاضلي المغلق ω ليس تاماً.

تُبَيِّن المبرهنة الآتية حالة خاصّة يكون فيها كلُّ شكلٍ تفاضليٍّ مغلقٍ تاماً.

6-7. مبرهنة - Poincaré. لتكن A مجموعة مفتوحة ونجميّة[☝] من $\mathbb{R}^n$، $(2 \le n)$، وليكن

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \,\mathrm{d}\, x_k$$

شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى مغلقاً على المجموعة A. عندئذ يكون ω تاماً.

الإثبات

لتكن $a = (a_1,\ldots,a_n)$ في A تُحقّق

$$\forall x \in A, \forall t \in [0,1], \quad (1-t)a + t\,x \in A$$

ولنعرّف في حالة $x = (x_1,\ldots,x_n)$ من A المقدار

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\int_0^1 \omega_i(a + t(x-a))\,\mathrm{d}\,t$$

[☝] أي يوجد a في A تُحقّق الشرط $\forall x \in A, \quad \forall t \in [0,1], \quad (1-t)a + t\,x \in A$.

فنحصل على تابع عددي $f : A \to \mathbb{R}$. لمّا كانت التوابع $\omega_1, \ldots, \omega_n$ مستمرّة، أمكننا الاشتقاق تحت إشارة التكامل، وهذا ما يتيح لنا أن نكتب:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \omega_j(a + t(x-a))\,\mathrm{d}\,t + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\int_0^1 t\,\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(a + t(x-a))\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \omega_j(a + t(x-a))\,\mathrm{d}\,t + \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t(x_i - a_i)\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(a + t(x-a))\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \left(\omega_j(a + t(x-a)) + t\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(a + t(x-a))\right)\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \left(\omega_j(a + t(x-a)) + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\omega_j(a + t(x-a))\Big)\right)\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(t\,\omega_j(a + t(x-a))\Big)\mathrm{d}\,t = \Big[t\,\omega_j(a + t(x-a))\Big]_{t=0}^{t=1} = \omega_j(x)
\end{aligned}$$

واستمرار التوابع $\omega_1, \ldots, \omega_n$ يجعلنا نستنتج أنّ f يقبل المفاضلة على A، و $\mathrm{d}\,f = \omega$. □

7-7. تعريف : لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$. وليكن $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\,\mathrm{d}\,x_k$ شكلاً تفاضلياً مستمراً من المرتبة الأولى على A، (أي إنّ التوابع $\omega_1, \ldots, \omega_n$ مستمرة على A). وليكن $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ تابعاً من الصف C^1، يحقّق $\varphi([a,b]) \subset A$. نسميّ **تكاملَ الشكل التفاضلي ω على φ**، العدد

$$\int_\varphi \omega = \int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_k(\varphi(t))\varphi_k'(t)\Big)\mathrm{d}\,t$$

أمّا إذا كان التابع $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ تابعاً مستمراً، من الصف C^1 قِطَعِياً، ويحقّق $\varphi([a,b]) \subset A$. فتوجد أعداد $(\tau_i)_{0 \le i \le m}$ من $[a,b]$ تُحقّق $a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = b$، ويقبل مقصورُ φ على كلٍّ من المجالات $]\tau_i, \tau_{i+1}[$، $(0 \le i < m)$، التمديدَ إلى تابع $\varphi^{[i]}$ من الصف C^1 على المجال $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. عندها نسميّ تكاملَ الشكل التفاضلي ω على φ، العدد

$$\int_\varphi \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi^{[i]}} \omega$$

فمثلاً، إذا كان ω هو الشكل التفاضلي من المرتبة الأولى على $\mathbb{R}^2$ المعرّف بالعلاقة

$$\omega = x\,\mathrm{d}\,y + y\,\mathrm{d}\,x$$

وكان

$$\varphi : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t, t^2)$$

كان

$$\int_\varphi \omega = \int_0^2 \left(t\,(2t) + t^2 \right) \mathrm{d}\,t = \int_0^2 3t^2\,\mathrm{d}\,t = \left[t^3 \right]_0^2 = 8$$

أمّا إذا كان

$$\psi : [0,3] \to \mathbb{R}^2, \psi(t) = \begin{cases} (t,0) & : \ t \in [0,1] \\ (1, t-1) & : \ t \in [1,2] \\ (3-t, 3-t) & : \ t \in [2,3] \end{cases}$$

فعندها

$$\int_\psi \omega = \int_0^1 0\,\mathrm{d}\,t + \int_1^2 1\,\mathrm{d}\,t + \int_2^3 2(t-3)\,\mathrm{d}\,t = 1 - 1 = 0$$

7-8. **تعريف**. ليكن $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ تابعاً[①] من الصف C^1، (أو مستمراً ومن الصف C^1 قِطَعيّاً)، ولنعرّف $\Gamma = \varphi([a,b])$. ثُمّ ليكن $\lambda : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ تقابلاً ينتمي هو، وتقابله العكسي، إلى الصف C^1. فيكون $\varphi \circ \lambda : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ تمثيلاً وسيطياً آخر لـ Γ، **ونسمّي λ تغييراً مقبولاً للوسيط**. نقول إنّ φ و $\varphi \circ \lambda$ يعرّفان على Γ التوجيه نفسه، إذا كان λ متزايداً تماماً، ونقول إنّهما يعرّفان على Γ توجيهين متعاكسين، إذا كان λ متناقصاً تماماً[②]. فإذا اكتفينا بالتغييرات المقبولة والمتزايدة تماماً للوسيط قلنا إننا قد وجّهنا Γ بواسطة التمثيل الوسيطيّ φ.

[①] أو منحنياً وسيطياً.

[②] لاحظ أنّ λ لا بُدَّ أن يكون مطّرداً تماماً.

تُبيِّن علاقة تغيير المتحوِّل في حساب التكاملات أنّ

$$\int_{\varphi}\omega = \int_{\varphi\circ\lambda}\omega$$

وذلك مهما يكن الشكل التفاضلي ω المعرّف على مجموعة مفتوحة A تحوي Γ، ومهما يكن التغيير المقبول المتزايد تماماً λ للوسيط. لذلك نرمز إلى القيمة المشتركة لهذه التكاملات بالرمز $\int_{\Gamma}\omega$، ونسمّيها تكامل ω على طول المنحني الموجّه Γ المعرّف بالتمثيل الوسيطي φ.

وإذا رمزنا بالرمز Γ^- إلى المنحني المعرّف انطلاقاً من Γ والموجّه توجيهاً معاكساً لتوجيه Γ، وذلك باستخدام تغيير مقبول متناقص تماماً للوسيط، فإننا نجد بسهولة أنّ

$$\int_{\Gamma^-}\omega = -\int_{\Gamma}\omega$$

وذلك مهما يكن الشكل التفاضلي ω المعرّف على مجموعة مفتوحة A تحوي Γ.

☜ في كلِّ ما يأتي، نسمّي **طريقاً** من الصف C^1 قِطَعيّاً، كلَّ منحنٍ Γ من $\mathbb{R}^n$ معرّف وسيطياً بتابع $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto (\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ مستمرٍّ، ومن الصف C^1 قِطَعيّاً. وعندما نقول اختصاراً كلمة طريق، فنقصد طريقاً من الصف C^1 قِطَعيّاً، ونسمي $\varphi(a)$ **بداية** الطريق Γ، ونسمّي $\varphi(b)$ **نهايته**. وإذا كان $\varphi(a) = \varphi(b)$ قلنا إنّ الطريق Γ **مغلقٌ**. وإذا كان Γ^- هو الطريق الذي نحصل عليه من Γ بتغيير توجيهه، فإنّ بداية Γ^- هي $\varphi(b)$ ونهايته هي $\varphi(a)$.

وأخيراً، إذا كان x و y عنصرين من $\mathbb{R}^n$، فإنّ **القطعة المستقيمة** التي مبدؤها x ونهايتها y والممثَّلة بالمنحني الوسيطي

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto x + t(y-x)$$

تعدُّ مثالاً في غاية البساطة على طريق من الصف C^1 بدايته x ونهايته y. نرمز إلى هذا الطريق بالرمز $[x,y]$.

7-9. **مبرهنة**. ليكن $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, \mathrm{d}\, x_k$ شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى مستمرّاً على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. وليكن Γ طريقاً من الصف C^1 قطعيّاً، معرّفاً بالتمثيل الوسيطي $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \ \varphi(t) = (\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ ومحتوى في A. عندئذ إذا كان $\omega = \mathrm{d}\, f$ على A فإنّ

$$\int_{\Gamma} \omega = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

الإثبات

لتكن $(\tau_i)_{0\le i\le m}$ من $[a,b]$ تُحقّق $a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m=b$، ويقبل مقصورُ φ على كلٍّ من المجالات $]\tau_i,\tau_{i+1}[$، $(0 \le i < m)$، التمديدَ إلى تابع $\varphi^{[i]}$ من الصف C^1 على $[\tau_i,\tau_{i+1}]$. عندها يكون

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^{[i]}} \omega &= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t))\varphi_k'(t)\right) \mathrm{d}\, t \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (f\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}\, t = f\circ\varphi(\tau_{i+1}) - f\circ\varphi(\tau_i)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \omega = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\varphi^{[i]}} \omega &= \sum_{i=1}^{m-1} \big(f(\varphi(\tau_{i+1})) - f(\varphi(\tau_i))\big) \\ &= f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ❐

7-10. **مبرهنة**. ليكن $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, \mathrm{d}\, x_k$ شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى مستمراً على مجموعة مفتوحة مترابطة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. هناك تكافؤ بين الخاصّتين الآتيتين:

1. الشكل التفاضلي ω تامٌّ.
2. مهما يكن الطريق المغلق Γ من الصف C^1 قِطَعِيّاً ومحتوى في A، يكن

$$\int_{\Gamma} \omega = 0$$

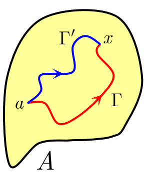
الإثبات

1. $\Leftarrow$ 2. لنفترض أنّ الشكل التفاضلي ω تامٌّ، إذن يوجد تابع $f : A \to \mathbb{R}^n$ من الصف C^1 يُحقّق $\omega = \mathrm{d}\, f$. فإذا كان Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعيّاً محتوى في A ، ممثّلاً وسيطياً بالتابع $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ، حيث $\varphi(a) = \varphi(b)$ ، أمكننا أن نكتب، استناداً إلى المبرهنة السابقة، أنّ

$$\int_{\Gamma} \omega = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = 0$$

2. $\Leftarrow$ 1. وبالعكس، لتكن a من A . مهما تكن x من A يوجد، استناداً إلى المبرهنة 4-4، طريق Γ من الصف C^1 محتوى في A ، بدايته a ونهايته x . لنضع إذن

$$f(x) = \int_{\Gamma} \omega$$



في الحقيقة، إن تعريف f جيدٌ، لأنه لو تأملنا طريقاً آخر Γ' من الصف C^1 قِطَعِيّاً بدايته a ونهايته x ، كان الطريق $\tilde{\Gamma} = \Gamma' \cup \Gamma^-$ ، الذي نحصل عليه من الطريق Γ' متبوعاً بالطريق الناتج من Γ بعد تغيير جهته، طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعِيّاً، محتوى في A . ومنه لا بُدّ أن يكون $\int_{\tilde{\Gamma}} \omega = 0$ ، ولكن :

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \omega = \int_{\Gamma^-} \omega + \int_{\Gamma'} \omega = -\int_{\Gamma} \omega + \int_{\Gamma'} \omega$$

ومن ثَمّ فإنّ

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma'} \omega$$

فقيمة $f(x)$ تتعلّق فقط بقيمة x ، ولا تتعلّق بالطريق Γ الذي استُخْدِمَ في تعريفها. وبأسلوبٍ مُماثل لما سبق نبرهن أنّ

$$f(x) - f(y) = \int_{\Gamma} \omega \qquad ⌘$$

و Γ هو طريق ما في A ، من الصف C^1 قِطَعِيّاً بدايته y ، ونهايته x .

ليكن $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ الأساس القانوني في $\mathbb{R}^n$، ولتكن $x = (x_1, \dots, x_n)$ من A. لمّا كانت A مجموعة مفتوحة فهناك η_0 في $\mathbb{R}_+^*$ تُحقّق

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \max_{1 \le i \le n}(|h_i|) \le \eta_0 \Rightarrow x + h \in A$$

لتكن i من $\mathbb{N}_n$. عندئذ يمكننا أن نكتب، استناداً إلى العلاقة ⌘، وأياً كانت h من المجال $[-\eta_0, \eta_0]$ ما يلي :

$$\begin{aligned} f(x + h \cdot e_i) - f(x) &= \int\limits_{[x, x+h\cdot e_i]} \omega \\ &= h \int\limits_0^1 \omega_i(x_1, \dots, x_i + th, \dots, x_n) \,\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

وهذا بدوره يقتضي، أياً كانت h من $[-\eta_0, \eta_0] \backslash \{0\}$:

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} - \omega_i(x) = \int\limits_0^1 \Big(\omega_i(x_1, \dots, x_i + t\,h, \dots, x_n) - \omega_i(x) \Big) \,\mathrm{d}\, t$$

ولمّا كان ω_i مستمراً عند x، استنتجنا أنّ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h} = \omega_i(x)$$

إذن يقبل التابع f عند x مشتقاً جزئياً بالنسبة إلى المتحوّل x_i يُعطى بالصيغة :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x)$$

ولمّا كان هذا محقّقاً، أياً كان i من $\mathbb{N}_n$ و x من A، ولمّا كانت التوابع $\omega_1, \dots, \omega_n$ مستمرّة، فإننا نستنتج أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على A، وأنّ

$$\mathrm{d}\, f = \omega$$

وبذا يكتمل إثبات المطلوب. ❒

7-11. **تعريف**. لتكن A مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$. وليكن Γ_0 و Γ_1 طريقين في A، مغلقين ومن الصف C^1 قِطَعيّاً، معرّفين بالتمثيلين الوسيطيين:

$$\varphi_0 : [0,1] \to A \quad \text{و} \quad \varphi_1 : [0,1] \to A$$

نقول إنّ Γ_1 هو **تشوّه مستمرٌّ** للطريق Γ_0 في A، إذا وفقط إذا وُجِدَ تابعٌ **مستمرٌّ**

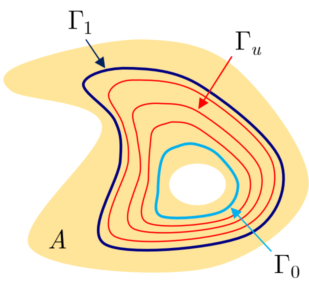
$$H : [0,1] \times [0,1] \to A, \quad (t,u) \mapsto H(t,u)$$

يُحقّق الشروط التالية

- $\forall t \in [0,1],\ \ H(t,0) = \varphi_0(t)$.
- $\forall t \in [0,1],\ \ H(t,1) = \varphi_1(t)$.
- $\forall u \in [0,1],\ \ H(0,u) = H(1,u)$.

ونقول إنّ H **تشويهٌ مستمرٌّ** في A من Γ_0 إلى Γ_1.

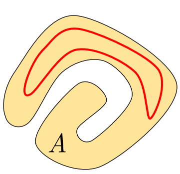
ونقول إنّ Γ_0 هو **تشوّه مستمرٌّ لنقطة** في A، إذا كنّا في الوضع السابق وكان الطريق Γ_1 مؤلّفاً من نقطة واحدة في A، (أي إذا كان التابع φ_1 تابعاً ثابتاً).



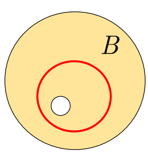
فإذا رمزنا بالرمز Γ_u إلى المنحني المغلق في A الممثّل وسيطيّاً بالتمثيل $t \mapsto H(t,u)$، كوّنت الجماعة $(\Gamma_u)_{u\in[0,1]}$ جماعة «مستمرّة» من المنحنيات التي تبدأ بالطريق Γ_0 وتنتهي بالطريق Γ_1 مع البقاء داخل المجموعة A.

ويمكن القارئ أن يتيقّن بسهولة أنّ العلاقة الثنائية "Γ_1 هو تشوّه مستمرٌّ للطريق Γ_0 في A" هي علاقة تكافؤ على مجموعة الطرق المغلقة من الصف C^1 قِطَعيّاً في A.

2-12. **تعريف**. لتكن A مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$. نقول إنّ A **بسيطة الترابط** إذا وفقط إذا كانت A مترابطة، وكان كل طريقٍ مغلقٍ ومن الصف C^1 قِطَعيّاً في A تشوّهاً مستمراً لنقطة في A.



A بسيطة الترابط



B غير بسيطة الترابط

7-13. **مثال**. لتكن A مجموعة مفتوحة ونجميّة من $\mathbb{R}^n$. عندئذ توجد في A نقطة a تُحقّق $\forall x \in A,\ [a,x] \subset A$. فإذا كان Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعيّاً في A، ممثلاً وسيطيّاً بالتابع $\varphi : [0,1] \to A$، أمكننا تعريف التابع المستمرّ

$$H : [0,1] \times [0,1] \to A, \quad H(t,u) = (1-u)\varphi(t) + u\,a$$

وهو تشويةٌ مستمرٌّ في A من Γ_0 إلى الطريق المغلق الثابت المؤلّف من النقطة a. وعلى هذا تكون كلُّ مجموعة مفتوحة ونجميّة مجموعة بسيطة الترابط.

7-14. **تعريف**. ليكن ω شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى مستمراً على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. نقول إنّ ω **تامٌّ محليّاً**، إذا وفقط إذا كان تاماً في جوار مفتوح لكل نقطة من نقاط A. أو بقول آخر إذا تحقّق الشرط الآتي: مهما تكن a من A يوجد $0 < r_a$ يجعل مقصور ω على الكرة المفتوحة $B(a, r_a)$ تامّاً.

لاحظ أنّ كلَّ شكل تفاضلي من المرتبة الأولى مستمرٍّ وتامٍّ على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$، يكون تامّاً محليّاً، وكل شكل تفاضلي المرتبة الأولى مغلقٍ على مجموعة مفتوحة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$، يكون تاماً محليّاً. وذلك بمُقتضى المبرهنة 7-6.

نأتي الآن إلى مبرهنة تُعدُّ من أهمّ مبرهنات هذا البحث.

7-15. **مبرهنة**. ليكن ω شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى مستمرّاً على مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. نفترض أنّ ω تامٌّ محليّاً على A، وأنّ Γ_0 و Γ_1 طريقان مغلقان في A من الصف C^1 قِطَعِيّاً. فإذا كان Γ_0 تشوهاً مستمراً في A للطريق Γ_1 كان

$$\int_{\Gamma_0} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega$$

الإثبات

لنضع اختصاراً $P = [0,1] \times [0,1]$، وليكن $H : P \to A$ تشويهاً مستمرّاً في A من Γ_0 إلى Γ_1. لمّا كان H تابعاً مستمرّاً و P مجموعةً متراصّةً، استنتجنا أنّ $K = H(P)$ مجموعة متراصّة. ومهما تكن a من K يوجد $0 < r_a$ يجعل $\omega_{|B(a,r_a)}$ تامّاً.

لنثبت إذن الخاصّة الآتية:

$$\exists \rho > 0,\ \forall z \in K,\ \exists a_z \in K,\quad B(z,\rho) \subset B(a_z, r_{a_z}) \qquad ①$$

في الحقيقة، إذا لم يكن ذلك صحيحاً، فإنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists z_n \in K,\ \forall a \in K,\quad B(z_n, 2^{-n}) \not\subset B(a, r_a)$$

ولمّا كانت K متراصّة، وجدنا متتالية جزئيّة $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من z في K. وعندها يوجد عدد طبيعي m يُحقّق $2^{-\varphi(m)} < \frac{r_z}{2}$ و $z_{\varphi(m)} \in B\left(z, \frac{r_z}{2}\right)$. ومن ثمّ فالشرط $t \in B(z_{\varphi(m)}, 2^{-\varphi(m)})$ يقتضي

$$\left|t - z\right| \le \left|t - z_{\varphi(m)}\right| + \left|z_{\varphi(m)} - z\right| < \frac{r_z}{2} + \frac{r_z}{2} = r_z$$

أي $t \in B(z, r_z)$. وهذا التناقض يثبت صحّة ①.

نستنتج من ذلك أنّ الشكل التفاضلي ω تامٌّ على كلِّ كرة مفتوحة $B(x,\rho)$ حيث x من K. وبناءً على المبرهنة 7-10، نستنتج أنّ $\int_\Gamma \omega = 0$ وذلك مهما يكن Γ طريقاً مغلقاً من الصف C^1 قِطَعِيّاً، محتوى في كرة مفتوحة $B(x,\rho)$ مركزها عنصر x من K.

من ناحية أخرى، لمّا كان H مستمراً بانتظام على المجموعة المتراصّة P، كان هناك $1 < n$ يُحقّق الشرط

$$\forall\big((t,u),(t',u')\big) \in P^2,\ \left.\begin{matrix} |t-t'| \le \frac{1}{n} \\ |u-u'| \le \frac{1}{n} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\|H(t,u) - H(t',u')\right\| < \frac{\rho}{2} \qquad ②$$

لنعرّف إذن النقاط $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ من K بالعلاقة $x_{i,j} = H(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$، ولنعرّف، أياً كانت j من $\mathbb{N}_n$، الطريق المغلق γ_j في A من الصف C^1 قِطَعِيّاً، كما يأتي:

$$\gamma_j = [x_{0,j}, x_{1,j}] \cup [x_{1,j}, x_{2,j}] \cup \cdots \cup [x_{n-1,j}, x_{0,j}]$$

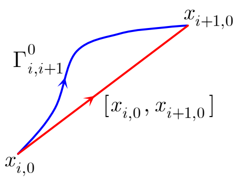
(لاحظ أنّ $x_{n,j} = x_{0,j}$). وأخيراً لنرمز بالرمز $\Gamma^0_{i,i+1}$ إلى الجزء من الطريق Γ_0 الذي بدايته $x_{i,0}$ ونهايته $x_{i+1,0}$ أي المعرّف وسيطيّاً كما يلي:

$$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \to A,\ t \mapsto \varphi_0(t) = H(t,0)$$

حيث i من $\{0,\ldots,n-1\}$.

ولنرمز بأسلوب مماثل، في حالة i من $\{0,\ldots,n-1\}$ ، بالرمز $\Gamma^1_{i,i+1}$ إلى الجزء من الطريق Γ_1 الذي بدايته $x_{i,n}$ ونهايته $x_{i+1,n}$ أي المعرّف وسيطياً بالتمثيل

$$\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]\to A,\ t\mapsto \varphi_1(t)=H(t,1)$$



ولتكن i من $\{0,\ldots,n-1\}$. لمّا كانت جميع نقاط الطريق المغلق $\Gamma^0_{i,i+1}\cup[x_{i+1,0},x_{i,0}]$ واقعة، استناداً إلى ②، داخل الكرة المفتوحة $B(x_{i,0},\rho)$ ، فإن تكامل ω على طول هذا الطريق معدومٌ، ومنه نستنتج أنّ

$$\int_{\Gamma^0_{i,i+1}}\omega=\int_{[x_{i,0},x_{i+1,0}]}\omega$$

وبالجمع نجد

$$\int_{\Gamma_0}\omega=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[x_{i,0},x_{i+1,0}]}\omega=\int_{\gamma_0}\omega \qquad ③$$

وكذلك، لأن جميع نقاط الطريق المغلق $\Gamma^1_{i,i+1}\cup[x_{i+1,n},x_{i,n}]$ تقع داخل الكرة المفتوحة $B(x_{i,n},\rho)$ ، نجد بأسلوب مماثل أنّ

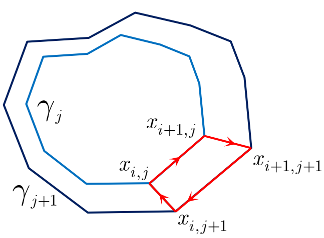
$$\int_{\Gamma^1_{i,i+1}}\omega=\int_{[x_{i,n},x_{i+1,n}]}\omega$$

وبالجمع نجد

$$\int_{\Gamma_1}\omega=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[x_{i,n},x_{i+1,n}]}\omega=\int_{\gamma_n}\omega \qquad ④$$

وأخيراً، لتكن (i,j) من $\{0,\ldots,n-1\}^2$. ولنتأمّل الطريق من الصف C^1 قِطَعِيّاً المعرّف كما يأتي:

$$[x_{i,j},x_{i+1,j}]\cup[x_{i+1,j},x_{i+1,j+1}]\cup[x_{i+1,j+1},x_{i,j+1}]\cup[x_{i,j+1},x_{i,j}]$$



لمّا كانت جميع نقاط هذا الطريق المغلق تقع، استناداً إلى ②، داخل الكرة المفتوحة $B(x_{i,j},\rho)$ ، كان تكامل الشكل التفاضلي ω على طول هذا الطريق معدوماً، ومن ثَمّ :

$$\int_{[x_{i,j},x_{i+1,j}]}\omega-\int_{[x_{i,j+1},x_{i+1,j+1}]}\omega=\int_{[x_{i,j},x_{i,j+1}]}\omega-\int_{[x_{i+1,j},x_{i+1,j+1}]}\omega$$

فإذا ثبّتنا j وجمعنا العلاقات السابقة عندما تتحول i في $\{0,\ldots,n-1\}$ وجدنا أنّ:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_j}\omega-\int_{\gamma_{j+1}}\omega &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{[x_{i,j},x_{i,j+1}]}\omega-\sum_{i=1}^{n}\int_{[x_{i,j},x_{i,j+1}]}\omega\\ &= \int_{[x_{0,j},x_{0,j+1}]}\omega-\int_{[x_{n,j},x_{n,j+1}]}\omega=0\end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ

$$\forall j\in\{0,\ldots,n-1\},\quad \int_{\gamma_j}\omega=\int_{\gamma_{j+1}}\omega \qquad ⑤$$

وبملاحظة ③ و ④ و ⑤ نجد أنّ $\int_{\Gamma_1}\omega=\int_{\Gamma_0}\omega$ ويتم إثبات المطلوب. ❐

7-16. **نتيجة**. ليكن ω شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى مستمراً وتامّاً محليّاً على مجموعة مفتوحة، بسيطة الترابط وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. عندئذ يكون الشكل التفاضلي ω تاماً.

الإثبات

في الحقيقة، لمّا كانت A بسيطة الترابط، فإنّ كلّ طريق مغلق Γ من الصف C^1 قِطَعيّاً في A يكون تشويهاً مستمراً لنقطة a من A، ومن ثَمّ يكون

$$\int_{\Gamma}\omega=\int_{\{a\}}\omega=0$$

وذلك استناداً إلى المبرهنة السابقة. ونستنتج أنّ ω تامٌّ في A بمُقتضى المبرهنة 7-10. ❐

وأخيراً نصل إلى التعميم المهم الآتي للمبرهنة 7-6.

7-17. **نتيجة**. ليكن ω شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى مغلقاً على مجموعة مفتوحة وبسيطة الترابط وغير خالية A من $\mathbb{R}^n$. عندئذ يكون الشكل التفاضلي ω تاماً.

تمرينات

التمرين 1. ادرس وجود النهاية عند $(0,0)$ من $\mathbb{R}^2$ للتوابع التالية المعرّفة في جوار $(0,0)$:

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$
2. $g(x,y)=\dfrac{1-\cos xy}{y^2}$
3. $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad h(x,y)=\dfrac{x^\alpha y^\beta}{y-x^2}$

الحل

1. هنا التابع f معرّف على $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,-x):x\in\mathbb{R}\}$، لنعرّف المتتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ من عناصر $\mathcal{D}_f$ بالعلاقة $X_n=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$. نلاحظ من جهة أولى أنّ

$$\lim_{n\to\infty}X_n=(0,0)$$

ومن جهة ثانية $\lim_{n\to\infty}f(X_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{n}\right)=+\infty$. إذن ليس للتابع f نهاية عند $(0,0)$.

2. التابع g معرّف على $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$، بالاستفادة من المتراجحة

$$\forall t\in\mathbb{R},\ 0\leq 1-\cos t\leq\frac{t^2}{2}$$

نجد

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\quad 0\leq g(x,y)\leq\frac{x^2}{2}$$

وعليه $\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0$.

3. التابع h معرّف بوجه عام على $\mathcal{D}_h=(\mathbb{R}_+^*)^2$، لتكن $\gamma>\max\left(2,\alpha+2\beta\right)$. ولنعرف $X_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^\gamma}\right)$. فنلاحظ أنّ

$$\lim_{n\to\infty}X_n=(0,0)$$

وأنّ

$$\lim_{n\to\infty} h(X_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n^{\gamma-\alpha-2\beta}\left(1+\frac{1}{n^{\gamma-2}}\right)^{\beta}\right) = +\infty$$

إذن ليس للتابع h نهاية عند $(0,0)$. ■

التمرين 2. ادرس وجود النهاية عند $(0,0,0)$ من $\mathbb{R}^3$ للتابع الآتي المعرّف في جوار $(0,0,0)$:

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$$

الحل

هنا التابع f معرّف على $\mathcal{D}_f = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z\neq 0\right\}$، لنعرّف المتتالية $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من عناصر $\mathcal{D}_f$ بالصيغة $X_n = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^4}\right)$ نلاحظ من جهة أولى أنّ

$$\lim_{n\to\infty} X_n = (0,0,0)$$

ومن جهة ثانية أنّ $f(X_n) = 2n + \frac{1}{n^2}$. إذن ليس للتابع f نهاية عند $(0,0,0)$. ■

التمرين 3. ادرس وجود النهاية عند $(2,-2,0)$ من $\mathbb{R}^3$ للتابع الآتي المعرّف في جوار النقطة $(2,-2,0)$:

$$f(x,y,z) = \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$$

الحل

هنا التابع f معرّف على $\mathcal{D}_f = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2-y^2+z^2\neq 0\right\}$، لنعرّف المتتالية $(X_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من عناصر $\mathcal{D}_f$ بالصيغة $X_n^\alpha = \left(2+\frac{1}{n},-2+\frac{1}{n},\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$. نلاحظ من جهة أولى أنّ $\lim_{n\to\infty} X_n^\alpha = (2,-2,0)$، ومن جهة ثانية أنّ $f(X_n^\alpha) = \dfrac{2}{8+\alpha^2}$. إذن ليس للتابع f نهاية عند $(2,-2,0)$. لأنّه مثلاً

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n^0) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} f(X_n^1) = \frac{2}{9}$$ ■

التمرين 4. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1. نفترض أنّ

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|f'\right| = k \in \left]0,1\right[$$

ونعرّف التابع :

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad F(x,y)=(x-f(y),y-f(x))$$

أثبت أنّ F تقابل، وأنّ كلّاً من F و F^{-1} ينتمي إلى الصف C^1.

الحل

- إنّ F متباينٌ. فإذا كان $F(x,y)=F(x',y')$ استنتجنا أنّ

$$y-f(x)=y'-f(x') \text{ و } x-f(y)=x'-f(y')$$

وبالاستفادة من متراجحة التزايدات المحدودة نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}|x-x'| &= \left|f(y)-f(y')\right| \leq k|y-y'|\\ |y-y'| &= \left|f(x)-f(x')\right| \leq k|x-x'|\end{aligned}$$

أو $|x-x'|\leq k^2|x-x'|$ و $|y-y'|\leq k^2|y-y'|$. ولكن $0<k^2<1$، إذن $x=x'$ و $y=y'$.

- إنّ F غامرٌ. لتكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$. نرغب بإيجاد حلٍّ للمعادلة $F(x,y)=(a,b)$ أو

$$\begin{cases} y-f(x)=a\\ x-f(y)=b\end{cases}$$

وهذا يُكافئ :

$$(\mathcal{E})\quad \begin{cases} x=b+f(a+f(x))\\ y=a+f(x)\end{cases}$$

لنتأمّل إذن التابع $\varphi_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \varphi_a(x)=x-f(a+f(x))$. إنّ φ_a تابعٌ من الصف C^1 على $\mathbb{R}$ ويُحقّق

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi_a'(x) &= 1-f'(a+f(x))f'(x)\\ &\geq 1-\left|f'(a+f(x))\right|\left|f'(x)\right| \geq 1-k^2>0\end{aligned}$$

إذن φ_a تابعٌ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$.

ومن جهة ثانية

- في حالة $0 \leq x$ لدينا

$$\varphi_a(x) - \varphi_a(0) = \int_0^x \varphi_a'(t)\,\mathrm{d}\,t \geq (1-k^2)x$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} \varphi_a(x) = +\infty$.

- وفي حالة $x \leq 0$ لدينا

$$\varphi_a(0) - \varphi_a(x) = \int_x^0 \varphi_a'(t)\,\mathrm{d}\,t \geq (1-k^2)(-x)$$

أو $\varphi_a(0) + (1-k^2)x \geq \varphi_a(x)$ إذن $\lim_{x\to-\infty} \varphi_a(x) = -\infty$. نستنتج مما سبق أنّ $\varphi_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$، أي إنّ φ_a تقابلٌ على $\mathbb{R}$ ، ينتمي إلى الصف C^1 هو وتقابله العكسي.

إذن يوجد حلٌّ وحيدٌ للمعادلة $\varphi_a(x) = b$ هو $x = \varphi_a^{-1}(b)$.

وعندئذ يكون $(x,y) = (\varphi_a^{-1}(b), a + f(\varphi_a^{-1}(b)))$ هو الحلُّ الوحيد لجملة المعادلات $\left(\mathcal{E}\right)$ أي $F(x,y) = (a,b)$.

❖ لنحسب مصفوفة جاكوبي للتابع F . فنجد

$$J_{(x,y)}(F) = \begin{bmatrix} 1 & -f'(y) \\ -f'(x) & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون $\det J_{(x,y)}(F) = 1 - f'(x)f'(y) \geq 1 - k^2 > 0$.إذن مصفوفة جاكوبي $J_{(x,y)}(F)$ قَلوبة أيّاً كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$. ولمّا كان F^{-1} مستمرّاً استنتجنا أنّه ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}^2$ وأنّ

$$J_{F(x,y)}(F^{-1}) = \left(J_{(x,y)}(F)\right)^{-1} = \frac{1}{1 - f'(x)f'(y)} \begin{bmatrix} 1 & f'(x) \\ f'(y) & 1 \end{bmatrix}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 5. عيِّن مجموعة تعريف التابع $f(x,y) = \arccos \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$، وأوجد مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ يكون هذا التابع عليها من الصف C^1 . احسب $\mathrm{d}\,f$ ثمّ اختزل كتابة f .

الحل

التابع arccos معرّفٌ ومستمرٌّ على المجال $[-1,1]$. ولكن

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \frac{|1-xy|}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\le 1 \Leftrightarrow (x+y)^2\ge 0$$

إذن التابع f معرّفٌ ومستمرٌّ على $\mathbb{R}^2$. لنعرّف المجموعتين

$$\Delta_- = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y<0\right\} \text{ و } \Delta_+ = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\right\}$$

نلاحظ أنّ Δ_+ و Δ_- مجموعتان مفتوحتان ومحدّبتان. ومن جهة ثانية، في حالة (x,y) من Δ_+

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(1-xy)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{x+y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{-y\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x(1-xy)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{x+y}\cdot\frac{y(1+x^2)+x(1-xy)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

ولأنّ $f(x,y)=f(y,x)$ استنتجنا أيضاً أنّه، أيّاً كانت (x,y) من Δ_+ فلدينا

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2}$$

ولمّا كان f'_x و f'_y مستمرّين على Δ_+ ، استنتجنا أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على Δ_+ . وأنّه

$$\forall (x,y)\in\Delta_+,\qquad \mathrm{d}\,f_{(x,y)} = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

ولأنّ Δ_+ مترابطة، لأنها محدّبة، استنتجنا أنّه يوجد ثابتٌ c يُحقّق

$$\forall (x,y)\in\Delta_+,\qquad f(x,y) = \arctan x + \arctan y + c$$

وباختبار النقطة $(0,1)$ نستنتج أنّ $c=0$. أي

$$\forall (x,y)\in\Delta_+,\qquad f(x,y) = \arctan x + \arctan y$$

وبملاحظة أنّ $f(-x,-y)=f(x,y)$ ، نستنتج أيضاً أنّ

$$\forall (x,y)\in\Delta_-,\qquad f(x,y) = -\arctan x - \arctan y$$

■

التمرين 6. لتكن U مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$. إذا كان $g : U \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^2 على U، عرّفنا مؤثّر Laplace على g بأنّه $\Delta g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$. ونقول إنّ التابع g **توافقيّ** على U إذا حقّق الشرط $\Delta g = 0$ على U.

1. أيّاً كان (x, y) من $\mathbb{R}^2$ ، نعرّف $f(x, y) = \mathrm{Re}(ze^{-z})$ حيث $z = x + \mathrm{i}\, y$. أثبت أنّ f توافقيّ على $\mathbb{R}^2$.

2. أثبت أنّ $f : \mathbb{R}^{*3} \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \arctan\frac{y}{x} + \arctan\frac{z}{y} + \arctan\frac{x}{z}$ تابع توافقي على $\mathbb{R}^{*3}$.

3. عيّن مجموعة التوابع $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ التي تجعل التابع الآتي توافقياً على $(\mathbb{R}^*)^n$:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right)$$

4. ليكن $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^2 . وليكن

$$f : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

نعرّف $G = g \circ f$. احسب Δg بدلالة المشتقات الجزئيّة للتابع G .

الحل

1. لنلاحظ أنّ $ze^{-z} = e^{-x}(x + \mathrm{i}\, y)(\cos y - \mathrm{i}\sin y)$ إذن

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xe^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y$$

إذن

$$f'_x(x, y) = (1 - x)e^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y$$
$$f'_y(x, y) = (1 - x)e^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y$$

و

$$f''_{x^2}(x, y) = (-2 + x)e^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y$$
$$f''_{y^2}(x, y) = (2 - x)e^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y$$

أي $\Delta f = 0$ على $\mathbb{R}^2$.

2. نلاحظ هنا أنّ

$$f'_x(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{z}{x^2+z^2}$$
$$f'_y(x,y,z) = -\frac{z}{y^2+z^2} + \frac{x}{y^2+x^2}$$
$$f'_z(x,y,z) = -\frac{x}{z^2+x^2} + \frac{y}{z^2+y^2}$$

ومن ثَمّ

$$f''_{x^2}(x,y,z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xz}{(x^2+z^2)^2}$$
$$f''_{y^2}(x,y,z) = \frac{2yz}{(y^2+z^2)^2} - \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f''_{z^2}(x,y,z) = \frac{2zx}{(x^2+z^2)^2} - \frac{2zy}{(y^2+z^2)^2}$$

وعليه نرى أنّ $\Delta f = 0$ على $\mathbb{R}^{*3}$.

3. لنرمز تبسيطاً للكتابة $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. ولنضع بالتعريف $F(x) = f(r)$. مهما تكن k من $\{1,2,\ldots,n\}$ ، يكن

$$F'_{x_k}(x) = \frac{x_k}{r} f'(r)$$
$$F''_{x_k^2}(x) = \frac{f'(r)}{r} + \left(\frac{f'(r)}{r}\right)' \frac{x_k^2}{r}$$

إذن

$$\Delta F(x) = n\frac{f'(r)}{r} + r\left(\frac{f'(r)}{r}\right)' = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$$

إذن يكون F توافقيّاً على $\mathbb{R}^n \backslash \{(0,\ldots,0)\}$ وفق ما يأتي :

$$f(r) = \begin{cases} ar + b & : \quad n = 1 \\ a \ln r + b & : \quad n = 2 \\ \dfrac{a}{r^{n-2}} + b & : \quad n \geq 3 \end{cases}$$

4. لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$G'_r(r,\theta) = g'_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial r} + g'_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial r} = g'_x(x,y)\cos\theta + g'_y(x,y)\sin\theta$$
$$G'_\theta(r,\theta) = g'_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial \theta} + g'_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial \theta} = -g'_x(x,y)r\sin\theta + g'_y(x,y)r\cos\theta$$

أو

$$\begin{aligned} rG'_r(r,\theta) &= xg'_x(x,y) + yg'_y(x,y) \\ G'_\theta(r,\theta) &= -yg'_x(x,y) + xg'_y(x,y) \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} r\frac{\partial}{\partial r}\big(rG'_r\big)(r,\theta) &= x\frac{\partial}{\partial x}\big(xg'_x(x,y) + yg'_y(x,y)\big) + y\frac{\partial}{\partial y}\big(xg'_x(x,y) + yg'_y(x,y)\big) \\ &= xg'_x(x,y) + yg'_y(x,y) + x^2 g''_{x^2}(x,y) + 2xyg''_{xy}(x,y) + y^2 g''_{y^2}(x,y) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= -y\frac{\partial}{\partial x}\big(-yg'_x(x,y) + xg'_y(x,y)\big) + x\frac{\partial}{\partial y}\big(-yg'_x(x,y) + xg'_y(x,y)\big) \\ &= -xg'(x,y) - yg'_y(x,y) + x^2 g''_{y^2}(x,y) - 2xyg''_{xy}(x,y) + y^2 g''_{x^2}(x,y) \end{aligned}$$

إذن

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)(r,\theta) + \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}(r,\theta) = (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)\right)$$

أو

$$\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta g(x,y)$$

وهذا ما يُكتب رمزيّاً

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

وهي صيغة مؤثر لابلاس بالإحداثيات القطبية. ■

التمرين 7. ليكن f و g تابعين من الصف C^2 على $\mathbb{R}$. نتأمّل

$$F(x,y) = x\,f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

جِدْ أكبر مجموعة جزئيّة A محتواة في $\mathbb{R}^2$ يكون F عليها من الصف C^2 . وأثبت أنّه مهما يكن (x,y) في A يكن

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

الحل

إنّ التابع F تابعٌ من الصف C^2 على $A = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. ونجد أنّ

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right) - f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x} - g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'\left(\frac{y}{x}\right) + g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}$$

إذن

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^3} + g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^4} + 2g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} + g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = -f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2} - g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^3} - g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2}$$

ومنه

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x} + g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^2} + 2g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}$$
$$y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x} + g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^2}$$
$$2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = -2f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x} - 2g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^2} - 2g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}$$

إذن $x^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + y^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = 0$. ■

التمرين 8. ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(u,v)=(x-y,x+y)$. أثبت أنّ f تقابل وأنّ f و f^{-1} من الصف C^1 على $\mathbb{R}^2$. استفدْ من تغيير المتحوّل f لتوجد جميع التوابع $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ من الصف C^1 التي تُحقّق

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}=a$$

حيث a عددٌ من $\mathbb{R}$.

الحل

من الواضح أنّ

$$(x,y)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right)\Leftrightarrow(u,v)=(x-y,x+y)$$

والتابع f^{-1} هو التابع

$$f^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(u,v)\mapsto(x,y)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right)$$

التابعان f و f^{-1} خطيّان، فهما من الصف C^∞ على $\mathbb{R}^2$. لنضع $G=g\circ f^{-1}$. أي

$$G(u,v)=g\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right)$$

عندئذ

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u}(u,v)&=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y)=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

إذن يوجد تابع $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ من الصف C^1 يُحقّق

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad G(u,v)=\frac{a}{2}u+\varphi(v)$$

ولأنّ $g=G\circ f$ استنتجنا أنّ

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)=\frac{a}{2}(x-y)+\varphi(x+y)$$

حيث $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعٌ ما من الصف C^1 . ■

التمرين 9. استخدم تغيير المتحوّل $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ في المعادلة

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = a\sqrt{x^2+y^2}$$ في حالة عدد حقيقي a.

واستفد من ذلك في إيجاد التوابع $z : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ التي تكوّن حلول هذه المعادلة.

الحل

لنضع إذن $Z(r,\theta) = z(x,y)$ حيث $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. عندئذ

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\sin\theta\end{aligned}$$

وعليه

$$\frac{\partial Z}{\partial r}(r,\theta) = \frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = a$$

إذن $Z(r,\theta) = ar$ هو حلٌّ للمعادلة المدروسة. وعليه $z(x,y) = a\sqrt{x^2+y^2}$ هو حلٌّ للمعادلة المدروسة.

لإيجاد بقيّة الحلول، علينا إيجاد التوابع f من الصف C^1 على $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ التي تحقِّق

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (\mathcal{H})$$

في الحقيقة إذا كان f حلّاً لهذه المعادلة و (x,y) من $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. عرّفنا

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(tx,ty)$$

فيكون $\forall t > 0,\ \varphi'(t) = 0$. إذن

$$\forall t > 0,\ f(tx,ty) = f(x,y)$$

أي إنّ f تابعٌ **متجانس من المرتبة صفر**. وبالعكس، كلُّ تابع متجانس من المرتبة 0 يُحقّق المعادلة $(\mathcal{H})$. إذن مجموعة حلول المعادلة

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = a\sqrt{x^2+y^2}$$

هي التوابع :

$$z:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto z(x,y)=a\sqrt{x^2+y^2}+f(x,y)$$

حيث f تابعٌ ما من الصف C^1 متجانسٌ من المرتبة 0.

التمرين 10. أوجد القيم الصغرى والعظمى محلّياً للتوابع الآتية:

$$\begin{aligned}
f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)&=x^2+xy+y^2+2x+3y\\
f:\mathbb{R}_+^{*2}\to\mathbb{R},\quad f(x,y)&=x^3+3xy^2-15x-12y\\
f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)&=x^4+y^4-4xy\\
f:\mathbb{R}_+^{*2}\to\mathbb{R},\quad f(x,y)&=\frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}\\
f:\mathbb{R}_-^{*2}\to\mathbb{R},\quad f(x,y)&=x^2y^3(1+3x+2y)\\
f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)&=\frac{x^2}{\alpha^2-1}+\frac{2xy}{\alpha\beta-1}+\frac{y^2}{\beta^2-1},\ \left(\alpha>1,\beta>1\right)
\end{aligned}$$

الحل

1. النقاط الحرجة للتابع $f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x+3y$ هي التي تحقّق

$$f'_y(x,y)=x+2y+3=0 \quad \text{و} \quad f'_x(x,y)=2x+y+2=0$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد النقطة الحرجة الوحيدة $(x_0,y_0)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ للتابع f . ولدينا

$$t=f''_{y^2}(x_0,y_0)=2 \text{ و } s=f''_{xy}(x_0,y_0)=1 \text{ و } r=f''_{x^2}(x_0,y_0)=2$$

إذن $r>0$ و $rt-s^2>0$. فالتابع f يبلغ قيمة صغرى محلّياً عند $\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

2. النقاط الحرجة للتابع $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$ هي التي تحقّق

$$f'_y(x,y)=6(xy-2)=0 \quad \text{و} \quad f'_x(x,y)=3(x^2+y^2-5)=0$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد النقطتين الحرجتين $(1,2)$ و $(2,1)$ للتابع f . ولدينا بوجه عام

$$t=f''_{y^2}(x,y)=6x \text{ و } s=f''_{xy}(x,y)=6y \text{ و } r=f''_{x^2}(x,y)=6x$$

إذن $rt - s^2 = 36(x^2 - y^2)$. فالتابع f يبلغ قيمة صغرى محلّياً عند $(2,1)$ ، لأنّه عند هذه النقطة لدينا $r > 0$ و $rt - s^2 > 0$. في حين لا يبلغ قيمة عظمى أو صغرى محلّياً عند $(1,2)$ ، لأنّه عندها $rt - s^2 < 0$.

3. النقاط الحرجة للتابع $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ هي التي تحقّق

$$f'_y(x,y) = 4(y^3 - x) = 0 \quad \text{و} \quad f'_x(x,y) = 4(x^3 - y) = 0$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد النقاط الحرجة $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(-1,-1)$ للتابع f . ولدينا

$$t = f''_{y^2}(x,y) = 12y^2 \text{ و } s = f''_{xy}(x,y) = -4 \text{ و } r = f''_{x^2}(x,y) = 12x^2$$

إذن $rt - s^2 = 16(9x^2y^2 - 1)$. فالتابع f يبلغ قيمة صغرى محلّياً عند $(1,1)$ ، وكذلك عند $(-1,-1)$ لأنّه عند هاتين النقطتين لدينا $r > 0$ و $rt - s^2 > 0$. في حين لا يبلغ قيمة عظمى محلياً ولا صغرى محليّاً عند $(0,0)$ ، لأنّه عندها $rt - s^2 < 0$.

4. النقاط الحرجة للتابع $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ هي التي تحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y - x^2)}{(1+y)(1+x)^2(x+y)^2} = 0$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x - y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2} = 0$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد النقطة الحرجة الوحيدة $(1,1)$ للتابع f .

$$\begin{aligned} f(1+t, 1+s) &= \frac{(1+s)(1+t)}{(2+s)(2+t)(2+s+t)} \\ &= \frac{1}{8}(1+s)(1+t)\left(1 + \frac{s}{2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{s+t}{2}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{s^2 - st + t^2}{4}\right) + o(s^2 + t^2) \end{aligned}$$

إذن يكون المقدار $f(x,y) - \dfrac{1}{8}$ سالباً تماماً في جوار النقطة $(1,1)$ عندما $(x,y) \neq (1,1)$ ، والتابع f يبلغ قيمة عظمى محلّياً عند $(1,1)$. لاحظ أنّه بالإمكان الوصول إلى هذه النتيجة بالاستفادة عدّة مرات من المتراجحة $2\sqrt{ab} \leq a + b$.

5.النقاط الحرجة للتابع $f(x,y)=x^2y^3(1+3x+2y)$ على $\mathbb{R}_-^{*2}$ هي التي تحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^3x(2+9x+4y)=0$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2y^2(3+9x+8y)=0$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد النقطة الحرجة $\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{4}\right)$ للتابع f .

عند النقطة $\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{4}\right)$ نجد أنّ

$$r=\frac{1}{64} \text{ و } s=\frac{1}{144} \text{ و } t=\frac{1}{162}$$

ومنه $r>0$ و $st-s^2=\dfrac{1}{64.162}-\dfrac{1}{144^2}>0$. فللتابع قيمة صغرى محليّاً عند النقطة $\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{4}\right)$.

6. النقاط الحرجة للتابع $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\alpha^2-1}+\dfrac{2xy}{\alpha\beta-1}+\dfrac{y^2}{\beta^2-1}$ هي التي تحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{\alpha^2-1}+\frac{2y}{\alpha\beta-1}=0$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x}{\alpha\beta-1}+\frac{2y}{\beta^2-1}=0$$

في حالة $\beta\neq\alpha$ النقطة الحرجة الوحيدة هي $(0,0)$. وعند $(0,0)$ لدينا

$$r=\frac{2}{\alpha^2-1} \text{ و } s=\frac{1}{\alpha\beta-1} \text{ و } t=\frac{1}{\beta^2-1}$$

هنا $r>0$ و $rt-s^2=\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)(\alpha\beta-1)^2}>0$، والتابع f يبلغ قيمة صغرى محلّياً عند $(0,0)$.

أمّا في حالة $\alpha=\beta$، فيكون $f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{\alpha^2-1}$ ، والتابع يبلغ قيمة صغرى محلّياً عند كل نقطة من النمط $(\lambda,-\lambda)$. ■

التمرين 11. أثبت أنّ المعادلة $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1=0$ تعرِّف في جوار 0 تابعاً ضمنيّاً $\varphi : x\mapsto y=\varphi(x)$ يُحقِّق $\varphi\big(0\big)=1$. ثمّ أعطِ النشر المحدود حتّى المرتبة 3 للتابع φ في جوار الصفر.

الحل

التابع $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1$ ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}^2$. إضافة إلى ذلك لدينا $f(0,1)=0$ و $f'_y(0,1)=3\neq 0$. إذن استناداً إلى مبرهنة التوابع الضمنيّة، يوجد تابع مستمرٌّ وحيد $\varphi : I\to\mathbb{R}$ معرّف على مجال مفتوح يحوي 0، ويحقّق $\varphi(0)=1$ و $\forall x\in I,\ f(x,\varphi(x))=0$. وينتمي φ إلى الصف C^∞ لأنّ f كذلك. نستنتج أنّ للتابع φ نشراً محدوداً من أيّة مرتبة، أي توجد أعداد a و b و c تُحقّق

$$\varphi(x)=1+ax+bx^2+cx^3+O(x^4)$$

بالتعويض في المعادلة $f(x,\varphi(x))=0$ نجد

$$x^3+(1+ax+bx^2+cx^3)^3-3x(1+ax+bx^2+cx^3)-1=O(x^4)$$

أو

$$3(a-1)x+3(b+a^2-a)x^2+(1+a^3-3b+6ab+3c)x^3=O(x^4)$$

ومنه نستنتج أنّ $a=1$ و $b=0$ و $c=-\frac{2}{3}$. إذن

$$\varphi(x)=1+x-\frac{2}{3}x^3+O(x^4)$$

التمرين 12. أثبت أنّ المعادلة $f(x,y)=e^{x+y}+y-1=0$ تعرِّف في جوار 0 تابعاً ضمنيّاً $\varphi : x\mapsto y=\varphi(x)$ يُحقِّق $\varphi(0)=0$. ثمّ أعطِ النشر المحدود حتّى المرتبة 3 للتابع φ في جوار الصفر.

الحل

ينتمي التابع $f(x,y)=e^{x+y}+y-1$ إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}^2$. إضافة إلى ذلك لدينا $f(0,0)=0$ و $f'_y(0,0)=2\neq 0$. إذن استناداً إلى مبرهنة التوابع الضمنيّة، يوجد تابع مستمرٌّ وحيد $\varphi : I\to\mathbb{R}$ معرّف على مجال مفتوح يحوي 0، ويحقّق $\varphi(0)=0$

و $0 = \forall x \in I,\, f(x,\varphi(x))$. ينتمي φ إلى الصف C^∞ لأنّ f كذلك. نستنتج أنّ للتابع φ نشراً محدوداً من أيّة مرتبة، أي توجد أعداد a و b و c تُحقّق

$$\varphi(x) = ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4)$$

بالتعويض في المساواة $x + \varphi(x) = \ln(1 - \varphi(x))$ نستنتج

$$(2a+1)x + \left(2b + \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \left(2c + ab + \frac{a^3}{3}\right)x^3 = O(x^4)$$

إذن $a = -\frac{1}{2}$ و $b = -\frac{1}{16}$ و $c = \frac{1}{192}$ ومنه

$$\varphi(x) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{192} + O(x^4)$$

التمرين 13. أثبت، في كلٍّ من الحالات الآتية أنّ المعادلة المعطاة، تعرّف ضمنيّاً y بدلالة x على $\mathbb{R}$ وأنّ التابع $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ ينتمي إلى الصف C^∞.

① $y^3 + y + x = 0$

② $y^3 + e^x y + x^2 = 0$

③ $y^5 + (1 + x^2)y + 1 = 0$:

الحل

① لنعرّف $f(x,y) = y^3 + y + x$، ولنثبّت x في $\mathbb{R}$. التابع $y \mapsto y^3 + y + x$ تابعٌ مستمرٌّ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ويسعى إلى $-\infty$ عند $-\infty$، وكذلك يسعى إلى $+\infty$ عند $+\infty$. فيوجد حلٌّ وحيدٌ $\varphi(x)$ للمعادلة $y^3 + y + x = 0$. إذن يوجد تابعٌ وحيدٌ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يُحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,\varphi(x)) = 0$$

ليكن x_0 من $\mathbb{R}$. لدينا

$$f(x_0,\varphi(x_0)) = 0 \quad \text{و} \quad f'_y(x_0,\varphi(x_0)) = 1 + 3\varphi^2(x_0) > 0$$

إذن استناداً إلى مبرهنة التوابع الضمنية، ولأنّ f ينتمي إلى الصف C^∞، ينتمي الحلّ الضمني للمعادلة $f(x,y) = 0$ والذي يأخذ القيمة $\varphi(x_0)$ عند x_0، وهو φ بسبب الوحدانيّة، إلى الصف C^∞ أيضاً.

② لنعرّف $f(x,y) = y^3 + e^x y + x^2$ ، ولنثبّت x في $\mathbb{R}$. التابع $y \mapsto y^3 + e^x y + x^2$ تابعٌ مستمرٌّ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ويسعى إلى $-\infty$ عند $-\infty$ ، وكذلك يسعى إلى $+\infty$ عند $+\infty$. فيوجد حلٌّ وحيدٌ $\varphi(x)$ للمعادلة $y^3 + e^x y + x^2 = 0$. إذن يوجد تابعٌ وحيدٌ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يُحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, \varphi(x)) = 0$$

ليكن x_0 من $\mathbb{R}$. لدينا

$$f(x_0, \varphi(x_0)) = 0 \quad \text{و} \quad f'_y(x_0, \varphi(x_0)) = e^{x_0} + 3\varphi^2 \varphi(x_0) > 0$$

إذن استناداً إلى مبرهنة التوابع الضمنية، ولأنّ f ينتمي إلى الصف C^∞ ، ينتمي الحلّ الضمني للمعادلة $f(x,y) = 0$ والذي يأخذ القيمة $\varphi(x_0)$ عند x_0 ، الذي هو φ بسبب الوحدانيّة، إلى الصف C^∞ في جوار x_0 أيضاً، ولكنّ x_0 عددٌ كيفي، إذن φ ينتمي إلى الصف C^∞ .

③ لنعرّف $f(x,y) = y^5 + (1+x^2)y + 1$ ، ولنثبّت عنصراً x في $\mathbb{R}$. ثُمّ لنتأمّل التابع $y \mapsto y^5 + (1+x^2)y + 1$ فنجده تابعاً مستمرّاً ومتزايداً تماماً على $\mathbb{R}$ ويسعى إلى $-\infty$ عند $-\infty$ ، وكذلك يسعى إلى $+\infty$ عند $+\infty$. فيوجد حلٌّ وحيدٌ $\varphi(x)$ للمعادلة $y^5 + (1+x^2)y + 1 = 0$. إذن يوجد تابعٌ وحيدٌ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يُحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, \varphi(x)) = 0$$

ليكن x_0 من $\mathbb{R}$. لدينا

$$f(x_0, \varphi(x_0)) = 0 \quad \text{و} \quad f'_y(x_0, \varphi(x_0)) = 1 + x_0^2 + 5\varphi^4(x_0) > 0$$

إذن استناداً إلى مبرهنة التوابع الضمنية، ولأنّ f ينتمي إلى الصف C^∞ ، ينتمي الحلّ الضمني للمعادلة $f(x,y) = 0$ والذي يأخذ القيمة $\varphi(x_0)$ عند x_0 ، وهو φ بسبب الوحدانيّة، إلى الصف C^∞ أيضاً. ■

التمرين 14. لتكن n من $\mathbb{N}$. أثبت أنّ المعادلة $y^{2n+1} + y - x = 0$ ، تعرّف ضمنيّاً y بدلالة x على $\mathbb{R}$ وأنّ التابع $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ ينتمي إلى الصف C^∞ . ثُمّ احسب، في حالة x من $\mathbb{R}$ ، التكامل $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ بدلالة n و x و $\varphi(x)$.

الحل

التابع $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi(y) = y^{2n+1} + y$ تابعٌ مستمرٌّ ومتزايدٌ تماماً، ويسعى إلى $-\infty$ عند $-\infty$، ويسعى إلى $+\infty$ عند $+\infty$. فهو إذن تقابلٌ مستمرٌّ هو وتابعه العكسي، ولأنّه ينتمي إلى الصف C^∞ ومشتقّه لا ينعدم أبداً استنتجنا أنّ التابع العكسي ينتمي أيضاً إلى الصف C^∞. التابع φ هو $\varphi = \psi^{-1}$.

$$\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t \underset{t\leftarrow\psi(u)}{=} \int_0^{\varphi(x)} u\psi'(u)\,\mathrm{d}\,u = \int_0^{\varphi(x)} u\Big(1+(2n+1)u^{2n}\Big)\mathrm{d}\,u$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t &= \left[\frac{u^2}{2} + \frac{2n+1}{2n+2}u^{2n+2}\right]_0^{\varphi(x)} = \frac{\varphi^2(x)}{2} + \frac{2n+1}{2n+2}\varphi^{2n+2}(x)\\ &= \frac{\varphi^2(x)}{2} + \frac{2n+1}{2n+2}\varphi(x)\big(x-\varphi(x)\big)\\ &= \frac{2n+1}{2n+2}x\varphi(x) - \frac{n}{2n+2}\varphi^2(x)\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 15. أثبت أنّ المعادلة $x^3+y^3+z^3-zx-x+y-2z+1=0$ تعرّف في جوار $(0,0)$ تابعاً ضمنيّاً $\varphi : (x,y) \mapsto z = \varphi(x,y)$ من الصف C^∞ يُحقّق $\varphi(0,0) = 1$. ثمّ احسب المشتقات من المرتبة الثانية للتابع φ عند $(0,0)$.

الحل

ينتمي التابع

$$f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-zx-x+y-2z+1$$

إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}^3$. ولدينا

$$f(0,0,1) = 0 \quad \text{و} \quad f_z'(0,0,1) = 1 \neq 0$$

إذن، بناءً على مبرهنة التوابع الضمنيّة، يوجد تابعٌ وحيدٌ $\varphi : V \to \mathbb{R}$ ينتمي إلى الصف C^∞ في الجوار المفتوح V للنقطة $(0,0)$، ويُحقّق $\varphi(0,0) = 1$ ومهما يكن (x,y) من V يكن

$$f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$$

ولمّا كان φ ينتمي إلى الصف C^∞ استنتجنا أنّه يقبل نشراً محدوداً من أيّة مرتبة في جوار النقطة $(0,0)$. وعليه

$$\varphi(x,y) = 1 + px + qy + rx^2 + sxy + ty^2 + o(x^2+y^2)$$

حيث

$$p = \varphi'_x(0,0) \text{ و } q = \varphi'_y(0,0)$$
$$\text{و } 2r = \varphi''_{x^2}(0,0) \text{ و } s = \varphi''_{xy}(0,0) \text{ و } 2t = \varphi''_{y^2}(0,0)$$

وبالتعويض في $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ نجد

$$\begin{aligned}&(p-2)x + (q+1)y +\\&(r+3p^2-p)x^2 + (s+6pq-q)xy + (t+3q^2)y^2 = o(x^2+y^2)\end{aligned}$$

إذن

$$p = 2 \text{ و } q = -1 \text{ و } r = -10 \text{ و } s = 11 \text{ و } t = -3 .$$

ومنه

$$\varphi''_{x^2}(0,0) = -20 \quad \text{و} \quad \varphi''_{xy}(0,0) = 11 \quad \text{و} \quad \varphi''_{y^2}(0,0) = -6$$

التمرين 16. نتأمّل في $\mathbb{R}^2$ الأجزاء الآتية :

$$\begin{aligned}A &= \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi,\pi[\\ \Delta &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = 0, x \le 0\}\\ B &= \mathbb{R}^2\backslash\Delta\end{aligned}$$

وفي حالة (r,θ) من A نعرّف $(x,y) = f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. أثبت أنّ f يعرّف تقابلاً بين A و B وأنّ f^{-1} يُعطى بالعلاقتين

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{و} \quad \theta = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

2. أثبت أنّ f و f^{-1} ينتميان إلى الصف C^1 . وأثبت أنّه لا يمكن تمديد f^{-1} إلى مجموعة أكبر من B دون أن نخسر استمراره.

الحل

1.لتكن (r,θ) من A، عندئذ $\Delta \not\ni (x,y)$، لأنّ $(x,y) \in \Delta$ يقتضي $\sin\theta = 0$ و $\cos\theta \le 0$، وهذا تناقض لأنّ θ من $]-\pi,\pi[$. ومنه $f(A) \subset B$. لنعرّف

$$g(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

في حالة (x,y) من B.

عندئذ نجد وضوحاً أنّ $g(B) \subset A$ بسبب تعريف التابع $\arctan$. سنفترض إذن أنّ $f : A \to B$ و $g : B \to A$ عندها نتيقّن بسهولة أنّ

$$g \circ f = I_A \quad \text{و} \quad f \circ g = I_B$$

إذن f تقابلٌ و $g = f^{-1}$.

2. من الواضح أنّ مركّبات التابعين f و f^{-1} تنتمي إلى الصف C^∞. لنفترض أنّ $(a,0)$ نقطة من Δ. ولنعرّف $\alpha_n = \left(a,\frac{1}{n}\right)$ و $\beta_n = \left(a,-\frac{1}{n}\right)$. عندئذ نلاحظ ما يأتي :

- في حالة $a \neq 0$، لدينا
$\lim_{n\to\infty} g(\alpha_n) = \left(|a|,\pi\right)$ و $\lim_{n\to\infty} g(\beta_n) = \left(|a|,-\pi\right)$.
- وفي حالة $a = 0$، لدينا
$\lim_{n\to\infty} g(\alpha_n) = \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ و $\lim_{n\to\infty} g(\beta_n) = \left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$.

إذن في جميع الحالات لا يمكن تمديد g إلى تابع مستمرٍّ على أيّ مجموعة تحوي تماماً B. ■

التمرين 17. أثبت أنّ الأشكال التفاضلية من المرتبة الأولى الآتية تامّة، وعيّن في كلِّ حالة تابعاً يكون تفاضله مساوياً للشكل التفاضلي المدروس:

$$\begin{aligned}
\omega_1(x,y) &= 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y\\
\omega_2(x,y) &= (2-9xy^2)x\,\mathrm{d}x + (4y^2-6x^3)y\,\mathrm{d}y\\
\omega_3(x,y) &= (1+y^2\sin 2x)\,\mathrm{d}x - 2y\cos^2 x\,\mathrm{d}y\\
\omega_4(x,y,z) &= (x^2+2xy+2xz)\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+z^2)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

الحل

1. لدينا $\omega_1(x,y) = 2xy\,\mathrm{d}\,x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}\,y$. أي :

$$P(x,y) = 2xy \quad \text{و} \quad Q(x,y) = x^2 - y^2$$

على $\mathbb{R}^2$ ، ونجد $P'_y(x,y) = 2x$ و $Q'_x(x,y) = 2x$. إذن ω_1 شكلٌ تفاضلي مغلق.

ونتحقّق مباشرة أنّ ω_1 يساوي تفاضل التابع $f(x,y) = x^2y - \dfrac{y^3}{3} + \lambda$ أيّاً كانت λ .

2. لدينا $\omega_2(x,y) = (2 - 9xy^2)x\,\mathrm{d}\,x + (4y^2 - 6x^3)y\,\mathrm{d}\,y$. أي :

$$P(x,y) = (2 - 9xy^2)x \quad \text{و} \quad Q(x,y) = (4y^2 - 6x^3)y$$

على $\mathbb{R}^2$ ، ونجد $P'_y(x,y) = 18x^2y$ و $Q'_x(x,y) = 18x^2y$. إذن ω_2 شكلٌ تفاضلي مغلق. ونتحقّق مباشرة أنّ ω_2 يساوي تفاضل التابع

$$f(x,y) = x^2 - 3x^3y^2 + y^4 + \lambda$$

3. لدينا $\omega_3(x,y) = (1 + y^2\sin 2x)\,\mathrm{d}\,x - 2y\cos^2 x\,\mathrm{d}\,y$. أي :

$$P(x,y) = (1 + y^2\sin 2x) \quad \text{و} \quad Q(x,y) = -2y\cos^2 x$$

على $\mathbb{R}^2$ ، ونجد $P'_y(x,y) = 2y\sin 2x$ و $Q'_x(x,y) = 2y\sin 2x$. إذن ω_3 شكلٌ تفاضلي مغلق. ونتحقّق مباشرة أنّ ω_3 يساوي تفاضل التابع

$$f(x,y) = x - y^2\cos^2 x + \lambda$$

4. لدينا $\omega_4(x,y) = (x^2 + 2xy + 2xz)\,\mathrm{d}\,x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,y + (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}\,z$.
أي يكون في هذه الحالة: $P(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ و $Q(x,y,z) = x^2 + y^2$
و $R(x,y,z) = x^2 + z^2$.
ونتحقّق أنّ

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

إذن ω_4 شكلٌ تفاضلي مغلق. ونتحقّق مباشرة أنّ ω_4 يساوي تفاضل التابع

$$f(x,y,z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + (y+z)x^2 + \lambda$$

التمرين 18. إذا كان ω شكلاً تفاضلياً من المرتبة الأولى ولم يكن مغلقاً، أسمينا **عاملَ مُكاملةٍ** كلَّ تابع غير معدوم μ يجعل الشكل التفاضلي $\omega_1 = \mu\omega$ مغلقاً. جِدْ في الحالات الآتية عامل مُكاملة μ للشكل التفاضلي ω ثُمّ جِدْ تابعاً أصلياً للشكل التفاضلي ω_1 الناتج:

1. $\omega(x,y) = y^2 \,\mathrm{d}\, x + x^2 \,\mathrm{d}\, y$ علماً أنّ $\mu(x,y) = \lambda(x+y)$.
2. $\omega(x,y) = (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\, x - 2y\,\mathrm{d}\, y$ علماً أنّ $\mu(x,y) = \lambda(x)$.
3. $\omega(x,y) = y\,\mathrm{d}\, x - x\,\mathrm{d}\, y$ علماً أنّ $\mu(x,y) = \lambda(xy)$.
4. $\omega(x,y) = (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\, x - 2xy\,\mathrm{d}\, y$ علماً أنّ $\mu(x,y) = \lambda(x^2-y^2)$.

الحل

1. يكون الشكل التفاضلي $\omega_1(x,y) = y^2\lambda(x+y)\,\mathrm{d}\, x + x^2\lambda(x+y)\,\mathrm{d}\, y$ مغلقاً إذا كان :

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2\lambda(x+y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(y^2\lambda(x+y)\Big)$$

وهذا يُكافئ $(x-y)(2\lambda(x+y)+(x+y)\lambda'(x+y)) = 0$. إذن يكفي أن نختار λ تُحقّق الشرط $2\lambda(t)+t\lambda'(t) = 0$ حتّى يكون ω_1 مغلقاً. نختار مثلاً $\lambda(t) = 1/t^2$ ، عندئذ

$$\omega_1(x,y) = \frac{y^2}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}\, x + \frac{x^2}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}\, y$$

ونلاحظ أنّ ω_1 هو تفاضل التابع $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

2. يكون الشكل التفاضلي $\omega_1(x,y) = (x^2+y^2-1)\lambda(x)\,\mathrm{d}\, x - 2y\lambda(x)\,\mathrm{d}\, y$ مغلقاً إذا تحققت المساواة :

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(-2y\lambda(x)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big((x^2+y^2-1)\lambda(x)\Big)$$

وهذا يُكافئ $y\Big(\lambda(x)+\lambda'(x)\Big) = 0$. إذن يكفي أن نختار λ تُحقّق الشرط $\lambda+\lambda' = 0$ حتّى يكون ω_1 مغلقاً. نختار مثلاً $\lambda(x) = e^{-x}$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\omega_1(x,y) = (x^2+y^2-1)e^{-x}\,\mathrm{d}\, x - 2ye^{-x}\,\mathrm{d}\, y$$

ونلاحظ أنّ ω_1 هو تفاضل التابع $f(x,y) = -(y^2+(x+1)^2)e^{-x}$.

.3من الواضح أنّ الشكل التفاضلي $\omega(x,y)=y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y$ يصبح مغلقاً بالقسمة على xy :

$$\omega_1(x,y)=\frac{1}{x}\mathrm{d}\,x-\frac{1}{y}\mathrm{d}\,y$$

ويكون ω_1 هو تفاضل التابع $f(x,y)=\ln\left|x/y\right|$.

.4 يكون الشكل التفاضلي

$$\omega_1(x,y)=(x^2+y^2-1)\lambda(x^2-y^2)\,\mathrm{d}\,x-2xy\lambda(x^2-y^2)\,\mathrm{d}\,y$$

مغلقاً إذا تحقّقت المساواة :

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(-2xy\lambda(x^2-y^2)\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big((x^2+y^2-1)\lambda(x^2-y^2)\Big)$$

وهذا يُكافئ $y\Big(2\lambda(x^2-y^2)+(x^2-y^2+1)\lambda'(x^2-y^2)\Big)=0$. إذن يكفي أن نختار λ تُحقّق الشرط $2\lambda(t)+(t+1)\lambda'(t)=0$ حتّى يكون ω_1 مغلقاً. نختار مثلاً $\lambda(t)=1\,/\,(t+1)^2$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\omega_1(x,y)=\frac{x^2+y^2-1}{(1+x^2-y^2)^2}\mathrm{d}\,x-\frac{2xy}{(1+x^2-y^2)^2}\mathrm{d}\,y$$

ونلاحظ أنّ ω_1 هو تفاضل التابع $f(x,y)=\dfrac{1}{y^2-x^2-1}$. ■

التمرين .19 احسب التكامل $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ في الحالات الآتية:

.1 الطريق Γ هو الدائرة ذات المعادلة $x^2+y^2=1$ ، مقطوعة مرّة واحدة بالاتجاه الموجب، والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y)=(x-y^3)\,\mathrm{d}\,x+x^3\,\mathrm{d}\,y$.

.2 الطريق Γ هو الدائرة ذات المعادلة $x^2+y^2=R^2$ ، مقطوعة مرّة واحدة، بالاتجاه الموجب، والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y)=\dfrac{(x+y)\,\mathrm{d}\,x-(x-y)\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2}$.

.3 الطريق Γ هو جزء القطع الناقص الممثّل وسيطياً بالتابع $\varphi:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ مع $\varphi(t)=(a\cos t,b\sin t)$ و $\omega(x,y)=y^2\,\mathrm{d}\,x+x^2\,\mathrm{d}\,y$.

4. الطريق Γ هو المربّع $ABCD$ الذي رؤوسه $A(a,a)$ و $B(-a,a)$ و$C(-a,-a)$ و $D(a,-a)$ مع $0 < a$، مقطوعاً مرّة واحدة وبالاتجاه الموجب، والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y) = \dfrac{(x-y)\,\mathrm{d}\,x + (x+y)\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2}$.

5. الطريق Γ هو دائرة معطاة وسيطياً بالتمثيل

$$x = \cos t \text{ ،} y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \text{ ،} z = \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \text{ في حالة } t \in [0,2\pi[$$

والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y,z) = xyz\,\mathrm{d}\,z$.

6. الطريق Γ هو الطريق الممثّل وسيطياً بالتابع $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ مع

$$\varphi(t) = (R\cos t, R\cos t, R\sin t) \quad \text{حيث } R > 0$$

والشكل التفاضلي ω هو الشكل $\omega(x,y,z) = y\,\mathrm{d}\,x - z\,\mathrm{d}\,y + x\,\mathrm{d}\,z$.

7. الطريق Γ هو الطريق الممثّل وسيطياً بالتابع $\varphi : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ المعطى بالصيغة

$$\varphi(t) = \big(R(1+\cos t), R(-1+\cos t), R\sin t\big) \quad \text{حيث } 0 < R$$

والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y,z) = yz\,\mathrm{d}\,x + xz\,\mathrm{d}\,y - xy\,\mathrm{d}\,z$.

الحل

1. الطريق Γ هو الدائرة ذات المعادلة $x^2+y^2 = 1$ ، مقطوعة مرّة واحدة بالاتجاه الموجب، والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y) = (x-y^3)\,\mathrm{d}\,x + x^3\,\mathrm{d}\,y$. لحساب $\int_\Gamma \omega$ نلاحظ أنّ الشكل التفاضلي $x\,\mathrm{d}\,x$ مغلق في $\mathbb{R}^2$ إذن $\int_\Gamma x\,\mathrm{d}\,x = 0$ ومنه

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int\limits_\Gamma x^3\,\mathrm{d}\,y - y^3\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^{2\pi} \cos^3\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta) - \sin^3\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta)\\ &= \int\limits_0^{2\pi}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(3+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

2. الطريق Γ هو الدائرة ذات المعادلة $x^2+y^2 = R^2$ ، مقطوعة مرّة واحدة، بالاتجاه الموجب، والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y) = \dfrac{(x+y)\,\mathrm{d}\,x - (x-y)\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2}$.

لحساب $\int_\Gamma \omega$ نكتب ما يأتي :

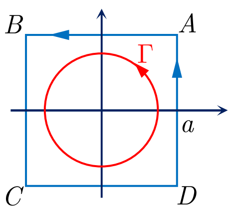
$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_\Gamma \frac{(x+y)\,\mathrm{d}\,x-(x-y)\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2}\\ &= \int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}(\sin\theta)\\ &= \int_0^{2\pi}(-(\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta-(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta\\ &= \int_0^{2\pi}-\mathrm{d}\,\theta=-2\pi\end{aligned}$$

3. الطريق Γ هو جزء القطع الناقص الممثَّل وسيطياً بالتابع

$$\varphi:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2, \varphi(t)=(a\cos t, b\sin t)$$

و $\omega(x,y)=y^2\,\mathrm{d}\,x+x^2\,\mathrm{d}\,y$. لحساب $\int_\Gamma \omega$ نكتب ما يأتي:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}\,x+x^2\,\mathrm{d}\,y\\ &= \int_0^{\pi} ab^2\sin^2 t\,\mathrm{d}(\cos t)+a^2b\cos^2 t\,\mathrm{d}(\sin t)\\ &= ab\int_0^{\pi}(-b\sin^3 t+a\cos^3 t)\,\mathrm{d}\,t=-\frac{4ab^2}{3}\end{aligned}$$



4. الطريق Γ هو المربّع $ABCD$ الذي رؤوسه $A(a,a)$ و $B(-a,a)$ و $C(-a,-a)$ و $D(a,-a)$ حيث $0<a$، مقطوعاً مرّة واحدة وبالاتجاه الموجب، والشكل التفاضلي ω هو

$$\omega(x,y)=\frac{(x-y)\,\mathrm{d}\,x+(x+y)\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2}\ .$$

إنّ هذا الشكل التفاضلي شكلٌ مغلق في $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ كما يبيِّن ذلك حساب مباشرٌ، والمربّع $ABCD$ هو تشويه مستمرٌّ للدائرة المثلّثيّة Γ .

وعليه :

$$\begin{aligned}\int_{ABCD}\omega &= \int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \frac{(x-y)\,\mathrm{d}\,x+(x+y)\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2}\\ &= \int_0^{2\pi}(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta)+(\cos\theta+\sin\theta)\,\mathrm{d}(\sin\theta)\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta = 2\pi\end{aligned}$$

5. الطريق Γ هو الدائرة الممثّلة وسيطياً كما يأتي $x=\cos t$ ، $y=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$ ، $z=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$ حيث $t\in[0,2\pi[$ ، والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y,z)=xyz\,\mathrm{d}\,z$. لحساب $\int_\Gamma\omega$ نكتب ما يأتي:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_\Gamma xyz\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\\ &= \frac{1}{16\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\big(1-\cos 4\theta\big)\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

6. الطريق Γ هو الطريق الممثّل وسيطياً بالتابع $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ المعطى بالصيغة:

$$\varphi(t)=(R\cos t, R\cos t, R\sin t) \quad \text{حيث} \quad 0<R$$

والشكل التفاضلي ω هو الشكل $\omega(x,y,z)=y\,\mathrm{d}\,x-z\,\mathrm{d}\,y+x\,\mathrm{d}\,z$. لحساب $\int_\Gamma\omega$ نكتب ما يأتي :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_\Gamma y\,\mathrm{d}\,x-z\,\mathrm{d}\,y+x\,\mathrm{d}\,z\\ &= R^2\int_0^{2\pi}(-\cos t\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}\,t = 2\pi R^2\end{aligned}$$

7. الطريق Γ هو الطريق الممثّل وسيطياً بالتابع $\varphi:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^3$ حيث
$\varphi(t)=(R(1+\cos t), R(-1+\cos t), R\sin t)$ و $0<R$.
والشكل التفاضلي ω هو $\omega(x,y,z)=yz\,\mathrm{d}\,x+xz\,\mathrm{d}\,y-xy\,\mathrm{d}\,z$.

لحساب $\int_\Gamma \omega$ نكتب ما يأتي :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_\Gamma yz\,\mathrm{d}\,x + xz\,\mathrm{d}\,y - xy\,\mathrm{d}\,z\\ &= R^3\int_0^{\pi/2}\Big((1-\cos t)\sin^2 t - (1+\cos t)\sin^2 t + \sin^2 t\cos t\Big)\mathrm{d}\,t\\ &= -R^3\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}\,t\\ &= \left[-\frac{R^3}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{R^3}{3}\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 20. لنتأمّل الشكل التفاضلي ω المعرّف على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ كما يأتي:

$$\omega(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x)\,\mathrm{d}\,x + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x + y\sin x)\,\mathrm{d}\,y$$

1. أثبت أنّ ω شكل تفاضلي مغلق على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
2. لنعرّف، عندما تكون r من $\mathbb{R}_+^*$، التكامل $I(r) = \int_{\Gamma_r}\omega$ إذ يعطى Γ_r بالتمثيل الوسيطي: $\varphi_r : [0,\pi]\to\mathbb{R}^2,\ \ \theta\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

   i. أثبت أنّ $I(r) = \int_0^\pi e^{-r\sin\theta}\cos(r\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$، وأنّ $\lim_{r\to0^+} I(r) = \pi$.

   ii. أثبت أنّ $\frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta$, $\forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، واستنتج أنّ $\lim_{r\to+\infty} I(r) = 0$.
3. ليكن a و b عددين حقيقيّيْن يُحقّقان $0<a<b$.

   i. أثبت أنّ $2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = I(a) - I(b)$.

   ii. استنتج أنّ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}$.

الحل

1. هنا لدينا

$$P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x)$$

$$Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x + y\sin x)$$

ونجد بحساب بسيط أنّه على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ لدينا

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

2.i. نهدف إلى حساب التكامل: $I(r) = \int_{\Gamma_r} \omega$. لدينا

$$\begin{aligned} I(r) &= r\int_0^\pi \big(-P(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta + Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\big)\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \int_0^\pi e^{-r\sin\theta}\cos(r\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \end{aligned}$$

التابع $h : \mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \to \mathbb{R},\ h(r,\theta) = e^{-r\sin\theta}\cos(r\sin\theta)$ تابعٌ مستمرٌّ بالنسبة إلى المتحوّلين. وهو يحقّق $\big|h(r,t)\big| \leq 1$ ، $\forall (r,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,\pi]$، وتكامل التابع الثابت 1 متقارب على المجال $[0,\pi]$. إذن التابع $r \mapsto I(r)$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$ ، ومنه

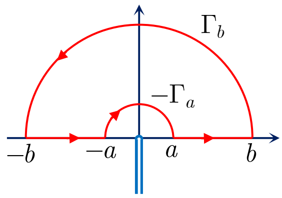
$$\lim_{r\to 0^+} I(r) = I(0) = \pi$$

2.ii. المتراجحة المطلوبة مألوفة ونترك إثباتها للقارئ. نستنتج إذن

$$\begin{aligned} \big|I(r)\big| &\leq \int_0^\pi e^{-r\sin\theta}\big|\cos(r\cos\theta)\big|\,\mathrm{d}\,\theta \leq \int_0^\pi e^{-2r\theta/\pi}\,\mathrm{d}\,\theta \\ &\leq \left[-\frac{\pi}{2r}e^{-2r\theta/\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2r}(1-e^{-2r}) \leq \frac{\pi}{2r} \end{aligned}$$

إذن $\lim_{r\to+\infty} I(r) = 0$.

$.i.3$ لمّا كان ω شكلاً تفاضليّاً مغلقاً على المجموعة المفتوحة البسيطة الترابط $\mathbb{R}^2\setminus(\{0\}\times\mathbb{R}\_)$ استنتجنا أنّ $\int_\Gamma \omega = 0$ على أيِّ طريق مغلق محتوى في المجموعة السابقة. لنتأمّل إذن الطريق المغلق Γ المبيَّن في الشكل المبين أدناه.



نستنتج من كون $\int_\Gamma \omega = 0$ ما يأتي:

$$\int_{[a,b]}\omega + \int_{\Gamma_b}\omega + \int_{[-b,-a]}\omega + \int_{-\Gamma_a}\omega = 0$$

وعليه

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x + I(b) + \int_{-b}^{-a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x - I(a) = 0$$

أو

$$2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = I(a) - I(b)$$

$.ii.3$ لمّا كان

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} \big(I(a) - I(b)\big) = \pi$$

استنتجنا أنّ

$$.\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ∎

التمرين 21. لنعرّف عندما يكون (α,β,R) في $(\mathbb{R}_+)^3$ التكاملين:

$$J(\alpha,\beta,R)=\int_0^R e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x^2)\,\mathrm{d}\,x$$

و

$$K(\alpha,\beta,R)=\int_0^R e^{-\alpha x^2}\sin(\beta x^2)\,\mathrm{d}\,x$$

وكذلك لنعرّف أياً كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$ التابعين:

$$P(x,y)=e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$$

و

$$Q(x,y)=e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$$

والشكلين التفاضليّيْن

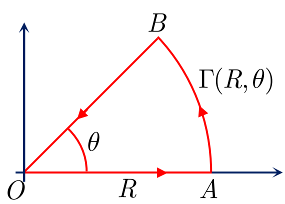
$$\omega_1(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}\,x-Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

و

$$\omega_2(x,y)=Q(x,y)\,\mathrm{d}\,x+P(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

وأخيراً، نعرّف حين تكون θ في $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ و $0<R$ الطريق المغلق $\Gamma(R,\theta)$ من الصف C^1 قِطَعياً، والممثّل وسيطياً بالتابع $\varphi:[0,3]\to\mathbb{R}^2$ مع

$$\varphi(t)=\begin{cases}(t\,R,0) & : \quad 0\le t\le 1,\\ (R\cos(\theta(t-1)),R\sin(\theta(t-1)) & : \quad 1\le t\le 2,\\ ((3-t)R\cos\theta,(3-t)R\sin\theta) & : \quad 2\le t\le 3,\end{cases}$$



فالمنحني $\Gamma(R,\theta)$ هو اجتماع القطعة المستقيمة $[O,A]$ التي بدايتها مبدأ الإحداثيات ونهايتها النقطة $A(R,0)$، والقوس (AB) وهو الجزء من قوس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها R والذي بدايته النقطة A ونهايته النقطة $B(R\cos\theta,R\sin\theta)$، وأخيراً القطعة المستقيمة $[B,O]$ التي بدايتها النقطة B ونهايتها مبدأ الإحداثيات O.

نذكّر القارئ بالنتيجة المعروفة، التي نقبلها دون برهان:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1. هل الأشكال التفاضليّة ω_1 و ω_2 مغلقة على $\mathbb{R}^2$ ؟ ماذا تستنتج حول قيمة التكاملين $\int_{\Gamma(R,\theta)} \omega_1$ و $\int_{\Gamma(R,\theta)} \omega_2$ ؟

2. احسب التكامل $\int_{[O,A]} \omega_1$ بدلالة $J(0,1,R)$، وكذلك احسب $\int_{[O,A]} \omega_2$ بدلالة $K(0,1,R)$.

3. احسب $\int_{[O,B]} \omega_1$ و $\int_{[O,B]} \omega_2$ بدلالة

$$J(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R) \quad \text{و} \quad K(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R)$$

4. نعرّف $H_i(R,\theta) = \int_{(AB)} \omega_i$، في حالة i من $\{1,2\}$.

i. أثبت أنّ $\forall i \in \{1,2\},\ \left|H_i(R,\theta)\right| \leq R\int_0^\theta e^{-R^2 \sin(2t)}\,\mathrm{d}\,t$.

ii. استنتج أنّ $\forall i \in \{1,2\},\ \left|H_i(R,\theta)\right| \leq \dfrac{\pi}{4R}$.

5. i. استخدم الدراسة السابقة لتثبت أنّ

$$\forall i \in \{1,2\},\quad \lim_{R\to\infty} \left| \int_{[O,A]} \omega_i - \int_{[O,B]} \omega_i \right| = 0.$$

احسب $\lim_{R\to\infty} J(1,0,R)$.

ii. بوضع $\theta = \dfrac{\pi}{4}$، وباستخدام $i.5$، أثبت وجود النهايتين

$$\lim_{R\to\infty} J(0,1,R) \quad \text{و} \quad \lim_{R\to\infty} K(0,1,R)$$

وأنّ لهما القيمة σ نفسها. أعطِ قيمة σ.

iii. في حالة θ من $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$، أثبت وجود النهايتين الآتيتين واحسبهما:

$$\lim_{R\to\infty} J(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R) \quad \text{و} \quad \lim_{R\to\infty} K(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R)$$

iv. استنتج، حين تكون x في $\mathbb{R}_+$، قيمة كلٍّ من التكاملين:

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \cos(t^2)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \sin(t^2)\,\mathrm{d}\,t$$

الحل

1. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -2xe^{-2xy}\cos(x^2-y^2)+2ye^{-2xy}\sin(x^2-y^2)\\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \quad 2xe^{-2xy}\cos(x^2-y^2)-2ye^{-2xy}\sin(x^2-y^2)\end{aligned}$$

إذن $\omega_1 = P(x,y)\,\mathrm{d}\,x - Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ شكلٌ تفاضليٌّ مغلق على $\mathbb{R}^2$. وكذلك

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= -2ye^{-2xy}\cos(x^2-y^2)-2xe^{-2xy}\sin(x^2-y^2)\\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= -2xe^{-2xy}\sin(x^2-y^2)-2ye^{-2xy}\cos(x^2-y^2)\end{aligned}$$

إذن $\omega_2 = Q(x,y)\,\mathrm{d}\,x + P(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ أيضاً شكلٌ تفاضليٌّ مغلق على $\mathbb{R}^2$. ونستنتج من ذلك أنّ التكاملين $\int_{\Gamma(R,\theta)}\omega_1$ و $\int_{\Gamma(R,\theta)}\omega_2$ يساويان الصفر.

2. لنلاحظ أنّ $x \mapsto (x,0)$ تمثيل وسيطي للقطعة $[OA]$ ومنه

$$\int_{[OA]}\omega_1 = \int_0^R \cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x = J(0,1,R)$$

و

$$\int_{[OA]}\omega_2 = \int_0^R \sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x = K(0,1,R)$$

3. لنلاحظ أنّ $t \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta)$ تمثيل وسيطي للقطعة $[OB]$ ومنه

$$\begin{aligned}\int_{[OB]}\omega_1 &= \int_0^R e^{-t^2\sin 2\theta}\Big(\cos(t^2\cos 2\theta)\cos\theta - \sin(t^2\cos 2\theta)\sin\theta\Big)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \cos\theta\ J(\sin 2\theta,\cos 2\theta,R) - \sin\theta\ K(\sin 2\theta,\cos 2\theta,R)\end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}\int_{[OB]}\omega_2 &= \int_0^R e^{-t^2\sin 2\theta}\Big(\sin(t^2\cos 2\theta)\cos\theta + \cos(t^2\cos 2\theta)\sin\theta\Big)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \cos\theta\ K(\sin 2\theta,\cos 2\theta,R) + \sin\theta\ J(\sin 2\theta,\cos 2\theta,R)\end{aligned}$$

$i.4$. لنلاحظ أنّ $t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$ تمثيل وسيطي للقوس (AB) ومنه

$$H_1(R,\theta) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \omega_1 = R\int_0^\theta e^{-R^2 \sin 2t} \cos(t + R^2 \cos 2t)\,\mathrm{d}\,t$$

و

$$H_2(R,\theta) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \omega_2 = R\int_0^\theta e^{-R^2 \sin 2t} \sin(t + R^2 \cos 2t)\,\mathrm{d}\,t$$

إذن نلاحظ أنّه، في حالة $i = 1$ أو $i = 2$ لدينا

$$\left|H_i(R,\theta)\right| \le R\int_0^\theta e^{-R^2 \sin 2t}\,\mathrm{d}\,t$$

$ii.4$. ولمّا كان $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ استنتجنا أنّ $0 \le 2t \le \frac{\pi}{2}$، ومن ثَمّ $0 \le \frac{4}{\pi}t \le \sin 2t$. إذن في حالة $i = 1$ أو $i = 2$ يكون لدينا

$$\left|H_i(R,\theta)\right| \le R\int_0^\theta e^{-4R^2 t/\pi}\,\mathrm{d}\,t \le \frac{\pi}{4R}$$

$i.5$. استناداً إلى نتيجة السؤال 1. نستنتج أنّ

$$\forall i \in \{1,2\},\quad \int_{[O,A]} \omega_i + \int_{\overset{\frown}{AB}} \omega_i - \int_{[O,B]} \omega_i = 0$$

ومنه

$$\forall i \in \{1,2\},\quad \left|\int_{[O,A]} \omega_i - \int_{[O,B]} \omega_i\right| = \left|H_i(R,\theta)\right|$$

وبالاستفادة من $ii.4$ نجد

$$\forall i \in \{1,2\},\quad \lim_{R\to\infty}\left|\int_{[O,A]} \omega_i - \int_{[O,B]} \omega_i\right| = 0$$

$ii.5$. لدينا $J(1,0,R) = \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$ إذن

$$\lim_{x\to\infty} J(1,0,R) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وهو التكامل المعطى في نص المسألة.

$iii.5$. لنضع $\theta = \frac{\pi}{4}$. بالاستفادة من $i.5$ نجد

$$\lim_{R\to\infty}\left|J(0,1,R) - \frac{J(1,0,R)}{\sqrt{2}}\right| = 0$$

و

$$\lim_{R\to\infty}\left|K(0,1,R) - \frac{J(1,0,R)}{\sqrt{2}}\right| = 0$$

وعليه نستنتج وجود النهايتين $\lim_{R\to\infty} J(0,1,R)$ و $\lim_{R\to\infty} K(0,1,R)$ وأنّ لهما القيمة σ نفسها، وهي $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

$iv.5$. نفترض أنّ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. إذن

$$\lim_{R\to\infty}\left|J(0,1,R) - \cos\theta J(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R) + \sin\theta K(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R)\right| = 0$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|K(0,1,R) - \cos\theta K(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R) - \sin\theta J(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R)\right| = 0$$

وعليه

$$\lim_{R\to\infty}\left|\cos\theta J(0,1,R) + \sin\theta K(0,1,R) - J(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R)\right| = 0$$

و

$$\lim_{R\to\infty}\left|\sin\theta J(0,1,R) - \cos\theta K(0,1,R) + K(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R)\right| = 0$$

نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{R\to\infty} J(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\big(\cos\theta + \sin\theta\big)$$

و

$$\lim_{R\to\infty} K(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\big(\cos\theta - \sin\theta\big)$$

أي إنّ التكاملين التاليين متقاربان وتعطى قيمتاهما كما يأتي:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sin(2\theta)x^2}\cos(x^2\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\cos\theta+\sin\theta\big)$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-\sin(2\theta)x^2}\sin(x^2\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\cos\theta-\sin\theta\big)$$

وذلك أيّاً كانت قيمة θ من المجال $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. وبإجراء تغيير المتحوّل $u = x\sqrt{\cos 2\theta}$ في حالة $0\le\theta<\frac{\pi}{4}$ نجد

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tan(2\theta)u^2}\cos u^2\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\cos\theta+\sin\theta\big)\sqrt{\cos 2\theta}$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-\tan(2\theta)u^2}\sin u^2\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\cos\theta-\sin\theta\big)\sqrt{\cos 2\theta}$$

فإذا وضعنا $x = \tan 2\theta \in \mathbb{R}_+$ وجدنا

$$\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}\cos u^2\,\mathrm{d}\,u = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}+\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}\sin u^2\,\mathrm{d}\,u = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}-\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{\sqrt{1+x^2}}$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب.

منشأ المعادلات التفاضليّة وتصنيفها

1. عموميّات

غالباً ما تقودنا النمذجة الرياضيّة للعديد من الظواهر الفيزيائيّة إلى معادلات تفاضليّة تُحقِّقها التوابع التي تصف هذه الظواهر، والسبب في ذلك هو أنّنا، عند وضع النماذج الرياضيّة لهذه الظواهر، نسعى إلى التعبير عن معدّلات تغيّر هذه التوابع بدلالة التوابع ذاتها وبقية المتحولات المؤثِّرة في هذه الظواهر.

1-1. أمثلة

❖ تصف المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -k\,x \tag{1}$$

ظاهرة التفكُّك الإشعاعي لمادّة مشعّة؛ إذ تمثّل x كميّة المادّة المشعّة غير المتفكّكة في اللحظة t، ويمثل المشتق $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}$ معدّل التفكّك الإشعاعي، أمّا k فهو ثابتُ التفكُّك الإشعاعيّ للمادّة المدروسة.

❖ تصف المعادلة التفاضليّة

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} = F(t,\vec{r},\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}) \tag{2}$$

حركة نقطة ماديّة كتلتها m خاضعة لقوّة F تابعة للزمن t، ولشعاع موضع النقطة $\vec{r} = (x,y,z)$، ولسرعتها $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}$.

❖ أمّا **معادلة بواسّون** الآتية

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

فيحقّقها الكمون الكهربائي الساكن $(x,y,z) \mapsto U(x,y,z)$ الناتج عن توزّع حجمي للشحنة الكهربائيّة معطى بتابع الكثافة الحجميّة للشحنة $(x,y,z) \mapsto \rho(x,y,z)$، ($\varepsilon_0$ ثابت).

إنّ المهمّة الأولى لنظريّة المعادلات التفاضليّة هي إيجاد التوابع المجهولة التي تحقِّق هذه المعادلات، أو ما نسمّيه حلول هذه المعادلات.

- إذا كانت التوابع المجهولة في معادلة تفاضليّة توابعَ لمتحوّل واحد مثل (1) أو (2) قلنا إنّها **معادلة تفاضليّة عاديّة**، أمّا إذا كانت التوابع المجهولة في معادلة تفاضليّة توابعَ لعدّة متحولات مثل (3) قلنا إنّها **معادلة تفاضليّة جزئيّة**.

فعلى سبيل المثال، المعادلات التفاضليّة الآتية

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - y = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} - 2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + 6y = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\theta}{\mathrm{d}\,t^2} + k\sin\theta = 0$$

هي معادلات تفاضليّة عاديّة. أمّا المعادلات التفاضليّة الآتية

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - 2k\frac{\partial Z}{\partial t}$$

فهي معادلات تفاضليّة جزئيّة.

- ونعرّف **مرتبة المعادلة التفاضليّة** بأنها أعلى مرتبة للمشتقّ فيها، فالمعادلتان التفاضليّتان (2) و (3) هما من المرتبة الثانية، أمّا المعادلة التفاضليّة (1) فهي من المرتبة الأولى.

فمثلاً، المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - y^2 = 1$$

هي معادلة تفاضلية عاديّة من المرتبة الأولى. أمّا المعادلة التفاضليّة

$$c^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

فهي معادلة تفاضليّة جزئيّة من المرتبة الرابعة.

ستكون دراستنا موجّهة نحو المعادلات التفاضليّة العاديّة. التي سنفترض بوجهٍ عامّ أنّها **محلولة** بالنسبة إلى المشتق من أعلى مرتبة. أي إنّها تكتب بالشكل

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) \qquad (*)$$

وهنا لا نفترض أنّ y تابع حقيقيّ وإنما هو تابع شعاعيّ يأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$. أمّا التابع F فهو تابع يأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$ ومنطلقه مجموعة من الشكل $I \times U$، حيث I مجال غير تافه من $\mathbb{R}$ و U مجموعة مفتوحة جزئيّة من $(\mathbb{R}^m)^n$.

- نسمّي **حلاً للمعادلة التفاضليّة** $(*)$ كلّ تابع $\varphi : J \to \mathbb{R}^m$ معرّف ويقبل الاشتقاق n مرّة على مجال جزئي J محتوى في I، ويحقّق

$$\forall x \in J, \quad (\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in U$$

و

$$\forall x \in J, \quad \varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

فمثلاً إنّ مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -k\,x$ هي $\{x_c : c \in \mathbb{R}\}$ حيث

$$x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x_c(t) = ce^{-kt}$$

- نقول إنّ **معادلتين تفاضليتين متكافئتان** إذا وفقط إذا كانت لهما مجموعة الحلول نفسها.

فمثلاً المعادلة التفاضليّة $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -k\,x$ تُكافئ المعادلة $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(e^{kt}x\right) = 0$.

نأتي الآن إلى ملاحظة مهمّة، ستظهر معنا تكراراً. لنعرّف التابع $G : I \times U \to (\mathbb{R}^m)^n$ بالصيغة

$$G(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_2, y_3, \ldots, y_n, F(x, y_1, \ldots, y_n))$$

ثُمّ لنرمز بالرمز Y إلى الشعاع $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ من $(\mathbb{R}^m)^n$. عندئذ يعرّف التطبيق

$$\varphi \mapsto (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})$$

تقابلاً بين مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(*)$ ومجموعة حلول المعادلة التفاضليّة من المرتبة الأولى

$$\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}x} = G(x, Y) \qquad (\diamond)$$

وعليه فإنّ الصيغة العامّة لمعادلة تفاضليّة عاديّة (محلولة بالنسبة إلى المشتق) هي الصيغة $(\diamond)$ حيث $G : I \times U \to \mathbb{R}^p$، و U مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^p$، و I مجال غير تافه من $\mathbb{R}$.

- نسمّي **مسألة كوشي، أو مسألة شرط البدء،** $\mathbb{P}_{(x_0,Y_0)}$ بالنسبة إلى المعادلة التفاضليّة $(\diamond)$، مسألة إيجاد حلٍّ لهذه المعادلة $x \mapsto \Phi(x)$ يُحقِّق الشرط $\Phi(x_0) = Y_0$ حيث (x_0, Y_0) عنصر ما من $I \times U$.

فمثلاً إذا تأمّلنا المعادلة التفاضليّة $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -k\,x$ وجدنا أنّه، أياً كانت (t_0, x_0) من $\mathbb{R}^2$، فهناك حلٌّ، وحلٌّ وحيدٌ فقط، لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,x_0)}$، معطى بالعلاقة

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x(t) = x_0\, e^{-k(t-t_0)}$$

سندرس لاحقاً مسألة وجود ووحدانيّة حلّ مسألة كوشي المتعلّقة بمعادلة تفاضليّة عاديّة.

2. طريقة أولر لإيجاد حلول تقريبيّة لمعادلة تفاضليّة

ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، ولتكن U مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^p$ حيث $(1 \leq p)$. ثُمَّ ليكن F تابعاً من $I \times U$ إلى $\mathbb{R}^p$. نفترض أنّ (x_0, Y_0) عنصرٌ ما من $I \times U$ تقبل عنده مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(x_0,Y_0)}$ المتعلقة بالمعادلة التفاضليّة $\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}x} = F(x, Y)$ حلاً وحيداً Φ، لنفترض أنّ هذا الحل معرّف على مجال يحوي $[x_0, b]$.

في الحقيقة، هناك طريقة طبيعيّة جداً لإيجاد تقريب للتابع Φ على المجال $[x_0, b]$، ويمكن التعمُّق في هذه الطريقة لإثبات وجود هذا الحلِّ، ولكننا سنرجئ هذه الدراسة إلى وقت آخر.

لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولنعرّف خطوة الطريقة بأنّها العدد $h = \frac{b - x_0}{n}$، ثُمَّ لنجزّئ المجال $[x_0, b]$ إلى مجالات متساوية الأطوال، طول كلٍّ منها h، وذلك بالاستفادة من النقاط $x_k = x_0 + k \cdot h$ حيث k من $\{0,1,\ldots,n\}$.

ثُمّ نسعى لإيجاد قيم تقريبيّة $Y_1^{[n]}, Y_2^{[n]}, \ldots, Y_n^{[n]}$ للمقادير $\Phi(x_1), \Phi(x_2), \ldots, \Phi(x_n)$ بحيث يكون **"مُضلّع أولر"** الذي يصل بين "النقاط" $\left((x_k, Y_k^{[n]})\right)_{0 \leq k \leq n}$ تقريباً جيّداً للحل Φ على المجال $[x_0, b]$ عندما تكون n كبيرة بقدر كافٍ، أو h صغيرة بقدر كافٍ.

لنفترض أنّ $(x_k, Y_k^{[n]})$ قريبة إلى حدٍّ مقبول من $(x_k, \Phi(x_k))$. لمّا كان طول المجال $[x_k, x_{k+1}]$ صغيراً بقدر كافٍ أمكننا النظر إلى التابع $x \mapsto F(x, \Phi(x))$ وكأنّه ثابت على هذا المجال، وأخذُ القيمة $F(x_k, Y_k^{[n]})$ بصفتها تقريباً جيداً للمقدار $F(x, \Phi(x))$ على المجال $[x_k, x_{k+1}]$.

وعندئذ يمكننا أن نكتب

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}], \quad \Phi'(x) \approx F(x_k, Y_k^{[n]})$$

وعليه يكون

$$\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k) \approx (x_{k+1} - x_k)F(x_k, Y_k^{[n]})$$

وهكذا نرى أنّ العلاقة الآتية تفيد في حساب القيمة التقريبيّة $Y_{k+1}^{[n]}$ انطلاقاً من $Y_k^{[n]}$.

$$Y_{k+1}^{[n]} = Y_k^{[n]} + h \cdot F(x_k, Y_k^{[n]})$$

فنحسب بالتدريج $Y_n^{[n]}, Y_{n-1}^{[n]}, \ldots, Y_1^{[n]}$ انطلاقاً من $Y_0^{[n]} = Y_0$ ويكون الحل التقريبيّ المطلوب $\tilde{\Phi}_n$ معرّفاً بالعلاقة

$$\tilde{\Phi}_n(x) = Y_k^{[n]} + (x - x_k)F(x_k, Y_k^{[n]})$$

عندما ينتمي x إلى المجال $[x_k, x_{k+1}]$.

مثال. لننظر في مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,1)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة البسيطة الآتية:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$$

(إذن $F(x,y) \equiv y$)، تقبل هذه المعادلة التفاضليّة حلاً وحيداً يحقّق الشرط $\Phi(0) = 1$ هو $t \overset{\Phi}{\longmapsto} e^t$.

لنبحث عن الحل التقريبي الذي تُعطيه طريقة أولر لهذه المسألة على المجال $[0, b]$. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولنضع $h = b/n$، و $x_k = kh$ في حالة $0 \leq k \leq n$. عندئذ تُحسب النقاط $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ تدريجياً بالعلاقات:

$$y_0 = 1 \quad \text{و} \quad y_{k+1} = y_k + hy_k \quad \text{حين تكون} \quad 0 \leq k < n.$$

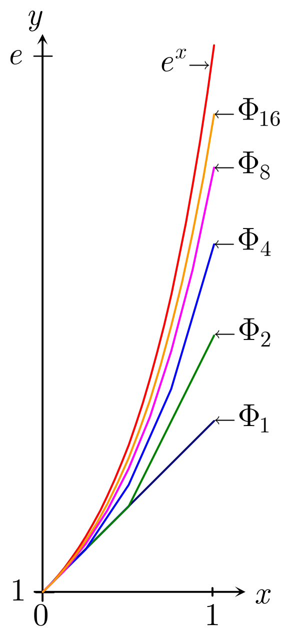
ولكنّ هذا يقتضي أنّ

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad y_k = (1 + h)^k$$

أمّا الحل التقريبي Φ_n فهو معرّف بالعلاقة

$$\Phi_n(x) = (1 + h)^k \cdot (1 + x - h \cdot k)$$

عندما ينتمي x إلى المجال $[kh, (k+1)h]$.



لننظر في التابع الذي يمثّل الخطأ المرتكب :

$$\forall x \in [0,b],\ \ E_n(x) = e^x - \Phi_n(x)$$

في حالة k من $\{0,1,\ldots,n-1\}$، وعددٍ x ينتمي إلى المجال $[kh,(k+1)h]$ لدينا

$$(1+h)^k \le (e^h)^k = e^{kh} \le e^x$$

إذن $E_n'(x) \ge 0$ على المجال $[kh,(k+1)h]$. نستنتج من ذلك، ومن استمرار التابع E_n على $[0,b]$، أنّ E_n تابع متزايد على $[0,b]$، وعليه

$$\forall x \in [0,b],\ \ 0 = E_n(0) \le E_n(x) \le E_n(b)$$

إذن

$$\Delta_n = \sup_{0\le x\le b}\left|e^x - \Phi_n(x)\right| = e^b - \left(1+\frac{b}{n}\right)^n$$

ينتج من ذلك أنّ متتالية الحلول التقريبية $(\Phi_n)_{n\ge 1}$ تتقارب بانتظام على المجال $[0,b]$ من الحلّ الفعلي Φ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,1)}$.

في الحقيقة، ليست النتيجة السابقة حالة خاصّة، وإنّما توجد شروط معقولة على التابع F تجعل متتالية الحلول التقريبيّة التي تعطيها طريقة أولر تتقارب بانتظام على مجال الدراسة من الحل الفعلي لمسألة كوشي. يبيّن المثال السابق أنّ تقارب متتالية الحلول التقريبيّة **بطيء**، لأنّ حساباً بسيطاً يثبت أنّ

$$\Delta_n = \frac{be^b}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

فنقول إنّ **طريقة أولر طريقة من المرتبة الأولى**.

ولكن أَلا يمكن تعديل هذه الطريقة فتتقارب بسرعة أكبر من الحل ؟ في الحقيقة، نعم. وسنبيّن في الفقرة الآتية مُقاربة ممكنة لهذا الأمر.

لنرجع إلى الإطار العام الذي انطلقنا منه عند بدء هذه الدراسة. لمّا كان

$$\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} F(t,\Phi(t))\,\mathrm{d}t$$

فإنّ طريقة أولر تعتمد على تقريب هذا التكامل بمساحة مستطيل: $(x_{k+1} - x_k)F(x_k,\Phi(x_k))$.
ولكن يمكننا أيضاً تقريب هذا التكامل بأخذ مساحة شبه المنحرف الموافق أي

$$\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k) \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{2}\left(F(x_k,\Phi(x_k)) + F(x_{k+1},\Phi(x_{k+1}))\right)$$

ومن ثَمّ نصل إلى العلاقة التدريجيّة

$$Y_{k+1}^{[n]} = Y_k^{[n]} + \frac{h}{2}\cdot\left(F(x_k, Y_k^{[n]}) + F(x_k, Y_{k+1}^{[n]})\right)$$

ولكنّ هذه العلاقة ليست مفيدة بصيغتها الحاليّة، لأنّ المقدار المجهول $Y_{k+1}^{[n]}$ الذي كان من المفترض حسابه بدلالة $Y_k^{[n]}$ يظهر أيضاً في الطرف الأيمن في المساواة السابقة. لذلك نستبدل به القيمةَ التقريبيّة التي تحسبها لنا طريقة أولر البسيطة، فنكتب

$$Y_{k+1}^{[n]} = Y_k^{[n]} + \frac{h}{2}\cdot\left(F(x_k, Y_k^{[n]}) + F(x_k, Y_k^{[n]} + hF(x_k, Y_k^{[n]}))\right)$$

فنحسب بالتدريج $Y_n^{[n]}, Y_{n-1}^{[n]}, \ldots, Y_1^{[n]}$ انطلاقاً من $Y_0^{[n]} = Y_0$ ويكون الحل التقريبي المطلوب $\tilde{\tilde{\Phi}}_n$ معرّفاً بالعلاقة

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_n(x) = Y_k^{[n]} + (x - x_k)F(x_k, Y_k^{[n]})$$

عندما ينتمي x إلى المجال $[x_k, x_{k+1}]$. تسمّى هذه الطريقة **طريقة أولر المعدّلة** وهي في الحقيقة **طريقة من المرتبة الثّانية**. كما توجد طرائق أخرى أسرع من هاتين الطريقتين مثل طرائق Runge-Kutta، يأتي القارئ على دراستها في التحليل العددي، وهي لذلك لا تدخل ضمن إطار دراستنا للمعادلات التفاضليّة العاديّة.

مثال. سنرى في هذا المثال كيف تكون طريقة أولر المعدّلة أفضل من طريقة أولر البسيطة من جهة سرعة التقارب من الحل. لننظر في مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,1)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة البسيطة:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$$

لقد أشرنا إلى أنّ هذه المعادلة التفاضليّة تقبل حلاً وحيداً $t \overset{\Phi}{\longmapsto} e^t$ يحقّق الشرط $\Phi(0) = 1$. ولنبحث عن الحلّ التقريبيّ الذي تُعطيه طريقة أولر المعدّلة لهذه المسألة على المجال $[0, b]$. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولنضع $h = b/n$، و $x_k = kh$ في حالة $0 \leq k \leq n$. عندئذ تُحسب النقاط $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ الموافقة لطريقة أولر المعدّلة تدريجياً بالعلاقات الآتية:

$$y_0 = 1 \quad \text{و} \quad y_{k+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) y_k \quad \text{حين تكون} \quad 0 \leq k < n.$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad y_k = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^k$$

فإذا عرّفنا كما في السابق تابع الخطأ: $E_n(x) = e^x - \Psi_n(x)$ حيث Ψ_n هو الحل التقريبي الذي تعطيه طريقة أولر المعدّلة، نتيقّن كما في حالة المثال السابق أنّ E_n متزايدٌ على $[0, b]$، وعليه فإنّ

$$\forall x \in [0, b], \ \ 0 = E_n(0) \leq E_n(x) \leq E_n(b)$$

إذن

$$\widetilde{\Delta}_n = \sup_{0 \leq x \leq b} |e^x - \Psi_n(x)| = e^b - \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{b^2}{2n^2}\right)^n$$

ينتج من ذلك أنّ متتالية الحلول التقريبية $(\Psi_n)_{n \geq 1}$ تتقارب بانتظام على المجال $[0, b]$ من الحلّ الفعلي Ψ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,1)}$. ولكننا نتيقّن بحساب بسيطٍ أنّ

$$\widetilde{\Delta}_n = \frac{b^3 e^b}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

وهذا يؤكّد ما أشرنا إليه آنفاً من كون طريقة أولر المعدّلة طريقة من المرتبة الثانية.

3. أمثلة على مسائل يؤول حلها إلى حل معادلات تفاضليّة

3-1. مسائل في الميكانيك التقليدي

ينص المبدأ الأساسي في التحريك على أنّ نقطة ماديّة كتلتها m وتخضع في لحظة t لقوى مُحصّلتها $\vec{F}$ يكون تسارعها في تلك اللحظة مساوياً $\vec{\Gamma} = \frac{1}{m}\vec{F}$. وعادة تكون محصّلة القوى المؤثِّرة $\vec{F}$ تابعة للزمن t ولموضع النقطة في تلك اللحظة الذي نمثّله في أغلب الأحيان بشعاع الموضع $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$، ولشعاع سرعة النقطة في تلك اللحظة: $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$. إذن تُكتب المعادلة العامّة لتحريك نقطة ماديّة بالشكل

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m}F(t,\vec{r},\vec{v})$$

❄ لننظر على سبيل المثال في حركة قذيفة، (نقطة مادّية)، كتلتها m تتحرّك في الهواء بتأثير ثقلها، وتخضع لمقاومة الهواء وهي قوّة تُعاكس جهة الحركة، وسنفترض أنّ قيمتها متناسبة طرداً مع سرعة القذيفة. سنفترض أيضاً أنّ الحركة تجري في حيِّز صغير بحيث يمكننا اعتبار شعاع تسارع الجاذبية الأرضية $\vec{g}$ ثابتاً. عندئذ تكون محصّلة القوى التي تخضع لها القذيفة مساوية $m\vec{g} - k\vec{v}$. أمّا مُعادلة الحركة فتُكتب بالشكل

$$m\vec{\Gamma} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

أو

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \kappa\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} \quad \text{إذ عرّفنا} \quad \kappa = \frac{k}{m}. \qquad (1)$$

لنفترض أنّه في اللحظة $t_0 = 0$ كانت القذيفة في الموضع $\vec{r}_0$ وكانت سرعتها عندئذ $\vec{v}_0$. المطلوب هو تعيين موضع النقطة في اللحظة t، أي حلُّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,\vec{r}_0,\vec{v}_0)}$.

في الحقيقة، يمكننا في هذه الحالة البسيطة إيجاد الحل وذلك لأنّ المعادلة (1) تكافئ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \kappa\vec{r}\right) = \vec{g}$$

وعليه نجد بمُكاملة الطرفين بين اللحظتين $t_0 = 0$ و t أنّ

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \kappa\vec{r} - \vec{v}_0 - \kappa\vec{r}_0 = t\vec{g}$$

أو، بعد ضرب طرفي العلاقة السابقة بالمقدار $e^{\kappa t}$،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\kappa t}\vec{r}\right) = e^{\kappa t}(\vec{v}_0 + \kappa\vec{r}_0 + t\vec{g})$$

ومن جديد، بمُكاملة الطرفين بين اللحظتين $t_0 = 0$ و t، نجد

$$e^{\kappa t}\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \frac{e^{\kappa t} - 1}{\kappa}(\vec{v}_0 + \kappa\vec{r}_0) + \left(\frac{\kappa t - 1}{\kappa^2}e^{\kappa t} + \frac{1}{\kappa^2}\right)\vec{g}$$

وبالإصلاح نجد

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa}\vec{v}_0 + \frac{e^{-\kappa t} - 1 + \kappa t}{\kappa^2}\vec{g}$$

وهنا نلاحظ أنّه إذا كانت المدّة التي تجري فيها ملاحظة الحركة قصيرة، أو كان بالإمكان إهمال مقاومة الهواء، يمكننا في تقريب أوليّ كتابة

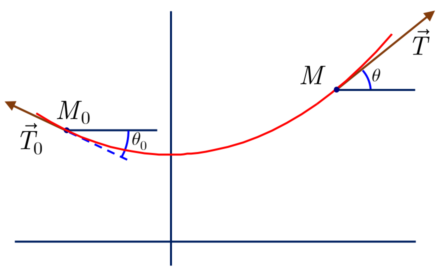
$$e^{-\kappa t} - 1 - \kappa t \approx \frac{\kappa^2 t^2}{2} \quad \text{و} \quad 1 - e^{-\kappa t} \approx \kappa t$$

وعندئذ يكون

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}_0 + \frac{1}{2}t^2\vec{g}$$

وهذه هي المُعادلة الزمنيّة لحركة متغيّرة بانتظام يعرفها القارئ من دراسته السابقة.

❄ لنتأمّل أيضاً المسألة الآتية: لنفترض أنّ سلكاً لنقل التيار الكهربائي معلّق من طرفيه بين عمودين ويتدلّى بتأثير ثقله، ما هو المنحني الذي يرسمه هذا السلك؟



لنفترض أنّ السلك متجانسٌ، وأنّ كتلة واحدة الطول منه تساوي λ. ولنتأمّل نقطتين $M_0(x_0, y_0)$ و $M(x, y)$ من السلك. يخضع جزء السلك الواصل بين M_0 و M لثلاث قوى هي :

- **ثقل** هذا الجزء ويساوي $\lambda s \vec{g}$، حيث رمزنا بالرمز s إلى طول هذا الجزء ويساوي

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(y'(t)\right)^2}\, \mathrm{d}t$$

- و**توتّر السلك** $\vec{T}_0$ عند النقطة M_0.
- وكذلك **توتّر السلك** $\vec{T}$ عند النقطة M.

في وضع التوازن تكون محصّلة هذه القوى معدومة أي $\vec{T}_0 + \vec{T} + \lambda\, s\, \vec{g} = 0$. وبإسقاط هذه العلاقة على محورين أحدهما شاقولي والآخر أفقي كما في الشكل نجد

$$-T_0 \cos\theta_0 + T\cos\theta = 0$$
$$-T_0 \sin\theta_0 + T\sin\theta - \lambda\, g\, s = 0$$

وبحساب T من العلاقة الأولى ثُمّ بالتعويض في الثانية نجد

$$-T_0 \sin\theta_0 + T_0 \cos\theta_0 \cdot \tan\theta - \lambda\, g\, s = 0$$

أو

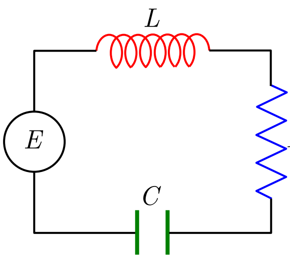
$$-T_0 \sin\theta_0 + T_0 \cos\theta_0 \cdot y'(x) - \lambda g \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}\, t = 0$$

وباشتقاق طرفي هذه العلاقة نجد

$$T_0 \cos\theta_0 \cdot y''(x) - \lambda g \sqrt{1 + (y'(x))^2} = 0$$

وعليه يوجد ثابتٌ $a = \dfrac{\lambda g}{T_0 \cos\theta_0}$ يُحقّق $y'' = a\sqrt{1 + y'^2}$. وهي المعادلة التفاضليّة التي يُحقّقها منحني السلك.

3-2. مسائل في الدارات الكهربائيّة



لننظر إلى الدارة الكهربائيّة البسيطة في الشكل المجاور وهي تحوي وشيعة ذاتيّتها L ، ومقاومة R ومكثفة سعتها C موصولات على التسلسل. ولنفترض أنّ فرق الكمون المطبّق بين طرفي هذه الدارة معطى بالتابع الزمني $t \mapsto E(t)$.

فإذا كانت $q(t)$ هي شحنة المُكثفة في اللحظة t ، عندئذ تكون شدّة التيار المار في الدارة معطاة في كلّ لحظة بالعلاقة $i = \dfrac{\mathrm{d}\, q}{\mathrm{d} t}$.

- أمّا فرق الكمون بين طرفي الوشيعة فيساوي $L\dfrac{\mathrm{d} i}{\mathrm{d} t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d} t^2}$.
- ويساوي فرق الكمون بين طرفي المقاومة $R\, i = R\dfrac{\mathrm{d} q}{\mathrm{d} t}$.
- وأخيراً يساوي فرق الكمون بين طرفي المكثّفة $\dfrac{1}{C} q$.

ولمّا كان مجموع فروق الكمون هذه يساوي فرق الكمون المطبّق بين طرفي الدارة استنتجنا أنّ

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = E$$

أمّا إذا أردنا المعادلة التفاضليّة التي تُحقّقها شدّة التيار الكهربائي المارّ في الدارة فنحصل عليها باشتقاق العلاقة السابقة لنجد

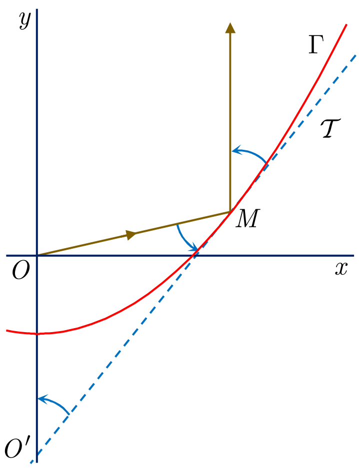
$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

ويمكننا أن نعرّف الشعاع $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}$، عندئذ يكون

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{I} = \begin{bmatrix} i \\ \frac{1}{L}E - \frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \mathcal{I} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L}E \end{bmatrix}$$

فهي إذن مُعادلة تفاضليّة من الشكل $\mathcal{I}' = A\mathcal{I} + B$ حيث A مصفوفة ثابتة من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $t \mapsto B(t)$ تابع يأخذ قيمه في $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

3-3. مسائل في الهندسة



لنبحث عن المنحنيات Γ التي معادلاتها $y = f(x)$ من الصف C^2 وتُحقّق الخاصّة الضوئية الآتية: " كلُّ شعاع ضوئي صادر من مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$ ينعكس على Γ ليصبح موازياً لمحور التراتيب Oy."

تعني خاصّة الضوء الهندسي المذكورة أنّ الزاوية التي يصنعها OM مع المماس $\mathcal{T}$ للمنحني Γ في M، تساوي الزاوية التي يصنعها المماس $\mathcal{T}$ مع محور التراتيب Oy.

وهذا يُكافئ قولنا إنّ:

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{OO'}\|^2 \qquad (1)$$

إذ أسمينا O' نقطة تقاطع المماس $\mathcal{T}$ للمنحني Γ في M مع محور التراتيب Oy.

فإذا كانت إحداثيات M هي (X,Y)، كانت مُعادلة المماس $\mathcal{T}$ للمنحني Γ في M هي

$$\mathcal{T} : y = Y + (x - X)\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,X}$$

وعليه تكون إحداثيات O' هي $\left(0, Y - X\,\dfrac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}X}\right)$. وتُكتب العلاقة (1) بالشكل

$$X^2 + Y^2 = \left(Y - X\,\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}X}\right)^2$$

وهذا يُكافئ

$$Y'^2 - \frac{2\,Y}{X}\cdot Y' - 1 = 0$$

وهي المعادلة التفاضليّة للمنحنيات Γ التي نبحث عنها.

فإذا كان $Y = f(X)$ حلّاً للمعادلة السابقة كان لدينا من جهة أولى

$$Y' - \frac{1}{Y'} = \frac{2Y}{X} \tag{2}$$

ومن جهة ثانية نجد باشتقاق طرفي العلاقة السابقة، وبالاستفادة من (2):

$$Y''\cdot\left(\frac{1+Y'^2}{Y'^2}\right) = \frac{2Y'}{X} - \frac{2Y}{X^2} = \frac{2Y'}{X} + \frac{1}{X\,Y'} - \frac{Y'}{X} = \frac{1+Y'^2}{X\,Y'}$$

أو $X\,Y'' - Y' = 0$ وعليه يكون $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\dfrac{Y'}{X}\right) = 0$. إذن يوجد ثابت C يُحقّق :

$$Y' = CX$$

وبالعودة إلى (2) نجد

$$Y = \frac{X}{2}\cdot\left(CX - \frac{1}{CX}\right) = \frac{C}{2}X^2 - \frac{1}{2C}$$

ونتيقّن بسهولة أيضاً أنّ كلّ تابع من الشكل السابق حلٌّ للمعادلة التفاضليّة المدروسة.

نستنتج إذن أنّ مجموعة المنحنيات التي تُحقّق الخاصّة المطلوبة هي مجموعة القطوع المكافئة التي يقع محرقها في مبدأ الإحداثيّات ويوازي محورها محور التراتيب.

تمرينات

التمرين 1. أوجد معادلة تفاضليّة تقبل جماعة التوابع $(\varphi_c)_{c\in\mathbb{R}}$ المعرّفة كما يأتي:

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_c(x) = cx^3$$

حلولاً لها.

الحل

نلاحظ أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن $\varphi_c'(x)x - 3\varphi_c(x) = 0$. إذن توابع الجماعة $(\varphi_c)_{c\in\mathbb{R}}$ حلولٌ للمعادلة التفاضليّة $xy' - 3y = 0$. ■

التمرين 2. أوجد معادلة تفاضليّة تقبل جماعة التوابع $(\varphi_c)_{c\in\mathbb{R}}$ المعرّفة كما يأتي:

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad \varphi_c(x) = (x+c)^2$$

حلولاً لها.

الحل

نلاحظ أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن، $\varphi_c'(x) = 2(x+c)$. إذن توابع الجماعة $(\varphi_c)_{c\in\mathbb{R}}$ حلولٌ للمعادلة التفاضليّة $y'^2 - 4y = 0$. ■

التمرين 3. أوجد معادلة تفاضليّة تقبل جماعة التوابع $(\varphi_c)_{c\in\mathbb{R}}$ المعرّفة كما يأتي :

$$\varphi_c(x) = \frac{2ce^{2x}}{1+ce^{2x}}$$

حلولاً لها.

الحل

نلاحظ أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن،

$$\varphi_c'(x) = \frac{4ce^{2x}(1+ce^{2x}) - 4c^2e^{4x}}{(1+ce^{2x})^2} = \frac{4ce^{2x}}{(1+ce^{2x})^2}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\varphi_c'(x) &= \frac{2ce^{2x}}{1+ce^{2x}}\cdot\frac{2}{1+ce^{2x}} = \varphi_c(x)\cdot\frac{2+2ce^{2x}-2ce^{2x}}{1+ce^{2x}}\\ &= \varphi_c(x)\cdot\left(2-\frac{2ce^{2x}}{1+ce^{2x}}\right) = \varphi_c(x)\cdot\big(2-\varphi_c(x)\big)\end{aligned}$$

إذن توابع الجماعة $(\varphi_c)_{c\in\mathbb{R}}$ حلولٌ للمعادلة التفاضليّة $y'-2y+y^2=0$.

التمرين 4. أوجد معادلة تفاضليّة تقبل جماعة التوابع $(\varphi_c)_{c\in\mathbb{R}}$ المعرّفة كما يأتي :

$$\varphi_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \varphi_c(x)=\sin(x+c)$$

حلولاً لها.

الحل

نلاحظ أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن، $\varphi_c''(x)=-\varphi_c(x)$. إذن توابع الجماعة $(\varphi_c)_{c\in\mathbb{R}}$ حلولٌ للمعادلة التفاضليّة $y''+y=0$.

التمرين 5. أوجد معادلة تفاضليّة تقبل جماعة التوابع $\left(\varphi_{(c_1,c_2)}\right)_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2}$ المعرّفة كما يأتي:

$$\varphi_{(c_1,c_2)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \varphi_{(c_1,c_2)}(x)=c_1x^2+c_2e^x$$

حلولاً لها.

الحل

لنكتب $\varphi(x)$ بدلاً من $\varphi_{(c_1,c_2)}(x)$. نلاحظ أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن،

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= c_1x^2 + c_2e^x\\ \varphi'(x) &= 2c_1x + c_2e^x\\ \varphi''(x) &= 2c_1 + c_2e^x\end{aligned}$$

وعليه تكون الأشعّة

$$\begin{bmatrix}\varphi(x)\\ \varphi'(x)\\ \varphi''(x)\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}x^2\\ 2x\\ 2\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}e^x\\ e^x\\ e^x\end{bmatrix}$$

مرتبطة خطّياً.

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \det\begin{bmatrix} \varphi(x) & x^2 & e^x \\ \varphi'(x) & 2x & e^x \\ \varphi''(x) & 2 & e^x \end{bmatrix} = 0$$

وتوابع الجماعة $(\varphi_{(c_1,c_2)})_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2}$ حلولٌ للمعادلة التفاضليّة :

$$.(x^2 - 2x)y'' + (2 - x^2)y' + 2(x-1)y = 0$$

التمرين 6. أوجد معادلة تفاضليّة تقبل حلولاً لها جماعة القطوع المُكافئة التي يوازي محورها محور التراتيب، والمماسّة لكلٍّ من محور الفواصل ومنصّف الربع الأوّل في آن معاً.

الحل

كي يمس قطعٌ مُكافئ، محوره يوازي محور التراتيب، محور الفواصل يجب أن تكون معادلته من الشكل

$$y(x) = \lambda(x-b)^2$$

ولكي يكون هذا القطع مماساً لمنصّف الربع الأوّل يجب أن يكون للمعادلة

$$y(x) = \lambda(x-b)^2 = x$$

بالنسبة إلى المجهول x جذراً مُضاعفاً، وهذا الشرط يُكافئ $4\lambda b + 1 = 0$. إذن مجموعة القطوع المُكافئة المقصودة هي تلك التي تُكتب معادلتها بالشكل

$$y = -\frac{1}{4b}(x-b)^2$$

حيث $b \in \mathbb{R}^*$. وهنا نلاحظ أنّ

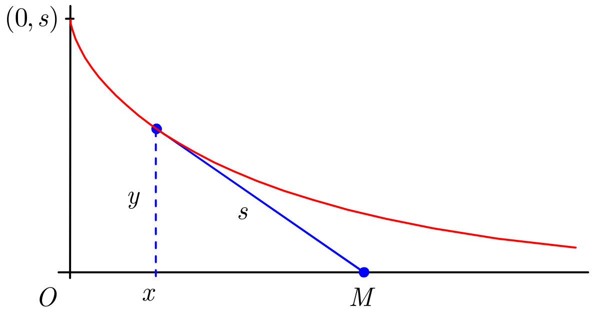
$$y' = -\frac{1}{2b}(x-b)$$

إذن $x = b(1-2y')$ ، وبالعودة إلى المعادلة الأولى نجد

$$.xy'^2 + (1-2y')y = 0$$

وهي المعادلة التفاضليّة المطلوبة.

التمرين 7. ينطلق رجل M من مبدأ الإحداثيّات متحركاً بالاتجاه الموجب لمحور الفواصل Ox، ويجر عربة كانت في البداية موجودة في الوضع $(0,s)$ مُستخدماً حبلاً غير قابل للامتطاط، طوله s ويبقى مشدوداً أثناء الحركة. اكتب المعادلة التفاضليّة التي يُحقّقها مسار العربة.



الحل

المسافة بين نقطة التماس و M تساوي s، ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة $s^2 = y^2 + \dfrac{y^2}{y'^2}$، فهي إذن المعادلة التفاضليّة المطلوبة. ■

التمرين 8. أوجد المعادلة التفاضليّة التي تحقّقها مجموعة المنحنيات التي تُحقّق الخاصّة التالية: إنّ طول القطعة المستقيمة، على محور الفواصل، التي يعيّنها مماس للمنحني وناظم عليه في نقطة من المنحني يساوي مقداراً ثابتاً $2a$. ثُمّ حاول إيجاد حلول هذه المعادلة.

الحل

إنّ معادلة المماس في النقطة $M(x,f(x))$ من المنحني هي $Y = f(x) + f'(x)(X-x)$ وهو يقطع محور الفواصل عند $A\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}, 0\right)$. أمّا معادلة الناظم في النقطة $M(x,f(x))$ من المنحني فهي $Y = f(x) - \dfrac{1}{f'(x)}(X-x)$ وهو يقطع محور الفواصل عند النقطة B التي إحداثياتها $B(x+f(x)f'(x),0)$.

وعليه نحصل على المعادلة التفاضليّة المطلوبة من العلاقة $AB = 2a$ التي تُكافئ

$$\left|f(x)f'(x) + \frac{f(x)}{f'(x)}\right| = 2a$$

أو $y\left(y' + \dfrac{1}{y'}\right) = 2a\varepsilon$ حيث $\varepsilon \in \{-1,+1\}$.

لحلّ مثل هذه المعادلة يمكننا أن نعرّف وسيطاً جديداً $y' = p$ ، فيكون

$$y = \frac{2a\varepsilon p}{p^2+1}$$

و p هو حلٌ للمعادلة التفاضليّة

$$p = y' = \frac{2a\varepsilon(1-p^2)}{(p^2+1)^2}p'$$

من ثَمّ إذا عرّفنا $u = p^2$ كان لدينا

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{a} &= \frac{(1-p^2)}{p^2(p^2+1)^2}2pp' = \frac{1-u}{u(u+1)^2}u' \\ &= \left(\frac{u'}{u} - \frac{u'}{u+1} - \frac{2u'}{(u+1)^2}\right) = \left(\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) + \frac{2}{u+1}\right)'\end{aligned}$$

وعليه نجد

$$\begin{aligned}x &= \varepsilon a\left(\ln\left(\frac{p^2}{p^2+1}\right) + \frac{2}{p^2+1} + c\right) \\ y &= \varepsilon a\left(\frac{2p}{p^2+1}\right)\end{aligned}$$

فإذا غيّرنا الوسيط بوضع $p = \tan\frac{\theta}{2}$ استنتجنا أنّ التمثيل الوسيطي للحلول هو

$$y = \varepsilon a \sin\theta \quad \text{و} \quad x = \varepsilon a\big(\ln(1-\cos\theta) + \cos\theta + \kappa\big)$$

المعادلات التفاضليّة السُّلّمية الشهيرة من المرتبة الأولى

نهدف في هذا البحث إلى دراسة بعض أنواع المعادلات التفاضليّة التقليديّة من المرتبة الأولى، التي بالإمكان إيجاد حلولها دون الحاجة إلى نظريّات عامّة، أي التي تؤول مسألة إيجاد حلولها إلى مسألة حساب توابع أصليّة.

1. المعادلات التفاضليّة ذات المتحوّلات المنفصلة

بوجه عامّ نسمّي **معادلة تفاضليّة ذات متحوّلات منفصلة** كلّ معادلة تفاضلية من الشكل $y' = h(x,y)$ يمكن إعادة صياغتها بأسلوب تجتمع فيه x و $\mathrm{d}x$ في أحد طرفيها، و y و $\mathrm{d}y$ في الطرف الآخر. وسنتفحّص ثلاث حالات:

1-1. المعادلات من الشكل $y' = f(x)$، حيث $f : I \to \mathbb{R}$ تابعٌ مستمرٌّ على مجال.

هذه في الحقيقة أبسط المعادلات التفاضليّة، وإذا كان F تابعاً أصليّاً ما للتابع f على I كانت مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ مع

$$\varphi_\lambda : I \to \mathbb{R}, \quad \varphi_\lambda(x) = F(x) + \lambda$$

وتنتج جميع منحنيات الحلول من أحدها بتطبيق انسحاباتٍ أشعتُها توازي محور التراتيب Oy. وأيّاً كانت (x_0, y_0) من $I \times \mathbb{R}$ تقبلْ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(x_0,y_0)}$ حلّاً وحلّاً وحيداً فقط.

2-1. المعادلات من الشكل $y' = g(y)$، حيث $g : J \to \mathbb{R}$ تابعٌ مستمرٌّ على مجال.

في الحقيقة، تُكتب هذه المعادلة بالشكل $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y)$، أو $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$ شرطَ أن يكون $g(y) \neq 0$، فهي إذن ذات متحوّلات منفصلة.

- إذا كان α من J جذراً للمعادلة $g(y) = 0$، أي $g(\alpha) = 0$، كان التابع الثابت المعرّف بالعلاقة $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \alpha$ حلّاً للمعادلة التفاضليّة المدروسة.

▪ لنفترض أنّ α و β جذران في المجال J للمعادلة $g(y)=0$ يُحقِّقان $\alpha<\beta$ و g لا ينعدم في المجال $]\alpha,\beta[$. عندئذ يقبل التابع المستمر $]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}, y\mapsto\dfrac{1}{g(y)}$ تابعاً أصلياً وليكن $G:]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$. ولنفترض أنّ $y=y(x)$ حلٌّ ما للمعادلة المدروسة معرّفٌ على مجال I ويأخذ قيمه في المجال $]\alpha,\beta[$، عندئذ يكون

$$\forall x\in I,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(G(y))=y'\cdot G'(y)=\frac{y'}{g(y)}=1$$

وينتج من ذلك أنّ $G(y)=x+\lambda$، على المجال I، حيث λ مقدار ثابتٌ. ولكنّ التابع G تابعٌ مطّردٌ تماماً على المجال $]\alpha,\beta[$، لأنّ مشتقَّه يحافظ على إشارة واحدة على هذا المجال، فإذا كان $G(]\alpha,\beta[)=]a,b[$ استنتجنا أنّ G تَقابلٌ بين $]\alpha,\beta[$ و $]a,b[$، وإذا رمزنا بالرمز G^{-1} إلى التقابل العكسي، كان لدينا

$$\forall x\in I,\ \ y=G^{-1}(x+\lambda)$$

وبالعكس نتوثّق بسهولة أنّه، أيّاً كانت λ من $\mathbb{R}$، كان التابع

$$\varphi_\lambda:]a-\lambda,b-\lambda[\to\mathbb{R},\ \varphi_\lambda(x)=G^{-1}(x+\lambda)$$

حلّاً للمعادلة التفاضليّة المدروسة.

ونلاحظ أنّ منحنيات الحلول هذه تنتج من أحدها بتطبيق انسحاباتٍ أشعتُها توازي محور الفواصل Ox. ثُمّ إنّه بالإمكان إجراء الدراسة السابقة على كلِّ مجال لا ينعدم فيه التابع g.

قد يكون من الصعب أحياناً حساب المقلوب G^{-1}، عندئذ نقول إنّ الحلّ **معرّف ضمنيّاً** بالعلاقة $G(y)=x+\lambda$.

3-1. مثال. لندرس المعادلة التفاضليّة $y'=\sqrt{1-y^2}$.

التابع g هنا هو التابع

$$g:[-1,+1]\to\mathbb{R},\ g(y)=\sqrt{1-y^2}$$

وهو ينعدم عند النقطتين -1 و 1. وعليه فالتابعان الثابتان $y\equiv-1$ [1] و $y\equiv1$ حلّان للمعادلة التفاضليّة المدروسة.

[1] أي التابع المعرّف بالعلاقة $\forall x\in\mathbb{R}, y(x)=-1$

أمّا على المجال $]-1,+1[$ فالتابع $y \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ يقبل تابعاً أصلياً هو

$$G :]-1,+1[\to]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}[, \quad G(y) = \arcsin y$$

تابعه العكسي هو

$$G^{-1} :]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}[\to]-1,+1[, \quad G^{-1}(x) = \sin x$$

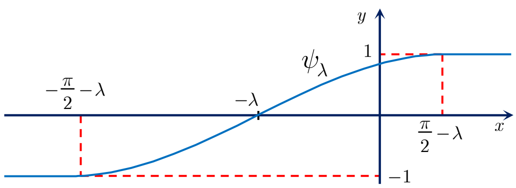
وعليه تكون مجموعة الحلول هي $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ مع

$$\varphi_\lambda :]-\tfrac{\pi}{2}-\lambda,+\tfrac{\pi}{2}-\lambda[\to]-1,+1[, \quad \varphi_\lambda(x) = \sin(x+\lambda)$$

ونلاحظ أنّ التوابع $\{\psi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ المعرّفة كما يأتي هي حلول للمعادلة المدروسة معرّفة على $\mathbb{R}$:

$$\psi_\lambda : \mathbb{R} \to]-1,+1[, \psi_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & : \frac{\pi}{2}-\lambda \le x \\ \sin(x+\lambda) & : -\frac{\pi}{2}-\lambda < x < \frac{\pi}{2}-\lambda \\ -1 & : x \le -\frac{\pi}{2}-\lambda \end{cases}$$

وللحلّ ψ_λ المنحني البياني الآتي:



لتكن (x_0,y_0) من $[-1,+1]\times\mathbb{R}$، ولنتأمّل مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(x_0,y_0)}$. يمكننا في الحقيقة مناقشة ثلاث حالات:

- **حالة** $y_0 = 1$، عندئذ يكون الحل الثابت $y \equiv 1$ حلّاً للمسألة $\mathbb{P}_{(x_0,y_0)}$، ولكنّ هذه المسألة تقبل أيضاً جميع التوابع $\left\{\psi_\lambda : \lambda \ge \frac{\pi}{2} - x_0\right\}$ حلولاً لها.
- **حالة** $y_0 = -1$، عندئذ يكون الحل الثابت $y \equiv -1$ حلّاً للمسألة $\mathbb{P}_{(x_0,y_0)}$، ولكنّ هذه المسألة تقبل أيضاً جميع التوابع $\left\{\psi_\lambda : \lambda \le -\frac{\pi}{2} - x_0\right\}$ حلولاً لها.
- **حالة** y_0 **من** $]-1,+1[$، عندئذ يكون لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(x_0,y_0)}$ حلٌّ وحيد معرّف على كامل $\mathbb{R}$ هو ψ_{λ_0}، حيث $\lambda_0 = \arcsin(y_0) - x_0$.

4-1. الحالة العامّة. المعادلات $y' = f(x)g(y)$، حيث f و g تابعان مستمران.

في الحقيقة، تُكتب هذه المعادلة بالشكل $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$، أو $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$ شرطَ أن يكون $g(y) \neq 0$، فهي إذن ذات متحوّلات منفصلة.

- إذا كان $g(\alpha) = 0$ كان التابع الثابت $y \equiv \alpha$ حلّاً للمعادلة التفاضليّة المدروسة.

- لنفترض أنّ α و β جذران في المجال J للمعادلة $g(y) = 0$ يُحقّقان $\alpha < \beta$ و g لا ينعدم في المجال $]\alpha,\beta[$. عندئذ يقبل التابع المستمر $]\alpha,\beta[\to \mathbb{R},\ y \mapsto 1/g(y)$ تابعاً أصلياً وليكن $G :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$. ثُمّ ليكن F تابعاً أصليّاً للتابع f. ولنفترض أنّ $y = y(x)$ حلٌّ ما للمعادلة المدروسة، معرّفٌ على مجال I، ويأخذ قيمه في المجال $]\alpha,\beta[$ عندئذ يكون

$$\forall x \in I,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(G(y)\big) = y' \cdot G'(y) = \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

وعلى هذا يكون $x \mapsto G(y(x))$ تابعاً أصلياً للتابع f على المجال المفتوح I، فهو ينتج من F بإضافة ثابت، أي إنّ $G(y) = F(x) + \lambda$، حيث λ مقدار ثابت. ولكنّ التابع G مطّردٌ تماماً على المجال $]\alpha,\beta[$، لأنّ مشتقَّه يحافظ على إشارة واحدة على هذا المجال، فإذا كان $G(]\alpha,\beta[) =]a,b[$ استنتجنا أنّ G تَقابلٌ بين $]\alpha,\beta[$ و $]a,b[$، ثُمّ إذا رمزنا بالرمز G^{-1} إلى التقابل العكسي، كان لدينا

$$\forall x \in I,\ \ y = G^{-1}(F(x) + \lambda)$$

وعلى هذا يكون المجال I محتوى في المجموعة $F^{-1}(]a-\lambda, b-\lambda[)$.

- وبالعكس، نتوثّق بسهولة أنّه أيّاً كانت λ من $\mathbb{R}$، وأيّاً كان المجال المفتوح I المحتوى في المجموعة $F^{-1}(]a-\lambda, b-\lambda[)$، (إذا لم تكن هذه المجموعة خالية)، كان التابع

$$\varphi_\lambda : I \to \mathbb{R},\ \varphi_\lambda(x) = G^{-1}(F(x) + \lambda)$$

حلّاً للمعادلة التفاضليّة المدروسة.

- ونلاحظ أنّه بالإمكان إجراء الدراسة السابقة على كلِّ مجال لا ينعدم فيه التابع g. وقد يكون من الصعب أحياناً حساب المقلوب G^{-1}، عندئذ نقول إنّ الحلّ معرّف ضمنيّاً بالعلاقة $G(y) = F(x) + \lambda$.

5-1. مثال. لندرس المعادلة التفاضليّة $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$.

التابع g هنا هو التابع

$$g : [-1,+1] \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \sqrt{1-y^2}$$

وهو ينعدم عند النقطتين -1 و 1. وعليه فالتابعان الثابتان $y \equiv -1$ و $y \equiv 1$ حلّان للمعادلة التفاضليّة المدروسة.

أمّا على المجال $]-1,+1[$ فالتابع $y \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ يقبل تابعاً أصلياً هو

$$G : \left]-1,+1\right[\to \left]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}\right[, G(y) = \arcsin y$$

تابعه العكسي هو

$$G^{-1} : \left]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}\right[\to \left]-1,+1\right[,\ G^{-1}(x) = \sin x$$

ومن جهة أخرى، يقبل التابع $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ تابعاً أصليّاً على $\mathbb{R}$ هو

$$F : \mathbb{R} \to \left]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}\right[,\ F(x) = \arctan x$$

وهنا نلاحظ أنّ الصورة العكسيّة وفق F للمجال $\left]-\frac{\pi}{2}-\lambda,\frac{\pi}{2}-\lambda\right[$ خالية في حالة $\lambda \notin]-\pi,\pi[$، لذا يجب أن ينتمي λ إلى المجال $]-\pi,\pi[$ وعندها يكون

$$\left]-\frac{\pi}{2}-\lambda,\frac{\pi}{2}-\lambda\right[\cap \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[= \begin{cases}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-\lambda[& : \quad 0<\lambda<\pi \\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& : \quad \lambda = 0 \\ ]-\frac{\pi}{2}-\lambda,\frac{\pi}{2}[& : \quad -\pi<\lambda<0 \end{cases}$$

فالصورة العكسيّة للمجال $\left]-\frac{\pi}{2}-\lambda,\frac{\pi}{2}-\lambda\right[$ وفق F هي

$$I_\lambda = F^{-1}\left(\left]-\tfrac{\pi}{2}-\lambda,\tfrac{\pi}{2}-\lambda\right[\right) = \begin{cases}]-\infty,\tan(\frac{\pi}{2}-\lambda)[& : \quad 0<\lambda<\pi \\ \mathbb{R} & : \quad \lambda = 0 \\ ]\tan(-\frac{\pi}{2}-\lambda),\ +\infty[& : \quad -\pi<\lambda<0 \end{cases}$$

أو بصيغة مُكافئة:

$$I_\lambda = \begin{cases}]-\infty, \cot\lambda[& : \quad 0 < \lambda < \pi \\ \mathbb{R} & : \quad \lambda = 0 \\ ]\cot\lambda, +\infty[& : \quad -\pi < \lambda < 0 \end{cases}$$

ومن ثمّ نحصل على مجموعة الحلول $\{\varphi_\lambda : \lambda \in]-\pi, +\pi[\}$ حيث

$$\varphi_\lambda : I_\lambda \to \mathbb{R}, \ \varphi_\lambda(x) = \sin(\lambda + \arctan x) = \frac{\sin\lambda + x\cos\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$$

أمّا إذا أردنا حلولاً معرّفة على كامل $\mathbb{R}$ فنحصل، إضافة إلى الحلّين الشاذّين $y \equiv 1$ و $y \equiv -1$، على مجموعة الحلول

$$\{\psi_\lambda : \lambda \in]-\pi, +\pi[\}$$

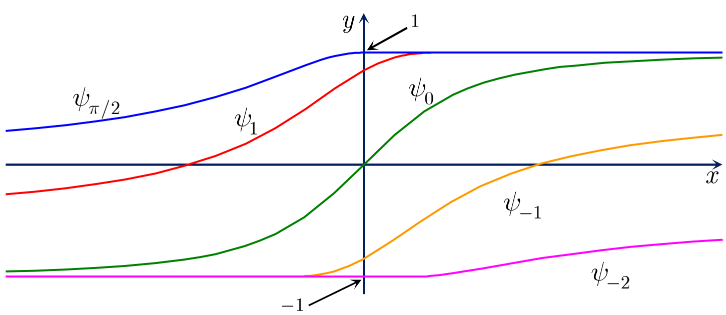
المعرّفة، في حالة $0 < \lambda < \pi$ بالعلاقة :

$$\psi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \psi_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\lambda + x\cos\lambda}{\sqrt{1+x^2}} & : \quad x < \cot\lambda \\ 1 & : \quad x \geq \cot\lambda \end{cases}$$

وفي حالة $-\pi < \lambda < 0$ بالعلاقة :

$$\psi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \psi_\lambda(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x \leq \cot\lambda \\ \dfrac{\sin\lambda + x\cos\lambda}{\sqrt{1+x^2}} & : \quad x > \cot\lambda \end{cases}$$

وأخيراً، $\psi_0 = \varphi_0$. ونجد في الشكل بعضاً من هذه الحلول.



2. المعادلات التفاضليّة الخطيّة السلّميّة من المرتبة الأولى

2-1. تعريف. نسمّي **معادلة تفاضليّة خطّية سلّميّة من المرتبة الأولى**، كلّ معادلة تفاضليّة من الشكل

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (\mathcal{L})$$

حيث a و b تابعان مستمرّان على مجال مفتوح وغير تافه I من $\mathbb{R}$ ويأخذان قيمهما في ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$).

2-2. مبرهنة. ليكن I مجالاً مفتوحاً وغير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن a و b تابعين مستمرّين على I ويأخذان قيمهما في ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$). وأخيراً ليكن $x \mapsto A(x)$ تابعاً أصليّاً للتابع $x \mapsto a(x)$ على I، و $x \mapsto B(x)$ تابعاً أصليّاً للتابع $x \mapsto b(x) \cdot e^{-A(x)}$ على I . عندئذ تكون مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (\mathcal{L})$$

هي $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \{\varphi_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ حيث

$$\varphi_\lambda : I \to \mathbb{C},\ \varphi_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{A(x)} + e^{A(x)} \cdot B(x)$$

الإثبات

- لنتوثّق أوّلاً أنّ التوابع φ_λ هي حلول للمعادلة $\mathcal{L}$. في الحقيقة، في حالة x من I لدينا

$$\begin{aligned}\varphi'_\lambda(x) &= \lambda A'(x)e^{A(x)} + A'(x)e^{A(x)} \cdot B(x) + e^{A(x)}B'(x)\\ &= \lambda a(x)e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}B(x) + e^{A(x)}b(x)e^{-A(x)}\\ &= a(x)\varphi_\lambda(x) + b(x)\end{aligned}$$

إذن φ_λ هو حلٌّ للمعادلة $\mathcal{L}$.

- وبالعكس، ليكن $\psi : J \to \mathbb{C}$ حلاً للمعادلة $\mathcal{L}$ معرّفاً على مجال J محتوى في I، ولنعرّف

$$f : J \to \mathbb{C},\ f(x) = e^{-A(x)} \cdot \psi(x) - B(x)$$

عندئذ يكون f قابلاً للاشتقاق على J ويكون

$$\begin{aligned}f'(x) &= \psi'(x)e^{-A(x)} - a(x)\psi(x)e^{-A(x)} - b(x)e^{-A(x)}\\ &= (\psi'(x) - a(x)\psi(x) - b(x))e^{-A(x)} = 0\end{aligned}$$

إذن يوجد ثابت λ في $\mathbb{C}$ يُحقّق $\forall x \in J,\ f(x) = \lambda$، أو $\psi = \varphi_{\lambda|J}$. □

لندرس بنية مجموعة الحلول $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{L}$. في الحقيقة، نرى أنّ

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \varphi_0 + \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$$

والمجموعة $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ فضاءٌ شعاعيٌّ بعده يساوي 1، يولِّده التابع $\Theta : x \mapsto e^{A(x)}$. والتابع φ_0 هو الحل الخاص للمعادلة $\mathcal{L}$ الموافق للقيمة $\lambda = 0$.

ولمّا كان $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ عندما يكون $b \equiv 0$، استنتجنا أنّ $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ هي مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة :

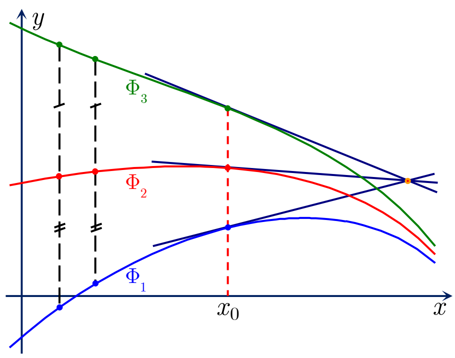
$$(\mathcal{H}) \qquad y' = a(x)y$$

التي نسمّيها المعادلة التفاضليّة الخطيّة "**بدون طرف ثان**" الموافقة للمعادلة $\mathcal{L}$.

وأخيراً لمّا كان التابع Θ، الذي هو أساس الفضاء الشعاعي $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$، لا ينعدم على I، استنتجنا أنّه، أيّاً كانت (x_0, y_0) من $I \times \mathbb{C}$ فهناك حلٌّ وحلٌّ واحد فقط لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(x_0,y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $\mathcal{L}$.

ومن خواص حلول المعادلات التفاضليّة الخطّية من المرتبة الأولى نذكر الخاصّتين الآتيتين، (انظر الشكل):

- إذا كانت Φ_1 و Φ_2 و Φ_3 ثلاثة حلول للمعادلة التفاضليّة الخطّية $\mathcal{L}$، عندئذ تكون النسبة $\dfrac{\Phi_3 - \Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1}$ ثابتة.



- أيّاً كانت x_0 من I، كانت المماسات عند النقاط (x_0, y) لحلول المعادلة التفاضليّة الخطّية $\mathcal{L}$، المارّة بهذه النقاط، متوازية أو مارّة بنقطة واحدة. وفي الحقيقة، تميِّز هذه الخاصّة المعادلات التفاضليّة الخطيّة؛ أي تكون كلُّ معادلة تفاضليّة تُحقّق حلولهُا الخاصّةَ الهندسيّة السابقة خطّيةً.

.3-2 **مثال**. لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$y' = x\,y + 1 \qquad (\mathcal{L})$$

في الحقيقة، نهتم بحلّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,0)}$ الذي نعلم أنّه موجود من دراستنا السابقة، لنبحث عن هذا الحل بطريقتين.

- نضرب طرفي العلاقة $\mathcal{L}$ بالمقدار $e^{-x^2/2}$ فنجد

$$(y \cdot e^{-x^2/2})' = e^{-x^2/2}$$

وبمُكاملة طرفي هذه العلاقة بين 0 و x آخذين بعين الاعتبار أنّ $y(0) = 0$ نجد

$$y(x) \cdot e^{-x^2/2} = \int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}\,t$$

وعليه نجد الحلّ المطلوب معرّفاً بالعلاقة

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{x^2/2} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}\,t \qquad ①$$

- لنفترض جدلاً أنّه توجد متسلسلة صحيحة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ نصف قطر تقاربها R غير صفري، وبحيث يكون التابع المعرّف بالمساواة $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ حلاً للمسألة المدروسة في مجال تقارب هذه المتسلسلة أي $]-R, R[$.

في الحقيقة، يقتضي شرط البدء $y(0) = 0$ أن يكون $a_0 = 0$. أمّا المعادلة $\mathcal{L}$ فتكافئ:

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1) \cdot a_{k+1} x^k = 1 + x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

أيّاً كانت x من $]-R, R[$. وهذا يُكافئ

$$\forall x \in]-R, R[, \quad a_1 - 1 + \sum_{k=1}^{\infty}((k+1)a_{k+1} - a_{k-1})x^k = 0$$

ومنه نستنتج أنّ $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ وكذلك

$$\forall k \geq 1, \ a_{k+1} = \frac{1}{k+1} a_{k-1}$$

وهذا يكافئ

$$\forall k \geq 0, \quad a_{2k} = 0, \ a_{2k+1} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} = \frac{2^k \cdot k!}{(2k+1)!}$$

وعليه نجد

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة الصحيحة يساوي $+\infty$ أي $R = +\infty$. نستنتج إذن أنّ التابع y المعرّف على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} \qquad ②$$

هو أيضاً حلٌّ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $\mathcal{L}$. ولكنْ لهذه المسألة حلٌّ واحدٌ، نستنتج إذن بمقارنة ① و ② أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2/2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

تفيد هذه المساواة بحساب قيم التكاملات $\int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ المفيدة عند دراسة التوزيع الطبيعي القياسي.

3. معادلات تفاضليّة تؤول إلى معادلات تفاضليّة خطيّة من المرتبة الأولى

3-1. معادلات بيرنولي Bernoulli. هي المعادلات التفاضليّة من الشكل

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha} \quad \text{حيث } \alpha \text{ من } \mathbb{R}\backslash\{1\} \qquad (\mathcal{E})$$

و p و q تابعان مستمرّان على مجال مفتوح وغير تافه I من $\mathbb{R}$ ويأخذان قيمهما في $\mathbb{R}$. (لاحظ أنّ الحالة $\alpha = 1$ تجعل $\mathcal{E}$ معادلة تفاضليّة خطّيّة).

حتّى يكون y^{α} معرّفاً يجب أن نفترض أنّ $0 < y$، إلاّ في بعض الحالات الخاصّة، سنفترض إذن أنّ (x, y) ينتمي إلى $I \times \mathbb{R}_+^*$. وهنا نلاحظ

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y^{-\alpha} \cdot y' = p(x) \cdot y^{1-\alpha} + q(x)$$

فإذا عرّفنا $z = y^{1-\alpha}$ وجدنا $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$، وعليه

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha} z' = p(x) \cdot z + q(x)$$

وهذه الأخيرة معادلة تفاضليّة خطيّة يسهل حلُّها.

3-2. مثال. لندرس المعادلة التفاضليّة

$$y' = -\frac{2}{x}\,y + 4\sqrt{y} \qquad (\mathcal{E})$$

المجال I هنا هو أحد المجالين $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$. بإجراء تغيير للتابع المجهول $z = \sqrt{y}$ نجد

$$z' = -\frac{1}{x}z + 2$$

أو $(xz)' = 2x$، إذن $xz = x^2 + \lambda$. نستنتج من ذلك أنّ

$$y = z^2 = \left(x + \frac{\lambda}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} + 2\lambda$$

ومجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ المعرّفة على I هي مجموعة التوابع :

$$\left\{x \mapsto \left(x + \lambda/x\right)^2 : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

3-3. معادلات ريكاتي Ricatti . هي المعادلات التفاضليّة من الشكل

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (\mathcal{E})$$

حيث a و b و c توابع مستمرّة على مجال مفتوح وغير تافه I من $\mathbb{R}$ ، وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$. لاحظ أنّ الحالة $a \equiv 0$ تجعل $(\mathcal{E})$ معادلة تفاضليّة خطّية، لذلك سنفترض أنّنا في غير هذه الحالة.

بوجه عام، لا توجد طريقة لِمُكاملة معادلات ريكاتي. ولكنّ بالإمكان حلُّ المعادلة $\mathcal{E}$ بمجرّد معرفة حلٍّ خاص φ لها، إذ يُمكننا عندئذ إجراء تغيير في التابع المجهول $z = y - \varphi$ فنجد أنّ $(\mathcal{E})$ تُكافئ

$$\begin{aligned} z' + \underline{\varphi'} &= a\cdot(z^2 + 2z\varphi + \varphi^2) + b\cdot(z+\varphi) + c \\ &= \underline{a\cdot\varphi^2 + b\cdot\varphi + c} + (2a\cdot\varphi + b)\cdot z + a\cdot z^2 \end{aligned}$$

أو

$$z' = \big(2a(x)\cdot\varphi(x) + b(x)\big)\cdot z + a(x)\cdot z^2$$

وهذه مُعادلة برنولي فيها $\alpha = 2$، وهي تؤول إلى مُعادلة تفاضليّة خطيّة بإجراء تغيير في التابع المجهول $w = 1/z$.

4-3. **مثال**. لندرس المعادلة التفاضليّة

$$(1-x^3)\,y' + x^2\,y + y^2 - 2x = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

مجال الدراسة I هنا هو أحد المجالين $]-\infty,1[$ أو $]1,+\infty[$. ونتيقّن بسهولة أنّ التابع $\varphi(x)=x^2$ حلٌّ خاص للمعادلة $(\mathcal{E})$ على I.

لذلك إذا عرّفنا تابعاً مجهولاً جديداً $y(x)-x^2=z(x)$ يكون z حلّاً للمعادلة التفاضليّة الآتية:

$$(1-x^3)\,z' + 3x^2 + z^2 = 0$$

ومن ثَمّ بإجراء التغيير في التابع المجهول $w=1/z$ نجد أنّ w حلٌّ للمعادلة الآتية:

$$(x^3-1)\,w' + 3x^2\,w + 1 = 0$$

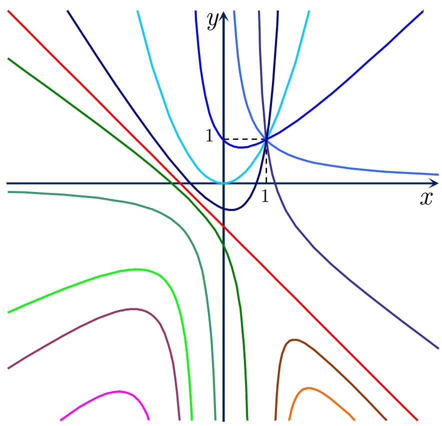
أو $\big((x^3-1)w\big)' = -1$، وعليه يكون

$$w = \frac{x+\lambda}{1-x^3}$$

وبالعودة إلى y نجد

$$y = x^2 + \frac{1}{w} = x^2 + \frac{1-x^3}{x+\lambda} = \frac{\lambda x^2+1}{x+\lambda}$$

ونلاحظ أنّ الحلّ الخاص φ ليس واحداً من الحلول السابقة، فنقول عنه إنّه **حلٌّ شاذ**، وفي الحقيقة، نحصل على هذا الحل بجعل $|\lambda|$ تسعى إلى اللانهاية. ونرى، في الشكل التالي، الرسم البياني لبعض هذه الحلول.



4. المعادلات التفاضليّة المتجانسة

1-4. تعريف. نسمّي **معادلة تفاضليّة متجانسة**، كلَّ معادلة تفاضليّة تُكتب بالشكل

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (\mathcal{E})$$

حيث f تابعٌ حقيقي مستمرٌّ على مجال I.

تؤول دراسة هذه المعادلات إلى دراسة معادلات تفاضليّة ذات متحولات منفصلة وذلك بإجراء تغيير في التابع المجهول $z = \frac{y}{x}$. في الحقيقة، تصبح المعادلة التفاضليّة التي يُحقّقها z كما يأتي:

$$z + xz' = f(z)$$

أو

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

وعليه كلُّ عدد α يُحقّق الشرط $f(\alpha) = \alpha$ يُعطي حلّاً $z \equiv \alpha$، للمعادلة السابقة ومن ثَمّ يكون $y = \alpha x$ حلّاً للمعادلة $\mathcal{E}$.

أمّا إذا كان J مجالاً لا ينعدم فيه التابع $z \mapsto f(z) - z$، فنتأمّل تابعاً أصليّاً F للتابع $z \mapsto \frac{1}{f(z) - z}$ على J. وعندئذ تأخذ الحلول الشكل

$$y = \varphi_\lambda(x) = x\ F^{-1}\big(\ln(\lambda x)\big)$$

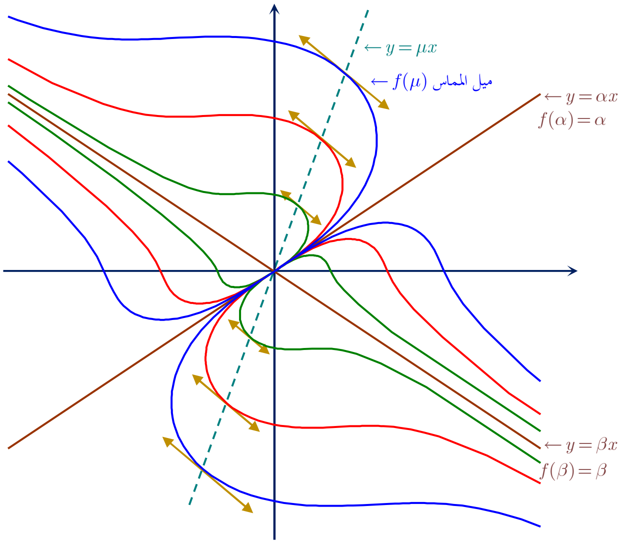
حيث $\lambda x > 0$، و y/x ينتمي إلى J.

يتحقّق القارئ من صحّة الخاصّة الآتية :

> إذا كان Φ حلّاً للمعادلة التفاضليّة المتجانسة $\mathcal{E}$ كان التابع $x \mapsto \frac{1}{\lambda}\Phi(\lambda x)$ أيضاً حلّاً للمعادلة $\mathcal{E}$ وذلك أيّاً كانت $\lambda \neq 0$. وهذا يعني أنّ المنحنيات التكامليّة لمعادلة تفاضليّة متجانسة تكون متحاكية بتحاك مركزه مبدأ الإحداثيّات.

ويبيّن الرسم في الصفحة المجاورة مثالاً على منحنيات تكامليّة لمعادلة تفاضليّة متجانسة $\mathcal{E}$. وهو يوضّح الخاصّة الهندسيّة الآتية:

> يكون للمماسات للمنحنيات التكامليّة عند نقاط تقاطع هذه المنحنيات مع مستقيم معادلته $y = \mu x$ الميل نفسه وهو $f(\mu)$.



2-4. مثال. لندرس المعادلة التفاضليّة

$$y' = \frac{y}{x}\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)+\sqrt{\frac{y}{x}} \qquad (\mathcal{E})$$

نضع $z = \dfrac{y}{x}$ ، فيكون $y = xz$ وعليه

$$y' = z + x\,z' = z - z\sqrt{z} + \sqrt{z}$$

أو

$$x\,z' = (1-z)\sqrt{z}$$

ولهذه المعادلة ذات المتحولات المنفصلة حلّان شاذّان هما $z \equiv 0$ و $z \equiv 1$ ، وهذا يعطي للمعادلة $(\mathcal{E})$ حلّين شاذّين هما $y \equiv 0$ و $y = x$.

لنفترض إذن أنّ $z > 0$ و $z \neq 1$. من الواضح أنّ تغيير التابع المجهول $z = w^2$ قد يجعل عمليّة المُكاملة أيسر. إذ إنّ المعادلة التفاضليّة التي يُحقّقها w هي

$$2xw' = 1 - w^2$$

أو

$$\frac{2w'}{(w+1)^2}x + \frac{w-1}{w+1} = 0$$

وهذا يُكافئ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\dfrac{w-1}{w+1}\right) = 0$.

وعليه نستنتج أنّه يوجد ثابت λ من $\mathbb{R}$ يُحقِّق

$$x\frac{w-1}{w+1} = \lambda$$

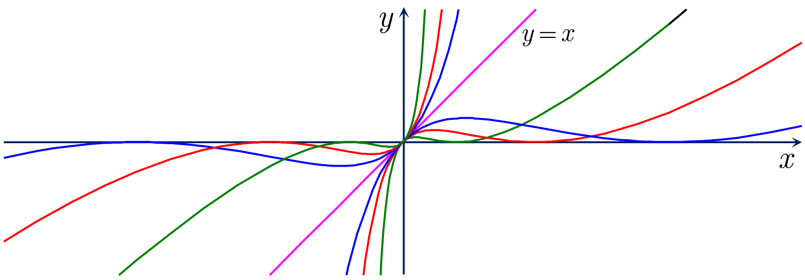
إذن

$$z = w^2 = \left(\frac{x+\lambda}{x-\lambda}\right)^2$$

وهذا يقتضي أنّ حلول المعادلة $(\mathcal{E})$ هي

$$y = x\left(\frac{x+\lambda}{x-\lambda}\right)^2$$

حيث λ من $\mathbb{R}$. ويبيِّن الشكل الآتي بعضاً من هذه الحلول.



تمرينات

التمرين 1. أوجد حلول المعادلات التفاضليّة الآتية:

.1 $e^{-y}(1+y')=1$ .2 $(x+1)y'+xy=0$

.3 $yy'+x=1$ .4 $xyy'-\sqrt{1+y^2}=0$

.5 $y'-xy^2-2xy=0$ .6 $2x^2yy'+y^2=2$

.7 $y'-\sqrt{4x+2y-1}=0$ .8 $y'-y-2x+3=0$

الحل

.1 المعادلة $e^{-y}(1+y')=1$: $(\mathcal{E})$. نلاحظ أنّها تُكتب بالشكل $y'=g(y)$ حيث $g(y)=e^y-1$. الصفر هو الجذر الوحيد للمعادلة $g(y)=0$. إذن التابع $y\equiv 0$ حلٌّ معرّفٌ على $\mathbb{R}$ للمعادلة $(\mathcal{E})$.

- التابع $y\mapsto \ln(e^{-y}-1)$ تابعٌ أصلي للتابع $1/g$ على $]-\infty,0[$ وهو يعرّف تقابلاً

$$G:]-\infty,0[\to\mathbb{R},\ y\mapsto \ln(e^{-y}-1)$$

تقابله العكسي هو

$$G^{-1}:\mathbb{R}\to]-\infty,0[,\ G^{-1}(x)=-\ln(e^x+1)$$

إذن $\{\varphi_\lambda:\lambda\in\mathbb{R}\}$ حيث

$$\varphi_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_-^*,\ \varphi_\lambda(x)=-\ln(e^{x+\lambda}+1)$$

هي حلول للمعادلة $(\mathcal{E})$ تأخذ قيمها في $\mathbb{R}_-^*$ ومعرّفة على $\mathbb{R}$. وللمنحني البياني للتابع φ_λ مستقيم مُقارب معادلته $y=-x-\lambda$.

- وبأسلوب مماثل نرى أنّ التابع $y\mapsto \ln(1-e^{-y})$ تابعٌ أصلي للتابع $1/g$ على $]0,+\infty[$ وهو يعرّف تقابلاً

$$G:\ ]0,+\infty[\to]-\infty,0[,\ y\mapsto \ln(1-e^{-y})$$

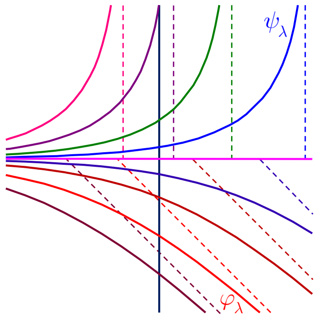
تقابله العكسي هو

$$G^{-1}:\ ]-\infty,0[\to]0,+\infty[,\ G^{-1}(x)=-\ln(1-e^x)$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(\mathcal{E})$ تأخذ قيمها في $\mathbb{R}_+^*$ هي $\{\psi_\lambda:\lambda\in\mathbb{R}\}$ حيث

$$\psi_\lambda:\ ]-\infty,-\lambda[\to\mathbb{R}_+^*,\psi_\lambda(x)=-\ln(1-e^{x+\lambda})$$

وبذا نكون قد وجدنا جميع حلول المعادلة $(\mathcal{E})$، ورسمنا بعضها في الشكل الآتي:



2. المعادلة $(x+1)y' + xy = 0$. نتأمّل I أحد المجالين $]-\infty,-1[$ أو $]-1,+\infty[$، عندئذ يكون لدينا على المجال I ما يأتي:

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{e^x}{1+x}y\right)' = \frac{e^x}{(1+x)^2}\big((1+x)y' + xy\big) = 0$$

وعليه يوجد ثابتٌ k يُحقّق $\forall x \in I,\ y(x) = k(x+1)e^{-x}$. أمّا إذا أردنا الحلول المعرّفة على كامل $\mathbb{R}$ فنجد $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ حيث $\varphi_\lambda(x) = \lambda(x+1)e^{-x}$.

3. لحلِّ المعادلة $(\mathcal{E}) : yy' + x = 1$، نلاحظ أنّ هذه المعادلة تُكتب بالشكل $y' = g(y)f(x)$. التابع g هو التابع $g : I \to \mathbb{R},\ g(y) = 1/(2y)$ حيث $I = \mathbb{R}_+^*$ أو $I = \mathbb{R}_-^*$، وهو لا ينعدم على I.

على I يقبل التابع $y \mapsto \dfrac{1}{g(y)} = 2y$ تابعاً أصلياً هو $G : I \to \mathbb{R}_+^*,\ G(y) = y^2$، وهو تقابلٌ، تابعه العكسي هو $G^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to I,\ G^{-1}(t) = \varepsilon\sqrt{t}$. وقد عرّفنا $\varepsilon = 1$ في حالة $I = \mathbb{R}_+^*$ و $\varepsilon = -1$ في حالة $I = \mathbb{R}_-^*$.

ومن جهة أخرى، يقبل التابع $f : x \mapsto 2(1-x)$ تابعاً أصليّاً على $\mathbb{R}$ هو

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = -(x-1)^2$$

وهنا نلاحظ أنّ الصورة العكسيّة وفق F للمجال $]-\lambda,+\infty[$ تكون خالية إذا كانت $\lambda \le 0$، لذا يجب أن يكون $\lambda > 0$ وعندها

$$I_\lambda = F^{-1}\big(]-\lambda,+\infty[\big) =]1-\sqrt{\lambda}, 1+\sqrt{\lambda}[\,.$$

ومن ثَمّ نحصل على مجموعة الحلول $\{\varphi_{\lambda,\varepsilon} : \lambda > 0, \varepsilon \in \{-1,1\}\}$ حيث

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon} : I_\lambda \to \mathbb{R},\ \varphi_{\lambda,\varepsilon}(x) = \varepsilon\sqrt{\lambda - (x-1)^2}$$

ونلاحظ أنّ المنحنيات البيانيّة لهذه الحلول هي أنصاف دوائر متمركزة عند النقطة $(1,0)$.

4. المعادلة $(\mathcal{E}) : xyy' - \sqrt{1+y^2} = 0$، نلاحظ أنّ هذه المعادلة تُكتب بالشكل $y' = g(y)f(x)$. التابع g هنا هو التابع $g : I \to \mathbb{R},\ g(y) = \sqrt{1+y^2}\,/\,y$ حيث $I = I_+ = \mathbb{R}_+^*$ أو $I = I_- = \mathbb{R}_-^*$، وهو لا ينعدم على I.

على المجال I يقبل التابع $y \mapsto \dfrac{1}{g(y)} = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ تابعاً أصلياً هو

$$G : I \to]1,+\infty[,\ G(y) = \sqrt{1+y^2}$$

وهو تقابلٌ، تابعه العكسي هو

$$G^{-1} :]1,+\infty[\to I_\varepsilon, G^{-1}(t) = \varepsilon\sqrt{t^2-1}, \quad \varepsilon \in \{-1,1\}$$

ومن جهة أخرى، يقبل التابع $f : x \mapsto 1/x$ تابعاً أصليّاً على كلٍّ من $J_+ = \mathbb{R}_+^*$ و $J_- = \mathbb{R}_-^*$ هو

$$F_\eta : J_\eta \to \mathbb{R},\ F_\eta(x) = \ln(\eta x), \quad \eta \in \{-1,+1\}$$

وهنا نلاحظ أنّ الصورة العكسيّة وفق F_{-1} للمجال $]1-\lambda,+\infty[$ هي $]-\infty,-e^{1-\lambda}[$، ووفق F_{+1} هي $]e^{1-\lambda},+\infty[$. وعليه يكون

$$I_\lambda^+ = F_{+1}^{-1}\left(]1-\lambda,+\infty[\right) = \ ]e^{1-\lambda},+\infty[$$

و

$$I_\lambda^- = F_{-1}^{-1}\left(]1-\lambda,+\infty[\right) = \ ]-\infty,-e^{1-\lambda}[$$

وهكذا نحصل على مجموعة الحلول $\{\varphi_{\lambda,\varepsilon,\eta} : \lambda \in \mathbb{R}, (\varepsilon,\eta) \in \{-1,1\}^2\}$ المعرّفة كما يأتي :

$$\begin{aligned}\varphi_{\lambda,\varepsilon,+1} &: \ ]e^{1-\lambda},+\infty[\to I_\varepsilon : x \mapsto \varepsilon\sqrt{(\lambda+\ln x)^2 - 1}\\ \varphi_{\lambda,\varepsilon,-1} &: \ ]-\infty,-e^{1-\lambda},[\to I_\varepsilon : x \mapsto \varepsilon\sqrt{(\lambda+\ln(-x))^2 - 1}\end{aligned}$$

5. المعادلة $(\mathcal{E}) : y' - xy^2 - 2xy = 0$، نلاحظ أنّ هذه المعادلة تُكتب بالشكل $y' = g(y)f(x)$. التابع g هنا هو التابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = \frac{1}{2}y^2 + y$ وهو ينعدم عند 0 و -2. إذن $y \equiv 0$ و $y \equiv -2$ حلّان شاذّان للمعادلة المعطاة. ليكن I أحد المجالات $I_1 =]-\infty,-2[$ أو $I_2 =]-2,0[$ أو $I_3 =]0,+\infty[$.

على المجال I يقبل التابع $y \mapsto \dfrac{1}{g(y)} = \dfrac{2}{y^2+2y}$ تابعاً أصلياً هو

$$G : I \to \mathbb{R},\ G(y) = \ln\left|\frac{y}{y+2}\right|$$

وهو يعرّف تقابلاً بين I و $G(I)$، يُعطى تقابله العكسي وفق ما يأتي

$$\begin{aligned}
G^{-1} &:]0,+\infty[\to\ ]-\infty,-2[, G^{-1}(t) = \frac{2e^t}{1-e^t}\\
G^{-1} &: \mathbb{R} \qquad\ \to\ ]-2,0[,\quad G^{-1}(t) = -\frac{2e^t}{1+e^t}\\
G^{-1} &:]-\infty,0[\to\ ]0,+\infty[,\quad G^{-1}(t) = \frac{2e^t}{1-e^t}
\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى، يقبل التابع $f : x \mapsto 2x$ تابعاً أصليّاً على $\mathbb{R}$ هو

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = x^2$$

وعليه يكون $F^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ وكذلك

$$F^{-1}(]-\lambda,+\infty[) = \begin{cases} \mathbb{R} & : \lambda > 0 \\ \left]-\infty,-\sqrt{-\lambda}\right[\cup \left]\sqrt{-\lambda},+\infty\right[& : \lambda \leq 0 \end{cases}$$

$$F^{-1}(]-\infty,-\mu[) = \begin{cases} \left]-\sqrt{-\mu},\sqrt{-\mu}\right[& : \mu < 0 \\ \varnothing & : \mu \geq 0 \end{cases}$$

وهكذا نحصل، إضافة إلى الحلَّين الشاذّين، على مجموعات الحلول الآتية:

- $\{\theta_\alpha : \alpha < 1\}$ حيث

$$\theta_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \theta_\alpha(x) = \frac{2e^{x^2}}{\alpha - e^{x^2}}$$

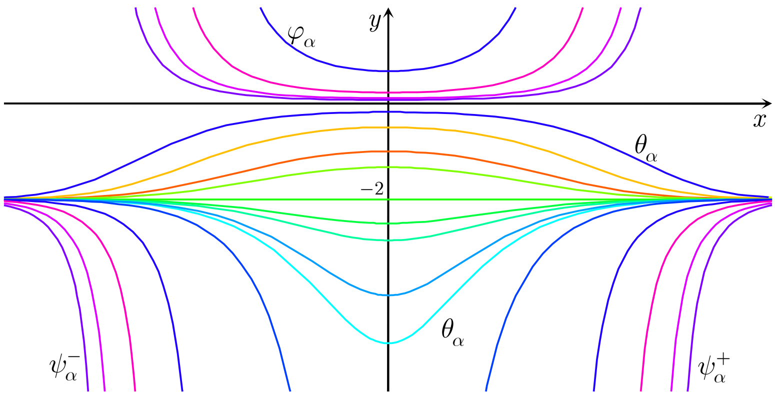
▪ $\{\psi_\alpha^+ : \alpha > 1\}$ و $\{\psi_\alpha^- : \alpha > 1\}$ حيث

$$\psi_\alpha^+ : \left]\sqrt{\ln\alpha}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad \psi_\alpha^+(x) = \frac{2e^{x^2}}{\alpha - e^{x^2}}$$

$$\psi_\alpha^- : \left]-\infty, -\sqrt{\ln\alpha}\right[\to \mathbb{R}, \quad \psi_\alpha^-(x) = \frac{2e^{x^2}}{\alpha - e^{x^2}}$$

▪ $\{\varphi_\alpha : \alpha > 1\}$ حيث

$$\varphi_\alpha : \left]-\sqrt{\ln\alpha}, \sqrt{\ln\alpha}\right[\to \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{2e^{x^2}}{\alpha - e^{x^2}}$$



.6 المعادلة $(\mathcal{E}) : 2x^2yy' + y^2 = 2$، نعرّف تابعاً مجهولاً جديداً $z = y^2$ فتؤول المعادلة $(\mathcal{E})$ إلى معادلة خطيّة هي $x^2z' + z = 2$، وهي تقبل الحلّ الخاص $z \equiv 2$ أمّا الحل العامّ للمعادلة بدون طرف ثانٍ على $\mathbb{R}_+^*$ أو على $\mathbb{R}_-^*$ فهو $x \mapsto ke^{-1/x}$. إذن $z(x) = ke^{-1/x} + 2$ على $\mathbb{R}_+^*$ أو على $\mathbb{R}_-^*$. وإذا تذكّرنا أنّ $z = y^2$ وجدنا مجموعات الحلول التالية :

▪ $\{\theta_{\alpha,\varepsilon} : \alpha > -2, \varepsilon \in \{-1,1\}\}$ حيث

$$\theta_{\alpha,\varepsilon} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \theta_{\alpha,\varepsilon}(x) = \varepsilon\sqrt{2 + \alpha e^{-1/x}}$$

▪ $\{\varphi_{\alpha,\varepsilon} : \alpha < -2, \varepsilon \in \{-1,1\}\}$ حيث

$$\varphi_{\alpha,\varepsilon} : \left]0, 1/\ln(-\alpha/2)\right[\to \mathbb{R}, \varphi_{\alpha,\varepsilon}(x) = \varepsilon\sqrt{2 + \alpha e^{-1/x}}$$

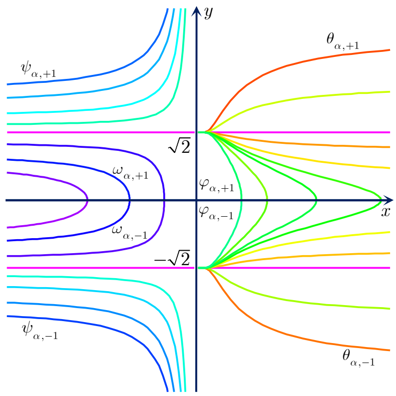
- $\{\psi_{\alpha,\varepsilon} : \alpha > 0, \varepsilon \in \{-1,1\}\}$ حيث

$$\psi_{\alpha,\varepsilon} : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}, \psi_{\alpha,\varepsilon}(x) = \varepsilon\sqrt{2 + \alpha e^{-1/x}}$$

- $\{\omega_{\alpha,\varepsilon} : 0 < \alpha < -2, \varepsilon \in \{-1,1\}\}$ حيث

$$\omega_{\alpha,\varepsilon} : \left]-\infty, 1/\ln(-\alpha/2), \right[\to \mathbb{R}, \omega_{\alpha,\varepsilon}(x) = \varepsilon\sqrt{2 + \alpha e^{-1/x}}$$

- إضافة إلى الحلَّين المعرّفين على كامل $\mathbb{R}$: $y \equiv \sqrt{2}$ و $y \equiv -\sqrt{2}$.



7. المعادلة $(\mathcal{E}) : y' - \sqrt{2y + 4x - 1} = 0$. نعرّف $z = \sqrt{2y + 4x - 1}$ بصفته تابعاً مجهولاً جديداً فتؤول المعادلة $(\mathcal{E})$ إلى المعادلة $zz' = z + 2$ ، أو $z' - 2\dfrac{z'}{z+2} = 1$. إذن

$$z - 2\ln(z+2) = x + \lambda$$

فلحلول المعادلة $(\mathcal{E})$ الصيغة الضمنيّة الآتية:

$$\sqrt{2y + 4x - 1} - 2\ln\left(\sqrt{2y + 4x - 1} + 2\right) = x + \lambda .$$

8. المعادلة $(\mathcal{E}) : y' - y - 2x + 3 = 0$ ، هذه معادلة خطيّة بأمثال ثابتة بسيطة حلها العام

$$y(x) = ke^x - 2x + 1$$ ■

التمرين 2. أوجد حلول مسألة كوشي المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة الآتية:

1. $(x^2-1)\,y'+2x\,y^2=0$ æ $y(0)=1$.
2. $y'-3\sqrt[3]{y^2}=0$ æ $y(2)=0$.
3. $x\,y'+y-y^2=0$ æ $y(1)=1/2$.
4. $(x+2y)\,y'-1=0$ æ $y(0)=-1$.

الحل

1. نرغب بإيجاد حلّ المعادلة $(\mathcal{E}):(x^2-1)y'+2xy^2=0$ الذي يُحقِّق شرط البدء $y(0)=1$. لنفترض وجود هذا الحل، وليكن $\varphi:I\to\mathbb{R}$. لمّا كان $0\in I$ و $\varphi(0)=1$ ولمّا كان φ مستمرّاً فهو لا ينعدم في جوار 0 . إذن في جوار J للصفر محتوى في المجال $]-1,1[$ يكون لدينا

$$\forall x\in J,\quad -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}=\frac{2x}{x^2-1}$$

ومن ثَمّ

$$\forall x\in J,\quad \frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{\varphi(0)}=\ln(1-x^2)-\ln 1$$

أو

$$\forall x\in J,\quad \varphi(x)=\frac{1}{1+\ln(1-x^2)}$$

وبالعكس، نتوثّق بسهولة أنّ التابع

$$\varphi:\left]-\sqrt{1-e^{-1}},\sqrt{1-e^{-1}}\right[\to\mathbb{R},\ \varphi(x)=\frac{1}{1+\ln(1-x^2)}$$

هو حلّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,1)}$ المتعلّقة بالمعادلة $(\mathcal{E})$.

2. نرغب بإيجاد حلّ المعادلة $(\mathcal{E}):y'-3\cdot\sqrt[3]{y^2}=0$ الذي يُحقِّق شرط البدء $y(2)=0$. في الحقيقة، إنّ التابع $y\equiv 0$ هو حلٌّ معرّف على $\mathbb{R}$ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(2,0)}$ المتعلّقة بالمعادلة $(\mathcal{E})$. لنفترض أنّ لدينا حلّاً للمسألة المدروسة $\varphi:J\to\mathbb{R}$ يُحقّق $\varphi(x_0)>0$ عند نقطة ما

x_0 . لمّا كان هذا الحلّ معرّفاً على مجال يضمّ 2 و x_0 ، ولمّا كان هذا الحل متزايداً على هذا المجال استنتجنا أنّ $x_0 > 2$. لنعرّف إذن المجال $K = \{x \in J : \varphi(x) > 0\}$. عندئذ

$$\forall x \in K, \quad \left(\sqrt[3]{\varphi(x)}\right)' = \frac{1}{3}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt[3]{\varphi^2(x)}} = 1$$

ومن ثمّ

$$\forall x \in K, \quad \varphi(x) = \left(x - x_0 + \sqrt[3]{\varphi(x_0)}\right)^3$$

أو

$$\forall x > x_0 - \sqrt[3]{\varphi(x_0)}, \quad \varphi(x) = \left(x - x_0 + \sqrt[3]{\varphi(x_0)}\right)^3$$

إذن بافتراض وجود حلٍّ φ للمسألة المدروسة يُحقّق $\varphi(x_0) > 0$ عند نقطة ما x_0 . نستنتج أنّ $2 \le x_0 - \sqrt[3]{\varphi(x_0)}$ وأنّ $\varphi(x) = 0$ على المجال $\left[2, x_0 - \sqrt[3]{\varphi(x_0)}\right]$ وأنّ

$$\forall x > x_0 - \sqrt[3]{\varphi(x_0)}, \quad \varphi(x) = \left(x - x_0 + \sqrt[3]{\varphi(x_0)}\right)^3$$

وبأسلوب مماثل لنفترض أنّ لدينا حلاًّ للمسألة المدروسة $\varphi : J \to \mathbb{R}$ يُحقّق $\varphi(x_1) < 0$ عند نقطة ما x_1 . لمّا كان هذا الحلّ معرّفاً على مجال يضمّ 2 و x_1 ، ولمّا كان هذا الحل متزايداً على هذا المجال استنتجنا أنّ $x_1 < 2$. لنعرّف إذن المجال $\widetilde{K} = \left\{x \in J : \varphi(x) < 0\right\}$. عندئذ

$$\forall x \in \widetilde{K}, \quad \left(\sqrt[3]{\varphi(x)}\right)' = \frac{1}{3}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt[3]{\varphi^2(x)}} = 1$$

ومن ثمّ

$$\forall x \in \widetilde{K}, \quad \varphi(x) = \left(x - x_1 + \sqrt[3]{(x_1)}\right)^3$$

أو

$$\forall x < x_1 - \sqrt[3]{\varphi(x_1)}, \quad \varphi(x) = \left(x - x_1 + \sqrt[3]{\varphi(x_1)}\right)^3$$

إذن بافتراض وجود حلٍّ φ للمسألة المدروسة يُحقّق $\varphi(x_1) < 0$ عند نقطة ما x_1 . نستنتج أنّ $2 \ge x_1 - \sqrt[3]{\varphi(x_1)}$ وأنّ $\varphi(x) = 0$ على المجال $\left[x_1 - \sqrt[3]{\varphi(x_1)}, 2\right]$ وأنّ

$$\forall x < x_1 - \sqrt[3]{\varphi(x_1)}, \quad \varphi(x) = \left(x - x_1 + \sqrt[3]{\varphi(x_1)}\right)^3$$

إذن لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(2,0)}$ المتعلّقة بالمعادلة $(\mathcal{E})$. الحلول الآتية :

- $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \Psi(x) = 0$.
- أيّاً كانت $\lambda \geq 2$:

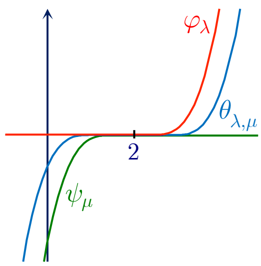
$$\varphi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi_\lambda(x) = \begin{cases} (x-\lambda)^3 & : \quad x > \lambda \\ 0 & : \quad x \leq \lambda \end{cases}$$

- أيّاً كانت $\mu \leq 2$:

$$\psi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi_\mu(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x > \mu \\ (x-\mu)^3 & : \quad x \leq \mu \end{cases}$$

- أيّاً كانت $\lambda \geq 2$ و $\mu \leq 2$:

$$\theta_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta_{\lambda,\mu}(x) = \begin{cases} (x-\lambda)^3 & : \quad x > \lambda \\ 0 & : \quad \mu \leq x \leq \lambda \\ (x-\mu)^3 & : \quad x \leq \mu \end{cases}$$



3. نرغب بإيجاد حلّ المعادلة $(\mathcal{E}) : xy' + y - y^2 = 0$ الذي يُحقّق شرط البدء $y(1) = \frac{1}{2}$. لنفترض وجود حلّ $\varphi : I \to \mathbb{R}$ يُحقّق الشرط المطلوب. ولنعرّف المجال J بأنّه أكبر مجال مفتوح محتوى في I ويضم النقطة 1 ويُحقّق $\forall x \in J,\ \varphi(x) \in]0,1[$.

عندئذ، من الواضح أنّ $0 \notin J$ ، ولأنّ $1 \in J$ استنتجنا أنّ $J \subset \mathbb{R}_+^*$. ويكون

$$\forall x \in J, \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - \varphi(x)} = \frac{1}{x}$$

أو

$$\forall x \in J, \quad \frac{-\varphi'(x)}{1-\varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x}$$

إذن

$$\forall x \in J,\quad \ln\left(\frac{1-\varphi(x)}{\varphi(x)}\right) - \ln\left(\frac{1-\varphi(1)}{\varphi(1)}\right) = \ln x - \ln 1$$

ومن ثَمّ $\forall x \in J,\quad \dfrac{1-\varphi(x)}{\varphi(x)} = x$ أو $\forall x \in J,\quad \varphi(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

وبالعكس، إذا عرّفنا $\varphi :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, \varphi(x) = \dfrac{1}{1+x}$ كان هذا هو الحل الوحيد لمسألة كوشي المطروحة.

4. نرغب بإيجاد حلّ المعادلة $(\mathcal{E}) : \big(x+2y\big)y' - 1 = 0$ الذي يُحقِّق شرط البدء $y(0) = -1$. لنفترض وجود حلّ $\varphi : I \to \mathbb{R}$ يُحقِّق الشرط المطلوب. ولنعرّف $z(x) = x + 2\varphi(x) + 2$ عندئذ أياً كانت x من I كان $\big(z(x)-2\big)z'(x) = z(x)$، و $z(0) = 0$. التابع $z \equiv 0$ هو حلٌّ للمعادلة الأخيرة يُحقّق شرط البدء المعطى. وإذا كان $x \mapsto z(x)$ حلّاً ما لهذه المعادلة لا ينعدم على مجال J استنتجنا وجود ثابتٍ $K > 0$ يُحقّق $\forall x \in J, e^{z(x)} = Kz^2(x)e^x$، وهنا نلاحظ أنّ أياً من هذه الحلول لا يتقاطع مع الحلّ الشاذ $z \equiv 0$. إذن الحلُّ الشاذّ هو الحلّ الوحيد للمعادلة $(z-2)z' = z$ الذي يُحقّق $z(0) = 0$.

وعليه فالحلّ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = -1 - \dfrac{x}{2}$ هو الحلّ الوحيد للمعادلة $(\mathcal{E})$ الذي يُحقّق الشرط $\varphi(0) = -1$.

التمرين 3. أوجد حلول المعادلة التفاضليّة :

$$x^2y' - \cos(2y) = 1$$

التي تسعى إلى $9\pi/4$ عندما تسعى x إلى اللانهاية.

الحل

لنبدأ بإيجاد حلول المعادلة $(\mathcal{E}) : y' = \dfrac{1+\cos 2y}{x^2}$. وهي معادلة ذات متحوّلات منفصلة تُكتب بالشكل $y' = g(y)f(x)$. التابع g هو التابع المعرّف بالصيغة $g(y) = \dfrac{1+\cos 2y}{2}$

على كامل $\mathbb{R}$ ، وهو ينعدم عند $y_k = -\frac{\pi}{2} + \pi k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. فالتوابع $y \equiv y_k$ حلول شاذة كلٌّ منها معرّف على $\mathbb{R}$.

على المجال $\left]y_k, y_{k+1}\right[$ يقبل التابع $y \mapsto \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{\cos^2 y}$ تابعاً أصلياً هو

$$G : \left]y_k, y_{k+1}\right[\to \mathbb{R}, G(y) = \tan y$$

وهو تقابلٌ، تابعه العكسي هو

$$G^{-1} : \mathbb{R} \to \left]y_k, y_{k+1}\right[, G^{-1}(t) = \pi k + \arctan t$$

ومن جهة أخرى، يقبل التابع $f : x \mapsto 2/x^2$ تابعاً أصليّاً على كلٍّ من $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$ يعطى بالصيغة $x \mapsto -2/x$. وهكذا نحصل، إضافة إلى الحلول الشاذّة، على مجموعتي الحلول الآتيتين :

$$\left\{\psi_{k,\lambda} : k \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ و } \left\{\varphi_{k,\lambda} : k \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

حيث

$$\varphi_{k,\lambda} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \varphi_{k,\lambda}(x) = \pi k + \arctan\left(\lambda - \frac{2}{x}\right)$$
$$\psi_{k,\lambda} : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}, \psi_{k,\lambda}(x) = \pi k + \arctan\left(\lambda - \frac{2}{x}\right)$$

ونحصل، إضافة إلى الحلول الشاذّة، على مجموعة الحلول $\left\{\varphi_{k,\lambda} : k \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ المعرّفة على كامل $\mathbb{R}$ الآتية:

$$\theta_{k,\lambda} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \theta_{k,\lambda}(x) = \begin{cases} \pi k + \arctan\left(\lambda - 2/x\right) & : \quad x > 0 \\ \pi k - \dfrac{\pi}{2} & : \quad x = 0 \\ \pi k - \pi + \arctan\left(\lambda - 2/x\right) & : \quad x < 0 \end{cases}$$

وعليه فالحل الوحيد المعرّف على $\mathbb{R}$ ، والذي يسعى إلى $\frac{9\pi}{4}$ عندما تسعى x إلى $+\infty$ هو $\theta_{2,1}$. ∎

التمرين 4. أوجد حلول المعادلة التفاضليّة :

$$3y^2y' + 16x = 2x\,y^3$$

التي تبقى محدودة في جوار اللانهاية.

الحل

لنجري تغيير التابع المجهول $z(x) = \left(y^3(x) - 8\right)e^{-x^2}$ عندئذ يكون لدينا

$$z'(x) = \left(3y^2(x)y'(x) - 2x(y^3(x) - 8)\right)e^{-x^2} = 0$$

إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق $z \equiv \kappa$. وعلى هذا يكون لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \sqrt[3]{8 + \kappa e^{x^2}}$$

والحلُّ الوحيد الذي يبقى محدوداً عند اللانهاية هو $y \equiv 2$. ■

التمرين 5. أثبت أنّ كلَّ حلٍّ للمعادلة التفاضليّة :

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2 + 1}{x^4 + 1}}$$

يقبل مستقيمين مقاربين أفقيّين.

الحل

لنبدأ بإيجاد حلول المعادلة $(\mathcal{E}) : y' = \dfrac{\sqrt[3]{1+y^2}}{\sqrt[3]{1+x^4}}$. وهي معادلة ذات متحوّلات منفصلة تُكتب بالشكل $y' = g(y)f(x)$. التابع g هو التابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = \sqrt[3]{1+y^2}$ وهو لا ينعدم على $\mathbb{R}$. على المجال $\mathbb{R}$ يقبل التابع $y \mapsto \dfrac{1}{g(y)} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+y^2}}$ تابعاً أصلياً هو

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(y) = \int_0^y \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt[3]{1+t^2}}$$

ولمّا كان التكامل $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt[3]{1+t^2}}$ متباعداً، استنتجنا أنّ $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تقابلٌ متزايدٌ تماماً.

ومن جهة أخرى، يقبل التابع $F : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ تابعاً أصليّاً على $\mathbb{R}$ يعطى بالعلاقة

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt[3]{1+u^4}}$$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{\varphi_\lambda : \lambda\in\mathbb{R}\}$ مع

$$\varphi_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi_\lambda(x)=G^{-1}\big(\lambda+F(x)\big)$$

ولكنّ التكامل $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt[3]{1+t^4}}$ متقارب، ولتكن γ قيمته، عندئذ

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi_\lambda(x)=G^{-1}(\lambda-\gamma)=B_\lambda \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\varphi_\lambda(x)=G^{-1}(\lambda+\gamma)=A_\lambda$$

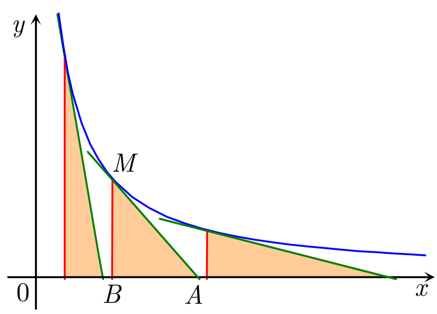
إذن يقبل الخط البياني للحلّ φ_λ مستقيمين مُقاربين أفقيين مُعادلتاهما $y=A_\lambda$ و $y=B_\lambda$. ■

التمرين 6. أوجد مجموعة المنحنيات التي تجعل مساحة المثّلث، الذي يكوّنه المماس في نقطة منها، ومحور الفواصل، والمستقيم المار بتلك النقطة موازياً لمحور التراتيب، ثابتة وتساوي $0<a^2$.

ثُمّ أوجد مجموعة المنحنيات التي تجعل محيط المثلّث المذكور آنفاً ثابتاً ويساوي $0<b$.

الحل

1. لتكن $\mathcal{M}_a$ مجموعة التوابع المعرّفة على مجال I وتُحقِّق الخاصّة المطلوبة، وليكن f تابعاً من $\mathcal{M}_a$. إذا انعدم f أو مشتقه f' لم يتحقّق الشرط المشار إليه بشأن مساحة المثلّث.



ليكن f تابعاً من $\mathcal{M}_a$. ولتكن $M(x,f(x))$ نقطة من منحني التابع f. إنّ معادلة المماس لمنحني التابع f في M هي :

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

وهو يقطع محور الفواصل عند النقطة : $A\left(x-f(x)/f'(x),0\right)$. أمّا مسقط النقطة $M(x,f(x))$ على محور الفواصل فهو النقطة $B(x,0)$. إنّ مساحة المثلّث ABM ثابتة وتساوي a^2 وهذا يُكافئ

$$\left|\frac{f^2(x)}{f'(x)}\right|=2a^2$$

وبسبب استمرار التابع $x\mapsto f^2(x)/f'(x)$ ، يوجد $\varepsilon\in\{-1,1\}$ بحيث

$$\forall x\in I,\quad \frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{\varepsilon}{2a^2}$$

وعليه

$$\forall x\in I,\quad \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{\varepsilon}{2a^2}$$

إذن يوجد ثابتٌ k يُحقِّق

$$\forall x\in I,\quad f(x)=\frac{2\varepsilon a^2}{k-x}$$

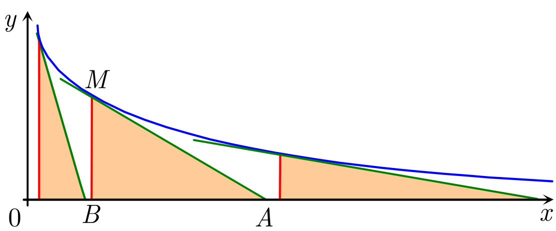
ومنه إذا عرّفنا

$$f_{k,\varepsilon}^-:\left]-\infty,k\right[\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{2a^2\varepsilon}{k-x} \quad \text{و} \quad f_{k,\varepsilon}^+:\left]k,+\infty\right[\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{2a^2\varepsilon}{x-k}$$

كان

$$\mathcal{M}_a=\left\{f_{k,\varepsilon}^+ : k\in\mathbb{R},\varepsilon\in\{-1,1\}\right\}\cup\left\{f_{k,\varepsilon}^- : k\in\mathbb{R},\varepsilon\in\{-1,1\}\right\}$$

2. لتكن $\mathcal{M}_b$ مجموعة التوابع المعرّفة على مجال I وتُحقِّق الخاصّة المتعلّقة بمحيط المثلّث، وليكن f تابعاً من $\mathcal{M}_b$. إذا انعدم f أو مشتقه f' لم يتحقّق الشرط المشار إليه بشأن محيط المثلّث.



ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً من $\mathcal{M}_b$. ولتكن $M(x,f(x))$ نقطة من منحني التابع f . لمّا كان المماس لمنحني التابع f في M يقطع محور الفواصل بالنقطة $A\left(x - f(x)/f'(x),0\right)$. ولمّا كان مسقط النقطة $M(x,f(x))$ على محور الفواصل هو النقطة $B(x,0)$. استنتجنا أنّ محيط المثلّث ABM يساوي b إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in I, \quad \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| + \left|f(x)\right| + \sqrt{f^2(x) + \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2} = b$$

نلاحظ هنا أنّه إذا كان f تابعاً من $\mathcal{M}_b$ كان $x \mapsto \varepsilon f(\tilde{\varepsilon} x)$ تابعاً من $\mathcal{M}_b$ أيضاً، وذلك أياً كانت ε و $\tilde{\varepsilon}$ من $\{-1,1\}$. ولأنّ كلّاً من f و f' يُحافظ على إشارة واحدة على المجال I استنتجنا أنّه يمكننا دون الإقلال من عموميّة الحل أن نفترض أنّ كلّاً من f و f' موجبٌ تماماً على I . عندئذ يكون لدينا

$$\forall x \in I, \quad \frac{f(x)}{f'(x)}\left(1 + f'(x) + \sqrt{1 + f'^2(x)}\right) = b$$

أو

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{b}{2}\left(1 + f'(x) - \sqrt{1 + f'^2(x)}\right) \qquad (1)$$

ينتج من هذه العلاقة أنّه $\forall x \in I,\ f(x) < \dfrac{b}{2}$ ، ومن ثَمّ

$$\forall x \in I, \quad \left(f\left(x\right) - \frac{b}{2}(1 + f'(x))\right)^2 = \frac{b^2}{4}\left(1 + f'^2(x)\right)$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{2(b - f(x))f(x)}{b(b - 2f(x))}$$

إذن ينتمي التابع f إلى الصف C^2 على I . فإذا عُدنا إلى (1) واشتققنا طرفي المساواة استنتجنا أنّ

$$\forall x \in I, \quad 1 = \frac{b}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}\right)$$

أو

$$\forall x \in I, \quad 1 = \frac{b}{2}\left(\ln f'(x) - \ln\left(f'(x) + \sqrt{1 + f'^2(x)}\right)\right)'$$

وعليه، يوجد ثابتٌ k يُحقِّق

$$\forall x \in I, \quad \frac{2}{b}(x + k) = \ln \frac{f'(x)}{f'(x) + \sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

أو

$$\forall x \in I, \quad e^{2(x+k)/b} = \frac{f'(x)}{f'(x) + \sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

ومنه

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{e^{2(x+k)/b}}{\sqrt{1 - 2e^{2(x+k)/b}}}$$

إذن، أيّاً كانت x من I كان

$$f'(x) - \sqrt{1 + f'^2(x)} = -\frac{e^{2(x+k)/b}}{f'(x)} = -\sqrt{1 - 2e^{2(x+k)/b}}$$

وبالعودة إلى العلاقة (1) نستنتج أنّ

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{b}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 2e^{2(x+k)/b}}\right)$$

وإذا وضعنا $\lambda = k + b\ln\sqrt{2}$ استنتجنا أنّ التابع f يُعطى بالعلاقة :

$$f : \left]-\infty, -\lambda\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{b}{2}\left(1 - \sqrt{1 - e^{2(x+\lambda)/b}}\right)$$

وبالعكس، إذا عرّفنا

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon} : \left]-\infty, -\lambda\right[\to \mathbb{R}, \varphi_{\lambda,\varepsilon}(x) = \frac{\varepsilon b}{2}\left(1 - \sqrt{1 - e^{2(x+\lambda)/b}}\right)$$

$$\psi_{\lambda,\varepsilon} : \left]\lambda, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \psi_{\lambda,\varepsilon}(x) = \frac{\varepsilon b}{2}\left(1 - \sqrt{1 - e^{2(-x+\lambda)/b}}\right)$$

استنتجنا أنّ

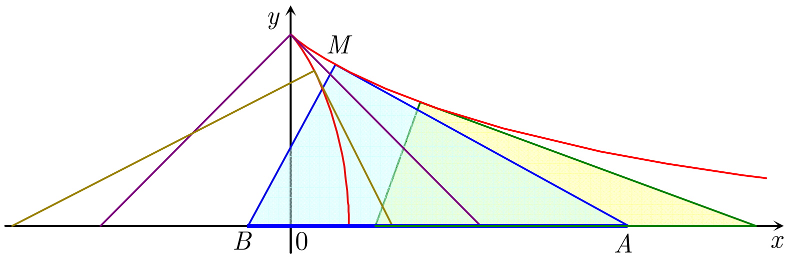
$$\mathcal{M}_b = \left\{\varphi_{\lambda,\varepsilon} : \lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1,1\}\right\} \cup \left\{\psi_{\lambda,\varepsilon} : \lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1,1\}\right\}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 7. أوجد مجموعة المنحنيات التي تُحقِّق الخاصّة الآتية: إنّ طول القطعة المستقيمة التي يعيِّنها على محور الفواصل مماس للمنحني، وناظم عليه في نقطة من المنحني، يساوي مقداراً ثابتاً $2a$.

الحل

لتكن $\mathcal{M}_a$ مجموعة التوابع المعرّفة على مجال I وتُحقِّق الخاصّة المطلوبة، وليكن f تابعاً من $\mathcal{M}_a$. إذا انعدم f أو مشتقه f' ما تحقّق الشرط المشار إليه بشأن طول القطعة التي يعيِّنها المماس والناظم.



ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً من $\mathcal{M}_a$. ولتكن $M(x,f(x))$ نقطة من منحني التابع f. إنّ معادلة المماس لمنحني التابع f في M هي :

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

وهو يقطع محور الفواصل عند النقطة $A(x - f(x)/f'(x), 0)$. أمّا معادلة الناظم على منحني التابع f في M فهي :

$$Y - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(X - x)$$

وهو يقطع محور الفواصل عند النقطة : $B(x + f(x)f'(x), 0)$. ولمّا كان $AB = 2a$ استنتجنا أنّ

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x)f'(x) + \frac{f(x)}{f'(x)} \right| = 2a$$

نلاحظ هنا أنّه إذا كان f تابعاً من $\mathcal{M}_a$ كان $x \mapsto \varepsilon f(\tilde{\varepsilon} x)$ تابعاً من $\mathcal{M}_b$ أيضاً، وذلك أياً كانت ε و $\tilde{\varepsilon}$ من $\{-1,1\}$. ولأنّ كلّاً من f و f' يُحافظ على إشارة واحدة على المجال I استنتجنا أنّه يمكننا دون الإقلال من عموميّة الحلّ أن نفترض أنّ كلّاً من f و f' موجبٌ تماماً على I.

عندئذ يكون لدينا

$$\forall x \in I, \quad f(x)\left(f'(x)+\frac{1}{f'(x)}\right)=2a$$

ومنه المعادلة التفاضليّة $y(y'^2+1)=2ay'$. لحلّ مثل هذا النمط من المعادلات، يمكننا اتّباع الأسلوب الآتي، نعرّف متحولاً جديداً $p=y'$ عندئذ يكون لدينا

$$y=\frac{2ap}{1+p^2}$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى x نجد

$$p=y'=2a\frac{1-p^2}{(1+p^2)^2}p'$$

أو

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a}&=\frac{1-p^2}{p(1+p^2)^2}p'\\&=\frac{p'}{p(1+p^2)}-\frac{2pp'}{(1+p^2)^2}\\&=\frac{p'}{p}-\frac{pp'}{1+p^2}-\frac{2pp'}{(1+p^2)^2}\end{aligned}$$

وعليه

$$\frac{1}{2a}=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{p^2}{1+p^2}+\frac{1}{1+p^2}\right)'$$

إذن يوجد ثابتٌ k يُحقّق

$$x=a\left(\ln\left(1-\frac{1}{1+p^2}\right)+\frac{2}{1+p^2}+k\right)$$

وهكذا تقبل حلول المعادلة $y(y'^2+1)=2ay'$ التمثيل الوسيطي

$$\begin{aligned}x&=a\left(\ln\frac{p^2}{1+p^2}+\frac{2}{1+p^2}+k\right)\\y&=\frac{2ap}{1+p^2}\end{aligned}$$

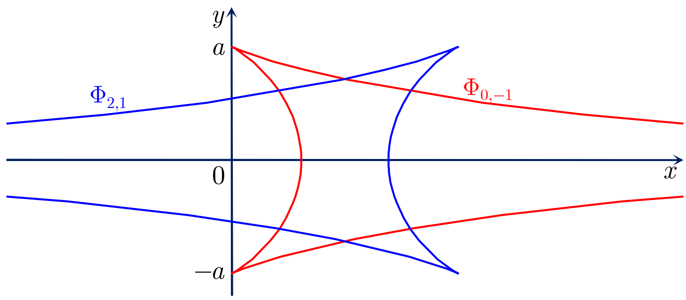
فإذا عرّفنا وسيطاً جديداً $\theta = 2\arctan p$ أخذ الحلّ السابق الصيغة

$$\Phi_\kappa :]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\left(\ln(1-\cos\theta)+\cos\theta+\kappa\right) \\ a\sin\theta \end{bmatrix}$$

فإذا أردنا إضافة الحلول التي نحصل عليها بسبب التناظر وجدنا، مجموعة المنحنيات $\Phi_{\kappa,\varepsilon}$ الآتية :

$$\Phi_{\kappa,\varepsilon} :]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon a\left(\ln(1-\cos\theta)+\cos\theta+\kappa\right) \\ a\sin\theta \end{bmatrix}$$

حيث $\kappa \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon \in \{-1,1\}$.



ولقد مثّلنا في الشكل، اثنين من هذه الحلول. ■

التمرين 8. أوجد مجموعة المنحنيات التي تُحقِّق الخاصّة الآتية: إنّ فاصلة نقطة تقاطع المماس في نقطة من المنحني مع محور الفواصل تساوي نصف فاصلة نقطة التماس.

الحل

لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة التوابع المعرّفة على مجال I وتُحقّق الخاصّة المطلوبة، وليكن f تابعاً من $\mathcal{M}$.

إذا انعدم المشتق f' ما تقاطع المماس مع محور الفواصل، أوانطبق عليه، وفي الحالتين لا يكون للشرط الموضوع معنى. سنفترض إذن أنّ $f'(x) \neq 0$ على I .

لتكن $M(x,f(x))$ نقطة من منحني التابع f . إنّ معادلة المماس لمنحني التابع f في M هي :

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

وهو يقطع محور الفواصل عند النقطة $A(x - f(x)/f'(x), 0)$. ولأنّ $f \in \mathcal{M}$ استنتجنا أنّ

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x}{2}$$

وهذا يُكافئ $xf'(x) - 2f(x) = 0$.

إذن إذا افترضنا أنّ $I \not\ni 0$ استنتجنا أنّ $\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)' = 0$ على I، إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق

$$\forall x \in I,\ f(x) = \kappa x^2$$

وعليه فإنّ مجموعة المنحنيات التي تُحقِّق الشرط المطلوب هي المحنيات البيانيّة للتوابع $f_{\kappa,\varepsilon}$ المعرّفة كما يأتي:

$$f_{\kappa,1} :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ f_{\kappa,1}(x) = \kappa x^2$$
$$f_{\kappa,-1} :]-\infty,0[\to \mathbb{R},\ f_{\kappa,-1}(x) = \kappa x^2$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 9. أوجد مجموعة المنحنيات التي تُحقِّق الخاصّة الآتية: إنّ فاصلة نقطة تقاطع المماس في نقطة من المنحني مع محور الفواصل تساوي ضعفي فاصلة نقطة التماس.

الحل

لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة التوابع المعرّفة على مجال I وتُحقِّق الخاصّة المطلوبة، وليكن f تابعاً من $\mathcal{M}$.

إذا انعدم المشتق f' ما تقاطع المماس مع محور الفواصل، أو انطبق عليه، وفي الحالتين لا يكون للشرط الموضوع معنى. سنفترض إذن أنّ $f'(x) \neq 0$ على I.

لتكن $M(x, f(x))$ نقطة من منحني التابع f. إنّ معادلة المماس لمنحني التابع f في M هي :

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

وهو يقطع محور الفواصل عند النقطة $A(x - f(x)/f'(x), 0)$. ولأنّ $f \in \mathcal{M}$ استنتجنا أنّ

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 2x$$

وهذا يُكافئ $xf'(x) + f(x) = 0$. أو $\big(xf(x)\big)' = 0$ على I، إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق $\forall x \in I,\ f(x) = \kappa / x$. وعليه فإنّ مجموعة المنحنيات التي تُحقِّق الشرط المطلوب هي المحنيات البيانيّة للتوابع المعرّفة على $\mathbb{R}_+^*$ أو على $\mathbb{R}_-^*$ بصيغة من الشكل $x \mapsto \dfrac{\kappa}{x}$.

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 10. أوجد حلول المعادلات التفاضليّة التالية :

1. $xy' - 2y - 2x^4 = 0$
2. $xy' - xy - e^x = 0$
3. $(2x+1)y' - 2y - 4x = 0$
4. $x^2y' + xy + 1 = 0$
5. $y' - 2xy - 2x^3 = 0$
6. $(xy' - 1)\ln x - 2y = 0$
7. $(\sin^2 y + x \operatorname{cotan} y)y' = 1$
8. $xy' + (x+1)y - 3x^2e^{-x} = 0$

الحل

1. المعادلة $xy' - 2y - 2x^4 = 0$. ليكن I أحد المجالين $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$. عندئذ يكون لدينا

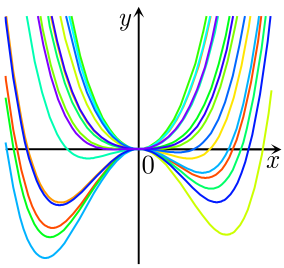
$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = 2x$$

ومن ثَمّ $\forall x \in I, \left(\dfrac{y}{x^2}\right)' = 2x$ ، إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$\forall x \in I, \quad y(x) = x^2(x^2 + \kappa)$$

أمّا الحلول على $\mathbb{R}$ فهي مجموعة التوابع $\{\varphi_{\lambda,\mu} : (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$ مع

$$\varphi_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} x^2(x^2+\lambda) & : \ x \geq 0 \\ x^2(x^2+\mu) & : \ x \leq 0 \end{cases}$$



2. المعادلة $xy' - xy - e^x = 0$. ليكن I أحد المجالين $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$. عندئذ

$$\forall x \in I, \quad y'e^{-x} - ye^{-x} = \frac{1}{x}$$

ومن ثَمّ $\forall x \in I, \ (e^{-x}y)' = \dfrac{1}{x}$ ، إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$\forall x \in I, \ y(x) = \big(\ln|x| + \kappa\big)e^x$$

ولا توجد حلول معرّفة على كامل $\mathbb{R}$.

3. المعادلة $(\mathcal{E}) : (2x+1)y' - 2y - 4x = 0$. ليكن I أحد المجالين $\left]-\frac{1}{2},\infty\right[$ أو $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$. عندئذ يكون لدينا على I

$$\frac{1}{2x+1}y' - \frac{2}{(2x+1)^2}y = \frac{4x}{(2x+1)^2} = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{1}{2x+1}y\right)' = \left(\ln\left|2x+1\right| + \frac{1}{2x+1}\right)'$$

إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$\forall x \in I, \quad y(x) = (2x+1)\ln\left|2x+1\right| + 1 + \kappa(2x+1)$$

ولا توجد حلول من الصف C^1 على كامل $\mathbb{R}$.

4. المعادلة $x^2y' + xy + 1 = 0$. ليكن I أحد المجالين $]0,\infty[$ أو $]-\infty,0[$. عندئذ يكون لدينا $\forall x \in I,\ xy' + y = -\dfrac{1}{x}$، ومن ثَمّ

$$\forall x \in I, (xy)' = -\big(\ln|x|\big)'$$

إذن يوجد عدد κ يُحقّق:

$$\forall x \in I, y(x) = -\frac{\ln|x|}{x} + \frac{\kappa}{x}$$

5. المعادلة $y' - 2xy - 2x^3 = 0$. تُكافئ هذه المعادلة الصيغة

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^{-x^2}y(x))' = 2x^3e^{-x^2} = -((1+x^2)e^{-x^2})'$$

وعليه يوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -1 - x^2 + \kappa e^{x^2}$$

6. المعادلة $(xy'-1)\ln x - 2y = 0$. تُكافئ هذه المعادلة الصيغة

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{\ln^2 x}y'(x) - \frac{2}{x\ln^3 x}y(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$$

أو

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left(\frac{1}{\ln^2 x}y(x)\right)' = -\left(\frac{1}{\ln x}\right)'$$

وعليه يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = (-1 + \kappa \ln x) \ln x$$

7. المعادلة $(\sin^2 y + x \cot y) y' = 1$. أبسط طريقة لحلِّ هذه المعادلة هي في النظر إلى الحلِّ بالشكل $y \mapsto x(y)$ ، أي أن ننظر إلى x بصفته تابعاً للمتحوِّل y عندئذ تُكتب المعادلة بالصيغة:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} - (\cot y)x = \sin^2 y$$

أو

$$\frac{1}{\sin y} \cdot \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} - \frac{\cos y}{\sin^2 y} x = \sin y$$

وذلك على أيِّ مجال I لا يحوي نقطة من $\pi\mathbb{Z}$. إذن

$$\forall y \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\frac{1}{\sin y} \cdot x(y)\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \cos y$$

وعليه يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق

$$\forall y \in I, \quad x(y) = -\cos y \sin y + \kappa \sin y$$

8. المعادلة $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$. ليكن I أحد المجالين $]0, \infty[$ أو $]-\infty, 0[$. عندئذ يكون لدينا

$$\forall x \in I, \ (xe^x y(x))' = 3x^2$$

ومن ثَمّ يوجد عدد κ يُحقِّق:

$$\forall x \in I, \ y(x) = x^2 e^{-x} + \kappa e^{-x} / x$$

والتابع $x \mapsto x^2 e^{-x}$ هو الحلّ الوحيد المعرّف على كامل $\mathbb{R}$. ■

التمرين 11. أوجد حلول المعادلات التفاضليّة الآتية :

1. $y' + 2y - y^2 e^x = 0$
2. $y' - y^4 \cos x - y \tan x = 0$
3. $(x+1)(y' + y^2) + y = 0$
4. $x y^2 y' - x^2 - y^3 = 0$
5. $x y y' - x - y^2 = 0$
6. $x y' - 4y - 2x^2 \sqrt{y} = 0$
7. $2y' - \dfrac{x}{y} - \dfrac{xy}{x^2 - 1} = 0$
8. $x y' + 2 y + x^5 y^3 e^x = 0$

الحل

1. المعادلة $y' + 2y - y^2e^x = 0$. التابع $y \equiv 0$ حلٌّ للمعادلة المدروسة وضوحاً. لنضع $u = \dfrac{1}{y}$ على أيِّ مجال لا ينعدم فيه y عندئذ تأخذ المعادلة الصيغة: $u' - 2u = -e^x$. وعليه يكون $(e^{-2x}u)' = -e^{-x}$. إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق

$$u(x) = e^x + \kappa e^{2x}$$

ومن ثَمَّ نجد $y(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + \kappa e^x}$.

2. المعادلة $y' - y^4 \cos x - y \tan x = 0$. التابع $y \equiv 0$ حلٌّ واضح للمعادلة المدروسة. لنضع $z = y^{-3}$ على أيِّ مجال لا ينعدم فيه y عندئذ تأخذ المعادلة الصيغة الآتية $z' - 3z \tan x = -3 \cos x$. وعليه يكون

$$\frac{1}{\cos^3 x} z' + 3\frac{-\sin x}{\cos^4 x} z = -3\frac{1}{\cos^2 x}.$$

إذن

$$\left(\frac{z}{\cos^3 x} + 3\tan x\right)' = 0$$

فيوجد ثابتٌ κ يُحقِّق

$$z(x) = -3\sin x \cos^2 x + \kappa \cos^3 x$$

ومن ثَمَّ نجد $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-3\sin x \cos^2 x + \kappa \cos^3 x}}$.

3. المعادلة $(x+1)(y' + y^2) + y = 0$. التابع $y \equiv 0$ حلٌّ واضح للمعادلة المدروسة. لنضع $z(x) = \dfrac{1}{(x+1)y(x)}$ على أيِّ مجال لا ينعدم فيه المقدار $(1+x)y(x)$ عندئذ تأخذ المعادلة الصيغة $z' = \dfrac{1}{x+1}$. وعليه يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق $z(x) = \kappa + \ln|x+1|$ ومن ثَمَّ

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1) + \kappa(x+1)}$$

وذلك على أيِّ مجال لا يحوي -1.

4. المعادلة $xy^2y' - x^2 - y^3 = 0$. ليكن I أحد المجالين $]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$.

ولنعرّف على I التابع $z(x) = \left(\dfrac{y(x)}{x}\right)^3$. عندئذ نجد

$$\forall x \in I,\ z'\big(x\big) = 3\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{xy'(x) - y(x)}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}$$

إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$\forall x \in I,\ y(x) = \sqrt[3]{\kappa x^3 - 3x^2}$$

5. المعادلة $xyy' - x - y^2 = 0$. ليكن I أحد المجالين $]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$.

ولنعرّف على I التابع $z(x) = \left(\dfrac{y(x)}{x}\right)^2$. عندئذ نجد

$$\forall x \in I, z'(x) = 2\left(\frac{y(x)}{x}\right) \cdot \left(\frac{xy'(x) - y(x)}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$$

إذن يوجد ثابتٌ κ و $\varepsilon \in \{-1,1\}$ يُحقّقان

$$\forall x \in I, y(x) = \varepsilon\sqrt{\kappa x^2 - 2x}$$

6. المعادلة $xy' - 4y - 2x^2\sqrt{y} = 0$. إنّ التابع $y \equiv 0$ حلٌّ شاذٌّ للمعادلة المدروسة. ليكن I مجالاً لا يحوي 0 ويكون فيه التابع y موجباً تماماً. ولنعرّف على I التابع $z(x) = \dfrac{\sqrt{y(x)}}{x^2}$. عندئذ نجد

$$\forall x \in I, z'(x) = \frac{y'(x)}{2x^2\sqrt{y(x)}} - \frac{2}{x^3}\sqrt{y(x)} = \frac{xy'(x) - 4y(x)}{2x^3\sqrt{y(x)}} = \frac{1}{x}$$

إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقّق $\forall x \in I,\ z(x) = \ln|x| + \kappa$ ومن ثَمّ

$$\forall x \in I,\ y(x) = x^4\big(\ln|x| + \kappa\big)^2$$

وهناك عددٌ لا نهائي من الحلول المعرّفة على $\mathbb{R}$، نحصل عليها من تمديد أي حلٍّ على $]-\infty,0[$ بأيّ حلٍّ معرّف على $]0,+\infty[$.

7. المعادلة $\frac{xy}{x^2-1} - \frac{x}{y} - 2y' = 0$. ليكن I مجالاً لا ينعدم فيه التابع y ومحتوى في أحد المجالات $]-\infty,-1[$ أو $]-1,1[$ أو $]1,+\infty[$. ولنعرّف $z(x) = \frac{y^2(x)}{\sqrt{|x^2-1|}}$ على I.

عندئذ نجد على I أنّ

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{2y(x)y'(x)}{\sqrt{|x^2-1|}} - \frac{xy^2(x)}{(x^2-1)\sqrt{|x^2-1|}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}} = \left(\varepsilon\sqrt{|x^2-1|}\right)' \end{aligned}$$

حيث $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x^2-1)$ على I. إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$\forall x \in I,\ z(x) = \varepsilon\sqrt{|x^2-1|} + \kappa$$

ومن ثَمّ، توجد إشارة $\varepsilon \in \{-1,1\}$ تُحقّق :

$$\forall x \in I,\ y(x) = \varepsilon\sqrt{x^2-1+\kappa\sqrt{|x^2-1|}}$$

8. المعادلة $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$. إنّ التابع $y \equiv 0$ حلٌّ شاذٌ للمعادلة المدروسة. ليكن I مجالاً لا ينعدم فيه التابع y ولا ينتمي إليه الصفر. ولنعرّف على I التابع $z(x) = \frac{1}{x^4y^2(x)}$. عندئذ نجد

$$\forall x \in I, z'(x) = -\frac{4y(x) + 2xy'(x)}{x^5y^3(x)} = e^x$$

إذن يوجد ثابتٌ κ و $\varepsilon \in \{-1,1\}$ يُحقّقان

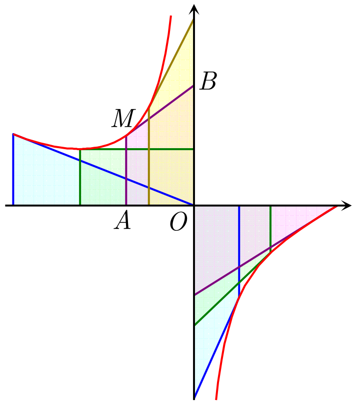
$$\forall x \in I, y(x) = \frac{\varepsilon}{x^2\sqrt{e^x+\kappa}}$$

■

التمرين 12. أوجد مجموعة المنحنيات التي تجعل مساحة شبه المنحرف، الذي يكوّنه المماس في نقطة منها، ومحورا الإحداثيّات والمستقيم المار بتلك النقطة موازياً لمحور التراتيب، ثابتة وتساوي $3a^2$.

الحل

لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة التوابع المعرّفة على مجال I وتُحقِّق الخاصّة المطلوبة، وليكن f تابعاً من $\mathcal{M}$.



لتكن $M(x,f(x))$ نقطة من منحني التابع f. إنّ معادلة المماس لمنحني التابع f في M هي :

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

وهو يقطع محور التراتيب عند النقطة

$$B(0, f(x) - xf'(x))$$

ولأنّ $f \in \mathcal{M}$ استنتجنا أنّ

$$x\left(\left|f(x)\right| + \left|f(x) - xf'(x)\right|\right) = 6a^2$$

وحتّى يكون الرباعي $OBMA$ شبه منحرف وجب أن تكون النقطتان B و M بجهة واحدة بالنسبة إلى المستقيم (OA). أي أنّ يكون للمقدارين $f(x)$ و $f(x) - xf'(x)$ الإشارة نفسها على المجال I الذي لا يحوي 0، توجد إشارة $\varepsilon \in \{-1,1\}$ تُحقِّق

$$\forall x \in I, \quad 2f(x) - xf'(x) = \frac{6\varepsilon a^2}{x}$$

أو

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = -\frac{6\varepsilon a^2}{x^4} = \left(\frac{2\varepsilon a^2}{x^3}\right)'$$

فيوجد ثابتٌ κ يُحقِّق $\forall x \in I, \; f(x) = 2\varepsilon a^2\left(\frac{x^2}{\kappa} + \frac{1}{x}\right)$. وإذا أردنا أنّ يكون للمقدارين $f(x)$ و $f(x) - xf'(x)$ الإشارة نفسها استنتجنا أنّ $\mathcal{M}$ هي المنحنيات البيانيّة للتوابع المعرّفة

على $\left]0,\sqrt[3]{2\kappa}\right[$ أو $\left]-\sqrt[3]{\kappa},0\right[$ في حالة $\kappa > 0$، أو على $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_+^*$ في حالة $\kappa = 0$، أو على $\left]\sqrt[3]{2\kappa},0\right[$ أو $\left]0,-\sqrt[3]{\kappa}\right[$ في حالة $\kappa < 0$، بالصيغة

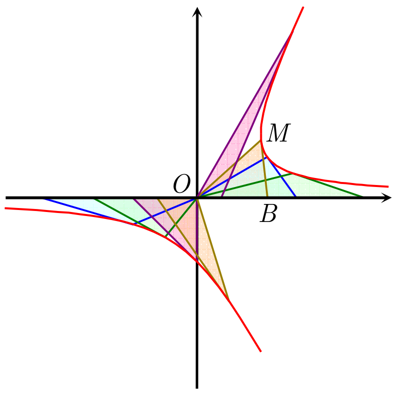
$$f(x) = 2\varepsilon a^2\left(\frac{x^2}{\kappa} + \frac{1}{x}\right).$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 13. أوجد مجموعة المنحنيات التي تجعل مساحة المثلث، الذي يكوّنه المماس في نقطة منها، ومحور الفواصل، والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة التماس بمبدأ الإحداثيّات، ثابتة وتساوي a^2.

الحل

لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة التوابع المعرّفة على مجال I وتُحقّق الخاصّة المطلوبة، وليكن f تابعاً من $\mathcal{M}$.
من الواضح أنّ كلّاً من f و f' لا ينعدم على I.



لتكن $M(x,f(x))$ نقطة من منحني التابع f. يقطع المماس في M لمنحني التابع f محور الفواصل عند النقطة $A\big(x - f(x)/f'(x),0\big)$، ولأنّ $f \in \mathcal{M}$ استنتجنا أنّ

$$\left|f(x)\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)\right| = 2a^2$$

إذن توجد إشارة $\varepsilon \in \{-1,1\}$ تُحقّق

$$\forall x \in I,\ (xf(x) - 2\varepsilon a^2)f'(x) = f^2(x)$$

أو

$$(xy - 2\varepsilon a^2)y' = y^2.$$

لحلّ هذه المعادلة، نتأمّل x بصفته تابعاً للمتحوّل y، فتُكتب المعادلة السابقة بالشكل :

$$-\frac{2\varepsilon a^2}{y^3} = \frac{x'}{y} - \frac{x}{y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\frac{x}{y}\right)$$

فيوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$\frac{x}{y} = \varepsilon a^2\left(\frac{1}{y^2} + \kappa\right)$$

أو $\frac{\varepsilon x}{a^2}y = 1 + \kappa y^2$. وعليه

- في حالة $\kappa = 0$ نحصل على الحلول

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\varepsilon a^2}{x}$$
$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\varepsilon a^2}{x}$$

- وفي حالة $\kappa > 0$، نحصل على الحلول

$$\left]2a^2\sqrt{\kappa}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2a^2\kappa}\left(\varepsilon x + \tilde{\varepsilon}\sqrt{x^2 - 4\kappa a^4}\right)$$

$$\left]-\infty, -2a^2\sqrt{\kappa}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2a^2\kappa}\left(\varepsilon x + \tilde{\varepsilon}\sqrt{x^2 - 4\kappa a^4}\right)$$

حيث ε و $\tilde{\varepsilon}$ من $\{-1,1\}$.

- أمّا في حالة $\kappa < 0$، فنحصل على الحلول

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2a^2\kappa}\left(\varepsilon x + \tilde{\varepsilon}\sqrt{x^2 - 4\kappa a^4}\right)$$

حيث ε و $\tilde{\varepsilon}$ من $\{-1,1\}$.

التمرين 14. أوجد حلول المعادلة التفاضليّة :

$$y'\sin 2x = 2(y + \cos x)$$

التي تبقى محدودة عندما تقترب x من $\frac{\pi}{2}$.

الحل

تُكتب المعادلة التفاضليّة بالصيغة المُكافئة التالية على أيِّ مجال محتوى في $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$، ولمّا كنّا ندرس الحلول المحدودة عندما تقترب x من $\frac{\pi}{2}$، سنفترض أنّنا ندرس هذه المعادلة على المجال $I = \left]0,\pi\right[$. عندئذ

$$\frac{\cos x}{\sin x}y'(x) - \frac{1}{\sin^2 x}y(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

وعليه يكون

$$\forall x \in I,\quad \left(\frac{\cos x}{\sin x}y(x)\right)' = -\left(\frac{1}{\sin x}\right)'$$

وعليه يوجد ثابتٌ k يُحقّق

$$\forall x \in I,\quad \frac{\cos x}{\sin x}y(x) = -\frac{1}{\sin x} + k$$

فإذا افترضنا أنّ $x \mapsto y(x)$ يبقى محدوداً عندما تقترب x من $\frac{\pi}{2}$، استنتجنا أنّ

$$0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}y(x) = k - 1$$

أو $k = 1$، إذن

$$\forall x \in I \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2}\right\},\quad y(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \frac{-\cos x}{\sin x + 1}$$

نستنتج إذن وجود حلٍّ وحيد يبقى محدوداً عندما تقترب x من $\frac{\pi}{2}$ هو الحل المعرّف على $\left]-\pi,\pi\right[$ بالعلاقة $x \mapsto \dfrac{-\cos x}{\sin x + 1}$. ■

التمرين 15. لنتأمّل المعادلة التفاضليّة :

$$(\mathcal{E}):\quad x\,y' + a\,y = f(x)$$

a تنتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$، و f تابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$، ويُحقّق $\lim_{x\to 0} f(x) = b \in \mathbb{R}$. أثبت أنه يوجد حلٌّ وحيد للمعادلة $(\mathcal{E})$ يبقى محدوداً في جوار 0، وأوجد نهاية هذا الحل عندما تسعى x إلى 0 بقيم موجبة تماماً ؟

الحل

تُكتب المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ بالشكل

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^a y'(x) + a x^{a-1} y(x) = x^{a-1} f(x)$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^a y(x) = y(1) + \int_1^x t^{a-1} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

وهنا نلاحظ، بسبب إمكان تمديد التابع f إلى تابع مستمرٍّ على $[0,1]$، وجود ثابتٍ M يُحقِّق

$$\forall t \in \,]0,1], \quad \left|t^{a-1} f(t)\right| \leq \frac{M}{t^{1-a}}$$

فالتكامل $\int_0^1 t^{a-1} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ، لنرمز بالرمز I_a إلى قيمته، عندئذ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^a y(x) - \int_0^x t^{a-1} f(t)\,\mathrm{d}\,t = y(1) - I_a$$

لنفترض وجود حلٍّ $x \mapsto y(x)$ يبقى محدوداً في جوار الصفر، عندئذ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a y(x) = 0$ ، ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^x t^{a-1} f(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$ استنتجنا أنّه يجب أن يكون $y(1) = I_a$. ومن ثَمّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^a y(x) = \int_0^x t^{a-1} f(t)\,\mathrm{d}\,t = x^a \int_0^1 u^{a-1} f(xu)\,\mathrm{d}\,u$$

أو

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \int_0^1 u^{a-1} f(xu)\,\mathrm{d}\,u$$

وهذا يثبت وحدانيّة الحلِّ المحدود في جوار 0 ، وبالعكس إذا عرّفنا التابع y على $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة

$$y(x) = \int_0^1 u^{a-1} f(xu)\,\mathrm{d}\,u$$

استنتجنا مباشرة، بعد تغيير بسيط في المتحوّل، أنّ y حلٌّ للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، ونجد أيضاً أنّ

$$\forall x > 0, \quad y(x) - \frac{b}{a} = \int_0^1 u^{a-1} (f(xu) - b)\,\mathrm{d}\,u$$

إذن، مهما كان $x > 0$ كان

$$\left|y(x) - \frac{b}{a}\right| \leq \sup_{0<t\leq x} \left|f(t) - b\right| \int_0^1 u^{a-1}\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{a} \sup_{0<t\leq x} \left|f(t) - b\right|$$

وعليه فالشرط $\lim_{x\to 0} f(x) = b \in \mathbb{R}$ يقتضي أنّ $\lim_{x\to 0^+} y(x) = b/a$. وهذا يثبت وجود الحل الوحيد الذي يبقى محدوداً عندما يسعى x إلى 0.

التمرين 16. أوجد حلول المعادلة التفاضليّة الآتية التي تقبل العدد 2π دوراً:

$$y' = 2y\cos^2 x - \sin x$$

الحل

تُكتب المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ بالشكل

$$\left(e^{-x-\cos x\sin x}y(x)\right)' = -e^{-x-\cos x\sin x}\sin x$$

ومن ثَمّ يوجد ثابتٌ λ يُحقِّق

$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x) = y(0)e^{x+\cos x\sin x} - e^{x+\cos x\sin x}\int_0^x e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t$$

وهنا نلاحظ أنّ

$$y(x+2\pi) = e^{2\pi}\left(y(0)e^{x+\cos x\sin x} - e^{x+\cos x\sin x}\int_0^{x+2\pi} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t\right)$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_0^{x+2\pi} & e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^{2\pi} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^{2\pi} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t + e^{-2\pi}\int_0^{x} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

إذن

$$y(x+2\pi) = \tilde{k}e^{x+\cos x\sin x} - e^{x+\cos x\sin x}\int_0^x e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t$$

حيث

$$\tilde{k} = \left(y(0) - \int_0^{2\pi} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t\right)e^{2\pi}$$

وعليه، يكون $y(x+2\pi) = y(x)$ مهما تكن x إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط : $\tilde{k} = y(0)$ وهذا يُكافئ

$$y(0) = \frac{1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t$$

فالحلُّ الـ $2\pi-$ دوري هو الحلُّ الوحيد المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة :

$$y(x) = e^{x+\cos x\sin x}\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t - \int_0^{x} e^{-t-\cos t\sin t}\sin t\,\mathrm{d}\,t\right)$$

ويمكن تعميم هذه الطريقة لإيجاد الحلول الـ $2\pi-$ دوريّة لمعادلة $y' = a(t)y + b(t)$ في حالة كون a و b مستمرّين على $\mathbb{R}$ و $2\pi-$ دوريَّيْن. ■

التمرين 17. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً و**محدوداً**. أثبت أنّ للمعادلة التفاضليّة :

$$y' + y = f$$

حلاً وحيداً محدوداً على $\mathbb{R}$. أوجده وبيّن أنّ هذا الحلّ يكون دورياً إذا كان f دورياً.

الحل

تُكتب المعادلة التفاضليّة بالصيغة المُكافئة : $\forall x\in\mathbb{R},\ \left(e^x y(x)\right)' = e^x f(x)$ ومن ثَمَّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x y(x) = \kappa + \int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

فإذا افترضنا وجود حلٍّ محدود $x\mapsto y(x)$ للمعادلة التفاضليّة، استنتجنا من $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x y(x) = 0$ أنّ التكامل $\int_{-\infty}^0 e^t f(t)\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ وأنّ $\kappa = \int_{-\infty}^0 e^t f(t)\,\mathrm{d}\,t$. إذن لا بُدَّ أن يكون

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

وهذا يثبتُ وحدانيّة الحلّ، في حال وجوده.

وبالعكس، لمّا كان f محدوداً على $\mathbb{R}$ استنتجنا وجود ثابت M يُحقِّق $\left|f(t)\right|\le M$ مهما كان العدد t، ومن ثَمّ يكون التكامل $\int_{-\infty}^x e^t f(t)\,\mathrm{d}\,t$ متقارباً بالإطلاق، أيّاً كان x . ويكون

$$\left|\int_{-\infty}^x e^{t-x} f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \int_{-\infty}^x e^{t-x}\left|f(t)\right|\mathrm{d}\,t = M\int_{-\infty}^x e^{t-x}\,\mathrm{d}\,t = M$$

أياً كانت قيمة x . وعلى هذا نرى أنّ التابع $x\mapsto y(x)$ المعرّف بالعلاقة

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

هو الحلّ المحدود الوحيد للمعادلة التفاضليّة $y' + y = f$.

وإذا افترضنا أنّ f تابع يقبل العدد τ دوراً، استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} y(x+\tau) &= e^{-x-\tau}\int_{-\infty}^{x+\tau} e^t f(t)\,\mathrm{d}\,t \underset{t\leftarrow u+\tau}{=} e^{-x-\tau}\int_{-\infty}^{x} e^{u+\tau} f(u+\tau)\,\mathrm{d}\,u \\ &= e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^u f(u+\tau)\,\mathrm{d}\,u = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^u f(u)\,\mathrm{d}\,u = y(x) \end{aligned}$$

فالتابع y يقبل العدد τ دوراً أيضاً. ■

التمرين 18. أوجد حلول المعادلات التفاضليّة الآتية:

1. $x^2y' + x\,y + x^2y^2 = 4$
2. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$
3. $x\,y' - (2x+1)\,y + y^2 + x^2 = 0$
4. $y' - 2x\,y + y^2 + x^2 = 5$
5. $y' + 2y\,e^x - y^2 - e^x - e^{2x} = 0$

الحل

1. المعادلة $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$. نلاحظ أنّ التابع $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ هو حلٌّ خاص لمعادلة ريكاتي هذه على كلٍّ من $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$. لنبحث عن بقيّة الحلول بالصيغة $y(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{z(x)}$ على مجال لا ينعدم فيه z محتوى في $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$. عندئذ نجد بالتعويض في المعادلة أنّ:

$$-2 - \frac{x^2z'(x)}{z^2(x)} + 2 + \frac{x}{z(x)} + \left(2 + \frac{x}{z(x)}\right)^2 = 4$$

ومنه $xz'(x) - 5z(x) = x$ أو

$$\frac{1}{x^5}z'(x) - \frac{5}{x^6}z(x) = \frac{1}{x^5} = -\left(\frac{1}{4x^4}\right)'$$

ومن ثَمّ $\dfrac{z(x)}{x^5} = \dfrac{\kappa}{4} - \dfrac{1}{4x^4}$ ، إذن $z(x) = \frac{1}{4}(\kappa x^5 - x)$. ومنه نستنتج أنّ

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{\kappa x^5 - x} = \frac{2}{x}\cdot\left(\frac{\kappa x^4 + 1}{\kappa x^4 - 1}\right)$$

إذن إضافة إلى الحلَّين $x \mapsto \frac{2}{x}$ و $x \mapsto -\frac{2}{x}$ المعرّفين على كلٍّ من $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$. هناك الحلول المعرّفة على كامل $\mathbb{R}$ من الشكل

$$x \mapsto \frac{2}{x}\left(\frac{x^4 - \lambda^4}{x^4 + \lambda^4}\right) \text{ حيث } \lambda > 0$$

وهناك الحلول المعرّفة على كلٍّ من المجالات $]-\infty, -\lambda[$ و $]-\lambda, 0[$ و $]0, \lambda[$ و $]\lambda, +\infty[$ بالصيغة

$$x \mapsto \frac{2}{x}\left(\frac{x^4 + \lambda^4}{x^4 - \lambda^4}\right) \text{ حيث } \lambda > 0 .$$

2. المعادلة $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$. نلاحظ أنّ التابع $x \mapsto \frac{2}{x}$ هو حلٌّ خاص لمعادلة ريكاتي هذه على كلٍّ من $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$. لنبحث عن بقيّة الحلول بالصيغة $y(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{z(x)}$ على مجال لا ينعدم فيه z محتوى في $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$. عندئذ نجد بالتعويض في المعادلة:

$$z'(x) - \frac{4}{3x} z(x) = \frac{1}{3}$$

أو

$$\left(x^{-4/3} z(x)\right)' = \frac{1}{3} x^{-4/3} = \left(-x^{-1/3}\right)'$$

ومن ثَمَّ $x^{-4/3} z(x) = \kappa - x^{-1/3}$ ، إذن $z(x) = x\left(\kappa \sqrt[3]{x} - 1\right)$. ومنه نستنتج أنّ

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x\left(\kappa \sqrt[3]{x} - 1\right)} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2\kappa \sqrt[3]{x} - 1}{\kappa \sqrt[3]{x} - 1}\right)$$

إذن إضافة إلى الحلَّين $x \mapsto \frac{2}{x}$ و $x \mapsto \frac{1}{x}$ المعرّفين على كلٍّ من $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$. هناك الحلول المعرّفة على كلِّ مجال لا يحوي 0 أو κ^{-3} بالصيغة $x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2\kappa \sqrt[3]{x} - 1}{\kappa \sqrt[3]{x} - 1}\right)$.

3. المعادلة $xy' - (2x+1)y + x^2 + y^2 = 0$. نلاحظ أنّ التابع $x \mapsto x$ حلٌّ خاص لمعادلة ريكاتي هذه على كامل $\mathbb{R}$. لنبحث عن بقيّة الحلول بالصيغة $y(x) = x + \dfrac{1}{z(x)}$ على مجال لا ينعدم فيه z ولا يحوي الصفر. عندئذ نجد بالتعويض في المعادلة:

$$x\left(1 - \frac{z'(x)}{z^2(x)}\right) - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z(x)}\right) + x^2 + \left(x + \frac{1}{z(x)}\right)^2 = 0$$

ومنه $xz'(x) + z(x) = 1$ أو $\big(xz(x)\big)' = 1$. إذن $xz\big(x\big) = \kappa + x$ ، أو

$$z(x) = 1 + \frac{\kappa}{x}$$

ومنه نستنتج أنّ

$$y(x) = x + \frac{x}{x+\kappa} = x \cdot \left(\frac{x+\kappa+1}{x+\kappa}\right)$$

إذن إضافة إلى الحلَّين $x \mapsto x$ و $x \mapsto x+1$ المعرّفين على $\mathbb{R}$. هناك الحلول المعرّفة على كلّ مجال لا يحوي 0 أو $-\kappa$ بالصيغة $x \mapsto x \cdot \left(\dfrac{x+\kappa+1}{x+\kappa}\right)$.

4. المعادلة $y' - 2xy + x^2 + y^2 = 5$. نلاحظ أنّ المعادلة تُكتب بالشكل

$$(y-x)' + (y-x)^2 = 4$$

ومنه إذا عرّفنا $z(x) = y(x) - x$ صار لدينا

$$z' = 4 - z^2$$

هناك إذن، الحلّان الشاذّان $z \equiv 2$ و $z \equiv -2$. أمّا إذا أخذ z قيمه في مجال محتوى في $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ كان

$$\frac{z'}{2-z} + \frac{z'}{2+z} = 4$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\frac{z+2}{z-2} = \kappa e^{4x}$$

وبالعودة إلى y نجد الحلول التالية :

- الحلاّن الشاذان $x \mapsto x+2$ و $x \mapsto x-2$ المعرّفان على $\mathbb{R}$.
- مجموعة الحلول $x \mapsto x + 2\dfrac{a^2e^{4x}-1}{a^2e^{4x}+1}$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ أيضاً.
- مجموعة الحلول المعرّفة على $]-\infty,\lambda[$ أو $]\lambda,+\infty[$ من الصيغة $x \mapsto x + 2\dfrac{e^{4x}+e^{4\lambda}}{e^{4x}-e^{4\lambda}}$.

5. المعادلة $y' + 2e^x y - y^2 - e^x - e^{2x} = 0$. نلاحظ أنّ المعادلة تُكتب بالشكل

$$(y-e^x)' - (y-e^x)^2 = 0$$

ومنه إذا عرّفنا $z(x) = y(x) - e^x$ صار لدينا $z' = z^2$. هناك إذن، الحل الشاذّ $z \equiv 0$.

أمّا إذا أخذ z قيمه في مجال محتوى في $\mathbb{R}^*$ استنتجنا أنه يوجد ثابتٌ κ يُحقّق $z(x) = \dfrac{1}{k-x}$.

وبالعودة إلى y نجد الحلول الآتية:

- الحل الشاذ $x \mapsto e^x$ المعرّف على $\mathbb{R}$.
- مجموعة الحلول $x \mapsto e^x + \dfrac{1}{\kappa - x}$ المعرّفة على $]-\infty,\kappa[$ أو $]\kappa,+\infty[$. ■

التمرين 19. عيِّن التابع f حتى تقبل المعادلة التفاضليّة :

$$x\,y' + (x+1)\,y + y^2 + x + f(x) = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

حلّين خاصّين φ_1 و φ_2 معرّفين على مجال J ويُحقّقان العلاقة:

$$\forall x \in J, \quad \varphi_2(x) = 2\varphi_1(x) + x + 1$$

ثُمّ أوجد حلول هذه المعادلة.

الحل

لمّا كان φ_2 حلاًّ للمعادلة استنتجنا بالتعويض في $(\mathcal{E})$ ما يأتي:

$$x\big(2\varphi_1'(x)+1\big) + 2\big(\varphi_1(x)+x+1\big)\big(2\varphi_1(x)+x+1\big) + x + f(x) = 0$$

أو

$$2x\varphi_1'(x) + 4\varphi_1^2(x) + 6\big(x+1\big)\varphi_1(x) + 2(x+1)^2 + 2x + f(x) = 0$$

ولكن نعلم أيضاً أنّ

$$x\varphi_1'(x)+(x+1)\varphi_1(x)+\varphi_1^2(x)+x+f(x)=0$$

إذن، بالطرح نجد

$$x\varphi_1'(x)+3\varphi_1^2(x)+5(x+1)\varphi_1(x)+2(x+1)^2+x=0$$

والتابع φ_1 هو حلٌّ لمعادلة ريكاتي $(\mathcal{R})$ الآتية:

$$xw'+5(x+1)w+3w^2+2(x+1)^2+x=0$$

التي تقبل وضوحاً الحلّ الخاص $x\mapsto -x-1$. إذن يمكننا البحث عن حلّها العام بالشكل:

$$x\mapsto \frac{1}{z(x)}-x-1$$

نجد بالتعويض في $(\mathcal{R})$ أنّ $xz'+(x+1)z=3$ ، وهذا يُكافئ $(xe^xz(x))'=3e^x$ ومن ثَمّ $z(x)=\dfrac{3(\alpha e^{-x}+1)}{x}$ ، وعليه يكون

$$w(x)=\frac{x}{3(1+\alpha e^{-x})}-x-1$$

إذن $\varphi_1(x)=-x-1$ أو $\varphi_1(x)=\dfrac{x}{3(1+\alpha e^{-x})}-x-1$ عند قيمة مُناسبة للعدد α.

لإيجاد التابع f نعوّض φ_1 في المعادلة $(\mathcal{E})$ فنجد، $f(x)=0$ في حالة $\varphi_1(x)=-x-1$، ونجد

$$f(x)=-x\varphi_1'(x)-(x+1+\varphi_1(x))\varphi_1(x)-x=\frac{2x^2}{9(1+\alpha e^{-x})^2}$$

في حالة

$$\varphi_1(x)=\frac{x}{3(1+\alpha e^{-x})}-x-1$$

لحلّ المعادلة $(\mathcal{E})$ نستفيد من كون φ_1 حلّاً خاصّاً لمعادلة ريكاتي هذه، فنبحث عن الحل العام بالشكل $y(x)=\dfrac{1}{u(x)}+\varphi_1(x)$.

▪ في حالة $\varphi_1(x) = \dfrac{x}{3(1+\alpha e^{-x})} - x - 1$ نجد بالتعويض في المعادلة $(\mathcal{E})$ ما يأتي:

$$u' + \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2e^x}{3(e^x+\alpha)}\right)u = \frac{1}{x}$$

وهذه تُكافئ

$$\left(\frac{xe^x}{(e^x+\alpha)^{2/3}}u\right)' = e^x(e^x+\alpha)^{-2/3} = \left(3(e^x+\alpha)^{1/3}\right)'$$

إذن، يوجد ثابتٌ λ يُحقِّق

$$\frac{xe^x}{(e^x+\alpha)^{2/3}}u = 3(e^x+\alpha)^{1/3} + 3\lambda$$

ومن ثَمّ، نجد الحلّ العام للمعادلة $(\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{xe^x}{(e^x+\alpha)^{2/3}\left(3(e^x+\alpha)^{1/3}+3\lambda\right)} + \varphi_1(x) \\ &= \frac{x}{\left(3(1+\alpha e^{-x}) + 3\lambda(1+\alpha e^{-x})^{2/3}e^{-x/3}\right)} + \frac{x}{3(1+\alpha e^{-x})} - x - 1 \\ &= \frac{x}{3(1+\alpha e^{-x})}\left(1 + \frac{\sqrt[3]{e^x+\alpha}}{\lambda + \sqrt[3]{e^x+\alpha}}\right) - x - 1 \end{aligned}$$

أمّا في حالة $\varphi_1(x) = -x - 1$ فنجد بأسلوب مماثل لِما سبق الحلّ العام للمعادلة $(\mathcal{E})$:

$$y(x) = \frac{x}{1+\lambda e^{-x}} - x - 1$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 20. أوجد حلول المعادلتين التفاضليّتين :

$$x^2y' + xy + 2x^2y^2 - 2 = 0$$

$$(x+2)^2(y'+y^2) = x^2 + 2$$

إذا علمتَ أنّ كلّاً منهما تقبل تابعاً كسرياً، بسطه ومقامه من الدرجة الأولى، حلّاً خاصّاً لها.

الحل

▪ نلاحظ مباشرة أنّ $x \mapsto 1/x$ هو حلٌّ للمعادلة الأولى على كلٍّ من المجالين $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$. لنبحث إذن عن الحلّ العامّ لها بالشكل :

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} + \frac{1}{x}$$

فنجد بالتعويض

$$x^2\left(-\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{x}{z} + 1 + 2\left(\frac{x^2}{z^2} + 2\frac{x}{z} + 1\right) - 2 = 0$$

وعليه $-z'x + 5z + 2x = 0$ ، أو $\frac{1}{x^5}z' - \frac{5}{x^6}z = \frac{2}{x^5}$ ، إذن

$$z(x) = \frac{x}{2}(\kappa x^4 - 1)$$

وعليه يكون

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\kappa x^4 + 1}{\kappa x^4 - 1}\right)$$

▪ نلاحظ أيضاً أنّ $x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$ هو حلٌّ للمعادلة الثانية :

$$(x+2)^2(y' + y^2) = x^2 + 2$$

على كلٍّ من المجالين $]-\infty, -2[$ و $]-2, +\infty[$. لنبحث إذن عن الحلّ العامّ لها بالشكل :

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} + \frac{x}{x+2}$$

فنجد بعد التعويض والاختزال

$$z'(x) - \frac{2x}{x+2}z(x) = 1$$

أو

$$(e^{-2x}(x+2)^4 z)' = e^{-2x}(x+2)^4$$

إذن

$$e^{-2x}(x+2)^4 z(x) = \frac{\kappa}{4} - \frac{1}{4} e^{-2x}\left(2(x+2)^4 + 4(x+2)^3 + 6(x+2)^2 + 6(x+2) + 3\right)$$

وعليه يكون

$$z(x) = \frac{\kappa e^{2x} - 2x^4 - 20x^3 - 78x^2 - 142x - 103}{4(x+2)^4}$$

ومنه

$$y(x) = \frac{4(x+2)^4}{\kappa e^{2x} - 2x^4 - 20x^3 - 78x^2 - 142x - 103} + \frac{x}{x+2}$$ ■

التمرين 21. بيِّن كيف يمكننا إيجاد حلول معادلة ريكاتي إذا علمنا حلَّين خاصّين مختلفين لها؟ ثمّ أوجد حلول المعادلة التفاضليّة :

$$(1-x^3)\,y' + x^2 y - y^2 + 2x = 0$$

إذا علمت أنها تقبل توابع كثيرات الحدود حلولاً لها.

الحل

إذا كان φ_1 حلاً خاصّاً لمعادلة ريكاتي، فإن التابع z المعرّف بالعلاقة $y = \frac{1}{z} + \varphi_1$ حلٌّ لمعادلة خطيّة بطرف ثانٍ. وإذا كان φ_2 حلاً خاصّاً آخر لمعادلة ريكاتي نفسها استنتجنا أنّ $\frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1}$ هو حلٌّ خاص للمعادلة الخطيّة التي يُحقّقها z . وهذا يسهم وضوحاً في تسهيل الحلّ.

فإذا تأمّلنا المعادلة $(1-x^3)\,y' + x^2 y - y^2 + 2x = 0$ وبحثنا عن حلولها التي تُكتب بصيغة كثيرات حدود من الدرجة الثانية على الأكثر، $y(x) = ax^2 + bx + c$ ، وجدنا بعد التعويض والمطابقة الحلَّين الخاصّين $\varphi_1(x) = -x^2$ و $\varphi_2(x) = x + 1$.

لنبحث إذن عن الحلّ بالصيغة : $y(x) = \frac{1}{z(x)} - x^2$ فنجد بعد التعويض والإصلاح

$$(1-x^3)z' - 3x^2 z = -1$$

وهنا نعلم مباشرة أنّ $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1}{\varphi_2 - \varphi_1}$ هو حلٌّ خاص لهذه المعادلة. أمّا الحلُّ العام للمعادلة بدون طرف ثانٍ فهو $x \mapsto \dfrac{\kappa}{1-x^3}$ ، إذن

$$z(x) = \frac{\kappa}{1-x^3} + \frac{1}{1+x+x^2}$$

ونستنتج من ذلك أنّ

$$y(x) = \frac{1-x^3}{\kappa+1-x} - x^2 = \frac{1-\lambda x^2}{\lambda - x}$$

التمرين 22. أوجد حلول المعادلات التفاضليّة الآتية:

1. $(x-y)+(x+y)y' = 0$
2. $(x+2y) - xy' = 0$
3. $2x^3y' - y(2x^2-y^2) = 0$
4. $(y^2-2xy)+x^2y' = 0$
5. $(x^2+y^2)y' - 2xy = 0$
6. $y^2+(x^2-xy)y' = 0$
7. $xy' - y + xe^{y/x} = 0$
8. $2x+3y-5-(x+4y)y' = 0$
9. $y+\sqrt{xy} - xy' = 0$
10. $2x-4y+6+(x+y-3)y' = 0$
11. $y' - 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$
12. $2x+y+1-(4x+2y-3)y' = 0$

الحل

1. المعادلة $x-y+(x+y)y' = 0$. تُكتب هذه المعادلة بالشكل $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$ فهي إذن معادلة متجانسة، لحلّها يمكننا أن نعرّف متحولاً جديداً $t = y/x$. ولكن في هذه الحالة، قد يكون من المُفضّل الانتقال إلى الإحداثيّات القطبيّة، نبدأ بكتابة المعادلة بالصيغة المتناظرة :

$$(x-y)\,\mathrm{d}\,x + (x+y)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

ثُمّ ننتقل إلى الإحداثيّات القطبيّة: $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ فنجد بعد الإصلاح

$$\mathrm{d}\,r + r\,\mathrm{d}\,\theta = 0$$

ومنه $r'+r = 0$ ، فللحلّ التمثيل $r(\theta) = \kappa e^{-\theta}$ بالإحداثيّات القطبيّة، وهو معروف باسم الحلزون اللُّغاريتمي.

2. المعادلة $(x+2y)-xy'=0$. تُكتب هذه المعادلة على أيِّ مجال لا يحوي 0 بالشكل المُكافئ $\frac{1}{x^2}y'-\frac{2}{x^3}y=\frac{1}{x^2}$، أو $\left(\frac{y}{x^2}\right)'=\frac{1}{x^2}$، وعليه يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق $\frac{y}{x^2}=-\frac{1}{x}+\kappa$، ومن ثَمّ نجد $y(x)=-x+\kappa x^2$.

3. المعادلة $2x^3y'-y(2x^2-y^2)=0$. تُكتب هذه المعادلة بالشكل $y'=\frac{y(2x^2-y^2)}{2x^3}$ فهي إذن معادلة متجانسة، لحلّها يمكننا أن نعرّف متحولاً جديداً $t=\frac{y}{x}$. فيكون لدينا $y'=t+xt'$ ومن ثَمّ

$$t+xt'=\frac{t(2-t^2)}{2}=t-\frac{t^3}{2}$$

أو $\frac{1}{x}=\frac{-2}{t^3}t'$. إذن $t^{-2}=\ln(|x|/\kappa)$ حيث $|x|>\kappa>0$ ومنه

$$t=\varepsilon/\sqrt{\ln(|x|/\kappa)}$$

أو

$$y(x)=\frac{\varepsilon x}{\sqrt{\ln(|x|/\kappa)}}$$

فمجموعة الحلول هي مجموعة التوابع المبيّنة آنفاً إضافة إلى الحل الشاذ $y\equiv 0$.

4. المعادلة $(y^2-2xy)+x^2y'=0$. تقبل هذه المعادلة الحلّ الشاذ $y\equiv 0$، وعلى أيّ مجال لا ينعدم فيه y تُكتب هذه المعادلة بالشكل $\left(\frac{x^2}{y}\right)'=1$ ومن ثَمّ يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق

$$y(x)=\frac{x^2}{x+\kappa}$$

فمجموعة الحلول هي مجموعة التوابع المبيّنة أعلاه إضافة إلى الحل الشاذ $y\equiv 0$.

5. المعادلة $(x^2+y^2)y'-2xy=0$. تقبل هذه المعادلة الحلّ الخاص $y\equiv 0$ ، وهي تُكتب بالشكل $y'=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ فهي إذن معادلة متجانسة، لحلّها يمكننا أن نعرّف متحولاً جديداً $t=\dfrac{y}{x}$. فيكون لدينا $y'=t+xt'$ ومن ثَمّ

$$t+xt'=\frac{2t}{1+t^2}$$

أو $\dfrac{(1+t^2)t'}{t^3-t}=-\dfrac{1}{x}$ شريطة أن يكون $t\notin\{0,1,-1\}$. إذن يوجد في هذه الحالة ثابتٌ κ يُحقِّق

$$t-\frac{1}{t}=\frac{2\kappa}{x}$$

أو $y^2-x^2=2\kappa y$ ، وهذا يُكافئ $y(x)=\kappa+\varepsilon\sqrt{x^2+\kappa^2}$ مع $\varepsilon\in\{-1,1\}$. إذن مجموعة الحلول هي $y(x)=x$ و $y(x)=-x$ و $y(y)=0$ إضافة إلى التوابع: $x\mapsto\kappa+\varepsilon\sqrt{x^2+\kappa^2}$ حيث $\kappa\in\mathbb{R}$ و $\varepsilon\in\{-1,1\}$.

6. المعادلة $y^2+(x^2-xy)y'=0$. تقبل هذه المعادلة الحلّ الخاص $y\equiv 0$ ، وهي تُكتب بالشكل $y'=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$ فهي إذن معادلة متجانسة، لحلّها نعرّف متحولاً جديداً $t=\dfrac{y}{x}$. فيكون لدينا

$$t+xt'=\frac{t^2}{t-1}=t+\frac{t}{t-1}$$

أو $t'-\dfrac{t'}{t}=\dfrac{1}{x}$. إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق $\dfrac{e^t}{t}=\kappa x$. فالحل $x\mapsto y(x)$ معرّف ضمنيّاً بالعلاقة $e^{y/x}=\kappa y$.

7. المعادلة $xy'-y+xe^{y/x}=0$. تُكتب هذه المعادلة بالشكل $y'=\dfrac{y}{x}+e^{y/x}$ فهي إذن معادلة متجانسة، لحلّها نعرّف متحولاً جديداً $t=\dfrac{y}{x}$. فيكون لدينا $t+xt'=t+e^t$

أو $\frac{1}{x} = t'e^{-t}$. إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق $e^{-t} = \ln\frac{\kappa}{x}$. فالحل $x \mapsto y(x)$ معرّف بالعلاقة $y(x) = -x\ln\big(\ln(\kappa/x)\big)$.

8. المعادلة $2x+3y-5-(x+4y)y' = 0$. نلاحظ أنّ المستقيمين اللذين معادلتاهما $x+4y=0$ و $2x+3y-5=0$ يتقاطعان بالنقطة $(x_0,y_0)=(4,-1)$. لنعرّف إذن تابعاً لمتحوِّل جديد $z(t) = 1+y(t+4)$، فنجد بالعودة إلى المعادلة

$$2t+3z(t)-(t+4z(t))z'(t) = 0$$

أو $z'(t) = \frac{2t+3z}{t+4z}$، فإذا عرّفنا متحوِّلاً جديداً $p = \frac{z}{t}$ استنتجنا أنّ

$$\frac{2+3p}{1+4p} = p+tp'$$

أو $tp' = \frac{2+2p-4p^2}{1+4p}$، فإمّا أن يكون $p \equiv 1$ أو يكون $p = -\frac{1}{2}$، أو يكون

$$\frac{-2}{t} = p'\frac{1+4p}{(2p+1)(p-1)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{p'}{p-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2p'}{2p+1}$$

وعليه، يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق

$$(p-1)^5(2p+1) = \frac{\kappa}{t^6}$$

ومنه : $(z-t)^5(2z+t) = \kappa$. فإذا لاحظنا أنّ $y(x) = z(x-4)-1$ استنتجنا أنّ

$$(y-x+5)^5(2y+x-1) = \kappa$$

وهي المعادلة التي تعرّف ضمنيّاً حلول المعادلة المدروسة.

9. المعادلة $y+\sqrt{xy}-xy' = 0$. تُكتب هذه المعادلة بالشكل $y' = \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ فهي إذن معادلة متجانسة، لحلّها نعرّف متحولاً جديداً $t = \frac{y}{x}$. فيكون لدينا $t+xt' = t+\sqrt{t}$ أو $\frac{t'}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2x}$. إذن يوجد ثابتٌ κ يُحقِّق $\sqrt{t} = \ln\kappa\sqrt{|x|}$. فالحل $x \mapsto y(x)$ معرّف بالعلاقة

$$y(x) = x\ln^2\left(\kappa\sqrt{|x|}\right)$$

10. المعادلة $2x-4y+6+(x+y-3)y'=0$. نلاحظ أنّ المستقيمين اللذين تُعطى معادلتاهما بالعلاقتين $x+y-3=0$ و $2x-4y+6=0$ يتقاطعان بالنقطة $(x_0,y_0)=(1,2)$. لنعرّف إذن تابعاً لمتحوّل جديد $z(t)=y(t+1)-2$ ، فنجد بالعودة إلى المعادلة

$$2t-4z(t)+(t+z(t))z'(t)=0$$

أو $z'(t)=\dfrac{4z-2t}{z+t}$ ، فإذا عرّفنا متحوّلاً جديداً $p=\dfrac{z}{t}$ استنتجنا أنّ

$$\frac{4p-2}{p+1}=p+tp'$$

أو $tp'=\dfrac{-2+3p-p^2}{1+p}$ ، فإمّا أن يكون $p\equiv 1$ أو يكون $p=2$ أو يكون

$$\frac{-1}{t}=p'\frac{1+p}{(p-2)(p-1)}=-2\cdot\frac{p'}{p-1}+3\cdot\frac{p'}{p-2}$$

وعليه، يوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$\frac{(p-2)^3}{(p-1)^2}=\frac{\kappa}{t}$$

ومنه : $(z-2t)^3=\kappa(z-t)^2$. فإذا لاحظنا أنّ $y(x)=z(x-1)+2$ استنتجنا أنّ

$$(y-2x)^3=\kappa(y-x-1)^2$$

وهي المعادلة التي تعرّف ضمنياً حلول المعادلة المدروسة، إضافة إلى الحلّ الشاذ $y=x+1$.

11. المعادلة $y'-2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2=0$. نلاحظ أنّ المستقيمين اللذين تُعطى معادلتاهما بالعلاقتين $x+y-3=0$ و $2x-4y+6=0$ يتقاطعان بالنقطة $(3,-2)$. لنعرّف إذن تابعاً لمتحوّل جديد $z(t)=y(t+3)+2$ ، فنجد بالعودة إلى المعادلة

$$z'(t)=2\left(\frac{z(t)}{t+z(t)}\right)^2$$

أو $z'(t)=\dfrac{z^2}{(z+t)^2}2$ ، فإذا عرّفنا متحوّلاً جديداً $p=\dfrac{z}{t}$ استنتجنا أنّ

$$2\frac{p^2}{(p+1)^2} = p + tp'$$

أو $-p\dfrac{p^2+1}{(1+p)^2} = tp'$ ، فإمّا أن يكون $p \equiv 0$ أو يكون

$$-\frac{1}{t} = p'\frac{1+p^2+2p}{p(p^2+1)} = \frac{p'}{p} + \frac{2p'}{1+p^2}$$

وعليه، يوجد ثابتٌ κ يُحقّق

$$pe^{2\arctan p} = \frac{\kappa}{t}$$

ومنه : $z = t\tan\left(\dfrac{1}{2}\ln(\kappa/z)\right)$. فإذا لاحظنا أنّ $y(x) = z(x-3) - 2$ استنتجنا أنّ

$$y(x) + 2 = (x-3)\tan\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\kappa}{y(x)+2}\right)\right)$$

وهي المعادلة التي تعرّف ضمنيّاً حلول المعادلة المدروسة، إضافة إلى الحلّ الشاذ $y = x + 1$.

.12 المعادلة $2x + y + 1 - (4x + 2y - 3)y' = 0$. لنعرّف تابعاً مجهولاً جديداً $z = y + 2x - 1$ فيكون لدينا

$$z + 2 - (2z-1)(z'-2) = 0$$

أو $5z = (2z-1)z'$ ، فإمّا أن يكون $z \equiv 0$ أو يكون $5 = 2z' - \dfrac{z'}{z}$ ، فيوجد ثابتٌ κ يُحقّق : $\kappa z = e^{2z-5x}$. وعليه يكون

$$e^{2y} = \kappa\big(y + 2x - 1\big)e^{x+1}$$

وهي المعادلة التي تعرّف ضمنيّاً حلول المعادلة المدروسة، إضافة إلى الحلّ الشاذ $y = 1 - 2x$. ■

المعادلات التفاضليّة الخطِّية

1. عموميّات

في هذا الفصل يرمز E إلى فضاء شعاعيّ منظّم منتهي البعد على الحقل $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)، ويُمكن القارئ إذا أراد أن يفترض أنّ E هو الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ أو $\mathbb{C}^n$ مزوداً بنظيم. سنرمز أيضاً بالرمز $\mathcal{L}(E)$ إلى فضاء التطبيقات الخطِّية من E إلى E، الذي نزوّده، كما جرت العادة، بنظيم التطبيقات الخطِّية المستمرة.

1-1. تعريف. ليكن J مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $b : J \to E$ و $A : J \to \mathcal{L}(E)$ تابعين مستمرّين على J ويأخذان قيمهما في E و $\mathcal{L}(E)$ على الترتيب.

نسمّي **معادلة تفاضليّة خطِّية** كل معادلة من الشكل

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} - A(t)y = b(t) \qquad (\mathcal{E})$$

ونسمّي المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} - A(t)y = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

المعادلة التفاضليّة الخطِّية **"بدون طرف ثانٍ"** الموافقة للمعادلة $(\mathcal{E})$.

ونقول إنّ تابعاً $\varphi : J \to E$ **حلٌّ للمعادلة التفاضليّة** $(\mathcal{E})$ إذا وفقط إذا كان قابلاً للاشتقاق على J، ومُحقّقاً للشرط

$$\forall t \in J, \quad \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t)$$

وأخيراً، أيّاً كان (t_0, y_0) عنصراً من $J \times E$، نُسَمّي مسألة إيجاد حلٍّ φ للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ يُحقّق الشرط $\varphi(t_0) = y_0$ **مسألة كوشي**، أو **مسألة شرط البدء**، ونرمز إلى هذه المسألة بالرمز $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$.

2-1. مثال. في هذا المثال لدينا $E = \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$ و $\mathcal{L}(E) \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. ونتأمّل التابعين المستمرّين المعرّفين كما يأتي :

$$A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\, t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b : \mathbb{R} \to E,\, t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

عندئذ تُكافئ المعادلةُ التفاضليّة الخطِّية

$$\frac{\mathrm{d}\,Z}{\mathrm{d}\,t} = A(t)Z + b(t) \qquad (\mathcal{E})$$

جملة المعادلتين التفاضليّتين:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{x}{1+t^2} - \dfrac{t\,y}{1+t^2} + \dfrac{1}{1+t^2} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{t\,x}{1+t^2} + \dfrac{y}{1+t^2} + \dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

إذ وضعنا $Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. ونترك القارئ يتيقَّن أنّ التابع

$$\varphi : \mathbb{R} \to E,\ \varphi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\arctan t} \cos(\ln\sqrt{1+t^2}) - 1 \\ e^{\arctan t} \sin(\ln\sqrt{1+t^2}) \end{bmatrix}$$

هو حلٌّ للمعادلة التفاضليّة الخطّية $(\mathcal{E})$. وهو في الحقيقة حلٌّ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,0)}$.

وبوجه عام، في الحالة التي يكون فيها $E = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$ يمكننا مطابقة كلِّ تطبيق خطّي من $\mathcal{L}(E)$ مع مصفوفته في الأساس القانوني، فيكون $\mathcal{L}(E) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ومن ثَمّ إذا كان

$$A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ t \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b :\to E,\ t \mapsto \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

كافأت المعادلة التفاضلية $Y' = A(t)\cdot Y + b(t)$ جملة المعادلات التفاضليّة

$$\begin{array}{ccccccccc} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & = & a_{11}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}(t)x_n & + & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} & = & a_{n1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}(t)x_n & + & b_n(t) \end{array}$$

حيث $Y = {}^t[x_1,\ldots,x_n]$.

2. التابع المولِّد لحلول معادلة تفاضليّة خطّية

2-1. تمهيد. لتكن $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المستمرّة على مجال متراص $[a,b]$ من $\mathbb{R}$، وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}_+$. نعرّف، أياً كانت k من $\mathbb{N}$، المقدار $M_k = \sup\limits_{[a,b]} g_k$، ونفترض أنّ هناك t_0 في $[a,b]$، و λ في $\mathbb{R}_+^*$ تُحقّقان

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in [a,b], \quad g_n(t) \leq \lambda \left| \int_{t_0}^{t} g_{n-1}(s)\,\mathrm{d}\,s \right|$$

عندئذ يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n \leq \frac{\lambda^n (b-a)^n}{n!} M_0$$

الإثبات

في الحقيقة، يكفي أن نثبت بالتدريج على n صحة الخاصّة التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\forall t \in [a,b], \quad g_n(t) \leq \frac{\lambda^n \cdot |t-t_0|^n}{n!} M_0}_{\mathcal{P}_n}$$

من الواضح أنّ القضيّة $\mathcal{P}_0$ صحيحة. لنفترض صحة القضيّة $\mathcal{P}_n$ عندئذ:

- أياً كانت t من $[t_0,b]$ كان

$$g_{n+1}(t) \leq \lambda \int_{t_0}^{t} g_n(s)\,\mathrm{d}\,s \underset{\mathcal{P}_n}{\leq} \frac{\lambda^{n+1} M_0}{n!} \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^n\,\mathrm{d}\,s = \frac{\lambda^{n+1} M_0}{(n+1)!}(t-t_0)^n$$

- وأياً كانت t من $[a,t_0]$ كان

$$g_{n+1}(t) \leq \lambda \int_{t}^{t_0} g_n(s)\,\mathrm{d}\,s \underset{\mathcal{P}_n}{\leq} \frac{\lambda^{n+1} M_0}{n!} \int_{t}^{t_0} (t_0-s)^n\,\mathrm{d}\,s = \frac{\lambda^{n+1} M_0}{(n+1)!}(t_0-t)^n$$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة الخاصّة $\mathcal{P}_{n+1}$. وأخيراً بملاحظة أنّ $\left|t-t_0\right| \leq b-a$، أياً كانت t في المجال $[a,b]$، نجد

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b], \quad g_n(t) \leq \frac{\lambda^n (b-a)^n}{n!} M_0$$

وهذا يُثبتُ الخاصّة المطلوبة. ❐

2-2. مبرهنة. ليكن E فضاء شعاعيّاً منظّماً منتهي البُعد، وليكن $\mathcal{L}(E)$ فضاء التطبيقات الخطّية على E . وأخيراً نتأمّل تابعاً مستمراً $A : J \to \mathcal{L}(E)$ على مجال غير تافه J من $\mathbb{R}$ ، ونثبِّت نقطة t_0 من J .

حينئذ هناك تابع وحيد $X_{t_0} : J \to \mathcal{L}(E)$ قابل للاشتقاق على J ويُحقِّق ما يأتي :

① $X_{t_0}(t_0) = I_E$ و I_E هو التطبيق المطابق على E .

② $\forall t \in J,\ \ X'_{t_0}(t) = A(t) \circ X_{t_0}(t)$.

الإثبات

في هذا الإثبات نرمز بالرمز $\|\cdot\|$ إلى النظيم على E ، ونزوِّد $\mathcal{L}(E)$ بنظيم التطبيقات الخطّية المستمرّة من $\left(E,\|\cdot\|\right)$ إلى $\left(E,\|\cdot\|\right)$ ، الذي نرمز إليه بالرمز $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$.

➢ لنبدأ أوّلاً بإثبات الجزء المتعلّق بالوحدانيّة في المبرهنة. لنفترض أنّ X و Y تابعان قابلان للاشتقاق على J ، ويأخذان قيمهما في $\mathcal{L}(E)$ ، ويُحقّقان الشرطين ① و ② . عندئذ نعرّف التابع $Z = X - Y$. فيكون

$$\forall t \in J, \quad Z'(t) = A(t) \circ Z(t) \ \text{ و } \ Z(t_0) = 0$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall t \in J, \quad Z(t) = \int_{t_0}^{t} A(s) \circ Z(s)\,\mathrm{d}\,s \tag{1}$$

ليكن $[a,b]$ مجالاً متراصّاً كيفياً محتوىً في J وتنتمي إليه t_0 . حينئذ يُبرِّر استمرارُ التابعين $t \mapsto \left\|A(t)\right\|_{\mathcal{L}}$ و $t \mapsto \left\|Z(t)\right\|_{\mathcal{L}}$ على المجال $[a,b]$ وجودَ المقدارين

$$M_0 = \sup_{t\in[a,b]} \left\|Z(t)\right\|_{\mathcal{L}} \quad \text{ و } \quad \lambda = \sup_{t\in[a,b]} \left\|A(t)\right\|_{\mathcal{L}}$$

واستناداً إلى العلاقة (1) يمكننا أن نكتب

$$\forall t \in [a,b], \quad \left\|Z(t)\right\|_{\mathcal{L}} \le \lambda \left| \int_{t_0}^{t} \left\|Z(s)\right\|_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\,s \right|$$

فإذا استفدنا من التمهيد 2-1. بتطبيق نتيجته على المتتالية الثابتة $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $\forall t\in[a,b],\ g_n(t)=\|Z(t)\|_{\mathcal{L}}$ وجدنا

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad M_0\le\frac{\lambda^n(b-a)^n}{n!}M_0$$

ونستنتج، بجعل n تسعى إلى اللانهاية، أنّ $M_0=0$. إذن يكون التابع Z معدوماً على كلّ مجال $[a,b]$ محتوى في J وتنتمي إليه t_0، فهو معدوم على J، أي $X=Y$.

➢ لنثبت الآن جزء الوجود في المبرهنة. نعرّف بالتدريج متتالية التوابع $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من J إلى $\mathcal{L}(E)$ كما يأتي:

$$\begin{aligned}\forall t\in J,\ Z_0(t)&=0,\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall t\in J,\ Z_n(t)&=I_E+\int_{t_0}^{t}A(s)\circ Z_{n-1}(s)\,\mathrm{d}\,s\end{aligned}\tag{2}$$

ليكن $[a,b]$ مجالاً ما محتوى في J وتنتمي إليه t_0، ولنثبت التقارب المنتظم للمتتالية $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على المجال $[a,b]$. نعرّف متتالية التوابع $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بوضع

$$g_n:[a,b]\to\mathbb{R}_+,\ g_n(t)=\left\|Z_{n+1}(t)-Z_n(t)\right\|_{\mathcal{L}}$$

يتيح لنا استمرار التابعين $t\mapsto\left\|A(t)\right\|_{\mathcal{L}}$ و $t\mapsto g_n(t)$ على المجال $[a,b]$ تعريف المقدارين:

$$M_n=\sup_{t\in[a,b]}g_n(t)\quad \text{و}\quad \lambda=\sup_{t\in[a,b]}\left\|A(t)\right\|_{\mathcal{L}}$$

ونستنتج مباشرة من العلاقة (2) أنّ

$$\forall n\ge1,\forall t\in[a,b],\quad g_n(t)\le\lambda\left|\int_{t_0}^{t}g_{n-1}(s)\,\mathrm{d}\,s\right|$$

فإذا استفدنا من التمهيد 2-1. بتطبيق نتيجته على المتتالية $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ السابقة وجدنا

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad M_n\le\frac{\lambda^n(b-a)^n}{n!}\tag{3}$$

ولمّا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(b-a)^n/n!$ متقاربة، استنتجنا التقارب بالنظيم لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty}(Z_{n+1}-Z_n)$ على المجال $[a,b]$ وهذا يقتضي تقارب المتتالية $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام على المجال $[a,b]$. إذن لقد أثبتنا التقارب المنتظم للمتتالية $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على كلّ مجموعة متراصّة من J. لنرمز بالرمز X_{t_0} إلى نهاية هذه المتتالية.

بناءً على التعريف، تكون جميع حدود المتتالية $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ توابع مستمرّة على J، إذن ينتج من التقارب المنتظم على كلِّ مجموعة متراصّة لهذه المتتالية أنّ نهايتها X_{t_0} هي أيضاً تابع مستمر على J. لنثبت أنّ X_{t_0} يُحقِّق شروط المبرهنة. لهذا سنعرّف، أياً كانت t من J المقدار

$$\Delta(t) = X_{t_0}(t) - I_E - \int_{t_0}^{t} A(s)\circ X_{t_0}(s)\,\mathrm{d}\,s$$

ومن جديد نتأمّل مجالاً كيفياً $[a,b]$ محتوى في J وتنتمي إليه t_0، ونعرّف العدد λ بالعلاقة $\lambda = \sup_{t\in[a,b]} \left\| A(t)\right\|_{\mathcal{L}}$. لقد أثبتنا أنّ المتتالية $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة في (2) تحقِّق النتيجة (3) التي تُكتب بالشكل :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[a,b],\quad \left\|Z_{n+1}(t)-Z_n(t)\right\|_{\mathcal{L}} \le \frac{\lambda^n (b-a)^n}{n\,!}$$

فإذا استفدنا من المساواة $X_{t_0} - Z_n = \sum_{k=n}^{\infty}(Z_{k+1}-Z_k)$ استنتجنا

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[a,b],\quad \left\|X_{t_0}(t)-Z_n(t)\right\|_{\mathcal{L}} \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k (b-a)^k}{k\,!}$$

أو

$$(4)\quad \forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[a,b],\quad \left\|X_{t_0}(t)-Z_n(t)\right\|_{\mathcal{L}} \le \frac{\lambda^n (b-a)^n}{n\,!}e^{\lambda(b-a)}$$

ولكن من الواضح أنّه، أياً كانت t من J، و n من $\mathbb{N}^*$ فلدينا

$$\Delta(t) = X_{t_0}(t) - Z_n(t) - \int_{t_0}^{t} A(s)\circ (X_{t_0}(s)-Z_{n-1}(s))\,\mathrm{d}\,s$$

وبالاستفادة من (4) نجد

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[a,b],\quad \left\|\Delta(t)\right\|_{\mathcal{L}} \le \frac{\lambda^n (b-a)^n (n+1)}{n\,!}e^{\lambda(b-a)}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية في العلاقة السابقة نستنتج أنّ $\Delta(t)=0$ وذلك مهما تكن t من المجال $[a,b]$. ولأنّ $[a,b]$ مجال كيفي محتوى في J وتنتمي إليه t_0، نتج أنّ $\Delta = 0$ أو

$$\forall t\in J,\quad X_{t_0}(t) = I_E + \int_{t_0}^{t} A(s)\circ X_{t_0}(s)\,\mathrm{d}\,s$$

وتقتضي هذه المساواة وضوحاً أنّ X_{t_0} قابل للاشتقاق على J وأنّه يُحقِّق الشرطين ① و ②

وهكذا يكتمل الإثبات. ❒

2-3. **تعريف**. ليكن E فضاء شعاعيّاً منظّماً منتهي البُعد، وليكن $\mathcal{L}(E)$ فضاء التطبيقات الخطّية على E . وأخيراً ليكن $A : J \rightarrow \mathcal{L}(E)$ تابعاً مستمراً على مجال غير تافه J من $\mathbb{R}$.

نسمّي **التابع المولِّد لحلول المعادلة التفاضليّة** $y' = A(t)y$ ، التابع الوحيد

$$\mathcal{R} : J \times J \rightarrow \mathcal{L}(E), \ (t, t_0) \mapsto \mathcal{R}(t, t_0)$$

المعرّف استناداً إلى المبرهنة السابقة بالخاصّة الآتية: مهما تكن t_0 من J ، يكن

① $\mathcal{R}(t_0, t_0) = I_E$ و I_E هو التطبيق المطابق على E .

② $\forall t \in J, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathcal{R}(t, t_0) = A(t) \circ \mathcal{R}(t, t_0)$.

(أي $\mathcal{R}(t, t_0) = X_{t_0}(t)$ باستخدام رموز المبرهنة السابقة) .

2-4. **مثال**. لنتأمّل مجدّداً المثال 1-2. حيث

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

نترك للقارئ أن يتيقَّن أنّ التابع المولِّد لحلول المعادلة التفاضليّة $y' = A(t)y$ معرّف على $\mathbb{R}^2$ بالعلاقة

$$\mathcal{R}(t, t_0) = e^{\arctan t - \arctan t_0} \cdot \begin{bmatrix} \cos \ln \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t_0^2}} & -\sin \ln \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t_0^2}} \\ \sin \ln \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t_0^2}} & \cos \ln \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t_0^2}} \end{bmatrix}$$

2-5. **مبرهنة**. في هذه المبرهنة نحتفظ برموز التعريف 2-3.

① أيّاً كانت (t_0, y_0) من $J \times E$ قَبِلتْ مسألة كوشي

$$\mathbb{P}_{(t_0,y_0)} : \begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

حلّاً، وحلّاً واحداً فقط، معرّفاً على J بالعلاقة $t \mapsto \mathcal{R}(t, t_0)\,y_0$.

② أيّاً كانت (t, u, v) من J^3 كان

$$\mathcal{R}(t, u) \circ \mathcal{R}(u, v) = \mathcal{R}(t, v)$$

③ أيّاً كانت (t, u) من J^2 كان $\mathcal{R}(t, v)$ تطبيقاً خطّيّاً قَلوباً وتحقّقت المساواة

$$(\mathcal{R}(t, u))^{-1} = \mathcal{R}(u, t)$$

④ إذا رمزنا بالرمز $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ إلى مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $\mathcal{H} : y' = A(t)y$، كانت المجموعة $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد وكان $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \dim E$، وبتعبير أكثر دقّة، كان التطبيق : $\mathcal{T} : E \to \mathcal{S}_{\mathcal{H}},\ y_0 \mapsto \mathcal{R}(\cdot, t_0)y_0$ تقابلاً خطّياً بين E و $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

⑤ أيّاً كان التابع المستمر $b : J \to E$، و (t_0, y_0) من $J \times E$ قَبِلَتْ مسألة كوشي

$$\mathbb{P}_{(t_0,y_0)} : \begin{cases} y' = A(t)y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

حلّاً، وحلّاً واحداً فقط، معرّفاً على J بالعلاقة

$$t \mapsto \mathcal{R}(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{R}(t, s)b(s)\,\mathrm{d}\,s$$

الإثبات

① للبرهان على وحدانيّة حل مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ للمعادلة $y' = A(t)y$ نفترض جدلاً وجود حلّين لهذه المسألة معرّفين على J، ولْيكونا z_1 و z_2. عندئذ نضع $z = z_1 - z_2$ فيكون $z(t_0) = 0$ و $z' = A(t)z$. وهذا يقتضي

$$\forall t \in J, \quad z(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)z(s)\,\mathrm{d}\,s \tag{1}$$

ليكن $[a, b]$ مجالاً متراصّاً كيفياً محتوى في J وتنتمي إليه t_0. حينئذ، بالاستفادة من استمرار التابعين $t \mapsto \|A(t)\|_{\mathcal{L}}$ و $t \mapsto \|z(t)\|$ على المجال المتراص $[a, b]$، يمكننا تعريف

$$M_0 = \sup_{t\in[a,b]} \left\|z(t)\right\| \quad \text{و} \quad \lambda = \sup_{t\in[a,b]} \left\|A(t)\right\|_{\mathcal{L}}$$

واستناداً إلى العلاقة (1) يمكننا أن نكتب

$$\forall t \in [a, b], \quad \left\|z(t)\right\| \le \lambda \left| \int_{t_0}^{t} \left\|z(t)\right\| \mathrm{d}\,s \right|$$

فإذا استفدنا من التمهيد 2-1. بتطبيق نتيجته على المتتالية الثابتة $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $\forall t \in [a, b],\ g_n(t) = \|z(t)\|$ وجدنا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_0 \le \frac{\lambda^n (b - a)^n}{n!} M_0$$

ونستنتج، بجعل n تسعى إلى اللانهاية، أنّ $M_0 = 0$. إذن يكون التابع z معدوماً على كلِّ مجال $[a, b]$ محتوى في J وتنتمي إليه t_0، فهو معدوم على J، أي $z_1 = z_2$.

أمّا للبرهان على وجود حل مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ للمعادلة التفاضليّة $y' = A(t)y$ ،
فنضع بالتعريف $\varphi : J \to E, \varphi(t) = \mathcal{R}(t,t_0)\,y_0$ ، ونتوثّق بسهولة أنّ φ هو الحل المنشود.

② ليكن y_0 من E ، و (u,v) من J^2 . ولنعرّف التابعين

$$\begin{aligned}\varphi : J \to E,\quad \varphi(t) = \mathcal{R}(t,u)\circ\mathcal{R}(u,v)\,y_0\\ \psi : J \to E,\quad \psi(t) = \mathcal{R}(t,v)\,y_0\end{aligned}$$

من الواضح أنّ كلاً من التابعين φ و ψ هو حلٌّ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(u,\mathcal{R}(u,v)y_0)}$ للمعادلة التفاضليّة $y' = A(t)y$ ، فهما متساويان بمُقتضى وحدانيّة هذا الحل التي أثبتناها في ① . إذن

$$\forall y_0 \in E, \forall t \in J,\quad \mathcal{R}(t,u)\circ\mathcal{R}(u,v)y_0 = \mathcal{R}(t,v)y_0$$

وهذا يُثبتُ، في حالة (t,u,v) من J^3 ، أنّ

$$\mathcal{R}(t,u)\circ\mathcal{R}(u,v) = \mathcal{R}(t,v)$$

③ إذا وضعنا $v = t$ في النتيجة السابقة وجدنا

$$\forall (t,u) \in J^2,\quad \mathcal{R}(t,u)\circ\mathcal{R}(u,t) = \mathcal{R}(t,t) = I_E$$

وهذا يُثبتُ أنّ $\mathcal{R}(t,u)$ قَلوبٌ وأنّ $\left(\mathcal{R}(t,u)\right)^{-1} = \mathcal{R}(u,t)$.

④ من الواضح أنّ $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ فضاء شعاعي. وكذلك فإنّ كوْن التطبيق

$$\mathcal{T} : E \to \mathcal{S}_{\mathcal{H}},\quad y_0 \mapsto \mathcal{R}(\cdot,t_0)\,y_0$$

تطبيقاً خطّياً هو أمرٌ بسيط ونترك التحقُّق للقارئ. من ناحية أخرى، نرى أنّ $\mathcal{T}$ هو تقابلٌ يُعطى تقابله العكسي $\mathcal{T}^{-1}$ بكلِّ بساطة بالصيغة:

$$\mathcal{T}^{-1} : \mathcal{S}_{\mathcal{H}} \to E,\ y \mapsto y(t_0)$$

ولأنّ $\mathcal{T}$ تقابل خطّي نستنتج أنّ بُعد الفضاء الشعاعي $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ يساوي بُعد الفضاء E .

⑤ إنّ وحدانية حل مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة

$$y' = A(t)y + b(t)$$

أمر واضح استناداً إلى ① . وحتّى يكتمل الإثبات يكفي أن نثبت أنّ التابع

$$\Phi : J \to E, \Phi(t) = \mathcal{R}(t,t_0)y_0 + \mathcal{R}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\mathcal{R}(t_0,s)b(s)\,\mathrm{d}\,s$$

هو حلُّ المسألة المدروسة، وهذا تحقُّق مباشر نترك تفاصيله للقارئ. ❐

6-2. **ملاحظة**. نرى بنتيجة المبرهنة السابقة أنّ مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة الخطّية:

$$\mathcal{L} : y' = A(t)y + b(t)$$

التي نرمز إليها بالرمز $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ هي من الشكل

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \psi + \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{\psi + \varphi : \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\right\}$$

و ψ هو **"حلّ خاص"** للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{L}$ ، و $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ هو الفضاء الشعاعي الذي بعده يساوي $n = \dim E$ ، المكوَّن من حلول المعادلة التفاضليّة الخطّية بدون طرف ثان :

$$\mathcal{H} : y' = A(t)\,y$$

وعليه إذا كان لدينا أساس معلوم $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ لفضاء حلول المعادلة بدون طرف ثان $\mathcal{H}$ ، يكفي إيجاد "حلٍّ خاصّ ψ" للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{L}$ ، حتى نحصل على جميع حلول المعادلة $\mathcal{L}$. وهنا يمكننا اتباع ما يسمّى عادة **"طريقة جعل الثوابت متغيِّرة"**.

تقوم طريقة جعل الثوابت متغيِّرة على البحث عن الحل الخاص المنشود ψ بالصيغة

$$\forall t \in J, \quad \psi(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\varphi_k(t)$$

حيث $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ هي توابع قابلة للاشتقاق على J يُطلب تعيينها.

في الحقيقة، باشتقاق التابع السابق والتعويض في المعادلة $\mathcal{L}$ التي يُفترض أن يكون ψ حلّاً لها نجد

$$(*) \qquad \forall t \in J, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k'(t)\varphi(t) = b(t)$$

ولكن سنرى في الفقرة الآتية أنّ الجملة $\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t) \ldots, \varphi_n(t)\right)$ هي أساس للفضاء E أيّاً كانت t من J . وعليه تفيد جملة المعادلات الخطّية $(*)$، (هذه جملة معادلات جبريّة وليست تفاضليّة)، في حساب التوابع $(\lambda_1', \ldots, \lambda_n')$، ومن ثَمّ نحصل على $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ بحساب توابع أصليّة.

7-2. **مثال**. لنتأمّل جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -(2t+t^3)\,x + (1+t^2)\,y + \dfrac{1}{1+t^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -(3t^2+t^4)\,x + (2t+t^3)\,y + \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

هنا الفضاء E هو $\mathbb{R}^2 \cong \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$، وإذا عرّفنا

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad t \mapsto \begin{bmatrix} -2t-t^3 & 1+t^2 \\ -3t^2-t^4 & 2t+t^3 \end{bmatrix}$$

نجد أنّه بوضع $Y = {}^t[x,y]$ تُكتب جملة المعادلات التفاضليّة المدروسة بالشكل البسيط

$$\mathcal{L} : \quad Y' = A(t)Y + b(t)$$

يوحي شكل المعادلة التفاضلية بدون طرف ثان :

$$\mathcal{H} : \quad Y' = A(t)Y$$

بإمكان قبول المعادلة $\mathcal{H}$ حلولاً بصيغة توابع كثيرات الحدود. وبالبحث نجد أنّ التابعين

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to E, \ \ \varphi_1(t) = \begin{bmatrix} 1-t^2 \\ -t^3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to E, \ \ \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1+t^2 \end{bmatrix}$$

هما حلاّن مستقلاّن خطّياً للمعادلة $\mathcal{H}$. ولكنّ مجموعة حلول المعادلة $\mathcal{H}$ أي $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ هي فضاء شعاعي بعده يساوي 2. إذن (φ_1,φ_2) هو أساس للفضاء $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. وللبحث عن حلٍّ خاص للمعادلة $\mathcal{L}$ نطبّق طريقة جعل الثوابت متغيِّرة، أي نبحث عن حل خاص ψ للمعادلة $\mathcal{L}$ تُكتب صيغته بالشكل : $\psi(t) = \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t)$، حيث λ_1 و λ_2 هما تابعان يقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$. وبالتعويض في المعادلة $\mathcal{L}$ نجد

$$\begin{aligned} (1-t^2)\lambda_1'(t) \ + \ t\,\lambda_2'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\ -t^3\lambda_1'(t) \ + \ (1+t^2)\lambda_2'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

فإذا ضربنا المعادلة الأولى بالمقدار $1+t^2$ والثانية بالمقدار $-t$ ثُمّ جمعنا المعادلتين وجدنا

$$\lambda_1'(t) = 1 - \frac{t}{1+t^2}$$

ثُمّ إذا جمعنا المعادلة الأولى بعد ضربها بالمقدار t^3 إلى الثانية بعد ضربها بالمقدار $(1-t^2)$ وجدنا

$$\lambda_2'(t) = \frac{t^3-t^2+1}{1+t^2} = t-1+\frac{2-t}{1+t^2}$$

إذن يمكننا أن نختار

$$\lambda_1(t) = t - \ln\sqrt{1+t^2}$$
$$\lambda_2(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + 2\arctan t - \ln\sqrt{1+t^2}$$

وهكذا نجد الحل الخاص $\psi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_1\varphi_2$ للمعادلة $\mathcal{L}$:

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} t - t^2 - \dfrac{t^3}{2} + 2t\arctan t - (1+t-t^2)\ln\sqrt{1+t^2} \\ -t + \dfrac{t^2}{2} - t^3 - \dfrac{t^4}{2} + 2(1+t^2)\arctan t + (1+t^2-t^3)\ln\sqrt{1+t^2} \end{bmatrix}$$

وعليه يكون الحل العام للجملة المدروسة هو

$$x(t)=\lambda+(\mu+1)t-(1+\lambda)t^2-\frac{t^3}{2}+2t\arctan t-(1+t-t^2)\ln\sqrt{1+t^2}$$
$$y(t)=\mu+(\mu+\frac{1}{2})t^2-(1+\lambda)t^3-\frac{t^4}{2}+2(1+t^2)\arctan t-(1+t^2-t^3)\ln\sqrt{1+t^2}$$

حيث λ و μ ثابتان اختياريان.

3. تابع ڤرونسكي لجملة من حلول معادلة تفاضليّة خطّية

3-1. **تعريف**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C})$، و $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ أساساً للفضاء E. وليكن $A : J \to \mathcal{L}(E)$ تابعاً مستمراً على مجالٍ غير تافه J. ولتكن $\mathcal{F} = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ جملة من $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة الخطّية بدون طرف ثان : $\mathcal{H} : y' = A(t)y$. عندئذ نسمّي التابع

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}} : J \to \mathbb{K},\quad t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

تابع ڤرونسكي Wronski للجملة $\mathcal{F}$.

سنبرهن في هذه الفقرة أنّه بالإمكان حساب التابع $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ دون حلّ المعادلة $\mathcal{H}$. ولكننا سنحتاج أوّلاً إلى التمهيد الآتي من الجبر الخطّي :

3-2. تمهيد. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منتهي البُعد على حقل $\mathbb{K}$ ، و $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E . عندئذ أياً كان التطبيق الخطّي u من $\mathcal{L}(E)$ وأيّاً كان $(x_1, \ldots, x_n)$ من E^n فلدينا

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n) = \operatorname{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

الإثبات

لنعرّف التابع $f : E^n \to \mathbb{K}$ بالعلاقة

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

يتيقّن القارئ بسهولة أنّ f هو شكل $n-$ خطّيٌّ متناوبٌ على E ، ولمّا كان بُعد فضاء الأشكال الـ $n-$ خطّية المتناوبة على E يساوي 1 ، ويقبل $\det_{\mathcal{B}}$ أساساً له[1]، استنتجنا وجود ثابت λ في $\mathbb{K}$ يُحقّق $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. ولكن

$$\lambda = \lambda \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = f(e_1, \ldots, e_n) = \operatorname{tr}(u)$$

إذن $f = \operatorname{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$ ، وهذه هي النتيجة المطلوبة. ❐

3-3. مبرهنة. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)، و $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ أساساً للفضاء E . وليكن $A : J \to \mathcal{L}(E)$ تابعاً مستمراً على مجالٍ غير تافه J . ولتكن $\mathcal{F} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ جملة من $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة الخطّية بدون طرف ثان : $\mathcal{H} : y' = A(t)y$. عندئذ أياً كانت t_0 من J فإنّ

$$\forall t \in J, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) \, \mathrm{d}\, s\right)$$

و

$$\forall (t, t_0) \in J^2, \quad \det \mathcal{R}(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) \, \mathrm{d}\, s\right)$$

[1] راجع بحث المحدّدات من كتاب الجبر الجزء الثاني للمؤلّف.

الإثبات

في الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{W}'_{\mathcal{F}} &= \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1},\varphi'_k,\varphi_{k+1},\ldots,\varphi_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1},A\varphi_k,\varphi_{k+1},\ldots,\varphi_n)\\ &= \operatorname{tr} A\cdot \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \operatorname{tr} A\cdot \mathcal{W}_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

وعليه، أياً كانت t_0 من J، كان

$$\forall t\in J,\quad \mathcal{W}_{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{W}_{\mathcal{F}}(t_0)\cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,\mathrm{d}\,s\right)$$

ونحصل على الخاصّة المتعلّقة بالمقدار $\det \mathcal{R}(t,t_0)$ بتطبيق النتيجة السابقة على الجملة $\mathcal{F}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ المعرّفة بالعلاقات $\forall k\in\{n,\ldots,1\},\ \varphi_k=\mathcal{R}(\cdot,t_0)e_k$. ❒

4-3. **نتيجة**. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً منتهي البُعد على الحقل $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$). وليكن $A:J\to\mathcal{L}(E)$ تابعاً مستمراً على مجالٍ غير تافه J. وأخيراً لتكن الجملة $\mathcal{F}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ أساساً للفضاء $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة الخطّية بدون طرف ثان : $\mathcal{H}: y'=A(t)\,y$. عندئذ تكون الجملة $(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ أساساً للفضاء E أيّاً كان t من J.

4. المعادلات التفاضليّة الخطّية السلّميّة من المرتبة n

1-4. **تعريف**. ليكن J مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، ولتكن $a_{n-1},\ldots,a_0$ و f توابع مستمرّة على J وتأخذ قيمها في $\mathbb{K}$. نسمّي **معادلة تفاضليّة خطِّية سلّميّة من المرتبة n** كلَّ معادلة تفاضليّة من الشكل

$$(\mathcal{L})\qquad y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)y'+a_0(t)y=f(t)$$

ونسمّي المعادلة التفاضليّة

$$(\mathcal{H})\qquad y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)y'+a_0(t)y=0$$

المعادلة التفاضليّة الخطِّية **"بدون طرف ثانٍ"** الموافقة للمعادلة $(\mathcal{L})$.

ونقول إنّ تابعاً $\varphi : J \to \mathbb{K}$ **حلٌّ للمعادلة التفاضليّة** $(\mathcal{L})$ إذا، وفقط إذا كان قابلاً للاشتقاق n مرّة على J، وحقّق على J، الشرط

$$\varphi^{(n)} + a_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \cdots + a_1\varphi' + a_0\varphi = f$$

وأخيراً، أيّاً كان $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1})$ من $J \times \mathbb{K}^n$، نُسَمِّ مسألة إيجاد حلٍّ φ للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{L})$ يُحقّق الشروط : $\varphi^{(k)}(t_0) = x_k$، $(0 \leq k < n)$، **مسألة كوشي**، أو **مسألة شرط البدء**، ونرمز إلى هذه المسألة بالرمز $\mathbb{P}_{(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1})}$.

☜ في الحقيقة، تؤول دراسة المعادلات التفاضليّة من الشكل $(\mathcal{L})$ إلى دراسة المعادلات التفاضليّة الخطّية من المرتبة الأولى التي درسناها في بداية هذا الفصل.

لنرمز بالرمز $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ إلى مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{L})$، أي إلى مجموعة التوابع $\varphi : J \to \mathbb{K}$، التي تقبل الاشتقاق n مرّة على J، وتُحقّق على J، الشرط

$$\varphi^{(n)} + a_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \cdots + a_1\varphi' + a_0\varphi = f$$

ثُمّ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$Y' = A(t)Y + b(t) \tag{$\vec{\mathcal{L}}$}$$

وقد عرّفنا

$$A : J \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$b : J \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}$$

ولنرمز بالرمز $\mathcal{S}_{\vec{\mathcal{L}}}$ إلى مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(\vec{\mathcal{L}})$، أي إلى مجموعة التوابع $\Phi : J \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}^n) \cong \mathbb{K}^n$، التي تقبل الاشتقاق على J، وتُحقّق

$$\forall t \in J, \quad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) + b(t)$$

عندئذ يكون التطبيق

$$T : \mathcal{S}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{S}_{\vec{\mathcal{L}}},\quad \varphi \mapsto {}^{t}\left[\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right]$$

تقابلاً، تقابله العكسي هو

$$T^{-1} : \mathcal{S}_{\vec{\mathcal{L}}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{L}},\quad {}^{t}\left[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\right] \mapsto \varphi_1$$

وفي الحالة التي يكون فيها $f = 0$ ، أو بقول مُكافئ $b = 0$، يكون التطبيق T تقابلاً خطّياً.

نستنتج إذن من دراستنا العامّة للمعادلات الخطيّة من النمط $(\vec{\mathcal{L}})$، النتائج الآتية حول المعادلات التفاضليّة الخطّية السلّميّة من المرتبة n.

2-4.مبرهنة. ليكن J مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$ ، ولتكن $a_{n-1}, \ldots, a_0$ و f توابع مستمرّة على J وتأخذ قيمها في $\mathbb{K}$. ولنتأمّل معادلة تفاضليّة خطّية سلّميّة من المرتبة n:

$$(\mathcal{L})\qquad y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = f(t)$$

والمعادلة التفاضليّة الخطّية **"بدون طرف ثانٍ"** الموافقة لها:

$$(\mathcal{H})\qquad y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0$$

① إنّ مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{H})$، ولتكن $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ ، هي فضاء شعاعي بُعده يساوي n على $\mathbb{K}$.

② إنّ مجموعة حلول $(\mathcal{L})$، ولتكن $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ ، هي من الشكل $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \psi + \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. حيث ψ هو حلٌّ خاص للمعادلة $(\mathcal{L})$، أي نحصل على الحلّ العام للمعادلة $(\mathcal{L})$ بأن نضيف إلى الحلّ العامّ للمعادلة $(\mathcal{H})$ حلّاً خاصاً لها.

③ أيّاً كان $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1})$ من $J \times \mathbb{K}^n$ ، تقبل المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{L})$ حلّاً وحلّاً واحداً فقط لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1})}$.

④ إذا كان $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ أساساً للفضاء الشعاعي $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ ، فيمكننا الحصول على حلّ خاص للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{L})$ بتطبيق طريقة جعل الثوابت متغيِّرة، أي نبحث عن حل خاص ψ من الصيغة $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\varphi_k(t)$ للمعادلة $(\mathcal{L})$، والتوابع $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ توابع قابلة للاشتقاق على J ، ومشتقّاتها معيّنة بجملة المعادلات الخطيّة الجبريّة الآتية:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1'\varphi_1 & + & \lambda_2'\varphi_2 & +\cdots+ & \lambda_n'\varphi_n & = 0 \\
\lambda_1'\varphi_1' & + & \lambda_2'\varphi_2' & +\cdots+ & \lambda_n'\varphi_n' & = 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\lambda_1'\varphi_1^{(k)} & + & \lambda_2'\varphi_2^{(k)} & +\cdots+ & \lambda_n'\varphi_n^{(k)} & = 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\lambda_1'\varphi_1^{(n-1)} & + & \lambda_2'\varphi_2^{(n-1)} & +\cdots+ & \lambda_n'\varphi_n^{(n-1)} & = f
\end{array}$$

⑤ إذا كانت $\mathcal{F} = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ جملة من الفضاء الشعاعي $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$، فإننا نُعرِّف تابع ڤرونسكي $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} : J \to \mathbb{K}$ لهذه الجملة كما يلي :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}}(t) = \det\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

وهو يُحقِّق

$$\forall (t,t_0) \in J^2,\quad \mathcal{W}_{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{W}_{\mathcal{F}}(t_0)\cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)\,\mathrm{d}\,s\right)$$

3-4. **ملاحظة مهمّة**. لنتأمّل الحالة الخاصّة لمعادلة تفاضليّة خطّية سلّميّة من المرتبة 2:

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f \qquad (\mathcal{L}_2)$$

حيث a_0 و a_1 و f توابع مستمرّة على J وتأخذ قيمها في $\mathbb{K}$. ولنفترض أننا نعرف حلّاً خاصّاً $\varphi : J \to \mathbb{K}$ للمعادلة التفاضليّة الخطّيّة **"بدون طرف ثانٍ"** الموافقة للمعادلة $(\mathcal{L}_2)$:

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \qquad (\mathcal{H}_2)$$

فإذا كان φ **لا ينعدم على J**. عندئذ يُمكننا إيجاد الحلّ العام للمعادلة $(\mathcal{L}_2)$ بأن نبحث عنه بالصيغة $\psi = z\cdot\varphi$ و z هو تابع مجهول يجب تعيينه.

في الحقيقة، يكون ψ حلّاً للمعادلة $(\mathcal{L}_2)$ إذا وفقط إذا كان z حلّاً للمعادلة التفاضليّة الآتية :

$$z'' + \left(a_1(t) + \frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)z' = \frac{f(t)}{\varphi(t)}$$

ومن اليسير تعيين z' من هذه المعادلة، لأنّها خطيّة من المرتبة الأولى بالنسبة إلى z'، ثُمّ يجري إيجاد z بحساب تابع أصلي.

4-4. **مثال**. لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$(1+x)\,y'' - 2y' + (1-x)\,y = x\,e^{-x} \tag{1}$$

كي تأخذ هذه المعادلة شكلها النظاميّ لا بُدّ لنا أنّ نقسم طرفيها على $x+1$، وعليه فإنّ مجال الدراسة J هو أحد المجالين $]-\infty,-1[= I_1$ أو $I_2 =]-1,+\infty[$.

نلاحظ بسهولة أنّ التابع $x \mapsto e^x$ على J هو حلٌّ خاص للمعادلة بدون طرف ثان

$$(1+x)\,y'' - 2y' + (1-x)\,y = 0$$

وهو لا ينعدم على J. إذن لنبحث عن الحلّ العام للمعادلة (1) على هيئة تابع من الشكل

$$x \mapsto y(x) = z(x)\,e^x$$

بالتعويض في (1) نجد

$$(1+x)(z''e^x + 2z'e^x + ze^x) - 2(z'e^x + ze^x) + (1-x)ze^x = xe^{-x}$$

وبالإصلاح نجد

$$z'' + \frac{2x}{1+x}z' = \frac{x}{1+x}e^{-2x} \tag{2}$$

وهنا نستخدم التقنيّات المألوفة، لمّا كان $x \mapsto \ln\dfrac{e^{2x}}{(1+x)^2}$ تابعاً أصلياً على J للتابع $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x}$، استنتجنا من (2) أنّ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{e^{2x}}{(1+x)^2}z'\right) = \frac{x}{(1+x)^3} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}$$

وعليه يوجد ثابت λ يُحقّق

$$\frac{e^{2x}}{(1+x)^2}z' = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + \lambda$$

أو

$$z' = -\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + \lambda(x+1)^2e^{-2x}$$

وبالمكاملة نجد أنّ

$$z = \frac{x+1}{2}e^{-2x} - \frac{\lambda}{4}\left(2x^2+6x+5\right)e^{-2x} + \nu$$

أو، لأنّ λ ثابت اختياري،

$$z = \frac{x+1}{2}e^{-2x} + \mu\Big(2x^2 + 6x + 5\Big)e^{-2x} + \nu$$

وبالعودة إلى y نجد أنّ الحلّ العام للمعادلة (1) على J يُعطى بالعلاقة

$$\forall x \in J, \quad y(x) = \frac{x+1}{2}e^{-x} + \mu\Big(2x^2 + 6x + 5\Big)e^{-x} + \nu\, e^{x}$$

لنعرّف إذن التوابع

$$\begin{aligned}
\psi^+ &: I_2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{2}e^{-x},\\
\psi^- &: I_1 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+1}{2}e^{-x}\\
\varphi_1^+ &: I_2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Big(2x^2 + 6x + 5\Big)e^{-x},\\
\varphi_1^- &: I_1 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Big(2x^2 + 6x + 5\Big)e^{-x}\\
\varphi_2^+ &: I_2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{x},\\
\varphi_2^- &: I_1 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{x}
\end{aligned}$$

فتكون مجموعة حلول المعادلة (1) على $I_1 = \left]-\infty, -1\right[$ هي

$$\mathcal{S}_1 = \Big\{\psi^- + \alpha\,\varphi_1^- + \beta\,\varphi_2^- : (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\Big\}$$

ومجموعة حلول المعادلة (1) على $I_2 = \left]-1, +\infty\right[$ هي

$$\mathcal{S}_2 = \Big\{\psi^+ + \gamma\,\varphi_1^+ + \delta\,\varphi_2^+ : (\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2\Big\}$$

وهذه النتيجة تتطابق مع دراستنا النظريّة.

لنبحث عن حلول المعادلة (1) المعرّفة على $\mathbb{R}$، في حال وجودها. لنفترض أنّه يوجد حلٌّ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ لهذه المعادلة التفاضليّة. عندئذ يكون $g_{|I_1} \in \mathcal{S}_1$ و $g_{|I_2} \in \mathcal{S}_2$، وعليه توجد في $\mathbb{R}$ ثوابت $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ تُحقّق

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Rightarrow \quad g(x) = \psi^-(x) + \alpha\,\varphi_1^-(x) + \beta\,\varphi_2^-(x)\\
x > -1 \quad &\Rightarrow \quad g(x) = \psi^+(x) + \gamma\,\varphi_1^+(x) + \delta\,\varphi_2^+(x)
\end{aligned}$$

ولكن، يجب أن يقبل التابع g الاشتقاق مرّتين على $\mathbb{R}$، وبوجه خاص عند النقطة $x=-1$. ونترك القارئ يتيقّن بحساب بسيط أنّ قابليّة الاشتقاق مرّتين للتابع g عند -1 تُكافئ الشرط $\alpha\, e+\beta\, e^{-1}=\gamma\, e+\delta\, e^{-1}$، فإذا عرّفنا الثابت η بالعلاقة:

$$\eta=\alpha\, e^2+\beta=\gamma\, e^2+\delta$$

أصبح لدينا، في حالة x من $\mathbb{R}$، ما يأتي :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}e^{-x}+\alpha\Big(\big(2x^2+6x+5\big)e^{-x}-e^{2+x}\Big)+\eta e^{x} & : x\le -1\\ \dfrac{x+1}{2}e^{-x}+\gamma\Big(\big(2x^2+6x+5\big)e^{-x}-e^{2+x}\Big)+\eta e^{x} & : x> -1\end{cases}$$

وعليه، إذا عرّفنا التوابع $\tilde{\psi}$، $\tilde{\varphi}_1$، $\tilde{\varphi}_2$، $\tilde{\varphi}_1$ على $\mathbb{R}$ بالعلاقات :

$$\tilde{\psi}(x)=\big(x+1\big)e^{-x}/2$$

$$\tilde{\varphi}_1(x)=\begin{cases}\big(2x^2+6x+5\big)e^{-x}-e^{2+x} & : x\le -1\\ 0 & : x>-1\end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}_2(x)=e^{x}$$

$$\tilde{\varphi}_3(x)=\begin{cases}0 & : x\le -1\\ \big(2x^2+6x+5\big)e^{-x}-e^{2+x} & : x>-1\end{cases}$$

استنتجنا أنّ

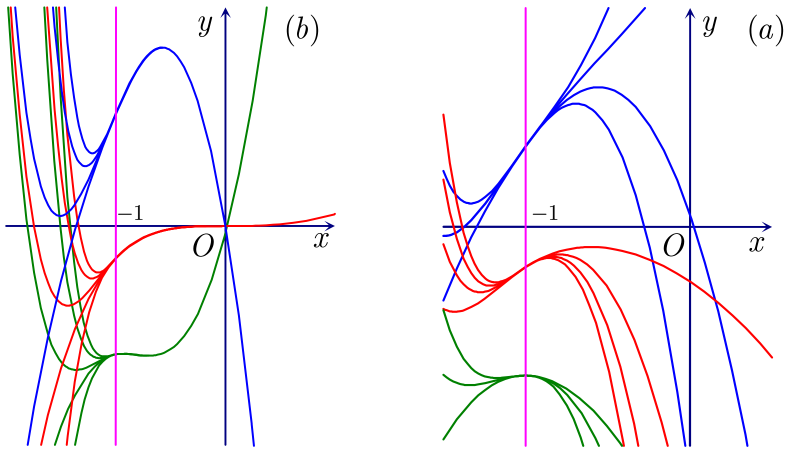
$$g=\tilde{\psi}+\alpha\,\tilde{\varphi}_1+\eta\,\tilde{\varphi}_2+\gamma\,\tilde{\varphi}_3$$

وبالعكس، كلُّ تابع من هذا النمط هو حلٌّ للمعادلة التفاضليّة (1) معرّفٌ على كامل $\mathbb{R}$.

ويجدر هنا أن نلاحظ ما يلي : لتكن (x_0,y_0,v_0) من $\mathbb{R}^3$، نميِّز الحالتين الآتيتين:

- ♦ إذا كانت $x_0\neq -1$ فيوجد عدد لا نهائي من الحلول المعرّفة على $\mathbb{R}$ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(x_0,y_0,v_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة (1). ويوجد حلٌّ وحيد لهذه المسألة معرّف على المجال I_1 أو I_2 الذي تنتمي إليه النقطة x_0 (انظر الشكل b).

- أمّا إذا كانت $x_0 = -1$ ، فهنا أيضاً يمكننا أن نميِّز حالتين:
  - إمّا أن يكون $y_0 = v_0 + e/2$ وعندئذ يكون هناك عدد لا نهائي من الحلول المعرّفة على $\mathbb{R}$ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(x_0,y_0,v_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة (1) .
  - أو أن يكون $y_0 \neq v_0 + e/2$ وحينئذ لا يكون هناك أيّ حلٍّ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(x_0,y_0,v_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة (1) . (انظرالشكل a) .



5. جمل المعادلات التفاضليّة الخطيّة بأمثال ثابتة

5-1. تعريف. لتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، ولتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، و $\mathbb{K}$ هو حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ ، أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. ثُمَّ ليكن $b : J \to \mathbb{K}^n$ تابعاً مستمرّاً على مجال غير تافه J من $\mathbb{R}$. نسمّي كلَّ معادلة تفاضليّة من النمط

$$y' = Ay + b(t)$$

جملة معادلات تفاضليّة خطيّة بأمثال ثابتة.

لنذكّر بأنّ التابع المولِّد لحلول المعادلة التفاضليّة $y' = Ay$ ، هو التابع الوحيد

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \; (t,t_0) \mapsto \mathcal{R}(t,t_0)$$

الذي يُحقِّق الخاصّة الآتية: مهما تكن t_0 من $\mathbb{R}$ ، يكن

① $\mathcal{R}(t_0,t_0) = I_n$ حيث I_n هي المصفوفة الواحديّة من المرتبة n .

② $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{R}(t,t_0) = A\,\mathcal{R}(t,t_0)$.

وفي الحقيقة، تكفي معرفة $t \mapsto \mathcal{R}(t,0)$ لأنّ

$$\mathcal{R}(t,t_0) = \mathcal{R}(t,0) \circ \left(\mathcal{R}(t_0,0)\right)^{-1}.$$

وهنا نذكّر أيضاً بأنّ التابع $\mathcal{R}(t,0)$ $t \mapsto$ هو نهاية متتالية التوابع $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{R}$ إلى $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، المعرّفة كما يأتي:

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ \ Z_0(t) &= 0,\\
\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ Z_m(t) &= I_E + \int_0^t A Z_{m-1}(s)\,\mathrm{d}\,s
\end{aligned}$$

ولكنّ المصفوفة A مصفوفة ثابتة، وهذا يتيح لنا أنّ نثبت بالتدريج على m أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \ \forall t \in \mathbb{R},\quad Z_{m+1}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k\,!} A^k$$

وعليه يكون

$$\forall t \in \mathbb{R},\qquad \mathcal{R}(t,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k\,!} A^k$$

وهذا ما يبرّر وضع التعريف الآتي:

2-5. تعريف. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، و $\mathbb{K}$ هو حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$، أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. نعرّف المصفوفة e^A أو $\exp(A)$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بأنّها مجموع المتسلسلة المتقاربة بالنظيم $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\,!} A^k$. ونسمّي التابع الناتج

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \mapsto e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\,!} A^k$$

التابع الأسّي المصفوفي.

تُلخّص المبرهنة الآتية بعض أهمّ خواص التابع الأسّي المصفوفي.

5-3. **مبرهنة** : يُحقِّق التابع الأسّي المصفوفي $\exp$ على $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ الخواصّ التالية :

① إذا كانت 0_n هي المصفوفة الصفريّة في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ فإن $\exp(0_n) = I_n$.

② إذا كانت المصفوفتان A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تتبادلان،[2] كان $A \cdot e^B = e^B \cdot A$.

③ مهما تكن المصفوفة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، كان التابع $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto e^{tA}$ الحلَّ الوحيد للمسألة التفاضليّة : $Z' = AZ, \; Z(0) = I_n$.

④ إذا كانت المصفوفتان A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تتبادلان، كان $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

⑤ مهما تكن المصفوفة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، تكن e^A قَلوبةً، ويكن $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

⑥ مهما تكن المصفوفة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، يكن $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

الإثبات

① إنّ $\exp(0_n) = I_n$ وضوحاً، وذلك انطلاقاً من التعريف.

② لمّا كان $AB = BA$ استنتجنا، بالتدريج أنّ $AB^k = B^k A$ أيّاً كانت k . وعليه

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad A \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} B^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} B^k \right) \cdot A$$

ونحصل على المطلوب بجعل m تسعى إلى اللانهاية.

③ هذه خاصّة واضحة استناداً إلى المبرهنة 2-2.، لأنّ $\Phi(t) = \mathcal{R}(t,0)$ أيّاً كانت t من $\mathbb{R}$.

④ لنعرّف $\forall t \in \mathbb{R}, \; Z(t) = e^{tA} \cdot e^{tB}$. فيكون لدينا من جهة أولى $Z(0) = I_n$ ، ونجد من جهة ثانية، بالاستفادة من ② و ③ أنّ

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \; Z'(t) &= A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} \\ &= (A+B) \cdot e^{tA} e^{tB} = (A+B) \cdot Z(t) \end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Z(t) = e^{t(A+B)}$$

استناداً إلى ③ ونحصل على المطلوب بأخذ $t = 1$.

[2] أي $A \cdot B = B \cdot A$

⑤ لمّا كانت المصفوفتان A و $-A$ تتبادلان استنتجنا أنّ

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{-A} \cdot e^A = e^{A-A} = e^0 = I_n$$

أي إنّ المصفوفة e^A قَلوبة، ومقلوبها هو المصفوفة e^{-A}.

⑥ نعلم أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \det \mathcal{R}(t,0) = \exp\left(t \operatorname{tr} A\right)$$

وذلك بمُقتضى المبرهنة 3-3. بأخذ $t = 1$ والاستفادة من ③ نجد

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$$

وهكذا يكتمل الإثبات. ❐

4-5. **ملاحظة مهمّة**. لا يُمكن الاستغناء عن شرط كوْن المصفوفتين A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تتبادلان حتى تتحقَّق المساواة $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

لنتأمّل على سبيل المثال المصفوفتين التاليتين :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لمّا كان

$$\forall k \geq 2, \ \ B^k = A^k = 0$$

استنتجنا أنّ

$$e^A \cdot e^B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } e^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن جهة أخرى

$$\forall k \geq 0, \quad (A+B)^{2k} = I_2, \quad (A+B)^{2k+1} = A+B$$

وعليه

$$e^{A+B} = \operatorname{ch}(1) \cdot I_2 + \operatorname{sh}(1) \cdot (A+B) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(1) & \operatorname{sh}(1) \\ \operatorname{sh}(1) & \operatorname{ch}(1) \end{bmatrix}$$

وهكذا نرى أنّ $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$.

نستنتج من الدراسة العامّة المبرهنة التالية :

5-5. مبرهنة : لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$، و $\mathbb{K}$ هو حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$، أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. ثُمّ ليكن $b : J \to \mathbb{K}^n$ تابعاً مستمرّاً على مجال غير تافه J من $\mathbb{R}$.

- إنّ بُعد الفضاء الشعاعي $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$، المكوَّن من الحلول المعرّفة على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضليّة الخطّية بأمثال ثابتة وبدون طرف ثان : $\mathcal{H} : y' = Ay$، يساوي n.
- أياً كانت (t_0, x_0) من $J \times \mathbb{K}^n$ فهناك حلٌّ وحلٌّ وحيد، معرّف على J، لمسألة كوشي:

$$\mathbb{P}_{(t_0,x_0)} : \begin{cases} y' = Ay + b(t), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

ويُعطى هذا الحل بالصيغة :

$$\forall t \in J, \quad y(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s$$

6-5. مثال : ليكن Ω و Θ شعاعين ثابتين من $\mathbb{R}^3$، ولنفترض أنّ $\Omega \neq 0$. نهدف إلى دراسة المعادلة التفاضليّة :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \Omega \wedge V + \Theta, \quad V(0) = V_0 \tag{1}$$

حيث يرمز $\wedge$ إلى الجداء الشعاعي.

في الحقيقة، إنّ هذه المعادلة معادلة خطّية بأمثال ثابتة لأنّ التطبيق $V \mapsto \Omega \wedge V$ تطبيق خطّي ثابت من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. ويُمكننا إعطاء هذه المعادلة شكلها المصفوفي بتعريف

$$V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

عندئذ تُكتب المُعادلة (1) بالشكل

$$\begin{aligned} x' &= & -ry & +qz & +\alpha \\ y' &= rx & & -pz & +\beta \\ z' &= -qx & +py & & +\gamma \end{aligned} \tag{2}$$

أو

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&-r&q\\r&0&-p\\-q&p&0\end{bmatrix}}_{A}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}\qquad(3)$$

لحساب التابع الأسّي المصفوفي $t\mapsto e^{tA}$ نلاحظ ما يأتي:

$$A^2=-\omega^2 I_3+\begin{bmatrix}p^2&qp&rp\\pq&q^2&rq\\pr&qr&r^2\end{bmatrix}$$

حيث $\omega^2=p^2+q^2+r^2=\|\Omega\|^2$. وينتج من ذلك أنّ $A^3=-\omega^2 A$. نستنتج إذن، بالتدريج على k، أنّ

$$\forall k\geq 0,\quad A^{2k+1}=(-\omega^2)^k A$$

وهذا يبرهن أيضاً أنّ

$$\forall k\geq 0,\quad A^{2k+2}=(-\omega^2)^k A^2$$

إذن

$$\begin{aligned}e^{tA}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n=I+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}A^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}A^{2n+2}\\&=I+\frac{1}{\omega}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)A+\frac{1}{\omega^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\omega t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)A^2\\&=I+\frac{\sin(\omega t)}{\omega}A+\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}A^2\end{aligned}$$

وهذا يُكتب بالشكل

$$e^{tA}X=\cos(\omega t)X+\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\Omega\wedge X+\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}\langle\Omega,X\rangle\Omega$$

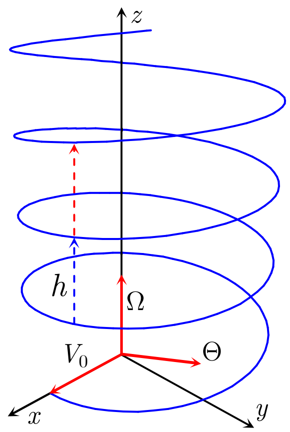
في حالة X من $\mathbb{R}^3$، و $\langle\cdot,\cdot\rangle$ هو الجداء السلّمي المألوف.

وعليه يُعطى الحلُّ المطلوب بالعلاقة

$$V(t)=e^{tA}V_0+\int_0^t e^{(t-s)A}\Theta\,\mathrm{d}s=e^{tA}V_0+\int_0^t e^{uA}\Theta\,\mathrm{d}u$$

ومنه، نجد الحلّ V المعرّف على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$V(t) = \cos(\omega t)V_0 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\Omega \wedge V_0 + \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}\langle \Omega, V_0 \rangle \Omega + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\Theta + \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}\Omega \wedge \Theta + \frac{\omega t - \sin(\omega t)}{\omega^3}\langle \Omega, \Theta \rangle \Omega$$



وهنا يلاحظ القارئ، في حالة t من $\mathbb{R}$ أنّ

$$V\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) - V(t) = \frac{2\pi}{\omega^3}\langle \Omega, \Theta \rangle \cdot \Omega = h$$

والمنحني $t \mapsto V(t)$ يعيد رسم نفسه بعد انسحابٍ شعاعُه h يوازي Ω، ولذا يكفي لتعيينه أن يُدرس على المجال $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right[$. ويكون للمنحني شكل لولبي كما هو مبيّن في الرسم المجاور.

يظهر من المثال السابق أنّ وجود طريقة بسيطة تفيد في حساب التابع الأسّي المصفوفي أمرٌ مفيدٌ جداً عند حلّ جمل المعادلات التفاضليّة الخطّية بأمثال ثابتة، وهذا ما تقدّمه لنا المبرهنة المهمّة الآتية:

7-5. مبرهنة. لتكن A مصفوفة مربّعة من المرتبة n بأمثال عقديّة. نفترض وجود p عدداً عقدياً مختلفاً $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$، و p عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً $m_1, \ldots, m_p$، تجعل كثير الحدود

$$Q(X) = \prod_{j=1}^{p}(X - \lambda_j)^{m_j}$$

يُحقّق الخاصّة $Q(A) = 0$. عندئذ يكون $e^{tA} = \mathcal{E}_t(A)$ و $\mathcal{E}_t(X)$ هو كثير الحدود الوحيد من $\mathbb{C}[X]$، الذي يُحقّق الشروط:

① $\deg \mathcal{E}_t(X) < \deg Q(X)$.

② $\forall \ell \in \{1, \ldots, p\}, \forall k \in \{0, \ldots, m_\ell - 1\}, \quad \mathcal{E}_t^{(k)}(\lambda_\ell) = t^k e^{t\lambda_\ell}$.

الإثبات

لنعرّف المجموعة

$$\begin{aligned}\Delta &= \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : i \in \mathbb{N}_p, 0 \leq j < m_i\right\}\\ &= \bigcup_{i=1}^{p} \left\{i\right\} \times \left\{0, \ldots, m_i - 1\right\}\end{aligned}$$

من الواضح أنّ

$$\operatorname{Card}(\Delta) = \sum_{i=1}^{p} m_i = \deg Q(X) \overset{\text{تعريف}}{=} \mu$$

ثُمَّ لنعرّف الفضاءين الشعاعيين: $\mathbb{C}^\Delta$ المكوَّن من جماعات الأعداد العقديّة التي مجموعة أدلّتها Δ، و $\mathbb{C}_\mu[X]$ المكوَّن من كثيرات الحدود العقديّة التي درجاتها أصغر تماماً من μ. وأخيراً لنتأمّل التطبيق الخطّي

$$\psi : \mathbb{C}_\mu[X] \to \mathbb{C}^\Delta, \quad P \mapsto \left(P^{(k)}(\lambda_\ell)\right)_{(\ell,k)\in\Delta}$$

☝ إذا كان $T(X) \in \ker \psi$، استنتجنا أنّ λ_ℓ جذر مضاعف من المرتبة m_ℓ على الأقل، لكثير الحدود $T(X)$، وذلك أياً كانت ℓ من $\mathbb{N}_p$، أو أنّ $(X - \lambda_\ell)^{m_\ell}$ يقسم $T(X)$ أياً كانت ℓ من $\mathbb{N}_p$. ولأنّ الأعداد $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ مختلفة استنتجنا أنّ كثيرات الحدود $((X - \lambda_\ell)^{m_\ell})_{1\leq\ell\leq p}$ أوليّة فيما بينها مثنى مثنى، ونجم عن ذلك أنّ كثير الحدود $Q(X)$ يقسم $T(X)$. ولمّا كان $\deg T(X) < \mu = \deg Q(X)$ استنتجنا أنّ $T(X) = 0$. وبذا نكون قد أثبتنا أنّ $\ker \psi = \{0\}$ فالتطبيق الخطّي ψ متباين. وهو من ثَمّ تقابلٌ لأنّ $\dim \mathbb{C}_\mu[X] = \mu = \dim \mathbb{C}^\Delta$.

ينتج من هذه الدراسة أنّه يوجد عنصرٌ، وعنصرٌ واحدٌ فقط، في $\mathbb{C}[X]$ يُحقّق الشروط ① و ②، هو العنصر $\Psi^{-1}\left((t^k e^{t\lambda_\ell})_{(\ell,k)\in\Delta}\right)$ الذي رمزنا إليه بالرمز $\mathcal{E}_t(X)$ في نص المبرهنة.

✌ ليكن $(P_{ij})_{(i,j)\in\Delta}$ الأساس للفضاء $\mathbb{C}_\mu[X]$ الذي نحصل عليه بأخذ صورة الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{C}^\Delta$ وفق التقابل الخطّي Ψ^{-1}. وعندئذ يكون

$$\mathcal{E}_t(X) = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=0}^{m_\ell - 1} t^k e^{t\lambda_\ell} P_{\ell k}(X) \tag{1}$$

لمّا كان باقي القسمة الإقليديّة $R_m(X)$ للحدّ X^m على $Q(X)$ ينتمي إلى $\mathbb{C}_\mu[X]$ ، أمكننا كتابته عبارةً خطّية بدلالة عناصر الأساس $(P_{ij})_{(i,j)\in\Delta}$ وعليه يكون

$$(2)\quad X^m = P_m(X)Q(X) + R_m(X) = P_m(X)Q(X) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_i-1} d_{ij}^{[m]} P_{ij}(X)$$

وبالاستفادة من كوْن λ_ℓ جذراً من المرتبة m_ℓ لكثير الحدود $P_m(X)Q(X)$ نجد

$$\forall k \in \{0,\ldots,m_\ell\},\ (X^m)^{(k)}(\lambda_\ell) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_i-1} d_{ij}^{[m]} P_{ij}^{(k)}(\lambda_\ell) = d_{\ell k}^{[m]}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$R_m(X) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_i-1} (X^m)^{(j)}(\lambda_i)\, P_{ij}(X)$$

ولمّا كان $Q(A) = 0$ استنتجنا من (2) أنّ $A^m = R_m(A)$ أو

$$A^m = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_i-1} (X^m)^{(j)}(\lambda_i)\, P_{ij}(A)$$

وعلى هذا

$$e^{tA} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}A^m = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_i-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}(X^m)^{(j)}(\lambda_i)\right)P_{ij}(A)$$

ولكن

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}(X^m)^{(j)}(\lambda_i) &= \sum_{m=j}^{\infty}\frac{t^m}{m!}m(m-1)\cdots(m-j+1)\cdot\lambda_i^{m-j}\\ &= \sum_{m=j}^{\infty}\frac{t^m}{(m-j)!}\lambda_i^{m-j}\\ &= t^j\cdot\sum_{m=j}^{\infty}\frac{(t\lambda_i)^{m-j}}{(m-j)!} = t^j\cdot e^{t\lambda_i}\end{aligned}$$

ونحصل على النتيجة المطلوبة بمقتضى (1):

$$e^{tA} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}A^m = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_i-1} t^j\cdot e^{t\lambda_i}P_{ij}(A) = \mathcal{E}_t(A) \qquad \square$$

5-8. **ملاحظة**. يحقّق كثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_A(X) = \det(A - XI_n)$ للمصفوفة A، الخاصّة $\mathcal{X}_A(A) = 0$، (مبرهنة Cayley-Hamilton) ويعطي دوماً كثير حدود يؤدي دور كثير الحدود Q في المبرهنة السابقة.

5-9. **نتيجة**. لتكن A مصفوفة مربّعة من المرتبة n بأمثال عقديّة. عندئذ يُكتب الحلُّ العام للمعادلة التفاضليّة الخطّية بدون طرف ثان $y' = Ay$ بالشكل:

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_i - 1} t^j \cdot e^{t\lambda_i} C_{ij}$$

حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ هي القيم الذاتيّة المختلفة للمصفوفة A، و $m_1, \ldots, m_p$ هي مراتب مضاعفة كلٍّ منها على الترتيب. أمّا الأشعّة C_{ij} فهي ليست جميعها اختياريّة بل ترتبط بعلاقات يمكن الحصول عليها بالتعويض في المعادلة التفاضليّة.

5-10. **ملاحظة مهمّة**. حين تكون A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ مصفوفة ثابتة، تبيِّن لنا المبرهنة 5-7. طريقةً عمليّة لإيجاد أساس لفضاء حلول جملة المعادلات التفاضليّة الخطّية بدون طرف ثان $y' = Ay$ وذلك بأخذ أعمدة المصفوفة $t \mapsto e^{tA}$.

5-11. **نتيجة**. لتكن A مصفوفة مربّعة من المرتبة n بأمثال عقديّة. نفترض أنّ المصفوفة A تُشابه مصفوفة قطريّة، عندئذ يكون

$$e^{tA} = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} e^{t\lambda} P_\lambda(A)$$

حيث رمزنا كالعادة $\mathrm{sp}(A)$ إلى طيف[3] المصفوفة A، وعرّفنا كثير الحدود $P_\lambda(X)$ بالصيغة:

$$P_\lambda(X) = \prod_{\mu \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{\lambda\}} \frac{X - \mu}{\lambda - \mu}$$

[3] أي مجموعة قيمها الذاتيّة

5-12. نتيجة. لتكن A مصفوفة مربّعة من المرتبة n بأمثال عقديّة. نفترض أنّ المصفوفة A تُشابه مصفوفة قطريّة، وليكن $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ أساساً للفضاء $\mathbb{C}^n$ مكوّناً من أشعة ذاتيّة للمصفوفة A، أي بحيث توجد أعداد عقديّة $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ محقِّقة الشرط

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad A v_i = \lambda_i v_i$$

عندئذ تكوّن الجملة $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ المعرّفة كما يأتي :

$$\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ t \mapsto e^{t\lambda_i} v_i$$

أساساً للفضاء $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ فضاء حلول المعادلة التفاضليّة $\mathcal{H} : y' = Ay$.

5-13. أمثلة

✵ لنتأمّل المصفوفة

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

ولنحسب e^{tA}.

نبدأ أوّلاً بالبحث عن كثير حدود Q يُحقِّق $Q(A) = 0$. المرشَّح الوحيد أمامنا هو $\mathcal{X}_A$ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A. ونجد بالحساب المباشر أنّ

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A(X) &= \det(A - XI_3) = -X^3 + 2X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} \\ &= -(X-1) \cdot \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

إذن نبحث عن كثير الحدود $\mathcal{E}_t$ من الدرجة الثانية على الأكثر، الذي يحقِّق الشروط:

$$(*) \qquad \mathcal{E}_t'\left(\frac{1}{2}\right) = te^{t/2} \text{ و } \mathcal{E}_t\left(\frac{1}{2}\right) = e^{t/2} \text{ و } \mathcal{E}_t(1) = e^t$$

ولكنّ الجملة $\left(1, 2X-1, (2X-1)^2\right)$ أساس لفضاء كثيرات الحدود من الدرجة الثانية على الأكثر، إذن يمكننا إيجاد (α, β, γ) تُحقّق

$$\mathcal{E}_t(X) = \alpha + \beta(2X-1) + \gamma(2X-1)^2$$

وتتعيّن الثوابت (α, β, γ) بالاستفادة من الشروط $(*)$.

نجد

$$te^{t/2} = 2\beta \quad \text{و} \quad e^{t/2} = \alpha \quad \text{و} \quad e^t = \alpha + \beta + \gamma$$

أو

$$\gamma = e^t - e^{t/2} - \frac{t}{2}e^{t/2} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{t}{2}e^{t/2} \quad \text{و} \quad \alpha = e^{t/2}$$

ونستنتج من ذلك أنّ

$$\mathcal{E}_t(X) = e^{t/2} + \frac{t}{2}e^{t/2}(2X-1) + \left(e^t - e^{t/2} - \frac{t}{2}e^{t/2}\right)(2X-1)^2$$

وعليه يكون

$$e^{tA} = e^{t/2} + \frac{t}{2}e^{t/2}\cdot(2A - I_3) + \left(e^t - e^{t/2} - \frac{t}{2}e^{t/2}\right)\cdot(2A-I_3)^2$$

وبملاحظة أنّ

$$\left(2A - I_3\right)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad 2A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

نستنتج

$$e^{tA} = e^t \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} - e^{t/2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{2}e^{t/2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

✵ لنبحث بالاستفادة من النتيجة 5-9.عن حلول جملة المعادلات التفاضليّة:

$$\begin{aligned} x' &= x + z \\ y' &= 2x - y \\ z' &= x - y + \tfrac{1}{2}z \end{aligned}$$

في الحقيقة، إنّ مصفوفة هذه الجملة هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ونجد بحساب بسيط أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A هو

$$\mathcal{X}_A(X) = \det(A - XI_n) = -(X-1)^2\left(X + \tfrac{3}{2}\right)$$

وعلى هذا فإنّ للحل المنشود الصيغة الآتية

$$t \mapsto Y(t) = e^{-3t/2}\,U + e^t\,V + te^t\,W$$

والأشعّة U و V و W هي أشعّة من $\mathbb{C}^3$. وبالتعويض في المعادلة التفاضليّة نجد

$$-\frac{3}{2}e^{-3t/2}U + e^t(V+W) + te^tW = e^{-3t/2}A\,U + e^tA\,V + te^tA\,W$$

وعليه ترتبط الأشعّة U و V و W بالعلاقات

$$A\,V = V + W \quad \text{و} \quad A\,W = W \quad \text{و} \quad A\,U = -\frac{3}{2}U$$

وهنا نلاحظ أنّ U هو شعاع ذاتي للمصفوفة A موافق للقيمة الذاتيّة $-\frac{3}{2}$ وبحساب مباشر نجد

$$U = \alpha\begin{bmatrix}-2\\8\\5\end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

ونلاحظ أيضاً أنّ W هو شعاع ذاتي للمصفوفة A موافق للقيمة الذاتيّة 1، ونجد بالحساب

$$W = \gamma\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{C}$$

أمّا الشعاع V فنحصل عليه بحل جملة المعادلات $(A-I)V = W$، لاحظ أنّ محدِّد الجملة يساوي الصفر.

فإذا افترضنا أنّ الشعاع V هو $V = {}^t[a,\beta,c]$ كُتبت الجملة $(A-I)V = W$ بالشكل

$$c = \gamma$$
$$2a - 2\beta = \gamma$$
$$a - \beta - \frac{c}{2} = 0$$

وهذه الجملة تُكافئ

$$a = \frac{\gamma}{2} + \beta \quad \text{و} \quad c = \gamma$$

وعليه يكون

$$V = \begin{bmatrix} \beta + \dfrac{\gamma}{2} \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

فإذا رمزنا بالرمز δ إلى $\dfrac{\gamma}{2}$ أصبح للحل Y الصيغة

$$Y(t) = \alpha e^{-3t/2} \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} + e^t \left(\beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + \delta t e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{aligned} x(t) &= (2\delta t + \beta + \delta) e^t - 2\alpha e^{-3t/2} \\ y(t) &= (2\delta t + \beta) e^t + 8\alpha e^{-3t/2} \\ z(t) &= 2\beta e^t + 5\alpha e^{-3t/2} \end{aligned}$$

في بعض الحالات يكون حساب التابع الأسّي المصفوفي يسيراً كما في المثال الآتي:

✵ لنتأمّل المصفوفة M المعرّفة كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

نجد بحساب بسيط أنّ كثير الحدود المميّز لـ M هو $\mathcal{X}_M(X) = (X-1)^4$. وعليه يكون

$$(M - I_4)^4 = 0$$

ويكون

$$\begin{aligned} e^{t(M-I_4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (M - I_4)^n \\ &= I_4 + t(M - I_4) + \frac{t^2}{2}(M - I_4)^2 + \frac{t^3}{6}(M - I_4)^3 \end{aligned}$$

ولأنّ $e^{t\,(M-I_4)} \cdot e^{t} = e^{t(M-I_4)} \cdot e^{tI_4} = e^{tM}$، استنتجنا

$$e^{tM} = e^t \cdot \left(I_4 + t(M-I_4) + \frac{t^2}{2}(M-I_4)^2 + \frac{t^3}{6}(M-I_4)^3 \right)$$

وعليه يكون

$$e^{tM} = \frac{e^t}{2}\begin{bmatrix} 2+3t^2 & -6t+9t^2 & 0 & 6t-18t^2 \\ -4t+3t^2 & 2-14t+3t^2 & 0 & 26t-6t^2 \\ 3t^2 & -6t+9t^2 & 2 & 6t-18t^2 \\ -2t+t^2 & -8t+3t^2 & 0 & 2+14t-6t^2 \end{bmatrix}$$

✵ نبحث في هذا المثال عن الحلول **الحقيقيّة** لجملة المعادلات التفاضليّة :

$$\begin{aligned} x' &= z \\ y' &= x \\ z' &= y \end{aligned}$$

في الحقيقة نبحث أوّلاً عن الحلول العقديّة لهذه المسألة. إنّ مصفوفة هذه الجملة هي

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وكثير الحدود المميِّز لها هو

$$\mathcal{X}_A(X) = 1 - X^3 = \big(1-X\big)\big(\mathrm{j}-X\big)\big(\mathrm{j}^2-X\big)$$

حيث $1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2$ الجذور التكعيبيّة للواحد، أي $\mathrm{j} = \exp\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. ينتج من ذلك أنّ المصفوفة A تشابه مصفوفة قطريّة، وتقبل الأشعّة الذاتيّة

$$v_3 = \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وتكوّن جملة التوابع $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ المعرّفة كما يلي :

$$\varphi_3(t) = e^{\mathrm{j}^2 t} v_3 = \overline{\varphi_2(t)} \quad \text{و} \quad \varphi_2(t) = e^{\mathrm{j} t} v_2 \quad \text{و} \quad \varphi_1(t) = e^t v_1$$

أساساً لفضاء الحلول التي تأخذ قيمها في $\mathbb{C}^3$ للمعادلة المدروسة.

ولكن يكون الحلُّ $Y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$ حقيقياً إذا وفقط إذا كان $Y = \overline{Y}$، وهذا يكافئ، بعد أن نلاحظ أنّ $\varphi_1 = \overline{\varphi}_1$ و $\varphi_3 = \overline{\varphi}_2$، الشرط :

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 = \overline{c}_1\,\varphi_1 + \overline{c}_2\,\varphi_3 + \overline{c}_3\,\varphi_2$$

أو أن يكون $c_1 = \overline{c}_1$ و $c_3 = \overline{c}_2$، ومن ثَمّ

$$Y = a_1\varphi_1 + \left(a_2 + \mathrm{i}\,b_2\right)\varphi_2 + \left(a_2 - \mathrm{i}\,b_2\right)\varphi_3$$

حيث (a_1, a_2, b_2) هي أعداد حقيقيّة.

وعليه تكون مجموعة الحلول الحقيقيّة للمعادلة التفاضليّة المدروسة هي :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \alpha\, e^{t} + \beta\, e^{-t/2}\cos\left(\tfrac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \gamma\, e^{-t/2}\sin\left(\tfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)\\
y(t) &= \alpha\, e^{t} + \beta\, e^{-t/2}\cos\left(\tfrac{t\sqrt{3}}{2} - \tfrac{2\pi}{3}\right) + \gamma\, e^{-t/2}\sin\left(\tfrac{t\sqrt{3}}{2} - \tfrac{2\pi}{3}\right)\\
z(t) &= \alpha\, e^{t} + \beta\, e^{-t/2}\cos\left(\tfrac{t\sqrt{3}}{2} + \tfrac{2\pi}{3}\right) + \gamma\, e^{-t/2}\sin\left(\tfrac{t\sqrt{3}}{2} + \tfrac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

14-5. ملاحظة مفيدة. لتكن A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$، لإيجاد حلول جملة المعادلات التفاضليّة بدون طرف ثان $Y' = AY$ هناك طريقة قد تكون مفيدة وسريعة عملياً، وتقوم على ما يأتي:

- نبدأ بإيجاد أساس $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ للفضاء $\mathbb{C}^n$ مكوَّن من أكبر عدد ممكن من الأشعّة الذاتيّة للمصفوفة A.
- نبحث عن الحلول بالشكل $Y = \sum_{k=1}^{n} z_k v_k$ حيث $Z = {}^t\left[z_1, \ldots, z_n\right]$ هو تابع مجهول جديد وبالتعويض في المعادلة نرى أنّ Z هو حلٌّ لجملة معادلات تفاضليّة جديدة $Z' = \tilde{A}\,Z$ تكون بوجه عام أبسط بكثير من الجملة الأولى.
- أمّا إذا كانت الجملة المدروسة ذات طرف ثان، فيمكننا تحليل الطرف الثاني على الأساس الجديد $\mathcal{V}$، ثُمّ نتابع كما سبق فنحصل على جملة معادلات تفاضليّة خطيّة جديدة $Z' = \tilde{A}\,Z + \tilde{b}$ أبسط من الجملة الأولى.

يوضِّح المثال الآتي هذه الطريقة:

15-5. **مثال**. لنتأمّل جملة المعادلات التفاضليّة

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x' & = & 5x & + & 5y & + & 2z & + & e^{-t} \\ y' & = & 4x & + & 5y & + & 4z & + & e^{t}\sin t \\ z' & = & -12x & - & 14y & - & 9z & + & e^{t}\cos t \end{array}$$

إنّ مصفوفة هذه الجملة هي

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -12 & -14 & -9 \end{bmatrix}$$

وكثير الحدود المميِّز للمصفوفة A هو

$$\mathcal{X}_A(X) = \det(A - X\,I_3) = (3 - X)(X + 1)^2$$

وعليه فإنّ للمصفوفة A قيمتين ذاتيتين هما 3 وهي بسيطة و -1 وهي مضاعفة.

إنّ بُعد الفضاء الذاتي E_3 الموافق للقيمة 3 يساوي 1، ويقبل الشعاع $v_1 = {}^t[1, 0, -1]$ أساساً.و كذلك فإنّ بُعد الفضاء الذاتي E_{-1} الموافق للقيمة -1 يساوي 1، ويقبل أساساً الشعاع $v_2 = {}^t[1, -2, 2]$. (وعليه فالمصفوفة A لا تشابه مصفوفة قطريّة). لنتمِّم الجملة (v_1, v_2) إلى أساس $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ للفضاء $\mathbb{C}^3$ بأن نختار $v_3 = {}^t[1, 0, 0]$ مثلاً. فيكون لدينا

$$Av_3 = 8v_1 - 2v_2 - v_3 \quad \text{و} \quad Av_2 = -v_2 \quad \text{و} \quad Av_1 = 3v_1$$

أمّا الطرف الثاني فيكتب بالشكل

$$\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{t}\sin t \\ e^{t}\cos t \end{bmatrix} = \underbrace{-e^{t}(\cos t + \sin t)}_{b_1(t)} v_1 \underbrace{-\frac{e^{t}}{2}\sin t}_{b_2(t)} v_2 + \underbrace{\left(e^{-t} + e^{t}(\cos t + \frac{3}{2}\sin t)\right)}_{b_3(t)} v_3$$

ولـمّا كان كلُّ حلٍّ للمعادلة المدروسة يُكتب بالشكل

$$Y(t) = z_1(t)\,v_1 + z_2(t)\,v_2 + z_3(t)\,v_3$$

استنتجنا بالتعويض في المعادلة $Y' = AY + b(t)$ أنّ

$$\begin{aligned} z_1'v_1 + z_2'v_2 + z_3'v_3 &= z_1Av_1 + z_2Av_2 + z_3Av_3 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \\ &= (3z_1 + 8z_3 + b_1)v_1 + (-z_2 - 2z_3 + b_2)v_2 + (-z_3 + b_3)v_3 \end{aligned}$$

ولمّا كان $\mathcal{V}$ أساساً للفضاء $\mathbb{C}^3$ استنتجنا أنّ (z_1, z_2, z_3) هو حل جملة المعادلات التفاضليّة :

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1' &=& 3z_1 &+& 8z_3 &-& e^t(\sin t + \cos t) \\ z_2' &=& -z_2 &-& 2z_3 &-& \dfrac{e^t}{2}\sin t \\ z_3' &=& -z_3 && &+& e^{-t} + e^t(\cos t + \dfrac{3}{2}\sin t) \end{array}$$

وهذه الجملة أبسط من الجملة الأصليّة، إذ نبدأ بتعيين z_3 من المعادلة الأخيرة ثُمّ نعوّض في المعادلتين الأخريين لنحصل على معادلات من المرتبة الأولى يسهل حلُّها. فالمعادلة الأخيرة تُكافئ :

$$(e^tz_3)' = 1 + e^{2t}(\cos t + \tfrac{3}{2}\sin t) = \Big(t + e^{2t}(\tfrac{1}{10}\cos t + \tfrac{4}{5}\sin t)\Big)'$$

ومنه

$$z_3 = (t + c)e^{-t} + e^t\left(\tfrac{1}{10}\cos t + \tfrac{4}{5}\sin t\right)$$

وبالتعويض في المعادلتين الأخريين نجد

$$\begin{aligned} z_1' - 3z_1 &= (8t + 8c)e^{-t} + \left(-\tfrac{1}{5}\cos t + \tfrac{27}{5}\sin t\right)e^t \\ z_2' + z_2 &= (-2t - 2c)e^{-t} - \left(\tfrac{1}{5}\cos t + \tfrac{21}{10}\sin t\right)e^t \end{aligned}$$

وبالحل نجد

$$\begin{aligned} z_1 &= -\left(2t + \frac{1}{2} + 2c\right)e^{-t} - \left(\cos t + \tfrac{11}{5}\sin t\right)e^t + ae^{3t} \\ z_2 &= \left(-t^2 - 2ct + b\right)e^{-t} + \left(\tfrac{17}{50}\cos t - \tfrac{22}{25}\sin t\right)e^t \end{aligned}$$

وبالتعويض في $Y(t) = z_1(t)v_1 + z_2(t)v_2 + z_3(t)v_3$ نجد الحلّ المطلوب:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-t^2 - t - \tfrac{1}{2} - c(2t+1) + b\right)e^{-t} - \left(\tfrac{14}{25}\cos t + \tfrac{57}{25}\sin t\right)e^t + ae^{3t} \\ y(t) &= \left(t^2 + 4ct - 2b\right)e^{-t} + \left(\tfrac{17}{25}\cos t - \tfrac{44}{25}\sin t\right)e^t \\ z(t) &= \left(-2t^2 + 2t + \tfrac{1}{2} - c(4t-2) + 2b\right)e^{-t} + \left(\tfrac{42}{25}\cos t + \tfrac{11}{25}\sin t\right)e^t - ae^{3t} \end{aligned}$$

6. المعادلات التفاضليّة الخطّيّة السلّميّة من المرتبة n بأمثال ثابتة

1-6. **تعريف**. لتكن $a_{n-1},\ldots,a_0$ أعداداً من $\mathbb{K}$، وليكن J مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، و f تابعاً مستمرّاً على J ويأخذ قيمه في $\mathbb{K}$. نسمّي **معادلة تفاضليّة خطّيّة سلّميّة من المرتبة n بأمثال ثابتة**، كلّ معادلة تفاضليّة من الشكل

$$(\mathcal{L}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(t)$$

وكما جرت العادة، نسمّي المعادلة التفاضليّة

$$(\mathcal{H}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

المعادلة التفاضليّة الخطّيّة **"بدون طرف ثانٍ"** الموافقة للمعادلة $(\mathcal{L})$.

نعلم أنّ دراسة المعادلات التفاضليّة، من الشكل $(\mathcal{L})$، تؤول إلى دراسة المعادلات التفاضليّة الخطّيّة من المرتبة الأولى بأمثال ثابتة.

لنرمز بالرمز $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ إلى مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{L})$، أي إلى مجموعة التوابع $\varphi : J \rightarrow \mathbb{K}$، التي تقبل الاشتقاق n مرّة على J، وتحقّق

$$\forall t \in J, \quad \varphi^{(n)}(t) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\varphi'(t) + a_0\varphi(t) = f(t)$$

ثمّ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$(\vec{\mathcal{L}}) \qquad Y' = AY + b(t)$$

حيث عرّفنا

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b : J \rightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}$$

ولنرمز بالرمز $\mathcal{S}_{\vec{\mathcal{L}}}$ إلى مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(\vec{\mathcal{L}})$، أي إلى مجموعة التوابع $\Phi : J \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}^n) \cong \mathbb{K}^n$، التي تقبل الاشتقاق على J، وتُحقّق

$$\forall t \in J, \quad \Phi'(t) = A\Phi(t) + b(t)$$

عندئذ يكون التطبيق

$$T : \mathcal{S}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{S}_{\vec{\mathcal{L}}},\ \varphi \mapsto {}^t[\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}]$$

تقابلاً، تقابله العكسي هو

$$T^{-1} : \mathcal{S}_{\vec{\mathcal{L}}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{L}},\ {}^t[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n] \mapsto \varphi_1$$

وفي الحالة التي يكون فيها $f = 0$ ، أو بقول مُكافئ $b = 0$، يكون التطبيق T تقابلاً خطّياً.

نستنتج إذن من دراستنا العامّة لجمل المعادلات الخطيّة بأمثال ثابتة من النمط $(\vec{\mathcal{L}})$، النتائج الآتية المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة الخطّية السلّميّة من المرتبة n بأمثال ثابتة.

في الحقيقة، يُعطى كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A بالعلاقة

$$\mathcal{X}_A(X) = \det(A - XI_n) = (-1)^n \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$$

وهو يُقبل في $\mathbb{C}$ التحليل إلى عوامل غير خزولة من الدرجة الأولى فيكتب بالشكل

$$\mathcal{X}_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$$

حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ هي الجذور المختلفة **للمعادلة المميِّزة**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{L})$، و $m_1, \ldots, m_p$ هي مراتبُ مضاعَفَةِ كلٍّ منها.

وبالاستفادة من النتيجة 5-9. يُكتب الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية بدون طرف ثان $(\mathcal{L})$ بالشكل

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij}\, t^j e^{t\lambda_i}$$

وعليه فإنّ جملة التوابع $(t \mapsto t^j e^{t\lambda_i})_{(i,j)\in\Delta}$ حيث

$$\Delta = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i \in \mathbb{N}_p,\ 0 \le j < m_i\}$$

تولّد $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ فضاءَ حلول المعادلة التفاضلية بدون طرف ثان $(\mathcal{H})$ الذي بُعده يساوي n . ولمّا كان $\mathrm{Card}(\Delta) = n$ استنتجنا أنّ جملة التوابع $(t \mapsto t^j e^{t\lambda_i})_{(i,j)\in\Delta}$ هي أساس للفضاء $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

لحلّ المعادلة $(\mathcal{L})$ يمكننا بوجه عام استخدام طريقة جعل الثوابت متغيّرة. ولكن يمكننا في بعض الحالات التي نعرف فيها شكل الحلّ الخاص للمعادلة $(\mathcal{L})$ اتّباع طريقة الثوابت غير المعيّنة. وذلك ما توضّحه المبرهنة الآتية:

2-6. مبرهنة. لتكن $a_0,\ldots,a_{n-1}$ أعداداً من $\mathbb{K}$، وليكن كثير الحدود $R(X)$ من $\mathbb{C}[X]$ و λ من $\mathbb{C}$. عندئذ تقبل المعادلة التفاضليّة

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=R(t)\,e^{\lambda t}$$

حلّاً خاصّاً من الشكل $t\mapsto Q(t)\,t^r\,e^{\lambda t}$، و Q عنصرٌ من $\mathbb{C}[X]$ له درجة $R(X)$ نفسها، أمّا r فيساوي 0 إذا لم تكن λ جذراً **للمعادلة المميِّزة** :

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

للمعادلة التفاضليّة السابقة، ويساوي رتبة مضاعفة هذا الجذر إذا كانت λ جذراً للمعادلة المميِّزة.

الإثبات

لنعرّف كثير الحدود

$$\mathcal{X}(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$$

ولنتأمّل التطبيق الخطّي

$$u:\mathbb{C}[X]\to\mathbb{C}[X],\quad P(X)\mapsto\lambda P(X)+P'(X)$$

بملاحظة أنّ

$$\forall P\in\mathbb{C}[X],\forall t\in\mathbb{R},\quad u(P)(t)=e^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big(e^{\lambda t}P(t)\Big)$$

نستنتج بسهولة أنّ

$$(*)\quad\forall k\in\mathbb{N},\forall P\in\mathbb{C}[X],\forall t\in\mathbb{R},\quad u^k(P)(t)=e^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,t^k}\Big(e^{\lambda t}P(t)\Big)$$

وبالاستفادة من علاقة Leibniz في مشتق جداء تابعين نجد

$$\forall P\in\mathbb{C}[X],\quad u^k(P)=\sum_{\ell=0}^{k}C_k^\ell\,\lambda^{k-\ell}\,P^{(\ell)}=\sum_{\ell\geq0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\lambda^\ell}(\lambda^k)\cdot\frac{1}{\ell\,!}P^{(\ell)}$$

ومنه نستنتج أنّه في حالة كثير حدود P من $\mathbb{C}[X]$ لدينا

$$\mathcal{X}(u)(P) = \sum_{\ell\geq 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\lambda^{\ell}}(\mathcal{X}(\lambda))\cdot\frac{P^{(\ell)}}{\ell\,!} = \sum_{\ell\geq 0}\mathcal{X}^{(\ell)}(\lambda)\cdot\frac{P^{(\ell)}}{\ell\,!}$$

وأخيراً إذا استفدنا من تعريف العدد r نجد أنّ $\mathcal{X}^{(r)}(\lambda)\neq 0$ وأنّ

$$\forall P\in\mathbb{C}[X],\ \ \mathcal{X}(u)(P) = \sum_{\ell\geq r}\mathcal{X}^{(\ell)}(\lambda)\cdot\frac{P^{(\ell)}}{\ell\,!}$$

وبوجه خاص يكون لدينا

$$\forall P\in\mathbb{C}[X],\ \ \deg\Big(\mathcal{X}(u)(X^{r}\cdot P)\Big) = \deg P$$

نستنتج من هذه الخاصّة أنّه، أيّاً كانت d من $\mathbb{N}$، كان التطبيق الخطّي

$$\Phi_d : \mathbb{C}_d[X]\to\mathbb{C}_d[X],\, P\mapsto\mathcal{X}(u)(X^{r}\cdot P)$$

المعرّف على فضاء كثيرات الحدود العقديّة التي درجاتها أصغر أو تساوي d تقابلاً، وعليه إذا كان $R(X)$ عنصراً من $\mathbb{C}[X]$، فيوجد كثير حدود وحيد $Q(X)$ درجته d تساوي $\deg R(X)$ ويُحقّق $\Phi_d(Q) = R$. وبناءً على $(*)$، هذا يُكافئ

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad e^{-\lambda t}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,t^n}\Big(e^{\lambda t}t^{r}Q(t)\Big)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,t^k}\Big(e^{\lambda t}t^{r}Q(t)\Big)\right) = R(t)$$

وهي النتيجة المطلوبة. ❐

6-3. أمثلة

✵ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} t \tag{1}$$

والمعادلة بدون طرف ثان الموافقة

$$y'' - 2y' + y = 0 \tag{$1_{\mathcal{H}}$}$$

إنّ المعادلة المميّزة للمعادلة التفاضليّة $(1_{\mathcal{H}})$ هي

$$X^2 - 2X + 1 = 0$$

وهي تقبل العدد 1 جذراً مضاعفاً. إذن الحلُّ العام للمعادلة التفاضليّة $(1_{\mathcal{H}})$ يُكتب بالشكل $t\mapsto(\alpha\,t+\beta)\,e^{t}$.

استناداً إلى المبرهنة السابقة تقبل المعادلة التفاضليّة

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}e^t$$

حلّاً خاصّاً ψ_0 من الشكل $t \mapsto a\,t^2 e^t$ لأنّ 1 جذر مضاعف من المرتبة الثانية للمعادلة المميِّزة.

وبالتعويض في المعادلة التفاضليّة نجد $a = \frac{1}{4}$.

وكذلك تقبل المعادلة التفاضليّة

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}e^{-t}$$

حلّاً خاصّاً ψ_1 من الشكل $t \mapsto b\,e^{-t}$ لأنّ -1 ليس جذراً للمعادلة المميِّزة. وبالتعويض في المعادلة التفاضليّة نجد $b = \frac{1}{8}$.

ولمّا كان $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ استنتجنا أنّ $\psi_0 + \psi_1$ هو حلٌّ خاص للمعادلة التفاضليّة (1).

وعليه يكون الحلُ العام للمعادلة التفاضليّة (1) هو

$$t \mapsto \left(\alpha\,t + \beta + \frac{t^2}{4}\right)e^t + \frac{1}{8}e^{-t}$$

✵ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$y'' + y = t^2 \cos^2 t \tag{2}$$

والمعادلة بدون طرف ثانٍ الموافِقة

$$y'' + y = 0 \tag{$2_{\mathcal{H}}$}$$

إنّ المعادلة المميِّزة للمعادلة التفاضليّة $(2_{\mathcal{H}})$ هي

$$X^2 + 1 = 0$$

وهي تقبل جذرين بسيطين i و $-\mathrm{i}$. إذن يُكتب الحلُّ العام للمعادلة التفاضليّة $(2_{\mathcal{H}})$ بالشكل

$$t \mapsto \alpha_1 e^{\mathrm{i}\,t} + \beta_1 e^{-\mathrm{i}\,t} = (\alpha_1 + \beta_1)\cos t + \mathrm{i}(\alpha_1 - \beta_1)\sin t = \alpha\cos t + \beta\sin t$$

حيث α و β (أو α_1 و β_1) ثوابت اختياريّة.

وهنا نلاحظ أنّ

$$t^2\cos^2 t = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2\cos 2t = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^2 e^{2\mathrm{i}\,t} + \frac{1}{4}t^2 e^{-2\mathrm{i}\,t}$$

ولكنّ المعادلة التفاضليّة

$$y'' + y = \frac{1}{2}t^2$$

تقبل حلاً خاصّاً ψ_0 من الشكل $t \mapsto at^2 + bt + c$ لأنّ 0 ليس جذراً للمعادلة المميّزة. وبالتعويض في المعادلة التفاضليّة نجد $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -1$. أي

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - 1$$

وكذلك تقبل المعادلة التفاضليّة

$$y'' + y = \frac{1}{4}t^2 e^{2\mathrm{i}t}$$

حلّاً خاصّاً ψ_1 من الشكل $t \mapsto (a_1t^2 + b_1t + c_1)e^{2\mathrm{i}t}$ لأنّ $2\mathrm{i}$ ليس جذراً للمعادلة المميِّزة. وبالتعويض في المعادلة التفاضليّة نجد $a = -\frac{1}{12}, b = -\frac{2\mathrm{i}}{9}, c = \frac{13}{54}$. أي

$$\psi_1(t) = \left(-\frac{1}{12}t^2 - \frac{2\mathrm{i}}{9}t + \frac{13}{54}\right)e^{2\mathrm{i}t}$$

ونلاحظ هنا دون أي حساب إضافي أنّ $\overline{\psi_1}$ هو حلٌّ خاص للمعادلة التفاضليّة

$$y'' + y = \frac{1}{4}t^2 e^{-2\mathrm{i}t}$$

وعليه يكون $\psi_0 + \psi_1 + \overline{\psi_1}$ حلاً خاصّاً للمعادلة (2) وهكذا نرى أنّ الحلّ العام للمعادلة التفاضليّة (2) هو

$$t \mapsto \alpha\cos t + \beta\sin t + \frac{t^2}{2} - 1 - \frac{t^2}{6}\cos 2t + \frac{4t}{9}\sin 2t + \frac{13}{27}\cos 2t$$

✵ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$y'' + 4y = \tan t,\ \ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{3}$$

والمعادلة بدون طرف ثانٍ الموافِقة

$$y'' + 4y = 0 \tag{$3_{\mathcal{H}}$}$$

إنّ المعادلة المميِّزة للمعادلة التفاضليّة $(3_{\mathcal{H}})$ هي

$$X^2 + 4 = 0$$

وهي تقبل جذرين بسيطين $2\,\mathrm{i}$ و $-2\,\mathrm{i}$. إذن يُكتب الحلُّ العام للمعادلة التفاضليّة $(3_{\mathcal{H}})$ بالشكل $t \mapsto \alpha\cos 2t + \beta\sin 2t$، حيث α و β ثوابت اختياريّة.

لإيجاد حلٍّ خاص للمعادلة (3) نتبع هنا طريقة جعل الثوابت متغيِّرة، لأنّه لا يمكن إرجاع الطرف الثاني إلى الشكل الوارد في المبرهنة 2-6. لنبحث إذن عن هذا الحل بالشكل

$$t \mapsto y(t) = \alpha(t)\cos 2t + \beta(t)\sin 2t$$

إذ يتعيّن المشتقّان α' و β' بالمعادلتين

$$\begin{aligned} \alpha'(t)\cos 2t + \beta'(t)\sin 2t &= 0 \\ \alpha'(t)(-2\sin 2t) + \beta'(t)(2\cos 2t) &= \tan t \end{aligned}$$

وبالحلّ نجد

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -\frac{1}{2}\sin 2t \cdot \tan t = -\sin^2 t = -\frac{1}{2}(1-\cos 2t) \\ \beta'(t) &= \frac{1}{2}\cos 2t \cdot \tan t = \frac{1}{2}(2\cos^2 t - 1)\cdot \tan t = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\tan t \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t \\ \beta(t) &= -\frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{2}\ln(\cos t) \end{aligned}$$

ونجد من ثَمّ الحلّ الخاص الآتي

$$\begin{aligned} t \mapsto \psi(t) &= \left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\cos 2t + \left(-\frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{2}\ln(\cos t)\right)\sin 2t \\ &= -\frac{t}{2}\cdot\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t \cdot \ln(\cos t) \end{aligned}$$

للمعادلة التفاضليّة (3)، ويعطى الحلُّ العام لها بالصيغة :

$$t \mapsto \alpha\cos 2t + \beta\sin 2t - \frac{t}{2}\cdot\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\cdot\ln(\cos t)$$

حيث α و β ثابتان اختياريّان.

4-6.**تعريف**. لتكن $a_{n-1},\ldots,a_0$ أعداداً من $\mathbb{K}$، وليكن J مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}^*$، و f تابعاً مستمرّاً على J ويأخذ قيمه في $\mathbb{K}$. نسمّي **معادلة أولر** Euler من المرتبة n، كلَّ معادلة تفاضليّة من الشكل

$$(\mathcal{L})\qquad t^n y^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, t\, y' + a_0\, y = f(t)$$

وكما جرت العادة، نسمّي المعادلة التفاضليّة

$$(\mathcal{H})\qquad t^n y^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, t\, y' + a_0\, y = 0$$

المعادلة التفاضليّة "**بدون طرف ثانٍ**" الموافقة للمعادلة $(\mathcal{L})$.

في الحقيقة، تجري دراسة المعادلة $(\mathcal{L})$ على أحد المجالين $I^+ = \mathbb{R}_+^*$، أو $I^- = \mathbb{R}_-^*$ وهي تؤول إلى معادلة تفاضليّة خطّية بأمثال ثابتة عند إجراء تغيير المتحوّل $t = e^x$ على I^+ أو $t = -e^x$ على I^-. ونتبع بعد ذلك الطرائق العامّة لحل المعادلة $(\mathcal{L})$.

5-6. **مثال**. لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$(1)\qquad t^2y'' - 3t\, y' + 3y = 2t^2e^t$$

والمعادلة بدون طرف ثانٍ الموافِقة

$$(1_{\mathcal{H}})\qquad t^2y'' - 3t\, y' + 3y = 0$$

سندرس هذه المعادلة على أحد المجالين I^+ أو I^- وليكن I. لذلك نغيِّر المتحوّل $t = \varepsilon\, e^x$ مع $\varepsilon = 1$ في حالة المجال I^+ و $\varepsilon = -1$ في حالة المجال I^-.

وهنا نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{1}{t}\\
\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{1}{t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)\cdot\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{1}{t^2}\\
&= \frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}\cdot\frac{1}{t^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

إذن

$$t\,y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$$
$$t^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$$

وبالتعويض في المعادلة $(1_{\mathcal{H}})$ يصبح لدينا

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} - 4\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + 3y = 0$$

وهذه معادلة خطّية بأمثال ثابتة يُعطى حلُّها العام بالعلاقة

$$x \mapsto \tilde{\alpha}e^x + \tilde{\beta}e^{3x}$$

وبالعودة إلى المتحوِّل t نجد أنّ الحل العام للمعادلة $(1_{\mathcal{H}})$ على المجال I يُكتب بالشكل

$$t \mapsto \alpha\,t + \beta\,t^3$$

ولإيجاد حلٍّ خاص للمعادلة (1) نتبع طريقة جعل الثوابت متغيِّرة دون أن ننسى عند التطبيق أن نجعل هذه المعادلة محلولة بالنسبة إلى المشتق الثاني، فنبحث عن الحل الخاصّ بالشكل

$$t \mapsto y(t) = \alpha(t)t + \beta(t)t^3$$

إذ يتعيّن المشتقّان α' و β' بالمعادلتين

$$\begin{aligned} \alpha'(t)t + \ \ \beta'(t)t^3 &= 0 \\ \alpha'(t) + 3\beta'(t)t^2 &= 2t^2e^t \end{aligned}$$

وبالحلّ نجد

$$\beta'(t) = e^t \quad \text{و} \quad \alpha'(t) = -t^2e^t$$

وعليه يمكننا أن نختار

$$\beta(t) = e^t \quad \text{و} \quad \alpha(t) = (-t^2 + 2t - 2)e^t$$

عندئذ يكون الحل العام للمعادلة (1) على المجال I من الشكل

$$t \mapsto \varphi(1) = \alpha\,t + \beta\,t^3 + 2(t^2 - t)e^t$$

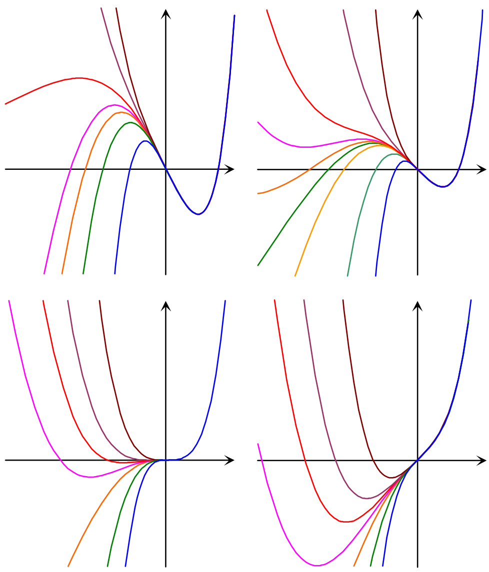
لنعرّف التوابع الحقيقيّة

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \varphi_0(t) &= t \\
\varphi_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \varphi_1(t) &= \begin{cases} t^3 & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases} \\
\varphi_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \varphi_2(t) &= \begin{cases} 0 & : t > 0 \\ t^3 & : t \leq 0 \end{cases} \\
\psi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \psi(t) &= 2(t^2 - t)e^t
\end{aligned}$$

عندئذ نترك للقارئ أنّ يتحقَّق بسهولة أنّ الحل العام للمعادلة (1) على $\mathbb{R}$ معطى بالعلاقة

$$t \mapsto \varphi(t) = \alpha\,\varphi_0(t) + \beta\,\varphi_1(t) + \gamma\,\varphi_2(t) + \psi(t)$$

و α, β, γ ثوابت كيفيّة. وجميع الحلول المعرّفة على كامل $\mathbb{R}$ لهذه المعادلة تمر بالنقطة $(0,0)$، وقد رسمنا بعضاً منها فيما يأتي:



تمرينات

التمرين 1. احسب $\exp(tA)$ حين تكون A إحدى المصفوفات التالية

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل

❶ حساب e^{tA} في حالة $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

نجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A هو

$$\mathcal{X}_A(X) = -(X-1)^2(X-4)$$

لنبحث إذن عن كثير الحدود من الدرجة الثانية $\mathcal{E}_t(X) = \alpha + \beta(X-1) + \gamma(X-1)^2$ الذي يحقّق الشروط :

$$\mathcal{E}_t(1) = e^t \text{ و } \mathcal{E}_t'(1) = te^t \text{ و } \mathcal{E}_t(4) = e^{4t}$$

ونجد بالتعويض أنّ

$$\alpha = e^t \text{ و } \beta = te^t \text{ و } \gamma = \frac{e^{4t} - e^t - 3te^t}{9}$$

وهذا يقتضي

$$e^{tA} = e^t I + te^t(A-I) + \left(\frac{e^{4t} - e^t - 3te^t}{9}\right)(A-I)^2$$

ومنه نجد

$$e^{tA} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -3e^t + 12e^{4t} & (4+3t)e^t - 4e^{4t} & (8-3t)e^t - 8e^{4t} \\ -3e^t + 3e^{4t} & (10+3t)e^t - e^{4t} & (2-3t)e^t - 2e^{4t} \\ -3e^t + 3e^{4t} & (1+3t)e^t - e^{4t} & (11-3t)e^t - 2e^{4t} \end{bmatrix}$$

❷ حساب e^{tA} في حالة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

نجد بحساب مباشر أنّ:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 6 & 0 & -12 \\ -6 & 12 & 0 \end{bmatrix} = -6A$$

ونستنتج من ذلك أنّ $\forall n \geq 1,\ A^{n+2} = -6A^n$ ومن ثمّ نبرهن مباشرة بالتدريج

$$\forall n \geq 0,\ A^{2n+1} = (-6)^n A$$

وبضرب طرفي العلاقة السابقة بالمصفوفة A نجد أيضاً أنّ

$$\forall n \geq 0,\ A^{2n+2} = (-6)^n A^2$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} A^{2n+2} \\ &= I + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) A + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n t^{2n+2}}{(2n+2)!} \right) A^2 \\ &= I + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{6}t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) A - \frac{1}{6} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{6}t)^{2n}}{(2n)!} \right) A^2 \\ &= I + \frac{\sin \sqrt{6}t}{\sqrt{6}} A + \frac{1 - \cos \sqrt{6}t}{6} A^2 \end{aligned}$$

ومنه

$$e^{tA} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin\sqrt{6}t}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\cos\sqrt{6}t}{6}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

❸ حساب e^{tA} في حالة $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

نجد بحساب مباشر أنّ

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

وعليه

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tI+t(A-I)} = e^t \cdot e^{t(A-I)} \\ &= e^t(I + t(A-I)) = e^t I + te^t(A-I) \end{aligned}$$

أو

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} (1+t)e^t & -3te^t & -te^t \\ te^t & (1-3t)e^t & -te^t \\ -2te^t & 6te^t & (1+2t)e^t \end{bmatrix}$$

❹ حساب e^{tA} في حالة $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

نجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A هو $\mathcal{X}_A(X) = X^2(X-1)^2$. لنبحث إذن عن كثير الحدود من الدرجة الثالثة $\mathcal{E}_t(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$ الذي يحقّق الشروط :

$$\mathcal{E}_t(0) = 1 \text{ و } \mathcal{E}_t'(0) = t \text{ و } \mathcal{E}_t(1) = e^t \text{ و } \mathcal{E}_t'(1) = te^t$$

ونجد بالتعويض:

$$2\gamma + 3\delta = te^t - t \text{ و } \gamma + \delta = e^t - 1 - t \text{ و } \beta = t \text{ و } \alpha = 1$$

وهذا يقتضي

$$\delta = (t-2)e^t + 2 + t \text{ و } \gamma = (3-t)e^t - 3 - 2t \text{ و } \beta = t \text{ و } \alpha = 1$$

ومنه نجد

$$e^{tA} = I + tA + (3e^t - te^t - 3 - 2t)A^2 + (te^t - 2e^t + 2 + t)A^3$$

أو

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 1-e^t & -1+t+e^t & 1-t-e^t \\ 0 & 1 & t & -t \\ te^t & -te^t & 1+te^t & -1+e^t-te^t \\ te^t & -te^t & te^t & e^t-te^t \end{bmatrix}$$

5 حساب e^{tA} في حالة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

نجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A هو

$$\mathcal{X}_A(X) = -(X-1)^2(X-2)^3$$

لنبحث إذن عن كثير الحدود من الدرجة الرابعة

$$\mathcal{E}_t(X) = \alpha + \beta(X-2) + \gamma(X-2)^2 + \delta(X-2)^3 + \varepsilon(X-1)(X-2)^3$$

الذي يحقّق الشروط :

$$\mathcal{E}_t''(2) = t^2e^{2t} \text{ و } \mathcal{E}_t'(2) = te^{2t} \text{ و } \mathcal{E}_t(2) = e^{2t} \text{ و } \mathcal{E}_t'(1) = te^t \text{ و } \mathcal{E}_t(1) = e^t$$

ونجد بالتعويض :

$$\delta = -e^t + e^{2t} - te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} \text{ و } \gamma = \frac{t^2}{2}e^{2t} \text{ و } \beta = te^{2t} \text{ و } \alpha = e^{2t}$$

$$\varepsilon = -3e^t - te^t + 3e^{2t} - 2te^{2t} + \frac{t^2}{2}e^{2t} \text{ و }$$

ومنه نستنتج أنّ

$$e^{tA} = e^t\begin{bmatrix} 1+t & t & 0 & 0 & 0\\ -t & 1-t & 0 & 0 & 0\\ -2+t & -3+t & 0 & 0 & 0\\ 4-t & 5-t & 0 & 0 & 0\\ -8-t & -7-t & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2-2t+2t^2 & 3-2t+t^2 & 1+t & t+\frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2}\\ -4+6t-2t^2 & -5+4t-t^2 & -t & 1-\frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2}\\ 8-6t+2t^2 & 7-4t+t^2 & t & \frac{t^2}{2} & 1-t+\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

ويتمّ إثبات المطلوب.

التمرين 2. لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ تحقّق الشرط : $A^3 = 3A - 2I_n$. احسب $\exp(tA)$.

الحل

نلاحظ أنّ كثير الحدود $P(X) = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$ يُحقّق $P(A) = 0$.

لنبحث إذن عن كثير الحدود الوحيد $\mathcal{E}_t(X) = a + b(X-1) + c(X-1)^2$ الذي يُحقّق الشروط

$$\mathcal{E}_t(-2) = e^{-2t} \text{ و } \mathcal{E}_t'(1) = te^t \text{ و } \mathcal{E}_t(1) = e^t$$

ونجد بالتعويض :

$$c = \tfrac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t) \text{ و } b = te^t \text{ و } a = e^t$$

إذن

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^t I + te^t(A-I) + \frac{e^{-2t} - e^t + 3te^t}{9}(A-I)^2\\ &= \frac{e^t}{9}(2I+A)(4I-A) + \frac{te^t}{3}(2I+A)(A-I) + \frac{e^{-2t}}{9}(A-I)^2 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

التمرين 3. احسب $\exp(tA_m)$ حين تكون A_m معطاة بالعلاقة التالية

$$A_m = \begin{bmatrix} m-1 & -2m-1 & 2m-2 \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 2m+1 & 2-m \end{bmatrix}$$

الحل

نجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز $\mathcal{X}_{A_m}(X)$ للمصفوفة A_m يعطى بالعلاقة

$$\mathcal{X}_{A_m}(X) = -(X-m)(X-m-1)(X+m-1)$$

لنفترض إذن أنّ m لا تنتمي إلى المجموعة $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$، عندئذ يكون للمصفوفة A_m ثلاث قيم ذاتية مختلفة، سنختار لفضاء كثيرات الحدود من الدرجة الثانية الأساس الآتي:

$$\left(1, (X-m)(X-1), (X-m-1)(X-\tfrac{1}{2})\right)$$

لنبحث إذن عن كثير الحدود الوحيد من الدرجة الثانية

$$\mathcal{E}_t(X) = a + b(X-m)(X-1) + c(X-m-1)(X-\tfrac{1}{2})$$

الذي يُحقِّق الشروط

$$\mathcal{E}_t(1-m) = e^{(1-m)t} \text{ و } \mathcal{E}_t(m+1) = e^{(m+1)t} \text{ و } \mathcal{E}_t(m) = e^{mt}$$

بالتعويض في عبارة $\mathcal{E}_t(X)$ نجد

$$\begin{array}{lcccll} e^{mt} & = & a & - & c\left(m-\frac{1}{2}\right) & \times\ 2m \\ e^{(m+1)t} & = & a & + & bm & \times\ 1-2m \\ e^{(1-m)t} & = & a & + & (b+c)m(2m-1) & \times\ 1 \end{array}$$

نضرب طرفي المعادلة الأولى بالمقدار $2m$ وطرفي المعادلة الثانية بالمقدار $1-2m$ ثُمّ نجمع المعادلات الثلاث فنجد

$$2me^{mt} - (2m-1)e^{(m+1)t} + e^{(1-m)t} = 2a$$

وعليه

$$a = me^{mt} - \left(m-\tfrac{1}{2}\right)e^{(m+1)t} + \tfrac{1}{2}e^{(1-m)t}$$

ومن ثمّ

$$b = -e^{mt} + e^{(m+1)t} + \frac{e^{(m+1)t} - e^{(1-m)t}}{2m} = e^{mt}(e^t - 1) + e^t \frac{\operatorname{sh} mt}{m}$$
$$c = e^{mt} - e^{(m+1)t} + \frac{e^{(1-m)t} - e^{mt}}{2m-1} = e^{mt}(1 - e^t) - e^{t/2} \frac{\operatorname{sh}(m - \frac{1}{2})t}{m - \frac{1}{2}}$$

وعليه يمكننا أن نكتب

$$e^{tA_m} = E_m(t) + e^t \frac{\operatorname{sh} mt}{m} F_m - e^{t/2} \frac{\operatorname{sh}(m - \frac{1}{2})t}{m - \frac{1}{2}} G_m$$

حيث

$$F_m = (A - mI)(A - I) = \begin{bmatrix} -1-m & -1-m+2m^2 & -1-2m^2 \\ m & m & m \\ 1+m & 1+m-2m^2 & 1+2m^2 \end{bmatrix}$$
$$G_m = (A - (m+1)I)(A - \tfrac{1}{2}I) = \begin{bmatrix} -2m & -\frac{1}{2}+2m^2 & -m\big(1+2m\big) \\ -\frac{1}{2}+m & 0 & -\frac{1}{2}+m \\ \frac{1}{2}+m & \frac{1}{2}-2m^2 & \frac{1}{2}+2m^2 \end{bmatrix}$$
$$E_m(t) = \Big(me^{mt} - (m - \tfrac{1}{2})e^{(m+1)t} + \tfrac{1}{2}e^{(1-m)t}\Big)I + e^{mt}(e^t - 1)(F_m - G_m)$$

وهنا نلاحظ أنّ

$$F_m = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} -1 & -1+2m & -2m \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-2m & 2m \end{bmatrix}$$

$$G_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \Big(m - \tfrac{1}{2}\Big) \begin{bmatrix} -2 & 1+2m & -2-2m \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1-2m & 1+2m \end{bmatrix}$$

$$F_m - G_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1+m & -1-2m & -2+2m \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1+2m & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض في عبارة e^{tA_m}، نستنتج

$$e^{tA_m} = H_m(t) + e^t\,\frac{\operatorname{sh} mt}{m}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - e^{t/2}\,\frac{\operatorname{sh}(m-\frac{1}{2})t}{m-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{aligned} H_m(t) = {} & \Big(me^{mt} - \big(m-\tfrac{1}{2}\big)e^{(m+1)t} + \tfrac{1}{2}e^{(1-m)t}\Big)I \\ & + \frac{1}{2}\Big(e^{(m+1)t} - e^{mt}\Big)\begin{bmatrix} -1+m & -1-2m & -2+2m \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1+2m & 1 \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{2}\Big(e^{(m+1)t} - e^{(1-m)t}\Big)\begin{bmatrix} -1 & -1+2m & -2m \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-2m & 2m \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{2}\Big(e^{mt} - e^{(1-m)t}\Big)\begin{bmatrix} -2 & 1+2m & -2-2m \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1-2m & 1+2m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وبعد حساب أخير، والتحلّي بالصبر، نجد

$$\begin{aligned} e^{tA_m} = {} & e^{t/2}\,\frac{\operatorname{sh}(m-\frac{1}{2})t}{m-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - e^t\,\frac{\operatorname{sh} mt}{m}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ & + e^{mt}\begin{bmatrix} 2-e^t & -e^t + e^{(1-2m)t} & 2 - e^t - e^{(1-2m)t} \\ -1+e^t & e^t & -1+e^t \\ -1+e^t & e^t - e^{(1-2m)t} & -1+e^t+e^{(1-2m)t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ولكنّ التابع $m \mapsto A_m$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$، إذن أيّاً كانت قيمة t من $\mathbb{R}$ فالتابع $m \mapsto e^{tA_m}$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$، وعليه، لحساب e^{tA_m} في حالة $m = 0$ أو $m = \dfrac{1}{2}$ يكفي أن نأخذ النهاية عند هاتين النقطتين، لنجد

$$e^{tA_0}=\begin{bmatrix}1-te^t & -te^t & 1-e^t-te^t\\ -1+e^t & e^t & -1+e^t\\ te^t & te^t & e^t+te^t\end{bmatrix}$$

وكذلك

$$e^{tA_{1/2}}=e^{t/2}\begin{bmatrix}3+t-2e^t & -2e^t+2 & 2+t-2e^t\\ -1+e^t & e^t & -1+e^t\\ -2-t+2e^t & -2+2e^t & -1-t+2e^t\end{bmatrix}$$

وهو المطلوب.

التمرين 4. احسب $\exp(A)$ حين تكون A معطاة بالعلاقة التالية

$$A=\begin{bmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{bmatrix}$$

الحل

نلاحظ أنّ المصفوفة A تُكتب بالشكل

$$A=\begin{bmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{bmatrix}=(a-b)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=(a-b)I+bJ$$

ولكنّ المصفوفة J تُحقّق $J^2=3J$ و من ثَمّ $\forall n\geq 1, J^n=3^{n-1}J$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}e^A &= e^{(a-b)I}\cdot e^{bJ}=e^{a-b}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}J^n=e^{a-b}\cdot\left(I+\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3b)^n}{n!}\right)J\right)\\ &= e^{a-b}\cdot\left(I+\frac{1}{3}(e^{3b}-1)J\right)=e^{a-b}I+\frac{1}{3}\left(e^{a+2b}-e^{a-b}\right)J\\ &= \frac{e^a}{3}\begin{bmatrix}e^{2b}+2e^{-b} & e^{2b}-e^{-b} & e^{2b}-e^{-b}\\ e^{2b}-e^{-b} & e^{2b}+2e^{-b} & e^{2b}-e^{-b}\\ e^{2b}-e^{-b} & e^{2b}-e^{-b} & e^{2b}+2e^{-b}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

التمرين 5. أوجد، تبعاً لقيم الوسيط m، الحلّ العام لجملة المعادلات الخطّية

$$\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = -z \\ z' = -m^2\,x + m(m+2)\,y - (1+2m)\,z + 1 \end{cases}$$

الحل

تُكافئ هذه الجملةُ المعادلةَ $X' = A_m X + B$ حيث

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -m^2 & m(m+2) & -1-2m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ونجد كثير الحدود المميّز للمصفوفة A_m بحساب مباشر :

$$\mathcal{X}_{A_m}(X) = -(X+1)(X+m)^2$$

- لندرس أوّلاً حالة $m \notin \{1,0\}$، ولنبحث عن كثير الحدود من الدرجة الثانية

$$\mathcal{E}_t(X) = a + b(X+m) + c(X+m)^2$$

الذي يُحقّق الشروط

$$\mathcal{E}_t'(-m) = te^{-mt} \text{ و } \mathcal{E}_t(-m) = e^{-mt} \text{ و } \mathcal{E}_t(-1) = e^{-t}$$

ونجد بحساب بسيط أنّ

$$c = \frac{e^{(m-1)t} - 1 - t(m-1)}{(m-1)^2} e^{-mt} \text{ و } b = te^{-mt} \text{ و } a = e^{-mt}$$

ومن ثَمّ

$$e^{tA_m} = e^{-mt}\left(I + t(A+mI) + \frac{e^{(m-1)t} - 1 - (m-1)t}{(m-1)^2}(A+mI)^2 \right)$$

بقي أن نجدَ حلاً خاصّاً للجملة. ولأنّ المصفوفة A_m قَلوبة في هذه الحالة $\left(m \neq 0\right)$ نرى أنّ الشعاع الثابت

$$Z = -A_m^{-1}B = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{1}{m}\right)^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حلٌّ خاص للجملة، فالحلّ العام المنشود هو $X(t) = e^{tA_m}X_0 + Z$ ، ومن ثَمّ

$$x(t)=e^{-mt}\left(\alpha+t(m\alpha-\beta)+\frac{e^{(m-1)t}-1-(m-1)t}{(m-1)^2}(m^2\alpha-2m\beta+\gamma)\right)+\left(1+\frac{1}{m}\right)^2$$
$$y(t)=e^{-mt}\left(\beta+t(m\beta-\gamma)+\frac{e^{(m-1)t}-1-(m-1)t}{(m-1)^2}(m^2\alpha-2m\beta+\gamma)\right)+1$$
$$z(t)=e^{-mt}\left(\gamma-t\left(m^2\alpha-m(m+2)\beta+(m+1)\gamma\right)+\frac{e^{(m-1)t}-1-(m-1)t}{(m-1)^2}(m^2\alpha-2m\beta+\gamma)\right)$$

- لنأتِ إلى حالة $m = 0$ ، في هذه الحالة تُكتب الجملة بالصيغة البسيطة الآتية

$$z' = -z + 1 \quad ، y' = -z \quad ، x' = -y + 1$$

من المعادلة الأخيرة نستنتج أنّ $z(t) = 1 - e^{-t} + \gamma e^{-t}$ ، نعوّض في الثانية ثُمّ في الأولى لنجد أنّ

$$x(t) = \alpha - \beta t + \gamma e^{-t} + t + \frac{t^2}{2}$$
$$y(t) = \beta + \gamma e^{-t} - t$$
$$z(t) = \gamma e^{-t} + 1$$

- أمّا حالة $m = 1$ ، فهي أيضاً بسيطة، ويمكن أن نستنتجها من الحلّ العامّ بجعل m تسعى إلى 1 فنجد

$$x(t) = 4 + e^{-t}\left(\alpha + (\alpha - \beta)t + (\alpha - 2\beta + \gamma)\frac{t^2}{2}\right)$$
$$y(t) = 1 + e^{-t}\left(\beta + (\beta - \gamma)t + (\alpha - 2\beta + \gamma)\frac{t^2}{2}\right)$$
$$z(t) = e^{-t}\left(\gamma + (-\alpha + 3\beta - 2\gamma)t + (\alpha - 2\beta + \gamma)\frac{t^2}{2}\right)$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 6. أوجد الحلّ العام على $\mathbb{R}_+^*$ لجملة المعادلات الخطّية الآتية :

$$\begin{cases} x' = -6x + 5y + 3z + \frac{1}{t} \\ y' = -8x + 7y + 4z \\ z' = -2x + y + z + \frac{2}{t} \end{cases}$$

الحل

تُكافئ الجملة المدروسة المعادلة $X' = AX + B$ مع

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B(t) = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A هو $\mathcal{X}_A(X) = -X(X-1)^2$. ونجد أيضاً بحساب بسيط أساساً (v_1, v_2, v_3) للفضاء $\mathbb{R}^3$ يُحقِّق

$$Av_1 = 0 \text{ و } Av_2 = v_2 \text{ و } Av_3 = v_3 + v_2$$

مثلاً

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ و } v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

فيُكتب الحلُّ المنشود على هذا الأساس بالصيغة

$$X(t) = x_1(t)v_1 + x_2(t)v_2 + x_3(t)v_3$$

فإذا لاحظنا أنّ $B(t) = \frac{1}{t}v_1$ آلت المعادلة $X' = AX + B$ إلى الشكل

$$\begin{aligned} x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3 &= A(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) + \frac{1}{t}v_1 \\ &= x_2v_2 + x_3(v_2 + v_3) + \frac{1}{t}v_1 \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{cases} x_1' = 1/t \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

إنّ حلّ هذه الجملة سهلٌ جدّاً، ونجد

$$x_1(t) = \alpha + \ln t \quad \text{و} \quad x_2(t) = (\beta + \gamma t)e^t \quad \text{و} \quad x_3(t) = \gamma e^t$$

وبالعودة إلى $X(t)$ نجد

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + (\beta + \gamma t)e^t + \ln t \\ y(t) &= (2\beta - \gamma + 2\gamma t)e^t \\ z(t) &= 2\alpha + (2\gamma - \beta - \gamma t)e^t + 2\ln t \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

التمرين 7. أوجد الحلّ العام على $\mathbb{R}$ لجملة المعادلات الخطّية التالية:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z + t^2 - t\,e^{-t} \\ y' = 10x - 5y + 7z + 2t^2 - t^3 - 5\,t\,e^{-t} \\ z' = 4x - 2y + 2z + t^3 - 2\,t\,e^{-t} \end{cases}$$

الحل

تُكافئ الجملة المدروسة المعادلة $X' = AX + B$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B(t) = \begin{bmatrix} t^2 - te^{-t} \\ 2t^2 - t^3 - 5te^{-t} \\ t^3 - 2te^{-t} \end{bmatrix}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A هو $\mathcal{X}_A(X) = -X^2(X+1)$. ونجد أيضاً بحساب بسيط أساساً (v_1, v_2, v_3) للفضاء $\mathbb{R}^3$ يُحقّق

$$Av_1 = -v_1 \quad \text{و} \quad Av_2 = 0 \quad \text{و} \quad Av_3 = v_2$$

مثلاً

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

علينا إذن تحليل الطرف الثاني $B(t)$ على الأساس (v_1, v_2, v_3)، أي إيجاد $b_1(t)$ و $b_2(t)$ و $b_3(t)$ ليتحقّق $B(t) = b_1(t)v_1 + b_2(t)v_2 + b_3(t)v_3$. وهذا يُكافئ الجملة

$$\begin{aligned} -b_1 + b_2 &= t^2 - te^{-t} \\ b_1 + 2b_2 + b_3 &= 2t^2 - t^3 - 5te^{-t} \\ 2b_1 + b_3 &= t^3 - 2te^{-t} \end{aligned}$$

إذن $b_2 = b_1 + t^2 - te^{-t}$ و $b_3 = -2b_1 + t^3 - 2te^{-t}$ وبالتعويض في المعادلة الثالثة نجد $b_1 = -2t^3 - te^{-t}$، ومن ثمّ $b_2 = -2t^3 + t^2 - 2te^{-t}$ و $b_3 = 5t^3$. إذن

$$B(t) = (-2t^3 - te^{-t})v_1 + (-2t^3 + t^2 - 2te^{-t})v_2 + 5t^3 v_3$$

وعليه تؤول المعادلة $X' = AX + B$ إلى الشكل

$$\begin{aligned} x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3 &= A(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) + b_1(t)v_1 + b_2(t)v_2 + b_3(t)v_3 \\ &= -x_1v_1 + x_3v_2 + b_1(t)v_1 + b_2(t)v_2 + b_3(t)v_3 \end{aligned}$$

ومن ثمّ

$$\left\{ x_1' = -x_1 - 2t^3 - te^{-t} \quad \text{و} \quad x_3' = 5t^3 \quad \text{و} \quad x_2' = x_3 - 2t^3 + t^2 - 2te^{-t} \right.$$

المعادلة $x_1' = -x_1 - 2t^3 - te^{-t}$ تُكافئ $(x_1e^t)' = -2t^3e^t - t$ ومن ثمّ

$$x_1e^t = \alpha + (12 - 12t + 6t^2 - 2t^3)e^t - \frac{t^2}{2}$$

أو

$$x_1(t) = \alpha e^{-t} + 12 - 12t + 6t^2 - 2t^3 - \frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

المعادلة $x_3' = 5t^3$ تُكافئ

$$x_3(t) = \frac{5}{4}t^4 + \gamma$$

والمعادلة $x_2' = x_3 - 2t^3 + t^2 - 2te^{-t}$ تُكافئ

$$x_2(t) = \frac{t^5}{4} - \frac{1}{2}t^4 + \frac{t^3}{3} + (2 + 2t)e^{-t} + \gamma t + \beta$$

وبالعودة إلى $X(t)$ نجد

$$x(t) = -12 + 12t - 6t^2 + \frac{7}{3}t^3 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{4} + \left(2 + 2t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t} - \alpha e^{-t} + \gamma t + \beta$$

$$y(t) = 12 - 12t + 6t^2 - \frac{4t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{2} + \left(4 + 4t - \frac{t^2}{2}\right)e^{-t} + \alpha e^{-t} + 2\gamma t + 2\beta + \gamma$$

$$z(t) = 24 - 24t + 12t^2 - 4t^3 + \frac{5}{4}t^4 - t^2e^{-t} + 2\alpha e^{-t} + \gamma$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 8. أوجد حلّ جملة المعادلات الخطّية التالية

$$\begin{cases} x' &= -4x + y + z + 3t^2e^{-2t} \\ y' &= x - y - 2z \\ z' &= -2x + y - z \end{cases}$$

الذي يُحقّق شرط البدء $z(0) = 0, y(0) = 3, x(0) = 0$.

الحل

تُكافئ الجملة المدروسة المعادلة $X' = AX + B$ مع

$$B(t) = \begin{bmatrix} 3t^2e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

وشرط البدء $X(0) = {}^t[0,3,0]$.

ونجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A هو $\mathcal{X}_A(X) = -(X+2)^3$. إنّ بُعد الفضاء الذاتي للمصفوفة A الموافق للقيمة الذاتيّة -2 هو 1، و يقبل الشعاع $v_1 = {}^t[1,1,1]$ أساساً له. لنتمّم هذا الشعاع إلى أساس للفضاء بأن نختار $v_2 = {}^t[1,0,0]$ و $v_3 = {}^t[0,1,0]$ فيكون (v_1, v_2, v_3) أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ يُحقّق

$$Av_3 = -2v_3 + v_1 \quad \text{و} \quad Av_2 = -2v_1 - 2v_2 + 3v_3 \quad \text{و} \quad Av_1 = -2v_1$$

يُكتب الحلُّ المنشود على الأساس (v_1, v_2, v_3) بالصيغة

$$X(t) = x_1(t)v_1 + x_2(t)v_2 + x_3(t)v_3$$

فإذا لاحظنا أنّ $B(t) = 3t^2e^{-2t}v_2$ آلت المعادلة $X' = AX + B$ إلى الشكل

$$\begin{aligned} x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3 &= A(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) + 3t^2e^{-2t}v_2 \\ &= -2x_1v_1 + x_2(-2v_1 - 2v_2 + 3v_3) + x_3(-2v_3 + v_1) + 3t^2e^{-2t}v_2 \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2' = -2x_2 + 3t^2e^{-2t} \\ x_3' = -2x_3 + 3x_2 \end{cases} \quad \text{مع شرط البدء :} \quad \begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 3 \end{aligned}$$

المعادلة

$$x_2' = -2x_2 + 3t^2e^{-2t}$$

تُكافئ $(e^{2t}x_2)' = 3t^2$. ولمّا كان $x_2(0) = 0$ استنتجنا أنّ $x_2(t) = t^3e^{-2t}$.

أمّا المعادلة

$$x_3' = -2x_3 + 3x_2$$

فتصبح $x_3' = -2x_3 + 3t^3e^{-2t}$ وهي تُكافئ $(e^{2t}x_3)' = 3t^3$. ولمّا كان $x_3(0) = 3$ استنتجنا أنّ $x_3(t) = \left(3 + \frac{3}{4}t^4\right)e^{-2t}$.

أمّا المعادلة $x_1' = -2x_1 - 2x_2 + x_3$ فتصبح

$$x_1' = -2x_1 + \left(3 - 2t^3 + \tfrac{3}{4}t^4\right)e^{-2t}$$

وهي تُكافئ $(e^{2t}x_1)' = 3 - 2t^3 + \frac{3}{4}t^4$. ولمّا كان $x_1(0) = 0$ استنتجنا أنّ

$$x_1(t) = \left(3t - \tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{3}{20}t^5\right)e^{-2t}$$

وبالعودة إلى $X(t)$ نجد

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left(3t + t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{20}t^5\right)e^{-2t}\\
y(t) &= \left(3 + 3t + \frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{20}t^5\right)e^{-2t}\\
z(t) &= \left(3t - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{20}t^5\right)e^{-2t}
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

التمرين 9. لنعرّف المصفوفة A من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ، والتابع $b : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$ بالعلاقات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 8t + 2\\ -12t - 2\\ -8t - 6 \end{bmatrix}$$

1. أوجد حل جملة المعادلات التفاضليّة الخطّية $X' = A \cdot X + b(t)$.
2. أثبت أنّ حلول جملة المعادلات التفاضليّة السابقة مستوية.
3. أوجد حل جملة المعادلات التفاضليّة السابقة الذي يُحقّق الشرط $X(0) = {}^t[1,0,1]$ ، وعيّن معادلة المستوي في $\mathbb{R}^3$ الذي يتحوّل فيه هذا الحل.

الحل

1. نجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميّز للمصفوفة A هو $\mathcal{X}_A(X) = -X^3$. إنّ بُعد الفضاء الذاتي للمصفوفة A الموافق للقيمة الذاتيّة 0 هو 1، و يقبل الشعاع $v_1 = {}^t[-1,1,1]$ أساساً له. لنتمّم هذا الشعاع إلى أساس للفضاء بأن نختار $v_2 = {}^t[1,0,0]$ و $v_3 = {}^t[0,1,0]$ فيكون (v_1, v_2, v_3) أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ يُحقِّق

$$Av_3 = v_1 \quad \text{و} \quad Av_2 = -v_1 - v_3 \quad \text{و} \quad Av_1 = 0$$

يُكتب الحلُّ المنشود على الأساس (v_1, v_2, v_3) بالصيغة

$$X(t) = x_1(t)v_1 + x_2(t)v_2 + x_3(t)v_3$$

فإذا لاحظنا أنّ

$$B(t) = (-8t-6)v_1 - 4v_2 + (-4t+4)v_3$$

آلت المعادلة $X' = AX + B$ إلى الشكل

$$x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3 = -x_2(v_1+v_3) + x_3v_1 - (8t+6)v_1 - 4v_2 + (4-4t)v_3$$

ومن ثَمّ

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_3 - 8t - 6 \\ x_2' = -4 \\ x_3' = -x_2 + 4 - 4t \end{cases}$$

المعادلة $x_2' = -4$ تقتضي $x_2(t) = -4t + \beta$. وتُكافئ المعادلة $x_3' = -x_2 + 4 - 4t$ المعادلة $x_3' = 4 - \beta$، ومنه نستنتج أنّ $x_3(t) = (4-\beta)t + \gamma$، وتصبح المعادلة الأولى $x_1' = \gamma - \beta - 6 - \beta t$، إذن $x_1(t) = \alpha + (\gamma - \beta - 6)t - \frac{\beta}{2}t^2$.

وبالعودة إلى $X(t)$ نجد

$$\mathbb{S} : \begin{cases} x(t) = \beta - \alpha - (\gamma - \beta - 2)t + \dfrac{\beta}{2}t^2 \\ y(t) = \alpha + \gamma + (\gamma - 2\beta - 2)t - \dfrac{\beta}{2}t^2 \\ z(t) = \alpha + (\gamma - \beta - 6)t - \dfrac{\beta}{2}t^2 \end{cases}$$

2. لنبحث عن قيم A و B و C حتى يكون المقدار $f(t) = Ax(t) + By(t) + Cz(t)$ ثابتاً. في الحقيقة لدينا

$$\begin{aligned} f(t) &= Ax(t) + By(t) + Cz(t) \\ &= A\beta + B\gamma + (B + C - A)\alpha \\ &\quad + \big(A(\beta+2) - B(2\beta+2) - C(\beta+6) + (B+C-A)\gamma\big)t \\ &\quad + \big(A - B - C\big)\frac{\beta}{2}t^2 \end{aligned}$$

تنعدم أمثال t^2 إذا اخترنا $A = B + C$ ، وفي هذه الحالة يكون لدينا

$$f(t) = A\beta + B\gamma - (4C + B\beta)t$$

لنختر إذن $B = 4$ و $C = -\beta$ و $A = 4 - \beta$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (4-\beta)x(t) + 4y(t) - \beta z(t) = \beta(4-\beta) + 4\gamma$$

فإذا عرّفنا $\mathcal{P}_{(\beta,\gamma)}$ المستوي الذي معادلته $(4-\beta)x + 4y - \beta z = \beta(4-\beta) + 4\gamma$ استنتجنا أنّ الحلّ $\mathbb{S}$ لجملة المعادلات التفاضليّة يقع في المستوي $\mathcal{P}_{(\beta,\gamma)}$ أي

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathcal{P}_{(\beta,\gamma)}$$

3. إنّ الشرط $X(0) = {}^t[1,0,1]$ يُكافئ

$$\{1 = \beta - \alpha, \ 0 = \alpha + \gamma, \ 1 = \alpha$$

وعليه $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ و $\gamma = -1$. فالحلُّ المطلوب هو

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 5t + t^2 \\ y(t) = -7t - t^2 \\ z(t) = 1 - 9t - t^2 \end{cases}$$

وهو يتحوّل في المستوي $\mathcal{P}_{(2,-1)}$ الذي معادلته $x + 2y - z = 0$. وهو المطلوب. ■

التمرين 10. ادرس، تبعاً لقيم الوسيط العقدي ρ ، جملة المعادلات التفاضليّة الخطّية التالية :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + (1+\rho^2)z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

الحل

تُكافئ الجملة المدروسة المعادلة $X' = A_\rho X$ مع

$$A_\rho = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1+\rho^2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ونجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة A_ρ هو

$$\mathcal{X}_{A_\rho}(X) = -(X-1)(X-\rho)(X+\rho)$$

ولنفترض أنّ $\rho \notin \{0,-1,1\}$. في هذه الحالة تكون جميع القيم الذاتيّة مختلفة، ولعلّ أسرع طريقة لإيجاد الحلّ هي في حساب $\exp(tA_\rho)$. لنبحث إذن عن كثير حدود من الدرجة الثانية على الأكثر

$$\mathcal{E}_t(X) = a + bX + c(X^2 - \rho^2)$$

يُحقّق

$$\mathcal{E}_t(-\rho) = e^{-\rho t} \text{ و } \mathcal{E}_t(\rho) = e^{\rho t} \text{ و } \mathcal{E}_t(1) = e^t$$

فنجد أنّ

$$\begin{aligned} a &+ b &+(1-\rho^2)c &= e^t \\ a &+ \rho b & &= e^{\rho t} \\ a &- \rho b & &= e^{-\rho t} \end{aligned}$$

وعليه نجد

$$c = \frac{1}{\rho^2 - 1}\left(\operatorname{ch}\rho t + \frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho} - e^t\right) \text{ و } b = \frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho} \text{ و } a = \operatorname{ch}\rho t$$

إذن

$$e^{tA_\rho} = \operatorname{ch}\rho t I + \frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho^2-1}\left(\operatorname{ch}\rho t + \frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho} - e^t\right)(A_\rho^2 - \rho^2 I)$$

ومنه

$$e^{tA_\rho} = \operatorname{ch}\rho t I + \frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1+\rho^2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f(\rho)\begin{bmatrix} 0 & \rho^2+3 & \rho^2+3 \\ 0 & -1-\rho^2 & -1-\rho^2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

وقد عرّفنا $f(\rho)=\dfrac{1}{\rho^2-1}\left(\operatorname{ch}\rho t+\dfrac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho}-e^t\right)$.

وعليه، الحلُّ العامّ في هذه الحالة هو $t\mapsto e^{tA_\rho}X_0$ ، فإذا افترضنا أنّ $X_0={}^t[x_0,y_0,z_0]$ كان لدينا

$$x(t)=x_0\operatorname{ch}\rho t+\frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho}(x_0+2y_0+(1+\rho^2)z_0)+(3+\rho^2)(\rho)(y_0+z_0)$$
$$y(t)=y_0\operatorname{ch}\rho t-\frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho}(x_0-z_0)-(1+\rho^2)f(\rho)(y_0+z_0)$$
$$z(t)=z_0\operatorname{ch}\rho t+\frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho}(x_0+y_0)+2f(\rho)(y_0+z_0)$$

ولكن لمّا كان التابع $\rho\mapsto A_\rho$ مستمرّاً في $\mathbb{C}$ استنتجنا أنّه مهما تكن t من $\mathbb{R}$ يكن التابع $\rho\mapsto e^{tA_\rho}$ مستمراً في $\mathbb{C}$، وعليه نستنتج الحلول في حالة ρ من $\{0,-1,1\}$ بأخذ النهاية عندما تسعى ρ إلى إحدى هذه القيم. فنجد ما يأتي:

- في حالة $\rho=0$ الحلّ العام هو

$$x(t)=x_0-3y_0-3z_0+t(x_0-y_0-2z_0)+3(y_0+z_0)e^t$$
$$y(t)=2y_0+z_0+(-x_0+y_0+2z_0)t-(y_0+z_0)e^t$$
$$z(t)=-2y_0-z_0+(x_0-y_0-2z_0)t+2(y_0+z_0)e^t$$

- وفي حالة $\rho^2=1$ الحلُّ العام هو

$$x(t)=x_0e^t+2(y_0+z_0)te^t$$
$$y(t)=y_0e^t-(x_0-2z_0)\operatorname{sh}t-(y_0+z_0)te^t$$
$$z(t)=z_0e^t+(x_0-2z_0)\operatorname{sh}t+(y_0+z_0)te^t$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 11. حلّ المعادلات التفاضليّة التالية :

① $y''+2y'-3y=t^2e^t$

② $y''+6y'+10y=3t\,e^{-3t}-2e^{3t}\cos t$

③ $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t}$

④ $y'''-y''-y'+y=3e^t+5t\sin t$

⑤ $t^3y'''+t\,y'-y=0$

⑥ $y''+2y'+5y=e^{-t}(\cos^2 t+\tan t)$

⑦ $t^2y''-2y=\dfrac{3t^2}{1+t}$

⑧ $t^2y''-3t\,y'+5y=3t^2$

الحل

① المعادلة $y'' + 2y' - 3y = t^2 e^t$. إنّ المعادلة المميِّزة للمعادلة التفاضليّة بدون طرف ثانٍ هي $X^2 + 2X - 3 = 0$ وتقبل الجذرين -3 و 1. إذن الحلّ العام للمعادلة بدون طرف ثانٍ الموافقة هو $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-3t}$. ونظراً إلى الشكل المميّز للطرف الثاني، ولأنّ 1 جذرٌ للمعادلة المميِّزة، نعلم أنّ للمعادلة ① حلاً خاصّاً من الشكل $t \mapsto t(at^2 + bt + c)e^t$. وبالتعويض في المعادلة التفاضليّة نجد

$$12at^2 + (8b + 6a)t + 4c + 2b = t^2$$

ومن ثَمّ $a = \frac{1}{12}$ و $b = -\frac{1}{16}$ و $c = \frac{1}{32}$. إذن الحلّ العام للمعادلة التفاضليّة ① هو

$$t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-3t} + \left(\frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}\right)e^t$$

② المعادلة $y'' + 6y' + 10y = 3t\,e^{-3t} - 2e^{3t}\cos t$. إنّ المعادلة المميِّزة للمعادلة دون طرف ثانٍ هي

$$X^2 + 6X + 10 = 0$$

وتقبل الجذرين $-3 - \mathrm{i}$ و $-3 + \mathrm{i}$. إذن الحلّ العام للمعادلة بدون طرف ثانٍ الموافقة هو

$$t \mapsto (\lambda \cos t + \mu \sin t)e^{-3t}$$

ونظراً إلى الشكل المميّز للطرف الثاني، نبحث أوّلاً عن حلٍّ خاصّ للمعادلة

$$y'' + 6y' + 10y = 3t\,e^{-3t}$$

من الصيغة $t \mapsto (at + b)e^{-3t}$ ، ونجد بالتعويض أنّ هذا الحل الخاص هو $t \mapsto 3te^{-3t}$. ثُمّ نبحث عن حلٍّ خاصّ للمعادلة

$$y'' + 6y' + 10y = -2e^{3t}\cos t$$

من الصيغة $t \mapsto (a\cos t + b\sin t)e^{3t}$ ، ونجد بالتعويض

$$12((3a + b)\cos t + (3b - a)\sin t) = -2\cos t$$

ومن ثَمّ $a = -\frac{1}{20}$ و $b = -\frac{1}{60}$. فنجد الحل الخاص $t \mapsto -\frac{1}{60}(3\cos t + \sin t)e^{3t}$.

وعليه يكون الحلّ العام للمعادلة ② هو

$$t \mapsto (\lambda \cos t + \mu \sin t)e^{-3t} + 3te^{-3t} - \frac{1}{60}(3\cos t + \sin t)e^{3t}$$

③ المعادلة $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{t}$. مجال الدراسة I هو $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_+^*$. بدلاً من اتّباع الأسلوب التقليدي يمكننا أن نتبع الطريقة الآتية : نلاحظ أوّلاً أنّ

$$(ye^{-t})'' = (y'' - 2y' + y)e^{-t}$$

وعليه تُكافئ المعادلةُ المدروسة المعادلة :

$$(ye^{-t})'' = \frac{1}{t}$$

ومن ثَمّ

$$\forall t \in I, \quad y(t)e^{-t} = t\ln|t| - t + \beta t + \gamma$$

أو

$$\forall t \in I, \quad y(t) = te^t\ln|t| - te^t + (\beta t + \gamma)e^t$$

④ المعادلة $y''' - y'' - y' + y = 3e^t + 5t\sin t$. إنّ المعادلة المميِّزة للمعادلة بدون طرف ثانٍ هي

$$X^3 - X^2 - X + 1 = 0$$

وهي تُكافئ $(X+1)(X-1)^2 = 0$. فالعدد 1 جذرٌ مُضاعف، والعدد -1 جذرٌ بسيط لهذه المعادلة.إذن الحلّ العام للمعادلة بدون طرف ثانٍ الموافقة هو

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t + \nu e^{-t}.$$

ونظراً إلى الشكل المميّز للطرف الثاني، نبحث أوّلاً عن حلٍّ خاصّ للمعادلة

$$y''' - y'' - y' + y = 3e^t$$

من الصيغة $t \mapsto at^2e^t$، لأنّ العدد 1 جذرٌ مُضاعف من المرتبة الثانية. فنجد بالتعويض والمطابقة $a = \frac{3}{4}$، ومنه الحلّ الخاص $t \mapsto \frac{3}{4}t^2e^t$.

ثُمّ نبحث عن حلٍّ خاصّ للمعادلة

$$y''' - y'' - y' + y = 5t\sin t$$

من الصيغة $t \mapsto (a+bt)\cos t + (c+dt)\sin t$، فنجد بالتعويض والمطابقة أنّ التابع

$$t \mapsto \frac{5}{4}((-1+t)\sin t + (2+t)\cos t)$$

حل خاص للمعادلة. وعليه يكون الحلّ العام للمعادلة ④ هو

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t + \nu e^{-t} + \frac{3}{4}t^2e^t + \frac{5}{4}((-1+t)\sin t + (2+t)\cos t)$$

⑤ المعادلة $t^3y''' + t\,y' - y = 0$. سندرس هذه المعادلة على المجال I الذي يمثّل $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$. ولذلك نُجري تغيير المتحوّل $t = \varepsilon e^x$ مع $\varepsilon = 1$ في حالة $I = \mathbb{R}_+^*$ و $\varepsilon = -1$ في حالة $I = \mathbb{R}_-^*$.

وهنا نلاحظ ما يلي :

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{1}{t}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{1}{t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)\cdot\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{1}{t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)\cdot\frac{1}{t^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}^3\,y}{\mathrm{d}\,t^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\left(\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)\cdot\frac{1}{t^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)\cdot\frac{1}{t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)\cdot\frac{2}{t^3}$$
$$= \left(\frac{\mathrm{d}^3\,y}{\mathrm{d}\,x^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} + 2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)\cdot\frac{2}{t^3}$$

إذن

$$t^3y''' = \frac{\mathrm{d}^3\,y}{\mathrm{d}\,x^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} + 2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \quad \text{و} \quad t^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} - \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \quad \text{و} \quad ty' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$$

وبالعودة إلى المعادلة ⑤ نجد

$$\frac{\mathrm{d}^3\,y}{\mathrm{d}\,x^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} + 3\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - y = 0$$

وهي تُكافئ $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3}\left(y(x)e^{-x}\right) = 0$، ومن ثَمّ $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. فالحل العام على I هو

$$\forall t \in I,\quad \varphi(t) = (a\ln^2|t| + b\ln|t| + c)t$$

⑥ المعادلة $y'' + 2y' + 5y = e^{-t}(\cos^2 t + \tan t)$. سندرس هذه المعادلة على المجال I الذي يمثّل واحداً من المجالات $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. إنّ المعادلة المميِّزة للمعادلة بدون طرف ثانٍ هي

$$X^2 + 2X + 5 = 0$$

ولها جذاران بسيطان هما $-1 - 2\mathrm{i}$ و $-1 + 2\mathrm{i}$. إذن الحلّ العام للمعادلة بدون طرف ثانٍ الموافقة هو $t \mapsto e^{-t}(\lambda\cos 2t + \mu\sin 2t)$.

لنتبع طريقة جعل الثوابت متغيِّرة لإيجاد حلٍّ خاص للمعادلة مع طرف ثانٍ، إذن لنبحث عن هذا الحل بصيغة $t \mapsto e^{-t}\left(\lambda(t)\cos 2t + \mu(t)\sin 2t\right)$. يتعيّن التابعان $t \mapsto \lambda(t)$ و $t \mapsto \mu(t)$ بالشرطين

$$\lambda'(t)\cos 2t + \mu'(t)\sin 2t = 0$$
$$\lambda'(t)(-\cos 2t - 2\sin 2t) + \mu'(t)(-\sin 2t + 2\cos 2t) = \cos^2 t + \tan t$$

أو

$$\begin{aligned} \lambda'(t)\cos 2t + \mu'(t)\sin 2t &= 0 \\ -\lambda'(t)\sin 2t + \mu'(t)\cos 2t &= \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\tan t \end{aligned}$$

ومنه بضرب أولى المعادلتين بالمقدار $\cos 2t$ وثانيهما بالمقدار $-\sin 2t$ ثُمّ الجمع نجد

$$\lambda'(t) = -\sin t\cos^3 t + \sin^2 t = -\sin t\cos^3 t + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}$$

يمكننا إذن أن نختار

$$\lambda(t) = -\frac{1}{4}\cos^4 t + \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}$$

وكذلك نجد أنّ

$$\begin{aligned} \mu'(t) &= \frac{1}{2}\cos^2 t\cos 2t + \frac{1}{2}\tan t \cdot \cos 2t \\ &= \frac{1}{8} + \frac{\cos 2t}{4} + \frac{\cos 4t}{8} + \frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{2}\tan t \end{aligned}$$

إذن

$$\mu(t) = \frac{t}{8} + \frac{\sin 2t}{8} + \frac{\sin 4t}{32} - \frac{\cos 2t}{4} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos t\right|$$

وعليه يكون الحلّ العام للمعادلة ⑥ هو

$$\begin{aligned} &t \mapsto e^{-t}\left(\lambda\cos 2t + \mu\sin 2t\right) \\ &\quad + \frac{1}{32}\left((16t-3)\cos 2t - 4\cos 4t - \cos 6t + 16\left(t + \ln\left|\cos t\right|\right)\sin 2t - 8\sin 4t\right) \end{aligned}$$

⑦ المعادلة $\frac{3t^2}{1+t} = t^2y'' - 2y$. سندرس هذه المعادلة على المجال I الذي يمثّل $\mathbb{R}_+^*$ أو $]-1,0[$ أو $]-\infty,-1[$ ، ولذلك نُجري تغيير المتحوّل $t = \varepsilon e^x$ حيث $\varepsilon = 1$ في حالة $I = \mathbb{R}_+^*$ و $\varepsilon = -1$ في الحالتين الأخريَيْن. وهنا نلاحظ ما يلي :

$$t^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{و} \quad ty' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

وعليه يكون لدينا

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = \frac{3e^{2x}}{1+\varepsilon e^x}$$

المعادلة المميِّزة لهذه المعادلة التفاضليّة بدون طرف ثانٍ هي $X^2 - X - 2 = 0$ وهي تقبل الجذرين -1 و 2. إذن حلّها العام هو $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-x}$.

لنتبع طريقة جعل الثوابت متغيِّرة لإيجاد حلٍّ خاص للمعادلة مع طرف ثانٍ، إذن لنبحث عن هذا الحل بصيغة $x \mapsto \lambda(x)e^{2x} + \mu(x)e^{-x}$. يتعيّن $x \mapsto \lambda(x)$ و $x \mapsto \mu(x)$ بالشرطين

$$\begin{aligned}
\lambda'(x)e^{2x} + \mu'(x)e^{-x} &= 0\\
2\lambda'(x)e^{2x} - \mu'(x)e^{-x} &= \frac{3e^{2x}}{1+\varepsilon e^x}
\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}
\lambda'(x) &= \frac{1}{1+\varepsilon e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+\varepsilon}\\
\mu'(x) &= \frac{-e^{3x}}{1+\varepsilon e^x} = \left(-\frac{1}{1+\varepsilon e^x} + 1 - \varepsilon e^x\right)e^x
\end{aligned}$$

وعليه

$$\mu(x) = -\varepsilon \ln|1+\varepsilon e^x| + e^x - \frac{\varepsilon}{2}e^{2x} \quad \text{و} \quad \lambda(x) = -\ln|1+\varepsilon e^{-x}|$$

فالحلّ الخاص هو

$$x \mapsto -e^{2x}\ln|1+\varepsilon e^{-x}| - \varepsilon e^{-x}\ln|1+\varepsilon e^x| + 1 - \tfrac{\varepsilon}{2}e^x$$

أمّا الحلّ العامّ على I فيُعطى بالعلاقة

$$t \mapsto \lambda t^2 + \frac{\mu}{t} - t^2\ln|1+t^{-1}| - \frac{1}{t}\ln|1+t| + 1 - \frac{t}{2}$$

⑧ المعادلة $t^2y'' - 3t\,y' + 5y = 3t^2$. سندرس هذه المعادلة على المجال I الذي يمثّل $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$، ولذلك نُجري تغيير المتحوّل $t = \varepsilon e^x$ حيث $\varepsilon = 1$ في حالة $I = \mathbb{R}_+^*$ و $\varepsilon = -1$ في الحالة الأخرى. وهنا نلاحظ أنّ التابع $t \mapsto 3t^2$ هو حلٌّ خاص على I لهذه المعادلة، لذلك سندرس المعادلة بدون طرف ثانٍ. ولكن نعلم أنّ

$$t^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, x^2} - \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} \quad \text{و} \quad ty' = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}$$

وعليه تصبح المعادلة بدون طرف ثانٍ كما يأتي

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, x^2} - 4\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} + 5y = 0$$

المعادلة المميِّزة لهذه المعادلة التفاضليّة هي $X^2 - 4X + 5 = 0$ وهي تقبل الجذرين $2+\mathrm{i}$ و $2-\mathrm{i}$. إذن حلّها العامّ هو $x \mapsto e^{2x}(\lambda\cos x + \mu \sin x)$. وعليه يعطى الحلّ العام للمعادلة ⑧ على I بالصيغة $t \mapsto t^2(\lambda\cos\ln|t| + \mu\sin\ln|t|) + 3t^2$. ■

التمرين 12. أوجد أعداداً حقيقيّة (a_0, a_1, a_2, a_3) حتّى تقبل المعادلة التفاضليّة

$$y^{(4)} + a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

التابع $t \mapsto t\,e^t \sin t$ حلّاً لها.

الحل

لنعرّف كثير الحدود المميِّز $P(X) = X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ من $\mathbb{R}[X]$. يكون التابع $t \mapsto te^t \sin t$ حلّاً للمعادلة $y^{(4)} + a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ إذا وفقط إذا كان العدد $1+\mathrm{i}$ جذراً مُضاعفاً لكثير الحدود $P(X)$. ولكنّ كثير الحدود $P(X)$ حقيقي، فإذا كان $1+\mathrm{i}$ جذراً مضاعفاً له، كان المرافق $1-\mathrm{i}$ جذراً مضاعفاً له أيضاً. وعليه يقبل $P(X)$ القسمة على كثير الحدود

$$(X-1-\mathrm{i})^2(X-1+\mathrm{i})^2 = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4$$

ولأنّ $P(X)$ واحديٌّ ومن الدرجة الرابعة استنتجنا أنّ

$$P(X) = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4$$

وعليه يكون $a_0 = 4$ و $a_1 = -8$ و $a_2 = 8$ و $a_3 = -4$. وهو المطلوب. ■

التمرين 13. أوجد حلّ المعادلة التفاضليّة $|x| = y'' + 2y' + y$ ، الذي يُحقّق الشرط :

$$y(0) = y'(0) = 0$$

الحل

لنلاحظ أنّ

$$(y(x)e^x)'' = (y''(x) + 2y'(x) + y(x))e^x$$

وعليه، إذا وضعنا $z(x) = y(x)e^x$ صارت المسألة المطروحة مُكافئة للمسألة الآتية

$$z(0) = z'(0) = 0 \text{ حيث } z''(x) = e^x|x|$$

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^x z'(t)\,\mathrm{d}\,t = \Big[\,(t-x)z'(t)\Big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (t-x)z''(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^x (x-t)z''(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x (x-t)|t|e^t\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

في حالة $0 \leq x$ نجد

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^x (x-t)te^t\,\mathrm{d}\,t = \Big[\,(x-t)te^t\,\Big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (x-2t)e^t\,\mathrm{d}\,t \\ &= \Big[\,(2t-x)e^t\,\Big]_{t=0}^{t=x} - 2\int_0^x e^t\,\mathrm{d}\,t = 2 + x + (x-2)e^x \end{aligned}$$

وفي حالة $0 \geq x$ نجد

$$\begin{aligned} z(x) &= -\int_0^x (x-t)te^t\,\mathrm{d}\,t = \int_x^0 (x-t)te^t\,\mathrm{d}\,t \\ &= \Big[\,(x-t)te^t\,\Big]_{t=x}^{t=0} - \int_x^0 (x-2t)e^t\,\mathrm{d}\,t \\ &= \Big[\,(2t-x)te^t\,\Big]_{t=x}^{t=0} - 2\int_x^0 e^t\,\mathrm{d}\,t = -x - 2 + (2-x)e^x \end{aligned}$$

أو

$$z(x) = \mathrm{sgn}(x)(x + 2 + (x-2)e^x) = |x|(1+e^x) - 2|e^x - 1|$$

وبالعودة إلى y نجد

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = |x|(1+e^{-x}) - 2|e^{-x} - 1|\,.$$

وهو المطلوب.

التمرين 14. أوجد حلول المعادلة التفاضليّة

$$(x^2-1)y''+x\,y'-y=0$$

(يمكن البحث عن حلٍّ خاصٍ لها بصيغة تابع كثير الحدود).

الحل

ليكن I أحد المجالات $]-\infty,-1[$ أو $]-1,1[$ أو $]1,+\infty[$. من الواضح أنّ $y_1(x)=x$ هو حلٌّ خاص للمعادلة على I . لنبحث إذن عن حلٍّ آخر من الشكل $x\mapsto x\psi(x)$. فإذا عوّضنا في المعادلة التفاضليّة وجدنا

$$(x^2-1)\big(x\psi''(x)+2\psi'(x)\big)+x\big(x\psi'(x)+\psi(x)\big)-x\psi(x)=0$$

وهذا يُكافئ

$$\forall x\in I,\quad \psi''(x)+\frac{3x^2-2}{x(x^2-1)}\psi'(x)=0$$

فإذا لاحظنا أنّ

$$\frac{3x^2-2}{x(x^2-1)}=\frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{x}=\left(\ln\left(x^2\sqrt{|x^2-1|}\right)\right)'$$

استنتجنا أنّ أحد الحلول الممكنة هو أن يكون

$$\forall x\in I\setminus\{0\},\quad \psi'(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{|x^2-1|}}$$

ثُمّ بإجراء تكامل ثانٍ مع مناقشة جميع الحالات نستنتج ما يأتي :

- إنّ $\left(x\mapsto x, x\mapsto \sqrt{x^2-1}\right)$ هو أساس لفضاء الحلول على المجال $]1,+\infty[$.
- إنّ $\left(x\mapsto x, x\mapsto \sqrt{1-x^2}\right)$ هو أساس لفضاء الحلول على المجال $]-1,1[$.
- إنّ $\left(x\mapsto x, x\mapsto \sqrt{x^2-1}\right)$ هو أساس لفضاء الحلول على المجال $]-\infty,-1[$.

وهو المطلوب. ■

التمرين 15. أوجد، في حالة ω من $\mathbb{R}_+^*$ ، حلول المعادلة التفاضليّة

$$x\,y''+2\,y'+\omega^2 x\,y=0$$

الحل

ليكن I أحد المجالين $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$. سندرس المعادلة على المجال I. في الحقيقة، لنعرّف تابعاً مجهولاً جديداً $z \mapsto z(x) = xy(x)$

$$z \mapsto z(x) = xy(x)$$

عندئذ يكون لدينا

$$z'' = 2y' + xy'', \quad z' = y + xy'$$

ومن ثَمّ تُكتب المعادلة المعطاة بالشكل

$$z'' + \omega^2 z = 0$$

وهي تقبل الحلّ العام

$$z : x \mapsto a\cos\omega x + b\sin\omega x$$

ومن ثَمّ يُعطى الحلّ العام للمعادلة المعطاة على I بالصيغة

$$y : x \mapsto \frac{1}{x}\big(a\cos\omega x + b\sin\omega x\big)$$

أمّا فضاء الحلول المعرّفة على $\mathbb{R}$ فهو الفضاء المولّد بالتابع

$$x \mapsto \frac{\sin\omega x}{x}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 16. لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

إذا كان I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، رمزنا بالرمز $\mathcal{S}_I$ إلى فضاء الحلول المعرّفة على I للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$.

1. ابحث عن حلول المعادلة $(\mathcal{E})$ التي تُكتب بشكل مجموع متسلسلة صحيحة وعيِّن مجالات تقاربها.
2. عيِّن الفضاءات $\mathcal{S}_I$ حين يكون I هو أحد المجالات $I_1 =]0,1[$ أو $I_2 =]-\infty,0[$ أو $I_3 =]1,+\infty[$. واحسب بُعدَ كلٍّ منها.
3. احسب بُعد الفضاءات $\mathcal{S}_I$ حين يكون المجال I أحد المجالات $I_4 =]-\infty,1[$ أو $I_5 =]0,+\infty[$ أو $I_6 = \mathbb{R}$.

الحل

.1 لنفترض أنّ $\sum a_n t^n$ متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها غير معدوم، ومجموعها حلٌّ للمعادلة $\mathcal{E}$. عندئذ يكون لدينا على مجال التقارب

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}t^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n - 6\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n = 0$$

وهذا يُكافئ

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)((n+2)a_n - (n+1)a_{n+1})t^n = 0$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{3\}, \quad \frac{a_n}{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+2}$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$a_n = \begin{cases} (n+1)a_0 & : \quad n \leq 3 \\ (n+1)\dfrac{a_4}{5} & : \quad n \geq 4 \end{cases}$$

نستنتج أنّ المعادلة $\mathcal{E}$ تقبل الحلّين $\varphi : t \mapsto \sum_{k=0}^{3}(k+1)t^k$ وهو كثير حدود من الدرجة الثالثة، والثاني $\psi : t \mapsto \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^k = (1-t)^{-2}$ ،حيث تتقارب المتسلسلة على المجال $]-1,1[$. لنعرّف إذن التابعين

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 \\ \psi &: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, \ \psi(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \end{aligned}$$

.2 على كلِّ واحد من المجالات $I_1 =]0,1[$ أو $I_2 =]-\infty,0[$ أو $I_3 =]1,+\infty[$ ، تُكتب المعادلة $\mathcal{E}$ بالشكل المُكافئ

$$y'' + \frac{3}{t(t-1)}y' - \frac{6}{t(t-1)}y = 0$$

تفيدنا النظريّات العامّة أنّ بُعدَ كلِّ واحدٍ من الفضاءات $\mathcal{S}_{I_1}$ و $\mathcal{S}_{I_2}$ و $\mathcal{S}_{I_3}$ يساوي 2 . وأنّ

$$\mathcal{S}_{I_k} = \operatorname{vect}\left(\varphi_{|I_k}, \psi_{|I_k}\right), \quad k = 1,2,3$$

3. ☝ حالة $I_4 =]-\infty,1[= I_2 \cup \{0\} \cup I_1$. هنا نعرّف التوابع $\varphi_1 = \varphi_{|I_4}$ و $\varphi_2 = \psi_{|I_4}$ وأخيراً نعرّف φ_3 بالصيغة

$$\varphi_3 : I_4 \to \mathbb{R}, \varphi_3(t) = \begin{cases} 0 & : t \in]0,1[\\ \psi(t) - \varphi(t) & : t \le 0 \end{cases}$$

ونتيقّن بسهولة أنّ $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ هي جملة من الحلول المستقلّة خطيّاً في الفضاء $\mathcal{S}_{I_4}$.

وبالعكس، إذا كان $y \in \mathcal{S}_{I_4}$ كان $y_{|I_2} \in \mathcal{S}_{I_2}$ وكان $y_{|I_1} \in \mathcal{S}_{I_1}$. إذن توجد أعداد α و β و γ و δ تُحقّق

$$\forall t \in I_4 \backslash \{0\}, \quad y(t) = \begin{cases} \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) & : \quad t \in I_1 \\ (\alpha + \delta)\varphi(t) + (\beta + \gamma)\psi(t) & : \quad t \in I_2 \end{cases}$$

ولكن يجب أنّ ينتمي y إلى الصف C^2 على المجال I_4 ، وهذا يُكافئ الشرط $\gamma + \delta = 0$.
إذن هذا يقتضي أن يكون $y = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3$. والجملة $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ هي أساس للفضاء $\mathcal{S}_{I_4}$ ويكون $\dim \mathcal{S}_{I_4} = 3$.

✌ حالة $I_5 =]0, +\infty[= I_1 \cup \{0\} \cup I_3$. هنا نتوثّق مباشرة أنّ $\varphi_4 = \varphi_{|I_5}$ هو حلٌّ من $\mathcal{S}_{I_5}$. وبالعكس،إذا كان $y \in \mathcal{S}_{I_5}$ كان $y_{|I_1} \in \mathcal{S}_{I_1}$ وكان $y_{|I_3} \in \mathcal{S}_{I_3}$. إذن توجد أعداد α و β و γ و δ تُحقّق

$$\forall t \in I_5 \backslash \{1\}, \quad y(t) = \begin{cases} \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) & : \quad t \in I_1 \\ \delta\varphi(t) + \gamma\psi(t) & : \quad t \in I_3 \end{cases}$$

ولكن يجب أنّ ينتمي y إلى الصف C^2 على المجال I_5 ، وهذا يُكافئ الشرط $\gamma = \beta = 0$ ، و $\alpha = \delta$. إذن هذا يقتضي أن يكون $y = \alpha\varphi_4$. إذن الجملة (φ_4) هي أساس للفضاء $\mathcal{S}_{I_5}$ ويكون $\dim \mathcal{S}_{I_5} = 1$.

👌 حالة $I_6 = \mathbb{R} = I_2 \cup \{0\} \cup I_5$. هنا نعرّف التابع الآتي:

$$\varphi_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi_5(t) = \begin{cases} 0 & : t > 0 \\ \psi(t) - \varphi(t) & : t \le 0 \end{cases}$$

ونتيقّن بسهولة أنّ (φ, φ_5) هي جملة من الحلول المستقلّة خطيّاً في الفضاء $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

وبالعكس، إذا كان $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ كان $y_{|I_2} \in \mathcal{S}_{I_2}$ وكان $y_{|I_5} \in \mathcal{S}_{I_5}$. إذن توجد أعداد α و β و γ تُحقّق

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad y(t) = \begin{cases} (\alpha - \beta)\varphi(t) + \gamma\psi(t) & : \quad t \in I_2 \\ \alpha\varphi(t) & : \quad t \in I_5 \end{cases}$$

ولكن يجب أنّ ينتمي y إلى الصف C^2 على المجال $\mathbb{R}$، وهذا يُكافئ الشرط $\beta = \gamma$، إذن هذا يقتضي أن يكون $y = \alpha\varphi + \beta\varphi_5$. فالجملة (φ, φ_5) هي أساس للفضاء $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ ويكون $\dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = 2$. ■

التمرين 17. هل تقبل المعادلة التفاضليّة التالية حلولاً بشكل متسلسلة صحيحة ؟

$$x^2y'' + x\,y' + (x^2 - 4)\,y = 1$$

الحل

لنفترض أنّ المعادلة $x^2y'' + x\,y' + (x^2 - 4)\,y = 1$ تقبل حلّاً على هيئة متسلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها موجب تماماً وليكن $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. بالتعويض في المعادلة نجد

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 1$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 4)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 1$$

وعليه

$$-4a_0 = 1 \text{ و } -3a_1 = 0 \text{ و } \forall n \geq 2,\ (n^2 - 4)a_n + a_{n-2} = 0$$

وبوجه خاصّ $4a_0 = -1$ و $a_0 = 0$ بوضع $n = 2$. وهذا التناقض يثبت عدم وجود حلٍّ على شكل متسلسلة صحيحة لهذه المعادلة. ■

التمرين 18. ليكن J مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن $a : J \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1، و $b : J \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. نفترض أنّه يوجد حلٌّ $\varphi_1 : J \to \mathbb{R}_+^*$ للمعادلة التفاضليّة $y'' + a\,y' + b\,y = 0$ يجعل $\varphi_2 : J \to \mathbb{R},\ t \mapsto t\,\varphi_1(t)$ أيضاً حلّاً للمعادلة التفاضليّة نفسها.

1. أوجد علاقة تربط a و b.

2. حلّ هذه المعادلة حين يكون $a(t) = 2t$.

3. أوجد، على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$، الحل العام للمعادلة التفاضليّة :

$$y'' + \tan t \cdot y' + \frac{1}{4}(2 + 3\tan^2 t) \cdot y = \cos^{3/2} t$$

الحل

لنرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى المعادلة التفاضليّة $y'' + a\,y' + b\,y = 0$.

1. يكون التابع φ_2 حلّاً للمعادلة $\mathcal{E}$، إذا وفقط إذا تحقَّق ما يلي :

$$(t\varphi_1''(t) + 2\varphi_1'(t)) + a(t)(t\varphi_1'(t) + t\varphi_1(t)) + b(t)t\varphi_1(t) = 0$$

أو

$$t(\varphi_1''(t) + a(t)\varphi_1'(t) + b(t)\varphi_1(t)) + 2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t) = 0$$

وهذا يُكافئ

$$2\varphi_1' + a\varphi_1 = 0$$

لأنّ φ_1 هو حلٌّ للمعادلة $\mathcal{E}$. ولكنّ المساواة $2\varphi_1' + a\varphi_1 = 0$ تقتضي أن يكون

$$\varphi_1' = -\frac{a}{2}\varphi_1 \quad \text{و} \quad \varphi_1'' = -\frac{a}{2}\varphi_1' - \frac{a'}{2}\varphi_1 = \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2}\right)\varphi_1$$

ولأنّ φ_1 حلٌّ للمعادلة $\mathcal{E}$ استنتجنا أنّ

$$\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2}\right)\varphi_1 - \frac{a^2}{2}\varphi_1 + b\varphi_1 = 0$$

ولأنّ φ_1 لا ينعدم استنتجنا أنّ

$$4b = a^2 + 2a' \qquad (*)$$

وبالعكس، لنفترض الشرط $(*)$ محقّقاً. ولنعرّف التابع الأصلي $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}\,s$ حيث t_0 من J. ثُمّ لنعرّف التابعين φ_1 و φ_2 بالعلاقتين

$$\varphi_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}A(t)\right) \quad \text{و} \quad \varphi_2(t) = t\varphi_1(t)$$

عندئذ نتوثَّق بيسر، ونترك ذلك للقارئ، أنّ التابعين φ_1 و φ_2 حلّان مستقلّان خطّياً للمعادلة $\mathcal{E}$.

2. في حالة $a(t)=2t$، يكون $b(t)=t^2+1$. وعندئذ يمكننا أن نأخذ $A(t)=t^2$، ومن ثَمّ تقبل المعادلة

$$y''+2t\,y'+(t^2+1)\,y=0$$

الحلَّين المستقلَّين خطّياً

$$\varphi_1(t)=e^{-t^2/2} \quad \text{و} \quad \varphi_2(t)=te^{-t^2/2}$$

اللّذين يشكّلان أساساً لفضاء الحلول.

3. في حالة المعادلة التفاضليّة $y''+\tan t\cdot y'+\frac{1}{4}(2+3\tan^2 t)\cdot y=\cos^{3/2} t$ على المجال $J=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا $a(t)=\tan t$، و $b(t)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\tan^2 t$. والشرط $(*)$ محقَّقٌ وضوحاً. إذن يكوّن التابعان

$$t\mapsto\varphi_1(t)=\sqrt{\cos t} \text{ و } t\mapsto\varphi_2(t)=t\sqrt{\cos t}$$

أساساً لفضاء حلول المعادلة التفاضليّة بدون طرف ثانٍ

$$y''+\tan t\cdot y'+\frac{1}{4}(2+3\tan^2 t)\cdot y=0$$

لإيجاد حلٍّ خاص للمعادلة، نتبع طريقة جعل الثوابت متغيِّرة، فنبحث عن الحل الخاص بالشكل

$$t\mapsto\varphi(t)=c(t)\varphi_1(t)+d(t)\varphi_2(t)$$

فنجد

$$\begin{aligned}
&c'(t)+td'(t)=0\\
&-c'(t)\sin t+d'(t)(2\cos t-t\sin t)=2\cos^2 t
\end{aligned}$$

إذن

$$d'(t)=\cos t \text{ و } c'(t)=-t\cos t$$

ومن ثَمّ

$$d(t)=\sin t \quad \text{و} \quad c(t)=-t\sin t-\cos t$$

إذن $\varphi(t)=-\cos t\cdot\sqrt{\cos t}$ والحلُّ العام للمعادلة المدروسة هو

$$t\mapsto(at+b-\cos t)\sqrt{\cos t}$$

التمرين 19. ليكن J مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن $b : J \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1، و $a : J \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. نفترض أنّه يوجد تابعٌ $\theta : J \to \mathbb{R}$: بحيث يكون $t \mapsto \sin\theta(t)$ و $t \mapsto \cos\theta(t)$ حلّين للمعادلة التفاضليّة :

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0$$

1. أوجد علاقة تربط a و b.
2. أوجد الحل العام لكلٍّ من المعادلتين التفاضليّتين:

$$\cos t\, y'' + \sin t\, y' + \cos^3 t\, y = 0 \qquad \text{على } \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

$$t\, y'' - y' + t^3\, y = t^3 \sin\frac{t^2}{2} \qquad \text{على } \mathbb{R}_+^* .$$

الحل

لنرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى المعادلة التفاضليّة $y'' + a\,y' + b\,y = 0$.

1. استناداً إلى الفرْض يكون التابع $t \mapsto \psi(t) = \exp(\mathrm{i}\,\theta(t))$ حلّاً للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$.

إذن

$$\psi'(t) = \mathrm{i}\,\theta'(t)\exp(\mathrm{i}\,\theta(t))$$
$$\psi''(t) = (\mathrm{i}\,\theta''(t) - \theta'^2(t))\exp(\mathrm{i}\,\theta(t))$$

وبالعودة إلى المعادلة $\mathcal{E}$ نستنتج أنّ

$$(b(t) - \theta'^2(t)) + \mathrm{i}(\theta''(t) + a\theta'(t)) = 0$$

إذن

$$\theta''(t) + a\theta'(t) = 0 \;\text{ و }\; b(t) = \theta'^2(t)$$

فإذا اشتققنا المعادلة الأولى واستفدنا من الثانية استنتجنا أنّ

$$b \geq 0 \quad \text{و} \quad b' + 2ab = 0 \qquad (*)$$

وبالعكس، لنفترض الشرط $(*)$ محقّقاً. ولنعرّف التابع الأصلي $\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{b(s)}\,\mathrm{d}\,s$ حيث t_0 من J. ثُمّ لنعرّف التابعين φ_1 و φ_2 بالعلاقتين :

$$\varphi_2(t) = \sin\theta(t) \quad \text{و} \quad \varphi_1(t) = \cos\theta(t)$$

عندئذ نتوثّق بسهولة، ونترك ذلك للقارئ، أنّ التابعين φ_1 و φ_2 حلّان مستقلّان خطّياً للمعادلة $\mathcal{E}$.

.2 ■ في حالة المعادلة $\cos t\, y'' + \sin t\, y' + \cos^3 t\, y = 0$ على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $J =$ لدينا

$$b(t) = \cos^2 t \quad \text{و} \quad a(t) = \tan t$$

والشرط $(*)$ محقَّق وضوحاً. إذن يكوِّن التابعان

$$t \mapsto \varphi_2(t) = \sin(\sin t) \quad \text{و} \quad t \mapsto \varphi_1(t) = \cos(\sin t)$$

أساساً لفضاء حلول هذه المعادلة التفاضليّة.

■ في حالة المعادلة التفاضليّة $t\, y'' - y' + t^3\, y = t^3 \sin \dfrac{t^2}{2}$ على المجال $J = \left]0, +\infty\right[$ لدينا

$$b(t) = t^2 \quad \text{و} \quad a(t) = 1/t$$

والشرط $(*)$ محقَّق وضوحاً. إذن يكوِّن التابعان

$$t \mapsto \varphi_2(t) = \sin(t^2/2) \quad \text{و} \quad t \mapsto \varphi_1(t) = \cos(t^2/2)$$

أساساً لفضاء حلول المعادلة التفاضليّة بدون طرف ثانٍ $t\, y'' - y' + t^3\, y = 0$. لإيجاد حلٍّ خاص للمعادلة، نتبع طريقة جعل الثوابت متغيِّرة، فنبحث عن الحل الخاص بالشكل

$$t \mapsto \varphi(t) = c(t)\varphi_1(t) + d(t)\varphi_2(t)$$

فنجد

$$\begin{aligned} c'(t)\cos\tfrac{t^2}{2} + d'(t)\sin\tfrac{t^2}{2} &= 0 \\ -c'(t)\sin\tfrac{t^2}{2} + d'(t)\cos\tfrac{t^2}{2} &= t\sin\tfrac{t^2}{2} \end{aligned}$$

إذن

$$c'(t) = \frac{1}{2}(t - t\cos t^2) \quad \text{و} \quad d'(t) = \frac{1}{2} t \sin t^2$$

ومن ثَمّ

$$c(t) = \frac{1}{4}(2\sin t^2 - t^2) \quad \text{و} \quad d(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t^2)$$

إذن $\varphi(t) = -\frac{1}{4} t^2 \cos\frac{t^2}{2}$ هو حلٌّ خاص للمعادلة مع طرف ثان، والحلُّ العام للمعادلة المدروسة هو

$$t \mapsto \alpha \sin(t^2/2) + (\beta - t^2/4)\cos(t^2/2)$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 20. لتكن المعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$ التالية $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. نُجري تغييراً في المتحوّل $x = g(t)$.

1. ما هو الشرط الواجب تحقُّقه حتّى نحصل على معادلة تفاضليّة خطّية بأمثال ثابتة ؟
2. عيِّن التابع b في حالة $a(t) = \dfrac{2}{t}$ حتّى يكون الشرط السابق محقّقاً.
3. حلّ المعادلة التفاضليّة الآتية:

$$(1 + t^2)\, y'' + t\, y' + k^2 y = 0$$

الحل

هنا نفترض أنّ التابعين $t \mapsto a(t)$ و $t \mapsto b(t)$ مستمرّان على مجال I .

1. في الحقيقة، كي نتمكّن من إجراء تغيير المتحوّل $x = g(t)$ نفترض أنّ g يعرّف تقابلاً $g : I \to J$ من الصفّ C^2 على I، صورته المجال J، فهو مطّردٌ تماماً على هذا المجال، وإذا أردنا أن يكون تابعه العكسي أملس، افترضنا أنّ g' لا ينعدم، وهو من ثَمّ يُحافظ على إشارة ثابتة على المجال I . وهكذا يمكننا أنّ نحسب مشتقّات التابع y بالنسبة إلى المتحوّل الجديد x لنجد :

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \cdot g'(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} \cdot \big(g'(t)\big)^2 + \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \cdot g''(t)$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضليّة نجد

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} \cdot \big(g'(t)\big)^2 + \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \cdot \big(g''(t) + a(t)g'(t)\big) + b(t)\,y = 0$$

وعليه تصبح هذه المعادلة معادلة بأمثال ثابتة إذا وفقط إذا وُجِد عددان A و B بحيث يكون

$$\begin{aligned} g''(t) + a(t)g'(t) &= A g'^2(t) \\ b(t) &= B g'^2(t) \end{aligned} \qquad (*)$$

لنفترض أنّ الشرط $(*)$ محقَّق، يمكننا أن نفترضَ أنّ $b \neq 0$، وإلاّ وجب أن يكون $B = 0$، أي $b \equiv 0$ وصارت مسألة تعيين g مُكافئة تماماً لحلّ المعادلة $y'' + a(t)y = 0$. إذن $t \mapsto b(t)$ يُحافظ على إشارة ثابتة على المجال I، لتكن $\varepsilon \in \{-1,1\}$ هي إشارة $t \mapsto b(t)$ على I أي

$$\forall t \in I, \quad \big|b(t)\big| = \varepsilon b(t)$$

فإذا استبدلنا بتغيير المتحوّل g تغييرَ المتحوّل $\sqrt{|B|}g$ أمكننا أن نفترض أنّ $\varepsilon = B$ أي

$$\forall t \in I, \quad g'^2(t) = \left|b(t)\right|$$

أو

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \tilde{\varepsilon}\sqrt{\left|b(t)\right|}$$

وعندئذ تُكتب المعادلة الأولى : $A = \dfrac{g''(t)}{g'^2(t)} + a(t)\dfrac{1}{g'(t)}$ بالشكل

$$a(t)\frac{1}{\sqrt{|b(t)|}} - \left(\frac{1}{\sqrt{|b(t)|}}\right)' = \tilde{\varepsilon}A$$

وهكذا نصل إلى النتيجة التالية :

كي نتمكّن من إيجاد تغيير للمتحوّل $x = g(t)$ يحوّل المعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$ إلى معادلة ذات أمثال ثابتة، يجب أن يكون التابع $t \mapsto b(t)$ من الصف C^1 على I، وألاّ ينعدم على I، وأن يكون التابع

$$t \mapsto a(t)\frac{1}{\sqrt{|b(t)|}} - \left(\frac{1}{\sqrt{|b(t)|}}\right)'$$

ثابتاً على I.

وبالعكس، إذا كانت الفرضيّات السابقة محقّقة، عرّفنا $g(t) = \int_{t_0}^{t}\sqrt{|b(s)|}\,\mathrm{d}s$ حيث $t_0 \in I$، وعندئذ نتيقّن بسهولة أنّ تغيير المتحوّل $x = g(t)$ يحوّل المعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$ إلى معادلة ذات أمثال ثابتة.

2. نفترض أنّ $a(t) = \dfrac{2}{t}$، وأنّ المجال I محتوى في أحد المجالين $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$. لنعُد إلى الشرط $(*)$ فنجد أنّ g يُحقِّق في هذه الحالة الشرط

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad \frac{g''(t)}{g'^2(t)} + \frac{2}{t}\cdot\frac{1}{g'(t)} = A$$

أو

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad \left(-\frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{1}{g'(t)}\right)' + \left(\frac{2}{t^3}\right)\frac{1}{g'(t)} = \frac{A}{t^2}$$

ومنه

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad \left(-\frac{1}{t^2 g'(t)}\right)' = -\left(\frac{A}{t}\right)'$$

ومن ثَمّ

$$\exists \big(A, C\big) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in I, \quad g'(t) = \frac{1}{t\big(A + Ct\big)}$$

وعليه، توجد ثوابت حقيقية (A, B, C) حيث $B \neq 0$ تُحقّق :

$$\forall t \in I, \quad b(t) = \frac{B}{t^2(A + Ct)^2}$$

وحتّى يكون b معرّفاً على I يجب أن يكون $C = 0$ أو $-\dfrac{A}{C} \notin I$.

وبالعكس، إذا كان للتابع b الصيغة السابقة على مجال I، أمكننا إرجاع المعادلة $\mathcal{E}$ إلى معادلة بأمثال ثابتة بإجراء تغيير المتحوّل $x = \ln\left|\dfrac{t}{A + Ct}\right|$.

3. المطلوب هو حلّ المعادلة $(1 + t^2)\,y'' + t\,y' + k^2 y = 0$ حيث $0 < k$، وهي تُكافئ

$$y'' + \frac{t}{1 + t^2}\,y' + \frac{k^2}{1 + t^2}\,y = 0$$

هنا لدينا

$$b(t) = \frac{k^2}{1 + t^2} \quad \text{و} \quad a(t) = \frac{t}{1 + t^2}$$

ونتيقّن بسهولة أنّه، مهما تكن t من $\mathbb{R}$ يكن

$$\begin{aligned}
\frac{a(t)}{\sqrt{|b(t)|}} - \left(\frac{1}{\sqrt{|b(t)|}}\right)' &= \frac{t}{1 + t^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + t^2}}{k} - \left(\frac{\sqrt{1 + t^2}}{k}\right)' \\
&= \frac{t}{k\sqrt{1 + t^2}} - \frac{t}{k\sqrt{1 + t^2}} = 0
\end{aligned}$$

إذن استناداً إلى ما أثبتناه في 1. يُرجِع تغيير المتحوِّل:

$$x = \int_0^t \frac{k}{\sqrt{1 + s^2}}\,\mathrm{d}\,s = k\ln\big(t + \sqrt{1 + t^2}\big)$$

المعادلةَ المعطاة إلى الشكل

$$(1+t^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+k^2y=k^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+y\right)=0$$

فالحلُّ العامّ لهذه المعادلة هو $x\mapsto y(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ أو

$$t\mapsto \alpha\cos\left(k\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)+\beta\sin\left(k\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)$$

التمرين 21. أوجد حلّ جملة المعادلات التفاضليّة التالية:

$$\begin{cases} 2x''+3y''+2x'+y'+x+y=0\\ x''+3y''+4x'+2y'-x-y=0\end{cases}$$

الحل

لنبدأ بحلّ جملة المعادلتين بالنسبة إلى x'' و y'' فنجد

$$\begin{cases} x''=2x'+y'-2x-2y\\ y''=-2x'-y'+x+y\end{cases}$$

وهنا نلاحظ أنّ التركيبين $u=x+y$ و $v=2x+y$ يؤدّيان دورين مهمّين في صيغة الجملة السابقة، وبملاحظة أنّ $x=v-u$ ، و $y=2u-v$ استنتجنا أنّ الجملة السابقة تُكافئ

$$\begin{cases} v''-u''=v'-2u\\ 2u''-v''=-v'+u\end{cases}$$

أو

$$v''-v'=-3u \quad \text{و} \quad u''+u=0$$

نستنتج إذن أنّ

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad u(t)=A\cos t+B\sin t$$

ومن ثَمّ

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad v'(t)-v(t)=-3A\sin t+3B\cos t+C$$

ولأنّ $(v(t)e^{-t})'=(v'(t)-v(t))e^{-t}$ استنتجنا أنّ

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad (v(t)e^{-t})'=(-3A\sin t+3B\cos t+C)e^{-t}$$

ومنه

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = De^t - C + \frac{3}{2}(A+B)\sin t + \frac{3}{2}(A-B)\cos t$$

وبالرجوع إلى x و y نستنتج أنّ

$$\begin{aligned} x(t) &= \quad De^t - C + \frac{1}{2}(3A+B)\sin t + \frac{1}{2}(A-3B)\cos t \\ y(t) &= -De^t + C + \frac{1}{2}(B-3A)\sin t + \frac{1}{2}(A+3B)\cos t \end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 22. لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$y''' + y'' + y' + y = \cos t \qquad (\mathcal{E})$$

جِدْ الحلّ العام للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، علماً أنّها تقبل حلّاً من الشكل $t \mapsto A\,t\cos t + B\,t\sin t$.

الحل

إنّ المعادلة المميِّزة للمعادلة $\mathcal{E}$ بدون طرف ثان هي $(X^2+1)(X+1) = 0$. إذن الحلُّ للعام للمعادلة بدون طرف ثانٍ هو

$$t \mapsto a\cos t + b\sin t + ce^{-t}$$

لنبحث عن حلٍّ خاص للمعادلة $\mathcal{E}$ من الشكل $t \mapsto At\cos t + Bt\sin t$. بالتعويض نجد

$$2(B-A)\cos t - 2(A+B)\sin t = \cos t$$

إذن يجب أن يكون $A+B=0$ و $B-A=\frac{1}{2}$، أو $B=\frac{1}{4}$ و $A=-\frac{1}{4}$. فالحلُّ الوحيد للمعادلة $\mathcal{E}$ من هذا الشكل هو

$$t \mapsto -\frac{1}{4}t(\sin t - \cos t).$$

وعليه يكون الحلُّ العام للمعادلة $\mathcal{E}$ هو

$$t \mapsto \left(a + \frac{t}{4}\right)\cos t + \left(b - \frac{t}{4}\right)\sin t + ce^{-t}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 23. لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$x^2\, y'' + x\, y' - (x^2 + x + 1)\, y = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

1. نفترض أنّ $(\mathcal{E})$ تقبل حلاً φ بشكل متسلسلة صحيحة $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، ويُحقّق الشرط $\varphi'(0) = 1$. أثبت أنّ هذا الحلّ وحيدٌ. وأثبت أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|a_n\right| \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

2. استنتج أنّ المعادلة $(\mathcal{E})$ تقبل حلّاً، وحلّاً وحيداً، φ بشكل متسلسلة صحيحة، ويُحقّق الشرط $\varphi'(0) = 1$.

3. حلّ المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ بإجراء تغيير في التابع المجهول $y(x) = \dfrac{z(x)}{xe^x}$ ، وتَعَرَّف الحلَّ φ .

الحل

1. بالتعويض في المعادلة $\mathcal{E}$ نجد أنّ

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

ومن ثَمّ

$$-a_0 - a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big((n^2 - 1) a_n - a_{n-1} - a_{n-2} \Big) x^n = 0$$

وبالاستفادة من الشرط $\varphi'(0) = 1$ استنتجنا أنّ

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1, \quad \forall n \geq 2,\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{n^2 - 1} \qquad (\dagger)$$

ولمّا كانت المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتعيَّن بأسلوب وحيد بالعلاقات السابقة استنتجنا أنّ الحلّ φ وحيد في حال وجوده.

لمّا كان $a_1 = 1$ و $a_2 = \dfrac{1}{3}$ استنتجنا صحّة المتراجحة $\left|a_n\right| \leq 1/(n-1)!$ في حالة $n = 1$ و $n = 2$. لتكن إذن $n \geq 3$ ، ولنفترض صحّة المتراجحات $\left|a_k\right| \leq 1/(k-1)!$ في حالة $1 \leq k < n$.

عندئذ

$$\begin{aligned}|a_n| &\leq \frac{1}{n^2-1}\left(|a_{n-1}|+|a_{n-2}|\right)\\ &\leq \frac{1}{n^2-1}\left(\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-3)!}\right)\\ &\leq \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\leq \frac{1}{(n-1)!}\end{aligned}$$

وهذا يثبت بالتدريج على n صحّة المتراجحة المطلوبة.

2. وبالعكس، لتكن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة تدريجيّاً بالعلاقات $(\dagger)$. عندئذ نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ نصف قطر تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ يساوي $+\infty$ وهذا ما يسمح لنا أن نعرّف على $\mathbb{R}$ التابع $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. ونتيقّن بسهولة أنّ φ هو حلٌّ للمعادلة $\mathcal{E}$ وذلك استناداً إلى طريقة إنشائه.

3. لنغيّر التابع المجهول فنضع $y(x)=\frac{1}{xe^x}z(x)$ على أيِّ مجال لا ينتمي إليه الصفر. عندئذ

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{xe^x}z(x)\\ y'(x) &= -\frac{x+1}{x^2e^x}z(x)+\frac{1}{xe^x}z'(x)\\ y''(x) &= \frac{x^2+2x+2}{x^3e^x}z(x)-2\frac{1+x}{x^2e^x}z'(x)+\frac{1}{xe^x}z''(x)\end{aligned}$$

وعليه تأخذ المعادلة $\mathcal{E}$ الصيغة التالية :

$$(2x+1)z'(x)=xz''(x)$$

ونجد بمُكاملةٍ أولى أنّ

$$z'(x)=4Axe^{2x}$$

ومن ثَمّ

$$z(x)=A(2x-1)e^{2x}+B\,.$$

وعليه يُعطى الحلُّ العام للمعادلة $\mathcal{E}$ على المجال $I=\mathbb{R}_+^*$ أو $I=\mathbb{R}_-^*$ بالعلاقة

$$x\mapsto y(x)=2Ae^x+(B-A)\frac{\operatorname{ch}x}{x}-(B+A)\frac{\operatorname{sh}x}{x}$$

نستنتج إذن وجود أعداد حقيقية A,B,C,D تُحقِّق الشرط

$$\forall x \neq 0,\quad \varphi(x)=\begin{cases} 2Ae^x+(B-A)\dfrac{\operatorname{ch} x}{x}-(B+A)\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} & : \quad x>0 \\ 2Ce^x+(D-C)\dfrac{\operatorname{ch} x}{x}-(D+C)\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} & : \quad x<0 \end{cases}$$

يقتضي استمرارُ التابع φ عند 0 أن يكون $A=B$ و $C=D$. أمّا قابليّة اشتقاق التابع φ عند 0 فتقتضي أنّ يكون $A=C$. وخيراً، نظراً إلى كون $\varphi'(0)=1$ استنتجنا أنّ $2A=1$. وعليه، يأخذ التابع φ الصيغة الآتية:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi(x)=\begin{cases} e^x-\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} & : \quad x\neq 0 \\ 0 & : \quad x=0 \end{cases}$$

ونستنتج بوجه خاص أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n=\frac{n+(n \bmod 2)}{(n+1)!}$$

حيث $n \bmod 2=(1-(-1)^n)/2$. ■

التمرين 24. ليكن التابع $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\quad f(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$.

1. أثبت أنّ f معرّف ومستمرّ على $\mathbb{R}_+$، وأنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.
2. أثبت أنّ f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ويحقِّق المعادلة التفاضليّة

$$f'(x)-f(x)+\frac{\Lambda}{\sqrt{x}}=0 \quad \text{حيث} \quad \Lambda=\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

3. حلّ هذه المعادلة واستنتج قيمة الثابت Λ.

الحل

1. ينتج استمرار التابع f على $\mathbb{R}_+$ من كون التابع $F:(t,x)\mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ مستمرّاً على $(\mathbb{R}_+)^2$ ومن المتراجحة: $\left|\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right|\leq\dfrac{1}{1+t^2}$، التي تتيح لنا تطبيق مبرهنة استمرار التكاملات التابعة لوسيط.

ونلاحظ أنّ

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \int_0^\infty e^{-xt^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

إذن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. ليكن $0 < a$. التابع $x \mapsto F(t,x) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ قابلٌ للاشتقاق على $[a,+\infty[$، ويعطى مشتقّه بالعلاقة $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}$. وهنا نلاحظ أنّ $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$، وأنّ

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\,\times\,\mathbb{R}_+, \quad \left|-\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq e^{-at^2}$$

ولأنّ التكامل $\int_0^\infty e^{-at^2}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ، استنتجنا، بتطبيق مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، أنّ التابع f قابلٌ للاشتقاق على $[a,+\infty[$ وأنّ

$$f'(x) = -\int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}\,t$$

لكنّ العدد a عددٌ موجب تماماً كيفيٌّ، إذن f قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ومشتقه معطى بالعلاقة السابقة. وهنا نلاحظ أنّ

$$\forall x > 0, \; f'(x) - f(x) = -\int_0^\infty e^{-xt^2}\,\mathrm{d}\,t = -\frac{\Lambda}{\sqrt{x}}$$

3. ينتج من المعادلة التفاضليّة أنّ $(f(x)e^{-x})' = -\dfrac{\Lambda}{\sqrt{x}}e^{-x}$ في حالة $x > 0$، وعليه يكون

$$x > \varepsilon > 0 \Rightarrow f(x)e^{-x} - f(\varepsilon)e^{-\varepsilon} = -\Lambda\int_\varepsilon^x \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

أو

$$x > \varepsilon > 0 \Rightarrow f(\varepsilon)e^{-\varepsilon} - f(x)e^{-x} = 2\Lambda\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

فإذا جعلنا ε تسعى إلى 0 واستفدنا من استمرار التابع f عند 0 استنتجنا أنّ

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{\pi}{2} - f(x)e^{-x} = 2\Lambda \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\, \mathrm{d}\, u$$

ولكن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ، فإذا جعلنا x تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ $\frac{\pi}{2} = 2\Lambda^2$ إذن $\Lambda = \sqrt{\pi}/2$. و

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}e^x - \sqrt{\pi}\int_0^{\sqrt{x}} e^{x-u^2}\, \mathrm{d}\, u$$ ■

التمرين 25.

I. ليكن V فضاء شعاعيّاً، وليكن التطبيق الخطّي u من $\mathcal{L}(V)$. نفترض أنّ

$$\forall x \in V, \ \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad u^{n_x}(x) = 0$$

و $u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ مرّة}}$. وليكن I_V التطبيق المُطابق على V . أثبت أنّ $I_V - u$ تقابلٌ، يُعطى تقابله العكسي بالعلاقة $v(x) = \sum_{k=0}^{n_x} u^k(x)$.

II. في بقيّة التمرين V هو فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة $\mathbb{R}[X]$. أمّا u فهو التطبيق الخطّي $u(P) = -P''$.

1. ليكن كثير الحدود المعطى $f(X)$ من V . أثبت أنّ المعادلة التفاضليّة

$$y'' + y = f \qquad (*)$$

تقبل حلّاً وحلّاً وحيداً بشكل تابع كثير الحدود g . عبِّر عن $g(X)$ بدلالة $f(X)$ ومشتقّاته.

2. نفترض الآن أنّ ثوابت كثير الحدود f أعداد صحيحة. أثبت أنّ

   a. ثوابت g هي أيضاً أعداد صحيحة،

   b. وإذا كان X^n يقسم f كان $n!$ قاسماً للعدد $g(0)$.

3. أثبت أنّ كلَّ حلٍّ φ للمعادلة التفاضليّة $(*)$ يُحقِّق

$$\varphi(\pi) + \varphi(0) = \int_0^{\pi} f(t) \sin t \,\mathrm{d}\, t$$

4. نفترض الآن أنّ كثير الحدود $f(X)$ يُحقِّق العلاقة $f(X) = f(\pi - X)$.

a. أثبت أنّ $g(X)$ يُحقِّق أيضاً العلاقة $g(X) = g(\pi - X)$.

b. أثبت أنّ $|g(0)| \leq M$ حيث $M = \sup\{|f(t)| : 0 \leq t \leq \pi/2\}$.

5. نضع $f_n(X) = X^n \cdot (\pi - X)^n$ ، وليكن $g_n(X)$ كثير الحدود الموافق بناء على السؤال 1. نريد أن نثبت بطريقة نقض الفرْض أنّ العدد π ليس عدداً عادياً. لذلك نفترض جدلاً أنّ $\pi = p/q$.

a. أثبت استناداً إلى 2. أنّ العدد $\dfrac{q^n g_n(0)}{n!}$ عددٌ طبيعيٌّ موجبٌ تماماً.

b. استفد من 4. لتصل إلى تناقض، ماذا تستنتج؟

الحل

I. لنتوثّق أوّلاً أنّ التطبيق v المعرّف في نص التمرين خطّي. في الحقيقة، إذا كان x و y شعاعين من V، وكان λ عدداً من $\mathbb{K}$، عرّفنا $n = \max(n_x, n_y, n_{x+\lambda y})$ عندئذ يكون

$$v(x+\lambda y) = \sum_{k=0}^{n_{x+\lambda y}} u^k(x+\lambda y) = \sum_{k=0}^{n} u^k(x+\lambda y)$$
$$v(x) = \sum_{k=0}^{n_x} u^k(x) = \sum_{k=0}^{n} u^k(x)$$
$$v(y) = \sum_{k=0}^{n_y} u^k(y) = \sum_{k=0}^{n} u^k(y)$$

ولأنّ u^k خطّي، أياً كانت قيمة k، استنتجنا أنّ $v(x+\lambda y) = v(x) + \lambda v(y)$. ثُمّ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} \forall x \in V, \quad u \circ v(x) &= v \circ u(x) = \sum_{k=0}^{n_x} u^{k+1}(x) \\ &= x + \sum_{k=1}^{n_x+1} u^k(x) = x + v(x) \end{aligned}$$

وهذا يُكافئ $v \circ (I_V - u) = (I_V - u) \circ v = I_V$ إذن $I_V - u$ تقابلٌ خطّي تقابله العكسي هو v .

1.II. يُكافئ البحث عن حلول المعادلة $(*)$ في الفضاء $V = \mathbb{R}[X]$، إيجاد كثير حدود $g(X)$ يُحقّق $(I_V - u)(g(X)) = f(X)$ واستناداً إلى I. هذا يُكافئ

$$g(X) = (I_V - u)^{-1}(f(X)) = v(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^{(2k)}(X)$$

a.2.II. إذا كانت أمثال $f(X)$ أعداداً صحيحة، أي $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$، كانت أمثال جميع مشتقّاته كذلك، أي $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(X) \in \mathbb{Z}[X]$، وعليه يكون $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ استناداً إلى 1.II.

b.2.II. إذا كان X^n يقسم $f(X)$ استنتجنا استناداً إلى منشور تايلور أنّ

$$f(X) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

لاحظ أنّ هذا المجموع ليس لانهائيّاً لأنّ مشتقات كثير الحدود تنعدم بدءاً من حدٍّ معيّن. ولأنّ $f(X)$ ينتمي إلى $\mathbb{Z}[X]$ استنتجنا أنّ

$$\forall k \geq n, \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

وعليه نستنتج من عبارة $g(X)$ أنّ

$$\frac{g(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^{(2k)}(0) = \sum_{2k \geq n}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{n!} \cdot \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \in \mathbb{Z}$$

أي إنّ $n!$ يقسم $g(0)$.

3.II. ليكن φ تابعاً من الصف C^2 على $[0, \pi]$. عندئذ

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \varphi''(t)\sin t \,\mathrm{d}\,t &= \cancel{\Big[\, \varphi'(t)\sin t \,\Big]_0^\pi} - \int_0^\pi \varphi'(t)\cos t\,\mathrm{d}\,t \\ &= \Big[\, -\varphi(t)\cos t \,\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t \\ &= \varphi(\pi) + \varphi(0) - \int_0^\pi \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

إذن

$$\int_0^\pi (\varphi''(t) + \varphi(t))\sin t\,\mathrm{d}\,t = \varphi(\pi) + \varphi(0)$$

فإذا كان φ حلاً للمعادلة التفاضليّة $(*)$ كان $\varphi''(t)+\varphi(t)=f(t)$ ومن ثمّ

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t=\varphi(\pi)+\varphi(0)$$

.a.4.II إذا كان $f(X)=f(\pi-X)$ كان لدينا

$$\forall k\in\mathbb{N},\ f^{(2k)}(X)=f^{(2k)}(\pi-X)$$

إذن $g(X)=g(\pi-X)$.

.b.4.II بالاستفادة من 3.II. والتناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x=\dfrac{\pi}{2}$ نستنتج أنّ

$$g(0)=\frac{g(\pi)+g(0)}{2}=\int_0^{\pi/2}f(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t$$

وعليه

$$\left|g(0)\right|\le\int_0^{\pi/2}\left|f(t)\right|\sin t\,\mathrm{d}\,t\le\sup_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|f\right|\cdot\int_0^{\pi/2}\sin t\,\mathrm{d}\,t=\sup_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|f\right|$$

.a.5.II نضع $f_n(X)=X^n(\pi-X)^n$ ، ونفترض أنّ $\pi=p/q$ ، عندئذ ينتمي كثير الحدود $q^nf_n(X)$ إلى $\mathbb{Z}[X]$ ويقبل القسمة على X^n ، إذن استناداً إلى نتيجة السؤال 2.II. يكون المقدار $\dfrac{q^ng_n(0)}{n!}$ عدداً صحيحاً. ولكن، بناءً على 3.II. وعلى تناظر منحنيي التابعين f_n و g_n بالنسبة إلى المستقيم $x=\dfrac{\pi}{2}$ نستنتج أنّ $g_n(0)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}f_n(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t>0$. إذن $\dfrac{q^ng_n(0)}{n!}\in\mathbb{N}^*$.

.b.5.II نستنتج مما سبق، ومن نتيجة b.4.II. ، أنّ

$$1\le\frac{q^ng_n(0)}{n!}\le\frac{q^n}{n!}\cdot\sup_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}f_n\le\frac{q^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}=\frac{n^n}{n!}\left(\frac{q\pi^2}{4n}\right)^n<\left(\frac{q\pi^2e}{4n}\right)^n$$

وهذا تناقض صارخ، إذ يكفي اختيار $q\pi^2e\le n$. هذا التناقض يبرهن أنّ $\pi\notin\mathbb{Q}$. ■

التمرين 26. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً منتهي البُعد، نعرّف في حالة A و B من $\mathcal{L}(E)$، المقدار $[A,B]=B\circ A-A\circ B$. ولتكن A و B من $\mathcal{L}(E)$، نريد أن نثبت الخاصّة الآتية: إذاكان التطبيق الخطيّ $[A,B]$ يتبادل مع كلٍّ من A و B أي

$$[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0$$

كان

$$e^{A+B}=e^{A}\circ e^{B}\circ e^{\frac{1}{2}[A,B]}=e^{B}\circ e^{A}\circ e^{\frac{1}{2}[B,A]}$$

1. ليكن x_0 من E، ولنعرّف التوابع

$$\begin{aligned}x_1(t)&=\exp(tA)\cdot x_0\\ x_2(t)&=\exp(tB)\cdot x_1(t)\\ x_3(t)&=\exp(-t(A+B))\cdot x_2(t)\end{aligned}$$

أثبت أنّ

$$\frac{\mathrm{d}\,x_3}{\mathrm{d}\,t}(t)=e^{-t(A+B)}\circ\varphi(t)\circ e^{tB}\circ e^{tA}\cdot x_0$$

حيث وضعنا

$$\varphi(t)=-A+e^{tB}\circ A\circ e^{-tB}$$

2. احسب $\varphi'(t)$، واستنتج أنّ $x_3(t)=\exp\left(\frac{t^2}{2}[A,B]\right)\cdot x_0$. وأثبت المطلوب.

الحل

1. في الحقيقة لدينا

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,x_3}{\mathrm{d}\,t}(t)&=e^{-t(A+B)}(A+B)x_2(t)+e^{-t(A+B)}\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,t}(t)\\ &=e^{-t(A+B)}\left(-(A+B)x_2(t)+e^{tB}\left(Bx_1(t)+\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t}(t)\right)\right)\\ &=e^{-t(A+B)}\left(-(A+B)x_2(t)+e^{tB}\left(Bx_1(t)+Ae^{tA}x_0\right)\right)\\ &=e^{-t(A+B)}\left(-(A+B)e^{tB}e^{tA}x_0+e^{tB}\left(Be^{tA}x_0+Ae^{tA}x_0\right)\right)\\ &=e^{-t(A+B)}\left(-(A+B)+e^{tB}(B+A)e^{-tB}\right)e^{tB}e^{tA}x_0\end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}-(A+B)+e^{tB}(B+A)e^{-tB}&=-(A+B)+e^{tB}Be^{-tB}+e^{tB}Ae^{-tB}\\ &=-A+e^{tB}Ae^{-tB}\end{aligned}$$

إذن

$$\frac{\mathrm{d}\,x_3}{\mathrm{d}\,t}(t) = e^{-t(A+B)}\underbrace{\left(-A + e^{tB}Ae^{-tB}\right)}_{\varphi(t)}e^{tB}e^{tA}x_0$$

2. نلاحظ أنّ

$$\varphi'(t) = e^{tB}BAe^{-tB} - e^{tB}ABe^{-tB} = e^{tB}[A,B]e^{-tB}$$

ولأنّ $B[A,B] = [A,B]B$ استنتجنا أنّ

$$\varphi'(t) = [A,B]$$

ولكن $\varphi(0) = 0$ إذن $\varphi(t) = t[A,B]$. ومن ثَمّ

$$\frac{\mathrm{d}\,x_3}{\mathrm{d}\,t}(t) = te^{-t(A+B)}[A,B]e^{tB}e^{tA}x_0$$

ومن جديد، لأنّ $B[A,B] = [A,B]B$ و $A[A,B] = [A,B]A$ استنتجنا أنّ $[A,B]$ و $A+B$ يتبادلان، وعليه يمكننا أن نكتب

$$\frac{\mathrm{d}\,x_3}{\mathrm{d}\,t}(t) = t[A,B]e^{-t(A+B)}e^{tB}e^{tA}x_0 = t[A,B]x_3(t)$$

وعليه يكون التابعان x_3 و $t \mapsto \exp\left(\frac{t^2}{2}[A,B]\right)x_0$ حلَّين للمعادلة التفاضليّة

$$Y'(t) = t[A,B]Y$$

يحقّقان شرط البدء نفسه : $Y(0) = x_0$. فهما إذن متساويان بسبب وحدانيّة حلِّ مسألة كوشي.

إذن لقد برهنّا أنّ $\forall t \in \mathbb{R},\ x_3(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}[A,B]\right)x_0$. أو

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp\left(\frac{t^2}{2}[A,B]\right)x_0 = e^{-t(A+B)}e^{tB}e^{tA}x_0$$

ولأنّ x_0 كيفي استنتجنا أنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp\left(\frac{t^2}{2}[A,B]\right) = e^{-t(A+B)}e^{tB}e^{tA}$$

أو

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{t(A+B)} = e^{tB}e^{tA}\exp\left(\frac{t^2}{2}[A,B]\right)$$

وبوضع $t = 1$ والاستفادة من كون التطبيقين الخطيّين يؤدّيان دورين متناظرين نستنتج

$$e^{A+B} = e^Be^Ae^{\frac{1}{2}[A,B]} = e^Ae^Be^{\frac{1}{2}[B,A]}$$

■

التمرين 27. ليكن E فضاءً شعاعيّاً منظّماً منتهي البعد، وليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، و $A : I \to \mathcal{L}(E)$ تابعاً مستمراً. وأخيراً ليكن t_0 من I. نعرّف

$$\forall t \in I, \quad \mathbb{A}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}\,s$$

ونفترض أنّ

$$(\dagger) \qquad \forall t \in I, \quad \mathbb{A}(t) \circ A(t) = A(t) \circ \mathbb{A}(t)$$

1. أثبت أنّ

$$\forall t \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} e^{\mathbb{A}(t)} = A(t) \circ e^{\mathbb{A}(t)}$$

2. لتكن x_0 من E، أثبت أنّ $t \mapsto e^{\mathbb{A}(t)} x_0$ هو الحل الوحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0, x_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $X' = A(t)\,X$.

3. أثبت أنّه إذا كان التابع المستمر $A : I \to \mathcal{L}(E)$ يحقّق الشرط

$$\forall (t,u) \in I^2, \;\; A(t) \circ A(u) = A(u) \circ A(t)$$

فعندئذ يكون الشرط $(\dagger)$ محقّقاً.

4. حلّ المعادلة التفاضليّة $X' = A(t)\,X$ في الحالتين الآتيتين:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos^2 t \\ 0 & 1 & \cos^2 t \\ 0 & 0 & \sin^2 t \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{bmatrix}$$

5. نتأمّل المعادلة التفاضليّة $X' = A(t)\,X$ مع

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1/t & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولتكن X_0 من $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}^2)$. أوجد الحل الوحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0, X_0)}$ المتعلّقة بهذه المعادلة التفاضليّة، وبيّن أنّه ليس من الشكل المعطى في 2 .

الحل

1. لنلاحظ أنّ $\mathbb{A}'(t) = A(t)$ وأنّ

$$\left(\mathbb{A}^2(t)\right)' = A(t) \circ \mathbb{A}(t) + \mathbb{A}(t) \circ A(t) = 2A(t) \circ \mathbb{A}(t)$$

لنفترض أنّ $\left(\mathbb{A}^n(t)\right)' = nA(t)\circ\mathbb{A}^{n-1}(t)$ في حالة $n \geq 2$ عندئذ

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{A}^{n+1}(t)\right)' &= A(t)\circ\mathbb{A}^n(t) + \mathbb{A}(t)\circ\left(\mathbb{A}^n(t)\right)'\\ &= A(t)\circ\mathbb{A}^n(t) + n\mathbb{A}(t)\circ A(t)\circ\mathbb{A}^{n-1}\mathbb{1}\\ &= A(t)\circ\mathbb{A}^n(t) + nA(t)\circ\mathbb{A}(t)\circ\mathbb{A}^{n-1}(t)\\ &= (n+1)A(t)\circ\mathbb{A}^n(t)\end{aligned}$$

إذن أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$ فالتابع $t\mapsto\mathbb{A}^n(t)$ ينتمي إلى الصف C^1 على I ومشتقّه هو التابع $t\mapsto nA(t)\circ\mathbb{A}^{n-1}(t)$.

ليكن $[a,b]$ مجالاً متراصّاً ما تنتمي إليه t_0، ولنضع $\lambda = \sup\limits_{t\in[a,b]}\left\|A(t)\right\|$ عندئذ يكون لدينا أيضاً $\sup\limits_{t\in[a,b]}\left\|\mathbb{A}(t)\right\| \leq \lambda(b-a)$. ومن ثمّ

$$\forall n\geq 1,\qquad \frac{1}{n!}\sup_{t\in[a,b]}\left\|nA(t)\mathbb{A}^{n-1}(t)\right\| \leq \frac{\lambda^n(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

إذن تتقارب متسلسلة التوابع $\sum\frac{1}{n!}(\mathbb{A}^n)'$ بالنظيم على المجال $[a,b]$. ولمّا كانت المتسلسلة $\sum\frac{1}{n!}\mathbb{A}^n$ متقاربة ومجموعها $e^{\mathbb{A}}$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(\mathbb{A}(t)) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbb{A}^n(t)\right)'\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}A(t)\circ\mathbb{A}^{n-1}(t)\\ &= A(t)\circ\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\mathbb{A}^{n-1}(t)\\ &= A(t)\circ\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbb{A}^n(t) = A(t)\circ\exp(\mathbb{A}(t))\end{aligned}$$

وهذه النتيجة محقّقة على I لأنّها محقّقة على كلّ مجال متراص في I.

2. لتكن x_0 عنصراً من E، نتيقّن بالتعويض المباشر والاستفادة من نتيجة السؤال السابق أنّ $t \mapsto e^{\mathbb{A}(t)} x_0$ هو الحل الوحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,x_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $X' = A(t)\,X$.

3. نفترض أنّ التابع المستمر $A : I \to \mathcal{L}(E)$ يحقّق الشرط

$$\forall (t,u) \in I^2, \quad A(t) \circ A(u) = A(u) \circ A(t)$$

عندئذ بمُكاملة طرفي المساواة السابقة بالنسبة إلى u على المجال $[t_0, t]$ نجد أنّ

$$\forall t \in I, \quad \mathbb{A}(t) \circ A(t) = A(t) \circ \mathbb{A}(t)$$

4. ■ لحلّ المعادلة التفاضليّة $X' = A(t)\,X$ في حالة $A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{bmatrix}$، نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} A(t)A(u) &= \begin{bmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(u) & -b(u) \\ b(u) & a(u) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(t)a(u) - b(t)b(u) & -a(t)b(u) - b(t)a(u) \\ b(t)a(u) + a(t)b(u) & a(t)a(u) - b(t)b(u) \end{bmatrix} \\ &= A(u)A(t) \end{aligned}$$

وذلك أيّاً كان (t,u) من I^2. إذن الشرط $(\dagger)$ محقّق، ويمكننا اتّباع الطريقة المبيّنة في التمرين لإيجاد الحلّ. لنعرّف $\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}\,s$ و $\beta(t) = \int_{t_0}^{t} B(s)\,\mathrm{d}\,s$ عندئذ يكون

$$\mathbb{A}\left(t\right) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & -\beta(t) \\ \beta(t) & \alpha(t) \end{bmatrix}$$

لحساب $e^{\mathbb{A}}$ نثبّت العدد t في I، ونلاحظ أنّ لكثير الحدود المميّز للمصفوفة $\mathbb{A}(t)$ الجذرين $\alpha(t) + \mathrm{i}\,\beta(t)$ و $\alpha(t) - \mathrm{i}\,\beta(t)$. وعليه يُكتب $e^{\mathbb{A}}$ بالشكل $\lambda\mathbb{A} + \mu I_2$ حيث يتعيّن λ و μ بالعلاقتين

$$\lambda\left(\alpha - \mathrm{i}\,\beta\right) + \mu I_2 = e^{\alpha - \mathrm{i}\,\beta} \quad \text{و} \quad \lambda\left(\alpha + \mathrm{i}\,\beta\right) + \mu I_2 = e^{\alpha + \mathrm{i}\,\beta}$$

إذن

$$\mu = e^{\alpha}\cos\beta - \alpha e^{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta} \quad \text{و} \quad \lambda = e^{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}$$

وعلى هذا نستنتج أنّ

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbb{A}} &= e^{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix} + \left(e^{\alpha}\cos\beta - \alpha e^{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= e^{\alpha}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

إذن يُكتب الحل العام للجملة

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= A(t)x(t) - B(t)y(t)\\
y'(t) &= B(t)x(t) + A(t)y(t)
\end{aligned}
$$

بالشكل

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{\alpha(t)}\left(x_0\cos\beta(t) - y_0\sin\beta(t)\right)\\
y(t) &= e^{\alpha(t)}\left(x_0\sin\beta(t) + y_0\cos\beta(t)\right)
\end{aligned}
$$

حيث

$$
\beta(t) = \int_{t_0}^{t} B(s)\,\mathrm{d}\,s \quad \text{و} \quad \alpha(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}\,s
$$

■ لحلّ المعادلة التفاضليّة $X' = A(t)\,X$ في حالة

$$
A(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cos^2 t\\ 0 & 1 & \cos^2 t\\ 0 & 0 & \sin^2 t\end{bmatrix}
$$

نلاحظ أنّ

$$
A(t)A(u) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1-\sin^2 t\sin^2 u\\ 0 & 1 & 1-\sin^2 t\sin^2 u\\ 0 & 0 & \sin^2 t\sin^2 u\end{bmatrix} = A(u)A(t)
$$

وذلك أيّاً كانت (t,u) من I^2 . إذن الشرط $(\dagger)$ محقّق، ويمكننا اتّباع الطريقة المبيّنة في التمرين لإيجاد الحلّ. لدينا

$$
\mathbb{A}\left(t\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2t & 0 & t+\sin t\cos t\\ 0 & 2t & t+\sin t\cos t\\ 0 & 0 & t-\sin t\cos t\end{bmatrix}
$$

لحساب $e^{\mathbb{A}}$ نثبّت العدد t في I، ونلاحظ أنّ لكثير الحدود المميّز للمصفوفة $\mathbb{A}(t)$ الجذور الآتية: t وهو جذرٌ مضاعف، و $\frac{1}{2}(1-\sin t\cos t)$. أمّا الأشعّة الذاتيّة الموافقة لهذه القيم فهي على التوالي :

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

إذن

$$e^{\mathbb{A}(t)}\varepsilon_1 = e^t \cdot \varepsilon_1 \quad \text{و} \quad e^{\mathbb{A}(t)}\varepsilon_2 = e^t \cdot \varepsilon_2 \quad \text{و} \quad e^{\mathbb{A}(t)}v = \exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right)\cdot v$$

ومن ثمّ

$$\begin{aligned} e^{\mathbb{A}(t)}\varepsilon_3 &= e^{\mathbb{A}(t)}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2-v\right) \\ &= e^t\cdot\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right) - \exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right)\cdot\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3\right) \\ &= \left(e^t - \exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right)\right)\cdot\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right) + \exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right)\cdot\varepsilon_3 \end{aligned}$$

إذن

$$e^{\mathbb{A}(t)} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & e^t - \exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right) \\ 0 & e^t & e^t - \exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right) \\ 0 & 0 & \exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right) \end{bmatrix}$$

إذن يُكتب الحل العام للجملة

$$\begin{aligned} x' &= x + \cos^2 t \ z \\ y' &= y + \cos^2 t \ z \\ z' &= \sin^2 t \ z \end{aligned}$$

بالشكل

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_0+z_0)e^t - z_0\exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right) \\ y(t) &= (y_0+z_0)e^t - z_0\exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right) \\ z(t) &= z_0\exp\left(\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right) \end{aligned}$$

5. نتأمّل المعادلة التفاضليّة $X' = A(t)\,X$ حيث $A(t) = \begin{bmatrix} 1/t & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

تُكتب الجملة المدروسة بالصيغة

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{t}x(t) + ty(t) \\ y'(t) &= y(t) \end{aligned}$$

إذن $y(t) = e^{t-t_0}y_0$ ، ومن ثمّ تُكتب المعادلة الأولى بالشكل :

$$\frac{tx'(t) - x(t)}{t^2} = e^{t-t_0}y_0$$

وعليه

$$x(t) = t\frac{x_0}{t_0} + t(e^{t-t_0} - 1)\,y_0$$

والحل الوحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,X_0)}$ هو

$$\begin{aligned} x(t) &= t\frac{x_0}{t_0} + t(e^{t-t_0} - 1)y_0 \\ y(t) &= e^{t-t_0}y_0 \end{aligned}$$

ويكون

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} \ln\dfrac{t}{t_0} & \dfrac{t^2 - t_0^2}{2} \\ 0 & t - t_0 \end{bmatrix}$$

و

$$e^{\mathbb{A}(t)} = \begin{bmatrix} \dfrac{t}{t_0} & \dfrac{(t^2 - t_0^2)(t - t_0e^{t-t_0})}{2t_0(t - t_0 - \ln(t/t_0))} \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix}$$

وهي صيغة مختلفة تماماً عن الحلّ الفعلي للمعادلة التفاضليّة. ■

التمرين 28. أوجد حلّ جمل المعادلات التفاضليّة التالية :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2t\,x - \dfrac{y}{1+t^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{1+t^2} + 2t\,y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = t\,x - y + t\cos t - t^3\sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t\,y + t\sin t + t^3\cos t \end{cases}$$

الحل

■ حلّ جملة المعادلتين التفاضليّتين :

$$\begin{cases} x'(t) = 2t\,x(t) - \dfrac{y(t)}{1+t^2} \\ y'(t) = -\dfrac{x(t)}{1+t^2} + 2t\,y(t) \end{cases}$$

لنضع $U = x + y$ و $V = x - y$، ولنلاحظ أنّ

$$V'(t) = \left(2t + \frac{1}{1+t^2}\right)V(t) \quad \text{و} \quad U'(t) = \left(2t - \frac{1}{1+t^2}\right)U(t)$$

وعليه يكون

$$U(t) = 2A\exp(t^2 - \arctan t)$$
$$V(t) = 2B\exp(t^2 + \arctan t)$$

إذن

$$x(t) = e^{t^2}\left(A e^{-\arctan t} + B e^{\arctan t}\right)$$
$$y(t) = e^{t^2}\left(A e^{-\arctan t} - B e^{\arctan t}\right)$$

■ حلّ جملة المعادلتين التفاضليّتين :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = tx - y + t\cos t - t^3\sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ty + t\sin t + t^3\cos t \end{cases}$$

هنا نعرّف $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$ فنجد

$$z'(t) = (t + \mathrm{i})z(t) + (t + \mathrm{i}\,t^3)e^{\mathrm{i}\,t}$$

ومن ثَمّ

$$\left(z(t)e^{-\mathrm{i}\,t-t^2/2}\right)' = (t+\mathrm{i}\,t^3)e^{-t^2/2} = \left(-(1+\mathrm{i}(2+t^2))e^{-t^2/2}\right)'$$

وعليه

$$\begin{aligned} z(t) &= -(1+\mathrm{i}(2+t^2))e^{\mathrm{i}\,t} + (\alpha+\mathrm{i}\,\beta)e^{\mathrm{i}\,t+t^2/2} \\ &= (\alpha e^{t^2/2} - 1 + \mathrm{i}(\beta e^{t^2/2} + 2 + t^2))e^{\mathrm{i}\,t} \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} x(t) &= -\cos t - (2+t^2)\sin t + e^{t^2/2}(\alpha\cos t - \beta\sin t) \\ y(t) &= -\sin t + (2+t^2)\cos t + e^{t^2/2}(\alpha\sin t + \beta\cos t) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

التمرين 29. أوجد حلّ جملة المعادلات التفاضليّة الآتية على $\mathbb{R}_+^*$، بعد أن تتيقَّن أنّ التابع $t \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ هو حلٌّ للجملة بدون طرف ثانٍ :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -\dfrac{1}{t(1+t^2)}x + \dfrac{1}{t^2(1+t^2)}y + \dfrac{1}{t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -\dfrac{t^2}{1+t^2}x + \dfrac{2t^2+1}{t(1+t^2)}y + 1 \end{cases}$$

الحل

لنفترض أنّ $t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ هو حلٌّ آخر للجملة بدون طرفٍ ثانٍ عندئذ، بالاستفادة من تابع فرونسكي يكون لدينا

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} 1 & x(t) \\ t & y(t) \end{bmatrix} &= k\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\begin{bmatrix} -\frac{1}{s(1+s^2)} & \frac{1}{s^2(1+s^2)} \\ -\frac{s^2}{1+s^2} & \frac{2s^2+1}{s(1+s^2)} \end{bmatrix}\mathrm{d}\,s\right) \\ &= k\exp\left(\int_{t_0}^{t} \tfrac{2s}{1+s^2}\,\mathrm{d}\,s\right) = \tilde{k}(1+t^2) \end{aligned}$$

ويمكننا باختيارٍ مُناسب لشروط البدء أن نفترض $\tilde{k} = 1$، عندئذ يكون لدينا

$$y(t) - tx(t) = 1 + t^2$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى، بدون طرف ثانٍ، نجد

$$x'(t) = -\frac{1}{t(1+t^2)}x(t) + \frac{1}{t^2(1+t^2)}(tx(t)+1+t^2) = \frac{1}{t^2}$$

إذن يمكننا أن نختار $x(t) = -\dfrac{1}{t}$ و $y(t) = t^2$. إذن وجدنا أساساً (φ, ψ) لفضاء حلول المعادلة بدون طرف ثان معطى كما يلي : $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ و $\psi(t) = \begin{bmatrix} -1/t \\ t^2 \end{bmatrix}$.

لنتبع إذن طريقة جعل الثوابت متغيّرة لنجد حلاً خاصّاً للمعادلة مع طرف ثان، أي لنبحث عن هذا الحل الخاص بالصيغة $\Phi(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\psi(t)$، إذ يتعيّن التابعان a و b بالمعادلة

$$a'(t)\varphi(t) + b'(t)\psi(t) = \begin{bmatrix} 1/t \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{t}\varphi(t)$$

ومنه يمكننا أن نختار $a(t) = \ln t$ و $b(t) = 0$ فنجد الحلّ الخاص $t \mapsto \Phi(t) = \begin{bmatrix} \ln t \\ t\ln t \end{bmatrix}$ للمعادلة. فالحلّ العام للمعادلة المدروسة هو

$$\begin{aligned} x(t) &= a - b/t + \ln t \\ y(t) &= at + bt^2 + t\ln t \end{aligned}$$

وهو الحل المطلوب.

التمرين 30. نتأمّل جملة المعادلات التفاضليّة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = tx + (1-t^2)y + (1-t^2)^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - ty + t(1+t^2) \end{cases}$$

ابحث عن حلول خاصّة للجملة بدون طرف ثانٍ، بصيغة كثيرات حدود درجاتها أصغر أو تساوي 2 . ثُمّ أوجد الحل العام لهذه الجملة.

الحل

لنبحث مباشرة عن حلول هذه المعادلة، إن وُجدت، التي تأخذ الشكل

$$\begin{aligned} x(t) &= at^2 + bt + c \\ y(t) &= dt^2 + et + f \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضليّة نجد

$$2at+b = t(at^2+bt+c)+(1-t^2)(dt^2+et+f)+(1-t^2)^2$$
$$2dt+e = at^2+bt+c-t(dt^2+et+f)+t(1+t^2)$$

وهذا يُكافئ

$$(1-d)t^4+(a-e)t^3+(b+d-f-2)t^2+(c+e-2a)t+f-b+1=0$$
$$(1-d)t^3+(a-e)t^2+(b-f-2d+1)t+c-e=0$$

إذن

$$d=1,\ a=c=e,\ b=f+1$$

ومن ثَمّ

$$y(t)=at+b+t^2-1 \quad \text{و} \quad x(t)=a(1+t^2)+bt$$

وهو يُكتب بالشكل

$$t\mapsto \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 1+t^2\\ t\end{bmatrix}}_{\varphi(t)} + b\underbrace{\begin{bmatrix} t\\ 1\end{bmatrix}}_{\psi(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0\\ t^2-1\end{bmatrix}}_{\Phi(t)}$$

إذن (φ,ψ) هي أساس لفضاء حلول المعادلة بدون طرف ثان، و Φ هو حلٌّ خاصٌّ للمعادلة. وما وجدناه هو الحلّ العام للمعادلة المطروحة. ■

التمرين 31. ليكن J مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن p و q تابعين من الصف C^1 على J.
ولنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$(\mathcal{H}) \qquad y''=p(t)y'+q(t)y$$

1. أثبت أنّه إذا كان φ حلاً للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{H})$ فإنّ φ^2 هو حلٌّ لمعادلة تفاضليّة من الشكل

$$(\mathcal{K}) \qquad y'''=P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y$$

يُطلب تعيينها بدلالة p و q.

2. أثبت أنّه إذا كان φ_1 و φ_2 حلّين للمعادلة $(\mathcal{H})$، فإنّ $\varphi_1\varphi_2$ هو حلٌّ للمعادلة $(\mathcal{K})$، ثُمّ أثبت أنّه إذا كانت $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}=(\varphi_1,\varphi_2)$ جملة من حلول المعادلة $(\mathcal{H})$، وعرّفنا الجملة $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}=(\varphi_1^2,\varphi_1\varphi_2,\varphi_2^2)$ من حلول المعادلة $(\mathcal{K})$، فإنّ تابعي فرونسكي لهاتين الجملتين يرتبطان بالعلاقة $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}=2\mathcal{W}^3_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}}$.

الحل

1. لنعرّف $f=\varphi^2$ فيكون لدينا

$$\begin{aligned}
f' &= 2\varphi\varphi' \\
f'' &= 2\varphi'^2+2\varphi\varphi''=2\varphi'^2+2\varphi\big(p\varphi'+q\varphi\big) \\
&= 2\varphi'^2+pf'+2qf \\
f''' &= 4\varphi'\varphi''+\big(pf'+2qf\big)'=4\varphi'\big(p\varphi'+q\varphi\big)+\big(pf'+2qf\big)' \\
&= 4p\varphi'^2+2qf'+\big(pf'+2qf\big)'
\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}
f'''-2pf'' &= 2qf'+\big(pf'+2qf\big)'-2p\big(pf'+2qf\big) \\
f''' &= 3pf''+\big(4q+p'-2p^2\big)f'+\big(2q'-4pq\big)f
\end{aligned}$$

وهذا يُكافئ

$$f'''=\underbrace{3p}_{P}f''+\underbrace{\big(4q+p'-p^2\big)}_{Q}f'+\underbrace{2\big(q'-2pq\big)}_{R}f$$

إذن φ^2 هو حلٌّ للمعادلة $(\mathcal{K})$ حيث

$$P(t)=3p(t) \text{ و } Q(t)=4q(t)+p'(t)-p^2(t) \text{ و } R(t)=2q'(t)-4p(t)q(t)$$

2. إنّ كلّاً من التابعين $\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ و $\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$ حلٌّ للمعادلة $(\mathcal{F})$، إذن مربّعه حلٌّ للمعادلة $(\mathcal{K})$، ولأنّ هذه المعادلة خطيّة استنتجنا أنّ

$$\varphi_1\varphi_2=\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)^2-\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)^2$$

هو أيضاً حلٌّ للمعادلة $(\mathcal{K})$. أمّا $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_\mathcal{K}}$ فيساوي، استناداً إلى التعريف ومن كون $\mathcal{F}_\mathcal{H}=(\varphi_1,\varphi_2)$ جملة من حلول المعادلة $(\mathcal{H})$، ما يأتي:

$$\det\begin{bmatrix}
\varphi_1^2 & \varphi_1\varphi_2 & \varphi_2^2 \\
2\varphi_1\varphi_1' & \varphi_1\varphi_2'+\varphi_2\varphi_1' & 2\varphi_2\varphi_2' \\
2\varphi_1'^2+2p\varphi_1\varphi_1'+2q\varphi_1^2 & 2\varphi_1'\varphi_2'+p\big(\varphi_1\varphi_2'+\varphi_2\varphi'\big)+2q\varphi_1\varphi_2 & 2\varphi_2'^2+2p\varphi_2\varphi_1'+2q\varphi_2^2
\end{bmatrix}$$

وإذا استبدلنا بالسطر الأخير السطرَ نفسه مطروحاً منه جداء ضرب السطر الأوّل بالمقدار $2q$ وجداء ضرب السطر الثاني بالمقدار p وجدنا

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}} = 2\det\begin{bmatrix} \varphi_1^2 & \varphi_1\varphi_2 & \varphi_2^2 \\ 2\varphi_1\varphi_1' & \varphi_1\varphi_2' + \varphi_2\varphi_1' & 2\varphi_2\varphi_2' \\ \varphi_1'^2 & \varphi_1'\varphi_2' & \varphi_2'^2 \end{bmatrix}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} \varphi_1\varphi_2' + \varphi_2\varphi_1' & 2\varphi_2\varphi_2' \\ \varphi_1'\varphi_2' & \varphi_2'^2 \end{bmatrix} &= \varphi_2' \det\begin{bmatrix} \varphi_1\varphi_2' + \varphi_2\varphi_1' & 2\varphi_2\varphi_2' \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} \\ &= \varphi_2' \det\begin{bmatrix} \varphi_1\varphi_2' & \varphi_2\varphi_2' \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix}\end{aligned}$$

إذن

$$\det\begin{bmatrix} \varphi_1\varphi_2' + \varphi_2\varphi_1' & 2\varphi_2\varphi_2' \\ \varphi_1'\varphi_2' & \varphi_2'^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} = \varphi_2'^2 \cdot \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}}$$

وكذلك

$$\det\begin{bmatrix} 2\varphi_1\varphi_1' & 2\varphi_2\varphi_2' \\ \varphi_1'^2 & \varphi_2'^2 \end{bmatrix} = \varphi_1'\varphi_2' \det\begin{bmatrix} 2\varphi_1 & 2\varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} = 2\varphi_1'\varphi_2' \cdot \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}}$$

وأخيراً

$$\det\begin{bmatrix} 2\varphi_1\varphi_1' & \varphi_1\varphi_2' + \varphi_2\varphi_1' \\ \varphi_1'^2 & \varphi_1'\varphi_2' \end{bmatrix} = \varphi_1'^2 \cdot \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}}$$

فإذا نشرنا المحدِّد في صيغة $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}$ وفق سطره الأوّل وجدنا

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}} &= \varphi_1^2\varphi_2'^2 \cdot \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}} - 2\varphi_1\varphi_2\varphi_1'\varphi_2' \cdot \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}} + \varphi_1'^2\varphi_2^2 \cdot \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}} \\ &= \left(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2\right)^2 \cdot \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}} = \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}}^3\end{aligned}$$

إذن $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}} = 2\,\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}}^3$.

وهي النتيجة المرجوّة. ■

المبرهنات الأساسيّة المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة العاديّة

1. عموميّات

في هذا الفصل E هو فضاء شعاعي منظّم منتهي البعد على الحقل $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)، ويمكن للقارئ أن ينظر إلى E كأنّه الفضاء الشعاعي المنظّم $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ حيث $1 \leq n$.[①]

1-1. **تعريف**. ليكن I مجالاً مفتوحاً وغير تافه من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة وغير خالية من E. وأخيراً ليكن التابع **المستمر** $f : I \times \mathcal{U} \to E$. نسمّي **معادلة تفاضليّة عاديّة** كلّ معادلة من الشكل

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = f(t, y) \qquad (\mathcal{E})$$

ونسمّي حلّاً للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، كلّ تابع $\varphi : J \to E$ يحقّق الشروط الآتية:

- المجموعة J هي مجال **مفتوح** جزئي من I.
- يأخذ التابع φ قيمه في $\mathcal{U}$، أي $\varphi(J) \subset \mathcal{U}$.
- يقبل التابع φ الاشتقاق على J و $\forall t \in J,\ \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

وتأكيداً لأهميّة الدور الذي يؤدّيه مجال تعريف الحل φ فإننا نكتب (J, φ) للدلالة على حلٍّ φ معرّف على J للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$.

وأخيراً نسمّي **مسألة كوشي** $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ حيث (t_0, y_0) من $I \times \mathcal{U}$ مسألة البحث عن الحلول (J, φ) للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، التي تحقّق: $t_0 \in J$ و $\varphi(t_0) = y_0$.

لنرمز بالرمز $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ إلى مجموعة الحلول (J, φ) للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$. لقد وجدنا عند دراسة المعادلات التفاضليّة الخطيّة[②] أنّ لمجموعة الحلول $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ بنية جبريّة بسيطة، وأنّ جميع الحلول تكون معرّفة على كامل المجال I. ولكن يمكن في الحالة العامّة ألّا يكون للمجموعة $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ بنية جبريّة بسيطة، وألّا تحوي حلولاً معرّفة على كامل المجال I.

[①] نذكّر هنا أنّ $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

[②] أي حين يكون $f(t, y) = A(t)y + b(t)$.

2-1. **تعريف**. ليكن I مجالاً مفتوحاً وغير تافه من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة، وغير خالية من E. وأخيراً ليكن التابع المستمر $f : I \times \mathcal{U} \to E$. ولنتأمّل $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ مجموعة الحلول (J, φ) للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$:

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = f(t, y) \qquad (\mathcal{E})$$

نعرّف على المجموعة $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ علاقة ترتيب جزئي $\prec$ كما يأتي:

$$(J_1, \varphi_1) \prec (J_2, \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \quad J_1 \subset J_2 \\ \bullet \quad \varphi_{2|J_1} = \varphi_1 \Leftrightarrow \forall t \in J_1, \varphi_1(t) = \varphi_2(t) \end{cases}$$

وهكذا فإنّ العلاقة $(J_1, \varphi_1) \prec (J_2, \varphi_2)$ تعني أنّ φ_2 هو تمديد للحل φ_1.

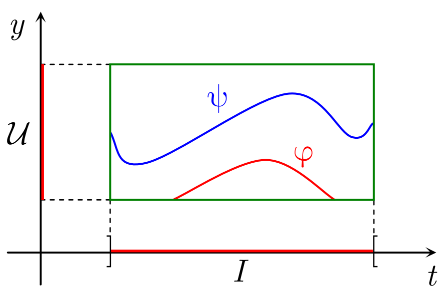
ونقول إنّ الحلَّ $(\mathcal{J}, \Phi)$ من $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ **حلٌّ أعظمي**، إذا كان هذه الحلُّ عنصراً أعظميّاً في المجموعة المرتّبة $(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}, \prec)$، أي إذا لم يكن بالإمكان تمديده إلى حلٍّ معرّف على مجال جزئي من I يحوي تماماً $\mathcal{J}$.

$$\big((\mathcal{J}, \Phi\,) \text{ حلٌّ أعظمي للمعادلة التفاضليّة } \mathcal{E} \,\big)$$
$$\Updownarrow$$
$$\Big(\forall (\mathcal{K}, \psi) \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}},\ (\mathcal{J}, \Phi) \prec (\mathcal{K}, \psi) \Rightarrow (\mathcal{J} = \mathcal{K} \text{ و } \Phi = \psi)\Big)$$

ونسمّي كلَّ حلٍّ (I, Ψ) من $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$، أي معرّف على كامل المجال I، **حلّاً شاملاً**.

نلاحظ أنّ كلَّ حلٍّ شامل للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ يكون أعظمياً، ولكن العكس خطأ بوجه عام. ولكننا أثبتنا عند دراسة المعادلات التفاضليّة الخطّيّة أنّ جميع حلولها الأعظميّة تكون شاملة.

فمثلاً، التابع ψ في الشكل الآتي يمثّل حلّاً شاملاً، في حين يمثّل التابع φ حلّاً أعظميّاً، ولكن غير شاملٍ.



3-1. مبرهنة. ليكن I مجالاً مفتوحاً وغير تافه من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة، وغير خالية من E . وأخيراً ليكن التابع المستمر $f : I \times \mathcal{U} \to E$. ولنتأمّل $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ مجموعة الحلول (J, φ) للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$:

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = f(t, y)$$

عندئذ أياً كان (J, φ) من $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ يوجد هناك حلٌّ أعظمي $(\mathcal{J}, \Phi)$ في $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ يُحقِّق $(\mathcal{J}, \Phi) \prec (J, \varphi)$. وهذا يُكافئ قولنا إنّه بالإمكان تمديد كلّ حلٍّ للمعادلة $(\mathcal{E})$ إلى حلٍّ أعظمي، أو إنّ كل حلٍّ للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ هو مقصور حلٍّ أعظمي.

الإثبات

إذا كان (J_ψ, ψ) عنصراً ما من $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ فإننا نضع بالتعريف

$$b_\psi = \sup J_\psi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{و} \quad a_\psi = \inf\ J_\psi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

ليكن (J, φ) عنصراً من $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$، ولننشئ متتالية $((J_n, \varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ كما يأتي:

- نبدأ بوضع $(J, \varphi) = (J_0, \varphi_0)$.
- لنفترض أننا قد عرّفنا الحل (J_n, φ_n)، وليكن

$$\tilde{b}_{n+1} = \sup\{b_\psi : (J_\psi, \psi) \succ (J_n, \varphi_n)\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$\tilde{a}_{n+1} = \inf\ \{a_\psi : (J_\psi, \psi) \succ (J_n, \varphi_n)\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

ثُمّ لنتأمّل عددين a_{n+1} و b_{n+1} يُحقِّقان

$$b_{n+1} > \min(\tilde{b}_{n+1} - \frac{1}{n}, n)$$
$$a_{n+1} < \max(\tilde{a}_{n+1} + \frac{1}{n}, -n)$$

عندئذ نجد، بمقتضى تعريف الحدّين الأعلى والأدنى، عنصرين (J^R, ψ^R) و (J^L, ψ^L) من $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ بحيث يكون لدينا :

- ♣ $(J^R, \psi^R) \succ (J_n, \varphi_n)$ و $b_{\psi^R} \geq b_{n+1}$.
- ♣ $(J^L, \psi^L) \succ (J_n, \varphi_n)$ و $a_{\psi^L} \leq a_{n+1}$.

وأخيراً نعرّف $J_{n+1} = \left]a_{\psi^L}, b_{\psi^R}\right[$ والتابع $\varphi_{n+1} : J_{n+1} \to \mathcal{U}$ بالعلاقة

$$\varphi_{n+1}(t) = \begin{cases} \psi^R(t) & : \quad t \in \left]a_{\varphi_n}, b_{\psi^R}\right[\\ \psi^L(t) & : \quad t \in \left]a_{\psi^L}, b_{\varphi_n}\right[\end{cases}$$

وهذا تعريف جيدٌ بسبب من كوْن الحليّن (J^R,ψ^R) و (J^L,ψ^L) يمدّدان الحل (J_n,φ_n).
وهكذا نكون قد أنشأنا الحل (J_{n+1},φ_{n+1}) الذي يُمدِّد الحل (J_n,φ_n)، ويُحقِّق الشرط

$$\forall n \geq 0, \quad]a_{n+1}, b_{n+1}[\subset J_{n+1} \subset]\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}[$$

لمّا كان كلُّ حلٍّ (J_ψ,ψ) يُمدِّد (J_{n+1},φ_{n+1}) من $\mathcal{S}_\mathcal{E}$، هو أيضاً حلٌّ يمدِّد (J_n,φ_n)، استنتجنا أنّ المتتالية $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة وأنّ المتتالية $(\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة. لنرمز إلى نهايتي هاتين المتتاليتين في $\overline{\mathbb{R}}$، كما يلي :

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n \quad \text{و} \quad \alpha = \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n$$

ونستنتج من تعريف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنّ $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ و $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ أيضاً.

وعليه يكون $\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n =]\alpha,\beta[= \mathcal{J}$، ثُمَّ لنعرّف التابع $\Phi : \mathcal{J} \to \mathcal{U}$ بالشرط

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Phi_{|J_n} = \varphi_n$$

فيكون $(\mathcal{J},\Phi)$ حلّاً من $\mathcal{S}_\mathcal{E}$، يُمدِّد الحل (J,φ) وهو حلٌّ أعظمي.

في الحقيقة، ليكن $(\mathcal{K},\Psi)$ حلّاً من $\mathcal{S}_\mathcal{E}$، يُحقِّق $(\mathcal{K},\Psi) \prec (\mathcal{J},\Phi)$. ولنفترض جدلاً أنّ $b_\Phi < b_\Psi = \beta$ عندئذ يكون هناك n_0 يُحقّق $\forall n \geq n_0,\ \tilde{b}_n < b_\Psi$، وهذا يتناقض مع تعريف $\tilde{b}_n$، إذن $b_\Phi = b_\Psi$. ونثبت بأسلوب مماثل أنّ $b_\Phi = b_\Psi$، وهذا يقتضي أنّ $\mathcal{U} = \mathcal{K}$ و $\Psi = \Phi$. وهكذا يكتمل الإثبات. ❐

4-1. **تعريف**. ليكن I مجالاً مفتوحاً وغير تافه من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة، وغير خالية من E. وأخيراً ليكن التابع المستمر $f : I\times\mathcal{U} \to E$. ولنتأمّل $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ مجموعة الحلول (J,φ) للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = f(t,y) \qquad (\mathcal{E})$$

نقول إنّ النقطة (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$ هي **نقطة وجود** للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة الحلول الأعظميّة $(\mathcal{J},\Phi)$ من $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ المحقّقة للشرطين

$$\Phi(t_0) = y_0 \quad \text{و} \quad t_0 \in \mathcal{J}$$

تحوي عنصراً واحداً على الأقل.

ونقول إنّ النقطة (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$ هي **نقطة وحدانيّة** للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة الحلول الأعظميّة $(\mathcal{J},\Phi)$ من $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ المحقّقة للشرطين

$$\Phi(t_0)=y_0 \quad \text{و} \quad t_0\in\mathcal{J}$$

تحوي عنصراً واحداً على الأكثر.

ونقول إنّ النقطة (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$ **نقطة وحدانيّة محلّية** للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ إذا وفقط إذا كانت هناك مجموعة مفتوحة $\mathcal{V}$ محتواة في $\mathcal{U}$ تُحقّق $y_0\in\mathcal{V}$، وتكون النقطة (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{V}$ نقطة وحدانيّة بالنسبة إلى المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E}_{\mathcal{V}})$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=f_{|I\times\mathcal{V}}(t,y) \qquad (\mathcal{E}_{\mathcal{V}})$$

وعليه إذا كانت (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$، نقطة وحدانيّة محلّية للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، وإذا كان (J,φ) و (K,ψ) حلّين للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ يُحقّقان الشرطين

$$\varphi(t_0)=\psi(t_0)=y_0 \quad \text{و} \quad t_0\in J\cap K$$

نستنتج وجود مجال مفتوح $L\subset J\cap K$ تنتمي إليه النقطة t_0 ويُحقّق $\varphi_{|L}=\psi_{|L}$.

توضّح الأمثلة الآتية المفاهيم والتعاريف السابقة.

1-5. أمثلة

❄ لنضع $I=\mathbb{R}$ و $\mathcal{U}=\mathbb{R}$ ولنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=3\sqrt[3]{y^2} \qquad (\mathcal{E})$$

إنّ الحلّ الصفري $y\equiv 0$، أي $(\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=0)$، هو حلٌّ شامل للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$.

ليكن (J,φ) حلّاً للمعادلة $\mathcal{E}$ لا ينعدم على المجال J عندئذ

$$\begin{aligned}
\left(\forall t\in J,\ \varphi'(t)=3\sqrt[3]{\varphi^2(t)}\right) &\Leftrightarrow \left(\forall t\in J,\ \left(\sqrt[3]{\varphi(t)}\right)'=1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists c\in\mathbb{R},\ \ \forall t\in J, \sqrt[3]{\varphi(t)}=t-c\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists c\in\mathbb{R},\ \ \forall t\in J, \varphi(t)=(t-c)^3\right)
\end{aligned}$$

لتكن $\Delta = \left\{(\lambda,\mu) \in \overline{\mathbb{R}}^2 : \lambda \le \mu\right\}$ ولنعرّف حين تكون (λ,μ) من Δ التابع $\varphi_{\lambda,\mu}$ كما يلي :

$$\varphi_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} (t-\mu)^3 & : \quad t \in [\mu, +\infty[\\ \quad 0 & : \quad t \in]\lambda, \mu[\\ (t-\lambda)^3 & : \quad t \in]-\infty, \lambda] \end{cases}$$

تبيّن الدراسة السابقة أنّ $\left\{(\mathbb{R}, \varphi_{\lambda,\mu}) : (\lambda,\mu) \in \Delta\right\}$ هي مجموعة الحلول الأعظميّة للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$، وهي جميعاً حلول شاملة لأنها معرّفة على $\mathbb{R}$.

لتكن (t_0, y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ولنبحث عن الحلول الأعظميّة (J,φ) التي تُحقّق الشرط

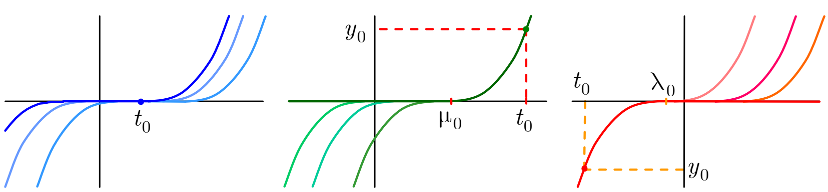
$$\varphi(t_0) = y_0 \quad \text{و} \quad t_0 \in J$$

- في حالة $y_0 = 0$ تمرُّ جميع الحلول
$$\left\{(\mathbb{R}, \varphi_{\lambda,\mu}) : (\lambda,\mu) \in \Delta,\ \lambda \le t_0 \le \mu\right\}$$
بالنقطة (t_0, y_0)، وهذه النقطة هي نقطة وجود وليست نقطة وحدانيّة محلّية.

- في حالة $y_0 > 0$، نعرّف $\mu_0 = t_0 - \sqrt[3]{y_0}$، وعندئذ تمرُّ جميع الحلول
$$\left\{(\mathbb{R}, \varphi_{\lambda,\mu_0}) : \lambda \le \mu_0\right\}$$
بالنقطة (t_0, y_0)، وهذه النقطة هي نقطة وجود ووحدانيّة محلّية، دون أن تكون نقطة وحدانيّة.

- في حالة $y_0 < 0$، نعرّف $\lambda_0 = t_0 - \sqrt[3]{y_0}$، وعندئذ تمرُّ جميع الحلول
$$\left\{(\mathbb{R}, \varphi_{\lambda_0,\mu}) : \mu \ge \lambda_0\right\}$$
بالنقطة (t_0, y_0)، وهذه النقطة هي نقطة وجود ووحدانيّة محلّية، دون أن تكون نقطة وحدانيّة.

ونبيّن في الشكل الآتي الحالات السابقة.



❄ لنضع $I=\mathbb{R}$ و $\mathcal{U}=\mathbb{R}$ ولنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t}=-y^2 \qquad (\mathcal{E})$$

إنّ $\psi\equiv 0$، أي $(\forall t\in\mathbb{R},\ \psi(t)=0)$، هو حلٌّ شامل للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$.

ليكن (J,φ) حلّاً للمعادلة $\mathcal{E}$ لا ينعدم على المجال J عندئذ

$$\begin{aligned}\left(\forall t\in J,\ \varphi'(t)=-\varphi^2(t)\right) &\Leftrightarrow \left(\forall t\in J,\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)'=1\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\exists c\in\mathbb{R},\forall t\in J,\ \frac{1}{\varphi(t)}=t-c\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\exists c\in\mathbb{R},\forall t\in J,\ \varphi(t)=\frac{1}{t-c}\right)\end{aligned}$$

لتكن c من $\mathbb{R}$، ولنعرّف إذن $I_c^+=\left]c,+\infty\right[$ و $I_c^-=\left]-\infty,c\right[$، والتابعين

$$\varphi_c^-:I_c^-\to\mathbb{R},\quad t\mapsto\frac{1}{t-c} \quad \text{و} \quad \varphi_c^+:I_c^+\to\mathbb{R},\quad t\mapsto\frac{1}{t-c}$$

عندئذ نرى أنّ مجموعة الحلول الأعظميّة للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$ هي

$$\{(I_+^c,\varphi_+^c):c\in\mathbb{R}\}\cup\{(I_-^c,\varphi_-^c):c\in\mathbb{R}\}\cup\{\psi\}$$

أمّا الحل الصفري ψ فهو الحل الشامل الوحيد للمعادلة $\mathcal{E}$.

ونتيقّن بسهولة أنّه أياً كانت (t_0,y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ فيوجدْ حلٌّ أعظمي وحيد يمر بالنقطة (t_0,y_0)، وهذا يعني أنّ كلَّ نقطة (t_0,y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ هي نقطة وجود ووحدانيّة.

1-6. مبرهنة. ليكن I مجالاً مفتوحاً وغير تافه من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من E. وأخيراً ليكن التابع المستمر $f:I\times\mathcal{U}\to E$. ولنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t}=f(t,y) \qquad (\mathcal{E})$$

إذا كانت كلُّ نقطة (t_0,y_0) من $\mathbb{R}\times\mathcal{U}$ نقطةَ وحدانيّة محلّية، كانت كلُّ نقطة (t_0,y_0) من $\mathbb{R}\times\mathcal{U}$ نقطة وحدانيّة.

الإثبات

لتكن (t_0,y_0) من $\mathbb{R}\times\mathcal{U}$، وليكن (J,φ) و (K,ψ) حلّين أعظميّين للمعادلة $\mathcal{E}$، يحقّقان الشرطين $t_0\in K\cap J$ و $\varphi(t_0)=\psi(t_0)=y_0$.

ولنعرّف المجموعة الجزئية :

$$\mathcal{A} = \{t \in K \cap J : \varphi(t) = \psi(t)\}$$

إنّ $\mathcal{A} \neq \varnothing$ لأنّ $t_0 \in \mathcal{A}$. لتكن s_0 من $\mathcal{A}$، ولنضع $\varphi(s_0) = \psi(s_0) = z_0$. لمّا كانت النقطة (s_0, z_0) هي نقطة وحدانيّة محلّية، استنتجنا أنّ هناك عدداً $\varepsilon > 0$ يُحقّق

$$\forall t \in \left]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon\right[, \quad \varphi(t) = \psi(t)$$

ولأنّ المجال المفتوح $K \cap J$ جوار للنقطة s_0، صارت المجموعة $\mathcal{A}$ جواراً للنقطة s_0. إذن المجموعة $\mathcal{A}$ هي مجموعة جزئيّة من المجال المفتوح $K \cap J$، مفتوحة وغير خالية.

لتكن $\tilde{t}$ من $K \cap J \cap \overline{\mathcal{A}}$ عندئذ توجد متتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ من $K \cap J$ تسعى إلى $\tilde{t}$ وتحقّق الشرط

$$\forall n \geq 1, \ \ \varphi(t_n) = \psi(t_n)$$

ولكنّ التابعين φ و ψ مستمرّان على $K \cap J$، إذن بجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد

$$\varphi(\tilde{t}) = \psi(\tilde{t})$$

أي $\tilde{t} \in \mathcal{A}$. بذا نكون قد أثبتنا أنّ $K \cap J \cap \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

لتكن $\mathcal{B} = (K \cap J) \backslash \mathcal{A}$، ولنتأمّل u_0 من $\mathcal{B}$ عندئذ يكون لدينا، بناءً على ما سبق $u_0 \notin \overline{\mathcal{A}}$، فيوجد جوار V للنقطة u_0 يحقّق $V \cap \mathcal{A} = \varnothing$ وعليه يوجد جوار $\widetilde{V}$ (يساوي $V \cap K \cap J$) للنقطة u_0 يحقّق $\widetilde{V} \cap \mathcal{A} = \varnothing$، وهذا يُكافئ قولنا إنّ $u_0 \in \widetilde{V} \subset \mathcal{B}$. نستنتج إذن أنّ المجموعة $\mathcal{B}$ مجموعة مفتوحة أيضاً. ولمّا كانت المجموعة $K \cap J$ مجموعة مترابطة لأنها مجال وجب أن تكون $\mathcal{B}$ خالية، وهذا يقتضي أنّ يكون $\mathcal{A} = K \cap J$ أو

$$\forall t \in K \cap J, \quad \varphi(t) = \psi(t)$$

لنضع إذن $L = J \cup K$ ولنعرّف الحلّ (L, Φ) بالعلاقة

$$\forall t \in L, \quad \Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & : \quad t \in J \\ \psi(t) & : \quad t \in K \end{cases}$$

عندئذ يكون $(J, \varphi) \prec (L, \Phi)$ و $(K, \psi) \prec (L, \Phi)$، ولكنّ الحلّين (J, φ) و (K, ψ) أعظميّان إذن لا بُدّ أن يكون

$$(K, \psi) = (L, \Phi) \ \text{و}\ (J, \varphi) = (L, \Phi)$$

وهذا يُثبت أنّ $(J, \varphi) = (K, \psi)$، وبذا يكتمل الإثبات. ❐

1-7. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً وغير تافه من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة، وغير خالية من E . وأخيراً ليكن التابع المستمر $f : I \times \mathcal{U} \to E$. ولنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = f(t, y) \qquad (\mathcal{E})$$

ليكن (J, φ) حلّاً للمعادلة $\mathcal{E}$ يُحقِّق $b = \sup J < +\infty$. ولنفترض أنّ للتابع φ نهاية β عند b، وأنّ النقطة (b, β) تنتمي إلى $I \times \mathcal{U}$ وأنّها نقطة وجود للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$. عندئذ لا يكون الحل (J, φ) حلّاً أعظميّاً.

الإثبات

في الحقيقة، استناداً إلى الفرْض، هناك حلٌّ (K, ψ) للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$ يُحقِّق الشرطين

$$b \in K \text{ و } \psi(b) = \beta$$

لنعرّف إذن $L = J \cup K$ والتابع Φ على L بالعلاقة:

$$\Phi : L \to E, \quad \Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & : \quad t < b \\ \psi(t) & : \quad t \geq b \end{cases}$$

عندئذ يكون Φ تابعاً مستمراً على L لأنّ

$$\lim_{t \to b^-} \Phi(t) = \lim_{t \to b} \varphi(t) = \beta = \Phi(b)$$
$$\lim_{t \to b^+} \Phi(t) = \lim_{t \to b} \psi(t) = \Phi(b)$$

ويكون Φ أيضاً قابلاً للاشتقاق $L \backslash \{b\}$ ويُحقِّق

$$\forall t \in L \backslash \{b\}, \quad \Phi'(t) = f(t, \Phi(t))$$

ولكن التابع f مستمرٌّ عند (b, β) إذن نستنتج من ذلك أنّ

$$\lim_{\substack{t \to b \\ t \neq b}} \Phi'(t) = f(b, \beta)$$

وأنّ التابع Φ قابل للاشتقاق عند b ويُحقِّق $\Phi'(b) = f(b, \beta) = f(b, \Phi(b))$. نستنتج من ذلك أنّ الحلّ (L, Φ) هو حلٌّ للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$ يُحقِّق $(J, \varphi) \prec (L, \Phi)$ و $(J, \varphi) \neq (L, \Phi)$ وهذا يُثبتُ أنّ (J, φ) ليس حلّاً أعظميّاً. □

1-8. **ملاحظة**. نبرهن بأسلوب مماثل أنّه إذا كان (J,φ) حلّاً للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$، يُحقّق $a = \inf J > -\infty$، وكان للتابع φ نهاية α عند a، وكانت النقطة (a,α) تنتمي إلى $I \times \mathcal{U}$ وهي نقطة وجود للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$، عندئذ لا يكون الحل (J,φ) حلّاً أعظميّاً.

1-9. **نتيجة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \times E \rightarrow E$ تابعاً مستمراً. ثمّ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = f(t,y) \qquad (\mathcal{E})$$

نفترض أنّ

① كل نقطة من $I \times E$ هي نقطة وجود.

② أياً كان المجال المغلق والمحدود $K = [m,M]$ المحتوى في I فهناك عددان موجبان A_K و B_K يُحقّقان

$$\forall t \in K,\ \forall y \in E,\ \ \|f(t,y)\| \leq A_K \cdot \|y\| + B_K$$

عندئذ يكون كلُّ حلٍّ أعظمي للمعادلة $\mathcal{E}$ حلّاً شاملاً، أي معرّفاً على كامل I.

الإثبات

ليكن (J,φ) حلّاً أعظميّاً. ولنفترض أن $I \neq J$، عندئذ إمّا أن يكون الحدُّ الأعلى للمجال J عنصراً من I أو يكون كذلك الحدُّ الأدنى للمجال J، والإثبات هو نفسه في الحالتين لذلك سنفترض مثلاً أنّ $b = \sup J \in I$.

لتكن t_0 من J، ولنضع $\varphi(t_0) = y_0$. بتطبيق الفرْض على المجال $K = [t_0,b]$ نجد عددين A و B يُحقّقان

$$\forall t \in [t_0,b], \forall y \in \mathcal{U},\ \ \|f(t,y)\| \leq A \cdot \|y\| + B$$

وعليه يكون

$$\forall t \in [t_0,b[,\quad \|\varphi'(t)\| \leq A \cdot \|\varphi(t)\| + B \qquad (1)$$

ولمّا كان $\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,\mathrm{d}\, s$ استنتجنا أنّ

$$\forall t \in [t_0,b[,\quad \|\varphi(t)\| \leq \|y_0\| + A \cdot \int_{t_0}^{t} \|\varphi(s)\|\,\mathrm{d}\, s + B(t - t_0)$$

فإذا عرّفنا التابع المساعد F بالعلاقة

$$\forall t \in [t_0, b[, \quad F(t) = e^{-At} \cdot \int_{t_0}^{t} (A\,\|\varphi(s)\| + B)\,\mathrm{d}\,s$$

استنتجنا من المتراجحة السابقة أنّ

$$\forall t \in [t_0, b[, \quad F'(t) \leq (A\|y_0\| + B)e^{-At}$$

وبالمُكاملة نجد

$$\forall t \in [t_0, b[, \quad F(t) \leq \left(\|y_0\| + \frac{B}{A}\right)\left(e^{-At_0} - e^{-At}\right)$$

ونستنتج من ذلك في حالة t من $[t_0, b[$ ما يأتي

$$\int_{t_0}^{t} (A\,\|\varphi(s)\| + B)\,\mathrm{d}\,s \leq \left(\|y_0\| + \frac{B}{A}\right)\left(e^{A(t-t_0)} - 1\right)$$

وبالاستفادة من (1)

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,\mathrm{d}\,s\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|\varphi'(s)\|\,\mathrm{d}\,s \\ &\leq \left(\|y_0\| + \frac{B}{A}\right)\left(e^{A(t-t_0)} - 1\right) \end{aligned}$$

ومنه

$$\|\varphi(t)\| \leq \left(\|y_0\| + \frac{B}{A}\right)\left(e^{A(t-t_0)} - 1\right) + \|y_0\|$$

أو

$$A\,\|\varphi(t)\| + B \leq (A\,\|y_0\| + B)(e^{A(t-t_0)} - 1) + A\,\|y_0\| + B$$

وبالعودة إلى العلاقة (1) مجدّداً نجد

$$\forall t \in [t_0, b[, \quad \|\varphi'(t)\| \leq \left(A\,\|y_0\| + B\right)e^{A(t-t_0)}$$

فإذا عرّفنا الثابت $D = (A\|y_0\| + B)\,e^{A(b-t_0)}$ وجدنا

$$\forall t \in [t_0, b[, \quad \|\varphi'(t)\| \leq D$$

ونستنتج من ذلك، بالاستفادة من متراجحة تايلور لاغرانج أنّ

$$\forall (t_1, t_2) \in [t_0, b[^2, \quad \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| \leq D\left|t_1 - t_2\right|$$

وهذا يُثبت، استناداً إلى معيار كوشي، وجود نهاية للتابع φ عند b، ولنَقُلْ β من E. والنقطة (b,β) هي نقطة وجود للمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$. وبمقتضى المبرهنة السابقة، هذا يناقض كوْن الحل (J,φ) حلّاً أعظميّاً. ❐

1-10. **ملاحظة**. ينتج من المبرهنة السابقة أنّ جميع الحلول الأعظميّة لمعادلة تفاضليّة خطّيّة تكون شاملة، وهذا يتّفق مع ما رأيناه في الفصل السابق.

2. مبرهنة الوجود والوحدانيّة لكوشي – ليبشتز

تُعطي هذه المبرهنة شروطاً كافية حتّى تقبل مسألة كوشي المتعلّقة بمعادلة تفاضليّة حلّاً وحلّاً وحيداً. ولمّا كان البرهان طويلاً فقد جزّأناه إلى مراحل عرضناها في مبرهنات منفصلة.

سنفترض، في هذه الفقرة، أنّ I هو مجال مفتوح غير تافه من $\mathbb{R}$، وأنّ $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من E. وسنتأمّل تابعاً **مستمراً** $f : I\times\mathcal{U} \to E$، والمعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = f(t,y) \qquad (\mathcal{E})$$

2-1. **مبرهنة**. لتكن (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$. يكون تابعٌ $\varphi : J \to E$، معرّفٌ على مجال مفتوح تنتمي إليه t_0، حلّاً لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلِّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ إذا وفقط إذا كان محقِّقاً للشروط الآتية:

① التابع φ مستمر على J.

② يأخذ التابع φ قيمه في $\mathcal{U}$ أي $\varphi(J)\subset\mathcal{U}$، أو $\forall t\in J,\ \varphi(t)\in\mathcal{U}$.

③ يُحقِّق التابع φ المعادلة التكامليّة :

$$\forall t \in J,\quad \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}\,s \qquad (\widetilde{\mathcal{E}})$$

الإثبات

من الواضح أنّ شروط المبرهنة تقتضي كوْن التابع φ قابلاً للاشتقاق على J ويُحقِّق

$$\forall t\in J,\ \ \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) \quad \text{و} \quad \varphi(t_0)=y_0$$

وبالعكس، إذا كان (J,φ) حلّاً لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلِّقة بالمعادلة التفاضليّة $\mathcal{E}$ نتجت الخاصّة ③ بمُكاملة المساواة $\varphi'(s) = f(s,\varphi(s))$ بين t_0 و t من J. ❐

وهكذا بدلاً من حلّ المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ نبحث عن حلول المعادلة التكامليّة $(\widetilde{\mathcal{E}})$!.

2-2. تعريف. لتكن (t_0, y_0) من $I \times \mathcal{U}$. نقول إنّ المجموعة

$$\mathcal{C} = \,]t_0 - \ell, t_0 + \ell[\times B(y_0, r)$$

إذ $B(y_0, r)$ هي الكرة المفتوحة التي مركزها y_0 ونصف قطرها r. هي **أسطوانة أمان** مركزها (t_0, y_0)، ووسطاؤها (ℓ, r, M) إذا وفقط إذا تحقّقت الشروط :

$$\ell M < r \quad \text{و} \quad M = \sup_{(t,y)\in\mathcal{C}} \|f(t,y)\| \quad \text{و} \quad \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$$

3-2. مبرهنة. لتكن (t_0, y_0) من $I \times \mathcal{U}$. عندئذ توجد هناك أسطوانة أمان $\mathcal{C}$ مركزها النقطة (t_0, y_0).

الإثبات

لمّا كان I مجالاً مفتوحاً، ولمّا كانت $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة، وجدنا عددين حقيقيين موجبين تماماً λ و r، بحيث يكون

$$\mathcal{K} = [t_0 - \lambda, t_0 + \lambda] \times \overline{B}(y_0, r) \subset \mathcal{U}$$

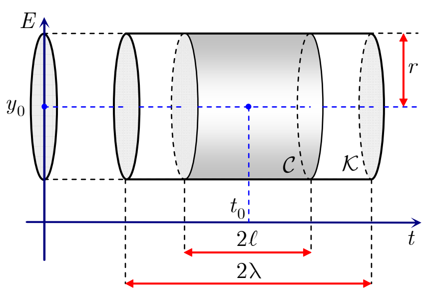
و $\overline{B}(y_0, r)$ هي الكرة المغلقة التي مركزها y_0 ونصف قطرها r.

ولكنَّ التابع f مستمرٌّ على المجموعة المتراصّة $\mathcal{K}$ فهو محدود عليها، يسمح لنا هذا بتعريف العدد

$$M_{\mathcal{K}} = \sup_{(t,y)\in\mathcal{K}} \|f(t,y)\|$$

ثُمّ نضع بالتعريف $\ell = \frac{1}{2}\min(r/M_{\mathcal{K}}, \lambda)$، أو أي عدد موجب أصغر تماماً من المقدار $\min(r/M_{\mathcal{K}}, \lambda)$. عندئذ تكون المجموعة $\mathcal{C} = \,]t_0 - \ell, t_0 + \ell[\times B(y_0, r)$ أسطوانة أمان مركزها (t_0, y_0)، ووسطاؤها (ℓ, r, M) حيث $M = \sup_{(t,y)\in\mathcal{C}} \|f(t,y)\|$.

في الحقيقة، من الواضح أنّ $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$، إذن $\mathcal{C}$ مجموعة جزئيّة من $\mathcal{U}$. والتابع f محدود على $\mathcal{C}$ لأنّه محدود على $\mathcal{K}$ ومن ثَمّ $M \le M_{\mathcal{K}}$. وأخيراً نرى بسهولة انطلاقاً من تعريف ℓ أنّ الشرط $\ell M < r$ محقّقٌ. ❐



2-4. **مبرهنة**. لتكن (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$، ولتكن

$$\mathcal{C} = \underbrace{]t_0-\ell, t_0+\ell[}_{I_0} \times \underbrace{B(y_0,r)}_{B_0}$$

أسطوانة أمان مركزها النقطة (t_0,y_0)، ووسطاؤها (ℓ,r,M). ولتكن $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ مجموعة التوابع **المستمرّة** $h: I_0 \to E$ التي تُحقِّق $h(t_0)=y_0$ و $h(I_0)\subset B_0$. ثُمَّ لنعرِّف، أياً كان العنصر h من $\mathcal{F}_\mathcal{C}$، التابع $\mathcal{T}(h): I_0 \to E$ بالعلاقة:

$$\forall t\in I_0,\quad \mathcal{T}(h)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,h(s))\,\mathrm{d}\,s$$

عندئذ يكون لدينا

$$\forall h\in\mathcal{F}_\mathcal{C},\quad \mathcal{T}(h)\in\mathcal{F}_\mathcal{C}$$

الإثبات

ليكن h عنصراً من $\mathcal{F}_\mathcal{C}$. لمّا كان التابع f مستمراً على $\mathcal{C}\subset I\times\mathcal{U}$، ولمّا كان التابع $s\mapsto(s,h(s))$ مستمراً على I_0 ويأخذ قيمه في $\mathcal{C}$، استنتجنا أنّ التابع $s\mapsto f(s,h(s))$ مستمرٌّ على I_0 وهذا يقتضي قابليّة اشتقاق، ومن ثَمّ استمرار، التابع $\mathcal{T}(h)$ على I_0.

من الواضح أنّ $\mathcal{T}(h)(t_0)=y_0$. ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned}\forall t\in I_0,\quad \left\|\mathcal{T}(h)(t)-y_0\right\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f(s,h(s))\,\mathrm{d}\,s\right\| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t}\left\|f(s,h(s))\right\|\mathrm{d}\,s\right| \le \left|t-t_0\right| M \\ &< \ell M < r\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أنّ $\mathcal{T}(h)(I_0)\subset B_0$، إذن $\mathcal{T}(h)\in\mathcal{F}_\mathcal{C}$. ❐

2-5. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة، وغير خالية من E. وأخيراً ليكن $f: I\times\mathcal{U}\to E$ تابعاً مستمراً. ثُمَّ لتكن (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$، ولنتأمّل أسطوانة أمان

$$\mathcal{C} = \underbrace{]t_0-\ell, t_0+\ell[}_{I_0} \times \underbrace{B(y_0,r)}_{B_0}$$

مركزها (t_0,y_0) ووسطاؤها (ℓ,r,M).

إذا وجِدَ عددٌ $0 < k$ يُحقّق الشرط:

$$(L) \quad \forall t \in I_0, \forall (y_1, y_2) \in B_0, \|f(t, y_1) - (t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$$

عندئذ تكون النقطة (t_0, y_0) نقطة وجود ووحدانيّة محليّة للمعادلة التفاضليّة:

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = f(t, y)$$

وكلُّ حلٍّ أعظمي لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ يكون معرّفاً على كامل I_0.

الإثبات

لتكن $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ مجموعة التوابع المستمرّة $h : I_0 \to E$ التي تُحقّق

$$h(I_0) \subset B_0 \quad \text{و} \quad h(t_0) = y_0$$

ثُمَّ لنعرِّف،كما في المبرهنة 2-4. وأياً كان العنصر h من $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$، التابع $\mathcal{T}(h) : I_0 \to E$ بالعلاقة:

$$\forall t \in I_0, \quad \mathcal{T}(h)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, h(s))\,\mathrm{d}\, s$$

لقد أثبتنا في المبرهنة 2-4. أنّ

$$\forall h \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}, \quad \mathcal{T}(h) \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$$

ولتكن متتالية التوابع $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ المعرّفة تدريجياً كما يأتي:

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{n+1} = \mathcal{T}(\varphi_n) \quad \text{و} \quad \varphi_0 \equiv y_0$$

ولنثبت بالتدريج على n أنّ

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I_0, \quad \|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq M\frac{k^n}{(n+1)!}|t - t_0|^{n+1}$$

في الحقيقة، في حالة $n = 0$ يكون

$$\begin{aligned}\forall t \in I_0, \ \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| &= \|\varphi_1(t) - y_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\,\mathrm{d}\, s\right\| \\ &\leq \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \|f(s, y_0)\|\,\mathrm{d}\, s \leq M|t - t_0|\end{aligned}$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

لنفترض إذن أنّ المتراجحة (2) صحيحة عند قيمةٍ ما n، عندئذ، في حالة t من I_0 لدينا

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{n+2}(t)-\varphi_{n+1}(t)\right\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{n+1}(s))-f(s,\varphi_n(s))\,\mathrm{d}\,s\right\| \\ &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \left\|f(s,\varphi_{n+1}(s))-f(s,\varphi_n(s))\right\|\mathrm{d}\,s \\ &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} k\left\|\varphi_{n+1}(s)-\varphi_n(s)\right\|\mathrm{d}\,s \\ &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} M\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\left|s-t_0\right|^{n+1}\mathrm{d}\,s \\ &= M\frac{k^{n+1}}{(n+2)!}\left|t-t_0\right|^{n+2}\end{aligned}$$

وتكون المتراجحة (2) صحيحة عند $n+1$، وهي، من ثَمّ، صحيحة أياً كانت n.

نستنتج من المتراجحة (2) ما يأتي:

$$(3)\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad \sup_{t\in I_0}\left\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\right\| \leq \frac{M}{k}\cdot\frac{(k\ell)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ولمّا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k\ell)^n}{n!}$ متقاربة ومجموعها يساوي $e^{k\ell}$، استنتجنا أنّه في حالة $m>n$ لدينا

$$\begin{aligned}\sup_{t\in I_0}\left\|\varphi_m(t)-\varphi_n(t)\right\| &\leq \frac{M}{k}\cdot\sum_{p=n}^{m-1}\frac{(k\ell)^{p+1}}{(p+1)!} \leq \frac{M}{k}\cdot\sum_{p=n}^{\infty}\frac{(k\ell)^{p+1}}{(p+1)!} \\ &\leq \frac{(k\ell)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{Me^{k\ell}}{k}\end{aligned}$$

ومنه

$$(4)\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall m>n,\qquad \sup_{t\in I_0}\left\|\varphi_m(t)-\varphi_n(t)\right\| < \frac{(k\ell)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{Me^{k\ell}}{k}$$

وهذا يُثبت أنّ متتالية التوابع $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ تُحقّق شرط كوشي بانتظام، فهي متقاربة بانتظام من تابع $\varphi : I_0 \to E$، ولأنّ جميع التوابع $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ مستمرّة استنتجنا، من التقارب المنتظم، أنّ التابع $\varphi : I_0 \to E$ مستمرٌّ على I_0.

ونلاحظ أنّه

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I_0,\ \|\varphi_{n+1}(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\,\mathrm{d}\,s \right\| \\ &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s,\varphi_n(s))\|\,\mathrm{d}\,s \\ &\leq M\,|t - t_0| \leq M\,\ell\end{aligned}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد

$$\forall t \in I_0, \quad \left\|\varphi(t) - y_0\right\| \leq M\,\ell < r$$

وعليه نرى أنّ $\varphi(I_0) \subset B(y_0, r) = B_0$، ومن ناحية أخرى، لدينا $\varphi(t_0) = y_0$، لأنّ $\varphi_n(t_0) = y_0$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$. نستنتج إذن أنّ $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

لنثبت أنّ (I_0, φ) هو حلٌّ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$.

بجعل m تسعى إلى اللانهاية في (4) نجد

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{t \in I_0} \left\|\varphi(t) - \varphi_n(t)\right\| < \frac{(k\ell)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{Me^{k\ell}}{k} \tag{5}$$

لنعرّف

$$\forall t \in I_0, \quad \Delta(t) = \varphi(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}\,s$$

بملاحظة أنّ

$$\forall t \in I_0, \quad y_0 = \varphi_{n+1}(t) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\,\mathrm{d}\,s$$

نستنتج

$$\forall t \in I_0, \quad \Delta(t) = \varphi(t) - \varphi_{n+1}(t) + \int_{t_0}^{t} \big(f(s,\varphi_n(s)) - f(s,\varphi(s))\big)\,\mathrm{d}\,s$$

وبالاستفادة من العلاقات (L) و (5) نجد

$$\begin{aligned}\forall t \in I_0, \quad \|\Delta(t)\| &\leq \frac{(k\ell)^{n+2}}{(n+2)!}\,\frac{Me^{k\ell}}{k} + \frac{(k\ell)^{n+2}}{(n+1)!}\,\frac{Me^{k\ell}}{k} \\ &< 2M\ell \cdot e^{k\ell}\,\frac{(k\ell)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

وإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية نصل إلى النتيجة $\forall t \in I_0, \|\Delta(t)\| = 0$، أو

$$\forall t \in I_0, \quad \Delta(t) = 0$$

وهذا يعني أنّ

$$\forall t \in I_0, \quad \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}\,s$$

أي إنّ (I_0, φ) هو حلٌّ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلِّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، وذلك بمقتضى المبرهنة 2-1. ونكون قد أثبتنا الجزء المتعلِّق بالوجود من المبرهنة.

لنثبت الجزء المتعلِّق بالوحدانيّة المحليّة. لقد وجدنا حلاً أعظمياً (I_0, φ) لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة:

$$g = f_{|I_0 \times B_0} \quad \text{حيث} \quad y' = g(t, y)$$

لنفترض وجود حلّ أعظمي آخر (I_1, ψ) لهذه المعادلة التفاضليّة يُحقِّق

$$\psi(t_0) = y_0 \quad \text{و} \quad t_0 \in I_1 \subset I_0$$

عندئذ يكون لدينا

$$\forall t \in I_1, \quad \psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\,\mathrm{d}\,s$$

وبالاستفادة من المتراجحة

$$\begin{aligned}\forall t \in I_1, \quad \|\varphi_{n+1}(t) - \psi(t)\| &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \psi(s))\|\,\mathrm{d}\,s \\ &\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} k \cdot \|\varphi_n(s) - \psi(s)\|\,\mathrm{d}\,s\end{aligned}$$

نستنتج بالتدريج على n، أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in I_1, \quad \|\varphi_n(t) - \psi(t)\| \leq M \frac{k^n}{(n+1)!} \cdot |t - t_0|^{n+1}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية وجدنا

$$\forall t \in I_1, \quad \|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0$$

وهذا يُثبت أنّ $(I_1, \psi) = (I_0, \varphi)$. وينتهي بذلك إثبات وحدانيّة الحل (I_0, φ) محليّاً. ❐

2-6. **ملاحظة**. تسمّى طريقة إيجاد حل المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ بصفته نهاية للمتتالية التدريجيّة $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ **طريقة التقريبات المتتالية**، أو طريقة Picard. ومن المفيد أن نشير إلى أنّها تتقارب من حلٍّ معرّف على I_0 للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ وذلك أياً كان التابع φ_0 من $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ الذي نبدأ به.

2-7. **تعريف**. نقول إنّ التابع $f : I\times\mathcal{U} \to E$ يُحقّق شرط لِيبشتز محلياً بالنسبة إلى المتحوّل الثاني، إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط الآتي: أياً كانت (t_0, y_0) من $I\times\mathcal{U}$، فهناك مجال مفتوح J محتوى في I وتنتمي إليه t_0، وهناك مجموعة مفتوحة $\mathcal{V}$ محتواة في $\mathcal{U}$، وتنتمي إليها y_0، وهناك عدد حقيقي $k > 0$، بحيث تتحقّق المتراجحة:

$$\forall t\in J,\ \forall (y_1,y_2)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V},\quad \|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|\leq k\|y_1-y_2\|$$

2-8. **ملاحظة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$. وأخيراً ليكن التابع

$$f : I\times\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n,\ (t,x_1,\ldots,x_n)\mapsto f(t,x_1,\ldots,x_n)$$

ولنرمز بالرموز $f_1,\ldots,f_n$ إلى مركّبات التابع f. عندئذ حتّى يُحقّق التابع f شرط لِيبشتز محلّياً بالنسبة إلى المتحوّل الثاني، يكفي أنّ تكون المشتقّات الجزئيّة $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ موجودة ومستمرّة على $\mathcal{U}$. هذه نتيجة مباشرة من متراجحة التزايدات المحدودة.

2-9. **مبرهنة** Cauchy-Lipschitz–. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة وغير خالية من E. وأخيراً ليكن $f : I\times\mathcal{U} \to E$ تابعاً مستمراً ويُحقّق شرط لِيبشتز محلياً بالنسبة إلى المتحوّل الثاني. عندئذ تكون كلُّ نقطة (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$ نقطة وجود ووحدانيّة محليّة للمعادلة التفاضليّة:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = f(t,y) \qquad (\mathcal{E})$$

الإثبات

لتكن (t_0,y_0) نقطة من $I\times\mathcal{U}$، عندئذ، بناءً على التعريف 2-7.، يوجد مجال مفتوح J محتوى في I وتنتمي إليه t_0، ومجموعة مفتوحة $\mathcal{V}$ محتواة في $\mathcal{U}$، وتنتمي إليها y_0، وعدد حقيقي $k > 0$، بحيث

$$\forall t\in J,\ \forall (y_1,y_2)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V},\quad \|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|\leq k\|y_1-y_2\|$$

وبمُقتضى المبرهنة 2-3. مطبّقة على $f_{|J\times\mathcal{V}}$ أي مقصور f على $J\times\mathcal{V}$، نجد أسطوانة أمان محتواة في $J\times\mathcal{V}$:

$$\mathcal{C} = \underbrace{]t_0-\ell,t_0+\ell[}_{I_0}\times\underbrace{B(y_0,r)}_{B_0}$$

مركزها النقطة (t_0,y_0)، ووسطاؤها (ℓ,r,M). وهكذا صارت شروط تطبيق المبرهنة 2-5. محقَّقة بالنسبة إلى التابع $f_{|J\times\mathcal{V}}$، فالنقطة (t_0,y_0) هي نقطة وجود ووحدانيّة محليّة للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$. ❐

2-10. **نتيجة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة، وغير خالية من E. وأخيراً ليكن $f:I\times\mathcal{U}\to E$ تابعاً مستمراً ويُحقِّق شرط لِيبشتز محلياً بالنسبة إلى المتحوّل الثاني. عندئذ تكون كلُّ نقطة (t_0,y_0) من $I\times\mathcal{U}$ نقطة وجود ووحدانيّة للتفاضليّة : $y'=f(t,y)$.

الإثبات

هذه نتيجة بسيطة ومباشرة من المبرهنة السابقة والمبرهنة 1-6. ❐

2-11. **نتيجة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، وليكن $f:I\times E\to E$ تابعاً مستمراً. نفترض أنّه يوجد تابع مستمرٌّ $\mathcal{K}:I\to\mathbb{R}_+$ يُحقِّق الشرط:

$$\forall t\in I,\ \ \forall(y_1,y_2)\in E^2, \|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|\leq\mathcal{K}(t)\|y_1-y_2\|$$

عندئذ تكون جميع الحلول الأعظميّة للمعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=f(t,y) \qquad (\mathcal{E})$$

شاملة، أي معرّفة على المجال كامل I.

الإثبات

- التابع المستمر $\mathcal{K}$ محدود على كلِّ مجال متراص محتوى في I، وهذا يُثبت أنّ التابع f يُحقِّق شرط ليبشتز محليّاً بالنسبة إلى المتحوّل الثاني. فكلُّ نقطة من $I\times E$ هي نقطة وجود ووحدانيّة للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$.
- من جهة أخرى لدينا

$$\forall t\in I,\ \ \forall y\in E,\quad \|f(t,y)-f(t,0)\|\leq\mathcal{K}(t)\cdot\|y\|$$

وعليه، إذا عرّفنا التابع المستمر $\mathcal{J} : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|f(t,0)\|$ كان لدينا

$$\forall t \in I,\ \ \forall y \in E,\ \ \|f(t,y)\| \leq \mathcal{K}(t)\cdot \|y\| + \mathcal{J}(t)$$

نستنتج من ذلك أنّ شروط النتيجة 1-9. محقّقة، وكلُّ الحلول الأعظميّة للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ هي حلولٌ شاملة. ❐

2-12. **ملاحظة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{E} = E \times E \times \cdots \times E = E^n$، وأخيراً ليكن التابع المستمر $f : I \times \mathcal{U} \to E$، ثُمَّ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة من المرتبة n:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right) \qquad (\mathcal{E})$$

يكون التابع $\varphi : J \to E$ حلّاً للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، إذا كان J مجالاً مفتوحاً غير خالٍ ومحتوى في I، وكان φ قابلاً للاشتقاق n مرّة على J ويحقِّق الشرطين:

- $\forall t \in J,\ \ (\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \mathcal{U}$
- $\forall t \in J,\ \ \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$

ونأتي الآن إلى الملاحظة المهمّة الآتية التي رأيناها تكراراً، لنعرّف التابع

$$g : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{E},\ \ g(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_2, y_3, \ldots, y_n, f(t, y_1, \ldots, y_n))$$

ثُمّ لنرمز بالرمز Y إلى الشعاع $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ من $\mathbb{E}$. عندئذ يعرِّف التطبيق

$$(J, \varphi) \mapsto (J, (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}))$$

تقابلاً بين مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ ومجموعة حلول المعادلة التفاضليّة من المرتبة الأولى

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = g(t, Y) \qquad (\vec{\mathcal{E}})$$

نستنتج من ذلك أنّ مسألة الوجود والوحدانية، المتعلّقة بحلول المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، تنتج مباشرة من دراستنا السابقة. وبناءً على هذه الملاحظة، نترك القارئ يصوغ المبرهنات السابقة، في إطار المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$.

نختم هذه الفقرة بذكر مبرهنتين مهمّتين دون إثباتهما، لأنّ إثبات الأولى يشبه إثبات المبرهنة 2-5. ولأنّ إثبات الثانية يتطلّب تقنيات تخرج عن إطار دراستنا.

2-13.مبرهنة. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من E، ولتكن Λ مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^m$، وأخيراً ليكن التابع المستمر

$$f : I \times \mathcal{U} \times \Lambda \to E, \quad (t, y, \lambda) \mapsto f(t, y, \lambda)$$

لتكن (t_0, y_0) من $I \times \mathcal{U}$، ولنفترض أنّ هناك ثوابت موجبة تماماً ℓ, r, M, k، بحيث تحقّق المجموعة $\mathcal{C} = \underbrace{]t_0 - \ell,\ t_0 + \ell[}_{I_0} \times \underbrace{B(y_0, r)}_{B_0}$ الشروط الآتية:

- أيّاً كانت (t, y, λ) من $\mathcal{C} \times \Lambda$ كان $\|f(t, y, \lambda)\| \le M$.
- أيّاً كان t_0 من I، و أيّاً كان (y_1, y_2) من B_0، وأيّاً كان λ من Λ، كان
$$\|f(t, y_1, \lambda) - (t, y_2, \lambda)\| \le k\|y_1 - y_2\|$$
- $\ell M < r$.

ولنتأمّل، أيّاً كانت λ من Λ، التابع

$$f_\lambda : I_0 \times B_0 \to E, (t, y) \mapsto f(t, y, \lambda)$$

فنرى أنّ $\mathcal{C}$ هي أسطوانة أمان للتابع f_λ مركزها (t_0, y_0)، ويُحقِّق التابع f_λ شرط ليبشتز عليها.وعليه يوجد بمقتضى مبرهنة كوشي-ليبشتز حلٌّ وحيد (I_0, φ_λ) لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0, y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E}_\lambda) : y' = f_\lambda(t, y)$. وعندئذ يكون التابع

$$\Phi : I_0 \times \Lambda \to E, (t, \lambda) \mapsto \varphi_\lambda(t)$$

مستمراً.

2-14.مبرهنة -Péano. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من E. وأخيراً ليكن $f : I \times \mathcal{U} \to E$ تابعاً مستمراً. عندئذ تكون كلُّ نقطة (t_0, y_0) من $I \times \mathcal{U}$ نقطة وجود للمعادلة التفاضليّة :

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = f(t, y)$$

3.المتراجحات التفاضليّة

في بعض الأحيان يكون بالإمكان استنباط معلومات تتعلق بالسلوك المحلّي أو الشامل لحل معادلة تفاضليّة بمقارنة هذا الحلّ بحل معادلة تفاضليّة أخرى، وفي هذا السياق تؤدّي المبرهنة الآتية دوراً مهمّاً ومفيداً.

1-3. مبرهنة. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}$. ولنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = f(t,y) \qquad (\mathcal{E})$$

حيث $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ تابعٌ مستمر. لتكن (t_0, y_0) من $I \times \mathcal{U}$ ولنفترض أنّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ تقبل حلّاً أعظميّاً وحيداً نرمز إليه بالرمز (J,φ).

من ناحية أخرى، ليكن $\psi : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1 على المجال $[t_0,t_1]$، المحتوى في J، ولنفترض أنّ ψ يُحقِّق الشروط الآتية:

- $\psi([t_0,t_1]) \subset \mathcal{U}$.
- $\psi(t_0) \le y_0$.
- $\forall t \in [t_0,t_1],\quad \psi'(t) \le f(t,\psi(t))$.

عندئذ يكون لدينا

$$\forall t \in [t_0,t_1], \quad \psi(t) \le \varphi(t)$$

الإثبات

سنعرض الإثبات في الحالة الخاصّة التي يكون فيها

$$\forall t \in [t_0,t_1],\quad \psi'(t) < f(t,\psi(t)) \qquad \mathcal{H}$$

وهذه الحالة الخاصّة تقتضي الحالة العامّة، ولكننا لن نعرض إثبات ذلك.

لنفترض جدلاً أنّ النتيجة غير صحيحة. عندئذ تكون المجموعة

$$\mathcal{A} = \left\{ t \in [t_0,t_1] : \psi(t) > \varphi(t) \right\}$$

غير خاليّة، والعنصرُ t_0 عنصراً قاصراً عنها. إذن نعرّفُ $\alpha = \inf \mathcal{A}$. وبناءً على تعريف الحدّ الأدنى، توجد متتالية $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{A}$ تُحقِّق $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \alpha$. ولأنّ التابعين φ و ψ مستمران عند α، نستنتج أنّ $\psi(\alpha) \ge \varphi(\alpha)$.

إذا كان $\varphi(\alpha) < \psi(\alpha)$ وجب أن تكون $t_0 < \alpha$، لأنّ $\psi(t_0) \leq y_0 = \varphi(t_0)$. وعليه يكون $\psi(t) > \varphi(t)$ في جوار النقطة $t = \alpha$ بسبب استمرار التابع $\psi - \varphi$ عند α. إذن نجد u في $]t_0, \alpha[$ يُحقّق $\psi(u) > \varphi(u)$ وهذا يناقض تعريف α.

إذن لا بُدّ أن يكون $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$. ينتج من هذا أنّ $\alpha \notin \mathcal{A}$، ومن ثَمّ $\tau_n \neq \alpha$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$. وعليه

$$\begin{aligned}\psi'(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(\tau_n) - \psi(\alpha)}{\tau_n - \alpha} &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\tau_n) - \varphi(\alpha)}{\tau_n - \alpha}\\ &= \varphi'(\alpha) = f(\alpha, \varphi(\alpha)) = f(\alpha, \psi(\alpha))\end{aligned}$$

وهذا يتناقض مع $\mathcal{H}$. وبذا يكتمل إثبات الحالة الخاصّة. □

النتيجة التالية تُعمّم المبرهنة 3-1. على عدد من الحالات المختلفة.

3-2. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}$، و $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ تابعٌ مستمرٌّ. ولنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = f(t, y) \qquad (\mathcal{E})$$

لتكن (t_0, y_0) من $I \times \mathcal{U}$، ولنفترض أنّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ تقبل حلاً أعظمياً وحيداً نرمز إليه بالرمز (J, φ).

① ليكن $\psi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1 على المجال $[t_0, t_1]$، المحتوى في J، ونفترض أنّ ψ يُحقّق الشروط التالية:

$$\forall t \in [t_0, t_1],\ \ \psi'(t) \leq f(t, \psi(t)) \ \text{و}\ \psi(t_0) \leq y_0 \ \text{و}\ \psi([t_0, t_1]) \subset \mathcal{U}$$

عندئذ يكون لدينا $\forall t \in [t_0, t_1],\ \psi(t) \leq \varphi(t)$.

② ليكن $\psi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1 على المجال $[t_0, t_1]$، المحتوى في J، ولنفترض أنّ ψ يُحقّق الشروط التالية:

$$\forall t \in [t_0, t_1],\ \ \psi'(t) \geq f(t, \psi(t)) \ \text{و}\ \psi(t_0) \geq y_0 \ \text{و}\ \psi([t_0, t_1]) \subset \mathcal{U}$$

عندئذ يكون لدينا $\forall t \in [t_0, t_1],\ \psi(t) \geq \varphi(t)$.

③ ليكن $\psi : [t_2, t_0] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1 على المجال $[t_2, t_0]$، المحتوى في J، ولنفترض أنّ ψ يُحقّق الشروط التالية:

$$\forall t \in [t_2, t_0],\ \ \psi'(t) \leq f(t, \psi(t)) \ \text{و}\ \ \psi(t_0) \geq y_0 \ \text{و}\ \psi([t_2, t_0]) \subset \mathcal{U}$$

عندئذ يكون لدينا $\forall t \in [t_2, t_0],\ \ \psi(t) \geq \varphi(t)$.

④ ليكن $\psi : [t_2, t_0] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1 على المجال $[t_2, t_0]$، المحتوى في J، ولنفترض أنّ ψ يُحقّق الشروط التالية:

$$\forall t \in [t_2, t_0],\ \ \psi'(t) \leq f(t, \psi(t)) \ \text{و}\ \ \psi(t_0) \leq y_0 \ \text{و}\ \psi([t_2, t_0]) \subset \mathcal{U}$$

عندئذ يكون لدينا $\forall t \in [t_2, t_0],\ \ \psi(t) \leq \varphi(t)$.

الإثبات

① إنّ هذه النقطة هي نفسها المبرهنة 3-1.

② لنعرّف $\mathcal{U}_2 = -\mathcal{U}$، والتابع الجديد $f_2 : I \times \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R}, f_2(t, y) = -f(t, -y)$. ثُمَّ لنعرّف الحل الأعظمي الوحيد (J, φ_2) لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0, -y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $y' = f_2(t, y)$، بالعلاقة $\varphi_2(t) = -\varphi(t)$ ولنضع بالتعريف أيضاً:

$$\psi_2 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}, \quad \psi_2(t) = -\psi(t)$$

عندئذ يمكننا تطبيق النقطة ① على $\mathcal{U}_2$ و f_2 و (J, φ_2) و ψ_2. ونستنتج من ذلك أنّ

$$\forall t \in [t_0, t_1],\ \ \psi_2(t) \leq \varphi_2(t)$$

أو $\forall t \in [t_0, t_1],\ \ \psi(t) \geq \varphi(t)$.

③ لنعرّف $I_3 = -I$ ، والتابع الجديد $f_3 : I_3 \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}, f_3(t, y) = -f(-t, y)$. ثُمَّ لنعرّف الحل الأعظمي الوحيد $(-J, \varphi_3)$ لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(-t_0, y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $y' = f_3(t, y)$، بالعلاقة $\varphi_3(t) = \varphi(-t)$ ولنضع بالتعريف أيضاً:

$$\psi_3 : [-t_0, -t_2] \to \mathbb{R}, \quad \psi_3(t) = \psi(-t)$$

عندئذ يمكننا تطبيق النقطة ② على I_3 و f_3 و $(-J, \varphi_3)$ و ψ_3. ونستنتج من ذلك أنّ

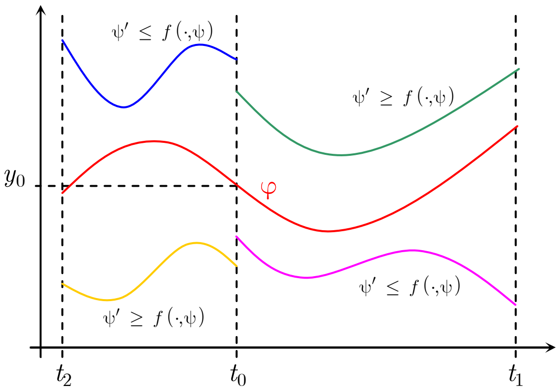
$$\forall t \in [-t_0, -t_2],\ \ \psi_3(t) \geq \varphi_3(t)$$

أو

$$\forall t \in [t_2, t_0],\ \ \psi(t) \geq \varphi(t)$$

④ نترك للقارئ مهمة إثبات هذه النقطة بأسلوب مماثل لما سبق. ❐

يُلخِّص الشكل الآتي الحالات المختلفة الواردة في المبرهنة السابقة:



ونشير إلى أنّ الحالة الخاصّة التي توافق $f \equiv 0$ و $\varphi \equiv y_0$ تفيد القارئ في تذكّر الأوضاع المختلفة السابقة.

3-3. مثال. ليكن I مجالاً مفتوحاً تنتمي إليه النقطة t_0، وليكن (k,ε) من $\mathbb{R}^2$. ولنفترض أنّ $\psi : I \to \mathbb{R}$ هو تابع من الصف C^1 على I يُحقِّق الشرط

$$\forall t \in I, \quad \left|\psi'(t)\right| \leq k\,\psi(t) + \varepsilon$$

عندئذ، مهما تكن t من I، يكن لدينا

$$\psi(t_0)\,e^{-k|t-t_0|} + \varepsilon\,\frac{e^{-k|t-t_0|}-1}{k} \leq \psi(t) \leq \psi(t_0)\,e^{k|t-t_0|} + \varepsilon\,\frac{e^{k|t-t_0|}-1}{k}$$

الإثبات

لنتأمّل التابعين

$$f_1 : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t,y) \mapsto ky + \varepsilon$$
$$f_2 : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t,y) \mapsto -ky - \varepsilon$$

إنّ حلَّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,\psi(t_0))}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة الخطّية $y' = f_1(t,y)$ معرّف على I، ويُعطى بالعلاقة :

$$\forall t \in I, \quad \varphi_1(t) = \psi(t_0)\cdot e^{k(t-t_0)} + \varepsilon\,\frac{e^{k(t-t_0)}-1}{k}$$

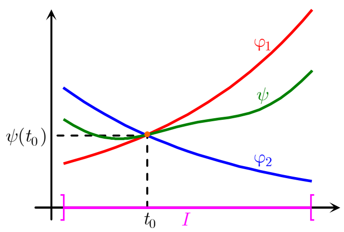
ونجد باستبدال $(-k,-\varepsilon)$ بالمقدار (k,ε) أنّ حلَّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,\psi(t_0))}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة الخطّية $y' = f_2(t,y)$ معرّف على I، ويُعطى بالعلاقة:

$$\forall t\in I,\quad \varphi_2(t)=\psi(t_0)\cdot e^{-k(t-t_0)}+\varepsilon\frac{e^{-k(t-t_0)}-1}{k}$$

ولكن استناداً إلى الفرْض لدينا

$$\forall t\in I,\ \ f_2(t,\psi(t))\le\psi'(t)\le f_1(t,\psi(t))$$

إذن بمُقتضى المبرهنة السابقة، مهما تكن t من I يكن



$$t\ge t_0\quad\Rightarrow\quad \varphi_2(t)\le\psi(t)\le\varphi_1(t)$$
$$t\le t_0\quad\Rightarrow\quad \varphi_1(t)\le\psi(t)\le\varphi_2(t)$$

وهذه هي المتراجحة المطلوبة.

ونجد فيما يلي نتيجة أخرى من نتائج المبرهنة 3-1.

3-4. نتيجة : ليكن I مجالاً مفتوحاً تنتمي إليه النقطة t_0. ولتكن $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}$. ثُمّ لنتأمّل تابعين مستمرّين f_1 و f_2 من $I\times\mathcal{U}$ إلى $\mathbb{R}$ يُحقّقان المتراجحة

$$\forall(t,y)\in I\times\mathcal{U},\ \ f_2(t,y)\le f_1(t,y)$$

وأخيراً ليكن y_1 و y_2 من $\mathcal{U}$ عددين يُحقّقان $y_2\le y_1$، وليكن t_1 من I عدداً حقيقياً يُحقّق $t_0<t_1$.

نفترض أنّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_1)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $y'=f_1(t,y)$، تقبل حلّاً أعظمياً وحيداً φ_1 معرّفاً على مجال مفتوح يحوي $[t_0,t_1]$. وكذلك نفترض أنّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_2)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $y'=f_2(t,y)$ تقبل حلاً أعظمياً وحيداً φ_2 معرّفاً على مجال مفتوح يحوي $[t_0,t_1]$. عندئذ تكون المتراجحة التالية محقَّقة:

$$\forall t\in[t_0,t_1],\ \ \varphi_2(t)\le\varphi_1(t)$$

الإثبات

في الحقيقة، لدينا

$$\forall t\in[t_0,t_1],\ \ \varphi_2'(t)\le f_1(t,\varphi_1(t))\quad \text{و}\quad \varphi_2(t_0)\le y_1$$

وعليه نستنتج بمُقتضى المبرهنة 3-1. أنّ

$$\forall t\in[t_0,t_1],\ \ \varphi_2(t)\le\varphi_1(t)$$

بذا يتم الإثبات. ❒

3-5. **مثال**. ليكن $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ t\mapsto a(t)$ تابعاً مستمراً ومحدوداً. ثُمّ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة:

$$(\mathcal{E})\qquad y'=1+a(t)-y^2$$

سنُثبتُ أنّه مهما تكن (t_0,y_0) من $\mathbb{R}\times]-1,+1[$ فهناك حلٌّ أعظمي وحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، وأنّ هذا الحل هو حلٌّ شاملٌ. هنا التابع f هو

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t,y)=1+a(t)-y^2$$

وهو مستمرٌّ ومن الصف C^1 بالنسبة إلى المتحوّل الثاني، فهو يُحقّق شرط ليبشتز محلّياً بالنسبة إلى المتحوّل الثاني. إذن، مهما تكن (t_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$، يوجد استناداً إلى مبرهنة كوشي-ليبشتز، حلٌّ أعظمي وحيد (J,φ) للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ يُحقّق الشرط $\varphi(t_0)=y_0$. بقي أنّ نثبتَ أنّه في حالة $|y_0|<1$ يكون $J=\mathbb{R}$، ولتحقيق ذلك سنحاول مقارنة هذا الحلّ بحلول معادلات تفاضليّة أخرى.

لنعرّف $\alpha=\sqrt{1+\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}a(t)}$، وهو عدد حقيقي لأنّ a تابع موجب ومحدود، عندئذ يكون لدينا :

$$\forall(t,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f_1(t,y)\le f(t,y)\le f_2(t,y)$$

إذ عرّفنا

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f_1(t,y) &= 1-y^2\\ f_2 &: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f_2(t,y) &= \alpha^2-y^2\end{aligned}$$

لندرس إذن المعادلتين التفاضليتين $y'=f_1(t,y)$ و $y'=f_2(t,y)$.

■ لتكن $\beta \in \{1,\alpha\}$، ولتكن (t_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$. تُبيّن مبرهنة الوجود والوحدانيّة أنّ هناك حلّاً أعظمياً وحيداً (I_β,ψ_β) لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$، المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة:

$$(\mathcal{E}') \qquad y' = \beta^2 - y^2$$

- حالة $y_0 \in \{-\beta,\beta\}$، نتحقّق بسهولة أنّ الحلّ الثابت $\psi_\beta \equiv y_0$ المعرّف على المجال $I_\beta = \mathbb{R}$ هو الحلّ المنشود.
- حالة $y_0 \in]-\beta,+\beta[$. بسبب وحدانيّة حلّ مسألة كوشي لا يمكن أنّ يتقاطع حلّان للمعادلة $(\mathcal{E}')$، إذن لا يتقاطع الحلُّ ψ_β مع الحلّين الثابتين $y \equiv \beta$ و $y \equiv -\beta$، ولأن $y_0 = \psi_\beta(t_0)$ ينتمي إلى $]-\beta,+\beta[$، إذن

$$\forall t \in I_\beta,\ \ \psi_\beta(t) \in \,]-\beta,+\beta[$$

ومن ثمّ تُكافئ المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E}')$ الشرط

$$\forall t \in I_\beta,\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{argth}(\psi_\beta(t)/\beta)\Big) = \beta$$

وعليه يكون

$$\forall t \in I_\beta,\ \ \mathrm{argth}\frac{\psi_\beta(t)}{\beta} - \mathrm{argth}\frac{y_0}{\beta} = \beta(t-t_0)$$

ومن ثمّ

$$\forall t \in I_\beta,\ \ \psi_\beta(t) = \beta\,\mathrm{th}\left(\beta(t-t_0) + \frac{1}{2}\ln\frac{\beta+y_0}{\beta-y_0}\right)$$

ونرى أنّه في هذه الحالة يكون $I_\beta = \mathbb{R}$.

■ لنعد إلى مسألتنا، وليكن (t_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$، وليكن (J,φ) حلُّ المعادلة $(\mathcal{E})$ الذي يُحقّق الشرط $\varphi(t_0) = y_0$، حيث نفترض أنّ $|y_0| < 1$. ولنعرّف

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(t) = \mathrm{th}\left(t - t_0 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+y_0}{1-y_0}\right)$$
$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(t) = \alpha\,\mathrm{th}\left(\alpha(t-t_0) + \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha+y_0}{\alpha-y_0}\right)$$

فيكون φ_1 هو حلُّ المعادلة التفاضليّة $y' = f_1(t,y)$ الذي يُحقّق $\varphi_1(t_0) = y_0$، ويكون φ_2 هو حلُّ المعادلة التفاضليّة $y' = f_2(t,y)$ الذي يُحقّق $\varphi_1(t_0) = y_0$، وذلك نظراً إلى تحقُّق المتراجحة $|y_0| < 1 \leq \alpha$.

ولمّا كان لدينا

$$\forall (t,y)\in \mathbb{R}^2,\ \ f_1(t,y)\le f(t,y)\le f_2(t,y)$$

استنتجنا بمُقتضى المبرهنتين 3-2. و 3-4. أنّ

$$\forall t\in J,\quad t\ge t_0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_1(t)\le \varphi(t)\le \varphi_2(t)$$

$$t\le t_0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_2(t)\le \varphi(t)\le \varphi_1(t)$$

وينجم عن هذا بسهولة أنّ $\forall t\in J,\ |\varphi(t)|\le \alpha$ ، وبالعودة إلى المعادلة التفاضلّية $(\mathcal{E})$ نجد

$$\forall t\in J,\quad \left|\varphi'(t)\right|\le 2\alpha^2$$

وبالاستفادة من مبرهنة التزايدات المحدودة يكون لدينا

$$(*)\qquad \forall (t,s)\in J^2,\quad \left|\varphi(t)-\varphi(s)\right|\le 2\alpha^2\left|t-s\right|$$

لنعرّف $\sup J = M\in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ و $\inf J = m\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.

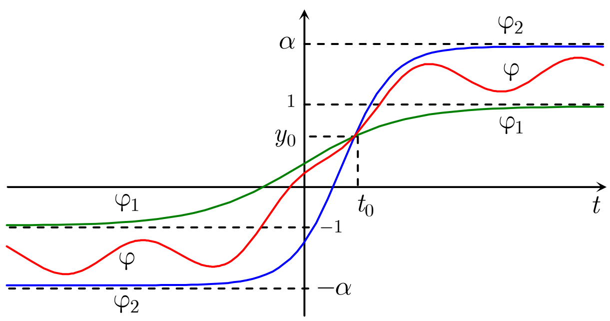
في حالة $M<+\infty$ ، ينتج من العلاقة $(*)$ أنّ النهاية $\lim\limits_{t\to M}\varphi(t)=S$ موجودة وهذا يناقض كوْن الحلّ φ أعظمياً عملاً بالمبرهنة 1-7. إذن $M=+\infty$.

وكذلك في حالة $m>-\infty$ ، ينتج من العلاقة $(*)$ أنّ النهاية $\lim\limits_{t\to m}\varphi(t)=S$ موجودة، وهذا يناقض من جديد كوْن الحلّ φ أعظمياً. إذن $m=-\infty$.

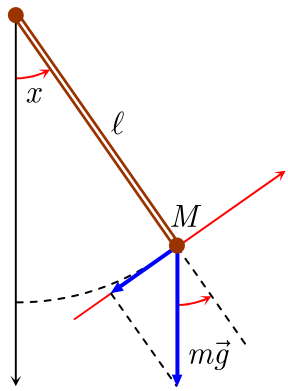
بذا نكون قد أثبتنا أنّ الحلَّ φ معرّف على كامل $\mathbb{R}$ ، أي إنّه حلٌّ شامل.

- نترك للقارئ أن يثبتَ أنّ كلّ حلٍّ للمعادلة $(\mathcal{E})$ ينعدم على الأكثر مرّة واحدة على مجال تعريفه.
- وكذلك نترك له أن يُثبتَ أنّه في حالة $1<y_0$ يكون حلُّ مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ معرّفاً على مجال يحوي $[t_0,+\infty[$، وفي حالة $y_0<-1$ يكون هذا الحل معرّفاً على مجال يحوي $]-\infty,t_0]$.

يبيِّن الشكل التالي مثالاً على الوضع المدروس،إذ اخترنا $a(t)$ من الصيغة $\lambda\sin^2(\mu t+\nu)$:



4. تطبيق : دراسة المعادلة التفاضليّة للنواس البسيط



لنفترض أنّه لدينا نقطة ماديّة M كتلتها m معلّقة شاقولياً إلى حامل بواسطة قضيب، مهمل الكتلة، طوله ℓ، ويتحرّك بحريّة ودون احتكاك عند نقطة التعليق. ولنفترض أننا أزحنا النقطة M بزاوية قدرها θ_0 من $]0,\pi[$ عن وضع توازنها الشاقولي، ثُمّ تركناها دون سرعة بدء.

☜ والمطلوب هو دراسة حركة النقطة M.

يسمح لنا المبدأ الأساسي في التحريك $m\cdot\vec{\Gamma}=\vec{F}$، بكتابة المعادلة التفاضليّة التي تصف حركة النقطة M، إذ نجد بإسقاط هذه العلاقة على محور مماس للحركة:

$$m\ell x''(t)=-mg\sin x(t)$$

و g هو تسارع الجاذبيّة، لنرمز بالرمز ω^2 إلى الثابت $\frac{g}{\ell}$. عندئذ تؤول مسألتنا إلى دراسة المعادلة التفاضليّة:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2\sin x \qquad (\mathcal{E})$$

نهتمّ حصراً بحلول مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,\theta_0,0)}$ أي الحلول (J,θ) التي تُحقّق $\theta(0)=\theta_0$ و $\theta'(0)=0$.

حتى نتمكّن من تطبيق دراستنا العامّة لا بُدّ من وضع المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ بالشكل المألوف. لنعرّف إذن

$$g:\underbrace{\mathbb{R}}_{I}\times\underbrace{\mathbb{R}^2}_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}^2,\qquad g(t,x,y)=(y,-\omega^2\sin x)$$

عندئذ يكوّن التطبيق $(J,\theta)\mapsto(J,(\theta,\theta'))$ تقابلاً بين مجموعة حلول المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ ومجموعة حلول المعادلة التفاضليّة

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=g(t,Z) \qquad (\vec{\mathcal{E}})$$

حيث $Z=(x,y)$.

ولكن أياً كان t من $\mathbb{R}$، وأياً كان $Z_1=(x_1,y_1)$ و $Z_2=(x_2,y_2)$ من $\mathbb{R}^2$ فلدينا

$$\begin{aligned}\|g(t,Z_1)-g(t,Z_2)\|_\infty &\le \max\left(|y_1-y_2|,\omega^2\ |\sin x_1-\sin x_2|\right)\\ &\le \max(1,\omega^2)\cdot\max\left(|y_1-y_2|,|x_1-x_2|\right)\\ &\le \max(1,\omega^2)\cdot\|Z_1-Z_2\|_\infty\end{aligned}$$

إذن يُمكننا تطبيق النتيجتين 2-10. و 2-11. لنستنتج وجود حلٍّ أعظمي، وحلٍّ أعظمي وحيد فقط، لمسألة كوشي المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\vec{\mathcal{E}})$، وهذا الحلُّ هو حلٌّ شاملٌ أي معرّف على كامل $\mathbb{R}$.

> وعليه، أياً كانت θ_0 من $]0,\pi[$، فهناك حلٌّ وحيد $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضليّة $x''=-\omega^2\sin x$ يحقِّق الشرطين $\theta(0)=\theta_0$ و $\theta'(0)=0$.

ندرس فيما يلي خواص الحل $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، فنثبت على سبيل المثال أنّه دوري ونحسب دوره.

❄ لنعرّف التابع $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ u(t)=(\theta'(t))^2$. عندئذ نلاحظ، أياً كان t من $\mathbb{R}$،

$$u'(t)=2\theta'(t)\theta''(t)=-2\omega^2\,\theta'(t)\sin\theta(t)=2\omega^2(\cos\theta(t))'$$

بالمُكاملة نجد

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad u(t)-u(0)=2\omega^2(\cos\theta(t)-\cos\theta_0)$$

أو

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad (\theta'(t))^2=2\omega^2(\cos\theta(t)-\cos\theta_0) \tag{1}$$

وعليه يكون $\forall t\in\mathbb{R},\ \cos\theta(t)\ge\cos\theta_0$، أو

$$\theta(\mathbb{R})\subset\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\theta_0+2\pi k,\theta_0+2\pi k]$$

ولكن استمرار التابع θ يثبت أنّ $\theta(\mathbb{R})$ هو مجال تنتمي إليه النقطة θ_0، إذن لا بُدَّ أن يكون $\theta(\mathbb{R})\subset[-\theta_0,\theta_0]$. ومنه

> يأخذ التابع $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ قيمه في المجال $[-\theta_0,\theta_0]$.

❄ التابع θ مستمرٌّ ويأخذ قيمة موجبة تماماً θ_0 عند الصفر، فهو يبقى موجباً تماماً في جوار الصفر، أي نجد $0 < \alpha$ تُحقِّق $\forall t \in]0,\alpha[,\ \theta(t) \in]0,\theta_0]$ ، وعليه يكون

$$\forall t \in]0,\alpha[, \quad \theta''(t) = -\omega^2 \sin\theta(t) < 0$$

والتابع θ' متناقص تماماً على المجال $[0,\alpha]$. ولكن $\theta'(0) = 0$ إذن يوجد $0 < \alpha$ تُحقِّق $\forall t \in]0,\alpha],\ \theta'(t) < 0$ (2)

ومن ناحية أخرى، لنلاحظ أولاً أنّ التابع

$$]-\theta_0,\theta_0[\to \mathbb{R}_+^*, v \mapsto \frac{1}{\omega\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos v - \cos\theta_0}}$$

تابعٌ زوجي ويُكافِئ : $v \mapsto \dfrac{1}{\omega\sqrt{2\sin\theta_0}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\theta_0 - v}}$ في جوار θ_0^-، وهذا يقتضي تقارب التكامل

$$\tau = \frac{1}{\omega\sqrt{2}} \cdot \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\,v}{\sqrt{\cos v - \cos\theta_0}}$$

لتكن $\tau < \beta$ ولنفترض جدلاً أنّ $\theta'(t) < 0$ أيّاً كانت t من المجال $]0,\beta[$ عندئذ ينتج من المساواة (1) أنّ

$$\forall t \in]0,\beta[, \quad \theta'(t) = -\omega\sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos\theta(t) - \cos\theta_0}$$

ومن ثَمّ يكون لدينا على المجال $]0,\beta[$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{1}{\omega\sqrt{2}} \int_{\theta(t)}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\,v}{\sqrt{\cos v - \cos\theta_0}} \right) = -\frac{1}{\omega\sqrt{2}} \frac{\theta'(t)}{\sqrt{\cos\theta(t) - \cos\theta_0}} = 1$$

وبالمكاملة نجد

$$\forall t \in]0,\beta[, \quad \frac{1}{\omega\sqrt{2}} \int_{\theta(t)}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\,v}{\sqrt{\cos v - \cos\theta_0}} = t$$

ولأنّ $\theta(t)$ ينتمي إلى المجال $[-\theta_0,\theta_0]$ نستنتج مما سبق أنّ

$$\forall t \in]0,\beta[, \quad t \leq \frac{1}{\omega\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\,v}{\sqrt{\cos v - \cos\theta_0}} = \tau$$

أي $\tau \leq \beta$ وهذا يتناقض مع اختيارنا للعدد β. وعليه:

يوجد عدد γ في $]0,\beta[$ يُحقّق $\theta'(\gamma) \geq 0$ (3)

نستنتج من (2) و (3) أنّ المجموعة

$$\{t \in [\alpha,+\infty[\,:\, \theta'(t) = 0\}$$

غير خالية، لأنّ γ تنتمي إليها، وتقبل α عنصراً قاصراً عنها. يمكننا إذن أن نعرّف

$$\tfrac{1}{2}T_{\theta_0} = \inf\{t \in [\alpha,+\infty[\,:\, \theta'(t) = 0\}$$

ولأنّ التابع θ' مستمرٌّ نستنتج بسهولة ما يأتي:

> يوجد عدد حقيقي T_{θ_0} من $\mathbb{R}_+^*$ يحقّق الشرطين :
>
> $$\forall t \in \left]0,\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}\right[,\ \theta'(t) < 0 \quad \text{و} \quad \theta'\left(\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}\right) = 0$$

❄ ينتج من العلاقة (1) أنّ $\cos\left(\theta(\tfrac{1}{2}T_{\theta_0})\right) = \cos\theta_0$ ، ولأنّ التابع θ يأخذ قيمه في المجال $[-\theta_0,\theta_0]$، استنتجنا أنّ $\theta(\tfrac{1}{2}T_{\theta_0})$ ينتمي إلى المجموعة $\{-\theta_0,\theta_0\}$. ولكنّ التابع θ متناقص تماماً على المجال $\left[0,\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}\right]$ وذلك بمُقتضى النقطة السابقة، وهو يساوي θ_0 عند الصفر إذن يجب أن يكون $\theta(\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}) = -\theta_0$. وعليه

> يُعرّف مقصور التابع θ على المجال $\left[0,\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}\right]$ تقابلاً مستمراً ومتناقصاً تماماً بين $\left[0,\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}\right]$ و $[-\theta_0,\theta_0]$.

❄ لنعرّف التابع الجديد $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = -\theta(t + \tfrac{1}{2}T_{\theta_0})$. عندئذ يكون φ من الصف C^2 على $\mathbb{R}$، وهو يُحقّق

$$\varphi'' = -\omega^2 \sin\varphi,$$
$$\varphi(0) = -\theta(\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}) = \theta_0,$$
$$\varphi'(0) = -\theta'(\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}) = 0.$$

ولكنّ التابع θ هو التابع الوحيد الذي يُحقّق الشروط السابقة، استناداً إلى أوّل نقطة أثبتناها. إذن لا بُدّ أن يكون $\theta = \varphi$، أو

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \theta(t) = -\theta(t + \tfrac{1}{2}T_{\theta_0})$$

نستنتج من ذلك أنّ، مهما كانت t من $\mathbb{R}$،

$$\theta(t) = -\theta(t+\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}) = -\big(-\theta(t+\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}+\tfrac{1}{2}T_{\theta_0})\big) = \theta(t+T_{\theta_0})$$

وهذا يُثبتُ أنّ التابع θ تابع دوري ويقبل العدد T_{θ_0} دوراً له.

وبأسلوب مماثل لما سبق نرى أنّ التابع $t \mapsto \theta(-t)$ يُحقِّق المعادلة التفاضليّة، وشروط البدء، التي يُحقِّقها التابع θ نفسها، فهو يساوي θ بسبب الوحدانيّة، أي

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \theta(t) = \theta(-t)$$

نستنتج إذن أنّ

> التابع θ هو تابع زوجي ودوري، وهو يقبل العدد T_{θ_0} دوراً أصغرياً، ويُحقِّق العلاقة: $\forall t \in \mathbb{R}, \theta(t) = -\theta(t+\frac{1}{2}T_{\theta_0})$.

❄ لمّا كان التابع θ' سالباً تماماً على المجال $\left]0,\frac{1}{2}T_{\theta_0}\right[$ استنتجنا أنّ

$$\forall t \in \left]0,\tfrac{1}{2}T_{\theta_0}\right[,\quad \theta'(t) = -\omega\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos\theta(t)-\cos\theta_0}$$

ومن ثَمّ يكون لدينا على المجال $\left]0,\frac{1}{2}T_{\theta_0}\right[$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\omega\sqrt{2}}\int_{\theta(t)}^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\cos v-\cos\theta_0}}\right) = -\frac{1}{\omega\sqrt{2}}\,\frac{\theta'(t)}{\sqrt{\cos\theta(t)-\cos\theta_0}} = 1$$

وبالمكاملة نجد، مستفيدين من تقارب التكامل عند 0 و $\frac{1}{2}T_{\theta_0}$، أنّ

$$\frac{1}{\omega\sqrt{2}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\cos v-\cos\theta_0}} = \tfrac{1}{2}T_{\theta_0}$$

أو

$$\frac{2\sqrt{2}}{\omega}\int_{0}^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\cos v-\cos\theta_0}} = T_{\theta_0}$$

ولإصلاح هذا التكامل نُغيِّر فيه المتحوِّل $v = 2\arcsin(\sin\frac{\theta_0}{2}\cdot\sin u)$، فنجد

$$\frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{\theta_0}{2})\cdot\sin^2 u}} = T_{\theta_0}$$

ومنه

> يُعطى دور التابع θ بالعلاقة :
>
> $$T_{\theta_0} = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{\theta_0}{2})\cdot\sin^2 u}}$$

❄ في الحقيقة يمكننا كتابة الدور T_{θ_0} بشكل مجموع متسلسلة.

لمّا كانت لدينا، أيّاً كانت z من $]-1,+1[$، المساواة

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}C_{2n}^n z^{2n}$$

استنتجنا أنّ

$$\forall u\in[0,\tfrac{\pi}{2}],\quad \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{\theta_0}{2})\cdot\sin^2 u}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}C_{2n}^n\sin^{2n}(\tfrac{\theta_0}{2})\cdot\sin^{2n}u$$

إذ يكون تقارب هذه المتسلسلة منتظماً بالنسبة إلى المتحوّل u، وبناءً على ذلك :

$$\frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{\theta_0}{2})\cdot\sin^2 u}}=\frac{4}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}C_{2n}^n\sin^{2n}(\tfrac{\theta_0}{2})\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}u\,\mathrm{d}\,u$$

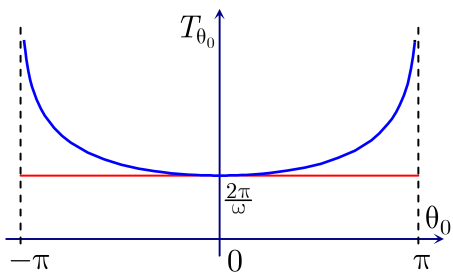
ثُمَّ نحسب التكامل $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}u\,\mathrm{d}\,u$ إمّا بإيجاد علاقة تدريجيّة، أو بأية طريقة يراها القارئ مناسبة، فنجد $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}u\,\mathrm{d}\,u=\frac{\pi}{2}\frac{1}{4^n}C_{2n}^n$. ومنه

$$T_{\theta_0}=\frac{2\pi}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(C_{2n}^n)^2}{4^{2n}}\sin^{2n}(\tfrac{\theta_0}{2})$$

ونستنتج من هذا النشر القيمة التقليديّة المألوفة لدور النواس البسيط عندما تكون السعة θ_0 صغيرة وهي

$$T_{\theta_0}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}+\frac{11\,\theta_0^4}{3072}+O(\theta_0^6)\right)$$

ويبيّن الشكل التالي منحني التابع $T_{\theta_0}\mapsto\theta_0$.



تمرينات

التمرين 1. لنتأمّل المعادلة التفاضليّة : $(\mathcal{E}) : \quad y' = -y - y^3$

أثبت أنّه أيّاً كانت (t_0, y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ يوجد حلٌّ أعظمي وحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ ثُمّ عيِّن هذا الحل.

الحل

التابع $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,y) \mapsto -y - y^3$ تابعٌ مستمرٌّ وقابلٌ للاشتقاق بالنسبة إلى y ومشتقّه مستمر. إذن، استناداً إلى مبرهنة كوشي–لِيشتز، نستنتج أنّه مهما تكن (t_0, y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ يوجد حلٌّ أعظمي وحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$.

- في حالة $y_0 = 0$ الحل الأعظمي المطلوب للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ هو $y \equiv 0$.
- في حالة $y_0 \neq 0$ الحل الأعظمي المطلوب للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ لا يتقاطع مع الحلّ السابق، فهو إذن موجبٌ تماماً في حالة $y_0 > 0$ وسالبٌ تماماً في حالة $y_0 < 0$. وعليه تُكتب المعادلة $(\mathcal{E})$ بالشكل :

$$1 = -\frac{y'}{y(1+y^2)} = \frac{yy'}{1+y^2} - \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+y^2) - \ln y^2\Big)'$$

وعليه

$$2(t-t_0) = \ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{y_0^2}\right)$$

أو

$$\left(1+\frac{1}{y_0^2}\right)e^{2(t-t_0)} - 1 = \frac{1}{y^2}$$

فالحلّ الأعظمي المنشود هو

$$\varphi : \left]t_0 - \tfrac{1}{2}\ln(1+y_0^{-2}), +\infty\right[\to \mathbb{R},\ \varphi(t) = \frac{y_0}{\sqrt{(1+y_0^2)e^{2(t-t_0)} - y_0^2}}$$ ■

التمرين 2. تأمّل المعادلة التفاضليّة :

$$(\mathcal{E}): \quad 2t^2y' = t^2 + y^2$$

ادرس مسألة الوجود والوحدانيّة، المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$، ثمّ حُلّها.

الحل

ليكن I أحد المجالين $\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$، ولنتأمّل التابع

$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,y) \mapsto \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right).$$

إنّ التابع f تابعٌ مستمرٌّ وقابلٌ للاشتقاق بالنسبة إلى y ومشتقّه مستمر أيضاً. إذن، استناداً إلى مبرهنة كوشي–لِبشتز، نستنتج أنّه مهما تكن (t_0, y_0) من $I \times \mathbb{R}$ يوجد حلٌّ أعظمي وحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$.

لنعرّف، على I، تابعاً مجهولاً جديداً $z = \dfrac{y}{t}$، فيكون لدينا $y' = tz' + z$، وتُكتب المعادلة $(\mathcal{E})$ بالصيغة:

$$2tz' = (1-z)^2$$

إذن $t \mapsto y(t) = t$ هو حلٌّ للمعادلة $(\mathcal{E})$، $\left(z \equiv 1\right)$، أمّا في حالة $z \neq 1$ فنجد

$$\frac{z'}{(1-z)^2} = \frac{1}{2t}$$

فيوجد ثابتٌ κ يُحقّق $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t}{\kappa}$ ومن ثَمّ

$$y(t) = t - \frac{2t}{\ln\left(t/\kappa\right)}$$

لتكن (t_0, y_0) من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ولنناقش الحالات الآتية:

- **حالة** $t_0 > 0$.
  - إذا كان $y_0 < t_0$ كان الحل الأعظمي للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ هو

$$y : \left]t_0 \exp\left(\tfrac{-2t_0}{t_0 - y_0}\right), +\infty\right[\to \mathbb{R},\ y(t) = \frac{2y_0 + (t_0 - y_0)\ln(t/t_0)}{2t_0 + (t_0 - y_0)\ln(t/t_0)}t$$

- إذا كان $y_0 = t_0$ كان الحل الأعظمي للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ هو

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto y(t) = t$$

- إذا كان $y_0 > t_0$ كانت الحلول الأعظمية للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ هي

$$y : \left]-\kappa, t_0 \exp\left(\frac{-2t_0}{t_0-y_0}\right)\right[\to \mathbb{R},\ y(t) = \begin{cases} \frac{2y_0+(t_0-y_0)\ln(t/t_0)}{2t_0+(t_0-y_0)\ln(t/t_0)}t & : \ t > 0 \\ 0 & : \ t = 0 \\ t - \frac{2t}{\ln(-t/\kappa)} & : \ t < 0 \end{cases}$$

حيث $\kappa > 0$.

- **حالة** $t_0 < 0$.
  - إذا كان $y_0 < t_0$ كان الحل الأعظمي للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ هو

$$y : \left]-\infty, t_0 \exp\left(\frac{-2t_0}{t_0-y_0}\right)\right[\to \mathbb{R},\ t \mapsto y(t) = \frac{2y_0 + (t_0 - y_0)\ln(t\,/\,t_0)}{2t_0 + (t_0 - y_0)\ln(t\,/\,t_0)}t$$

  - إذا كان $y_0 = t_0$ كان الحل الأعظمي للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ هو

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto y(t) = t$$

  - إذا كان $y_0 > t_0$ كانت الحلول الأعظمية للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ هي

$$y : \left]t_0 \exp\left(\frac{-2t_0}{t_0-y_0}\right), \kappa\right[\to \mathbb{R},\ y(t) = \begin{cases} \frac{2y_0+(t_0-y_0)\ln(t/t_0)}{2t_0+(t_0-y_0)\ln(t/t_0)}t & : \ t < 0 \\ 0 & : \ t = 0 \\ t - \frac{2t}{\ln(t/\kappa)} & : \ t > 0 \end{cases}$$

حيث $\kappa > 0$.

- **حالة** $t_0 = 0$.
  - إذا كان $y_0 \neq t_0$. لا يوجد حلٌّ للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$.
  - إذا كان $y_0 = t_0$ كانت الحلول الأعظمية للمسألة $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ هي

$$y :]-\lambda, \mu[\to \mathbb{R},\ y(t) = \begin{cases} t - \frac{2t}{\ln(-t/\lambda)} & : \ t < 0 \\ 0 & : \ t = 0 \\ t - \frac{2t}{\ln(t/\mu)} & : \ t > 0 \end{cases}$$

حيث $0 < \lambda \leq +\infty$ و $0 < \mu \leq +\infty$.

التمرين 3. لتكن $(c_{ijk})_{(i,j,k) \in \mathbb{N}_n^3}$ جماعة من الأعداد الحقيقيّة، تُحقّق الشرط

$$\forall (i,j,k) \in \mathbb{N}_n^3, \quad c_{ijk} = -c_{kji}$$

ولنتأمّل جملة المعادلات التفاضليّة

$$(\mathcal{E}) : \quad x_i' = \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}_n^2} c_{ijk} x_j x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

1. ليكن $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ حلّاً أعظميّاً للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ معرّفاً على مجال J. أثبت أنّ التابع

$$t \mapsto y(t) = x_1^2(t) + \cdots + x_n^2(t)$$

تابعٌ ثابتٌ على J.

2. أثبت أنّ الحلول الأعظميّة للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ هي حلول شاملة.

الحل

1. التابع y قابل للاشتقاق على J. ونجد

$$y' = 2\sum_{i=1}^{n} x_i x_i' = 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}_n^2} c_{ijk} x_i x_j x_k = 2 \sum_{(i,j,k) \in \mathbb{N}_n^3} c_{ijk} x_i x_j x_k$$

$$= 2 \sum_{(i,j,k) \in \mathbb{N}_n^3} c_{kji} x_k x_j x_i = -2 \sum_{(i,j,k) \in \mathbb{N}_n^3} c_{ijk} x_i x_j x_k = -y'$$

وعليه $\forall t \in J,\ y'(t) = 0$ إذن y ثابت على J.

2. ليكن $M \geq 0$ الثابت الذي يُحقّق $\forall t \in J,\ y(t) = M^2$. عندئذ، أيّاً كانت i فلدينا

$$\forall t \in J, \quad \left|x_i'(t)\right| \leq \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}_n^2} \left|c_{ijk}\right| \left|x_j(t)\right| \left|x_k(t)\right| \leq M^2 \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}_n^2} \left|c_{ijk}\right|$$

فإذا عرّفنا $\Lambda = \left|c_{ijk}\right| \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}_n^2} M^2$، استنتجنا

$$\forall t \in J, \forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \left|x_i'(t)\right| \leq \Lambda$$

لتكن i من $\mathbb{N}_n$. نستنتج من المتراجحة السابقة ما يأتي:

$$\forall (t,s) \in J^2, \quad |x_i(t) - x_i(s)| \leq \Lambda |t - s| \qquad (*)$$

فإذا افترضنا جدلاً أنّ $b = \sup J < +\infty$، عندئذ نستنتج من $(*)$ ومن شرط كوشي لوجود النهاية، أنّ التابع x_i يقبل نهاية منتهية عند b^- لنضع إذن $\lim\limits_{t\to b^-} x_i(t) = a_i$. فإذا عرّفنا $A = {}^t[a_1,\ldots,a_n]$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{t\to b^-} X(t) = A$ ، ولمّا كانت النقطة (b,A) نقطة وجود ووحدانيّة للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ وضوحاً، استنتجنا أنّ الحلّ X ليس حلّاً أعظميّاً، وهذا يتناقض مع الفرْض. إذن $b = +\infty$، وبأسلوب مماثل نبرهن أنّ $\inf J = -\infty$. وهذا يبرهن أنّ كلّ حلٍّ أعظمي للمعادلة $(\mathcal{E})$ حلٌّ شاملٌ. ■

التمرين 4. أثبت أنّ كلَّ حلٍّ أعظميٍّ للمعادلة التفاضليّة $y' = f(t,y)$ حيث

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(t,y) = t\sqrt{t^2+y^2}$$

يكون حلاً شاملاً.

الحل

التابع f تابعٌ مستمرٌّ، فكلُّ نقطة (t_0,y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ هي نقطة وجود. وكذلك نلاحظ ما يلي:

$$\begin{aligned}\forall (t,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left|f(t,y)\right| &= |t|\sqrt{t^2+y^2}\\ &\le |t|\sqrt{t^2+2|t|\,|y|+y^2} = |t|\big(\,|t|+|y|\,\big)\end{aligned}$$

إذن مهما يكن المجال المتراص $\mathcal{K} = [-A,A]$ يكن

$$\forall (t,y)\in\mathcal{K}\times\mathbb{R},\quad \left|f(t,y)\right| \le A|y| + A^2$$

وهذا يبرهن أنّ كلّ حلٍّ أعظمي للمعادلة $y' = f(t,y)$ حلٌّ شاملٌ. ■

التمرين 5. حلّ المعادلة التفاضليّة $y' = f(y)$ في حالة

$$f : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(y) = \begin{cases} 0 & : \ y \le 0 \\ y\ln y & : \ y > 0\end{cases}$$

الحل

التابع f تابعٌ مستمرٌّ، فكل نقطة (t_0,y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ هي نقطة وجود. وكذلك نلاحظ أنّه مهما تكن λ من $\mathbb{R}_-\cup\{1\}$ يكن التابع الثابتُ $y \equiv \lambda$ حلّاً للمعادلة $y' = f(y)$.

على أي مجال يأخذ التابع y قيمه عليه في $]0,1[$ أو في $]1,+\infty[$ يمكننا أن نكتب

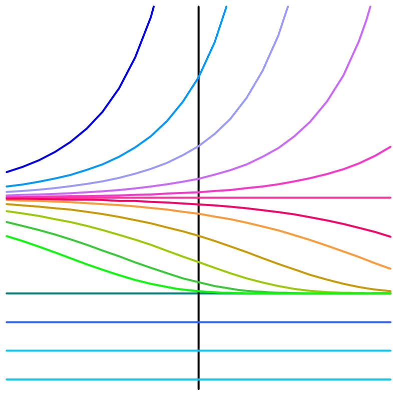
$$\frac{y'}{y\ln y} = 1$$

ومن ثَمّ $\ln\left|\ln y(t)\right| = t + \kappa$.

لتكن (t_0, y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. ولنناقش الحالات الآتية :

- حالة $0 \leq y_0$. عندئذ يكون لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ الحلّ الوحيد $y \equiv y_0$.
- حالة $0 < y_0$. عندئذ يكون لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ الحلّ الوحيد

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto y(t) = \exp\left(e^{t-t_0}\ln y_0\right)$$



وبذا يكتمل الحل.

التمرين 6. أوجد الحل الأعظمي φ للمعادلة التفاضليّة $y' = |y| + |t|$ الذي يحقّق شرط البدء $\varphi(0) = 1$. ثُمّ ادرس قابليّة اشتقاق التابع φ مرتين.

الحل

التابع $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (t,y) \mapsto |y| + |t|$ تابعٌ مستمرٌ ويُحقّق

$$\forall (t, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \left|f(t,y_1) - f(t,y_2)\right| = \left||y_1| - |y_2|\right| \leq \left|y_1 - y_2\right|$$

إذن، استناداً إلى مبرهنة كوشي–لِبشتز، نستنتج أنّه مهما تكن (t_0, y_0) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ فيوجد حلٌّ أعظمي وحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0)}$ ، ويكون هذا الحلُّ شاملاً بسبب المتراجحة السابقة.

ليكن $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الحل الوحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(0,1)}$ ، لمّا كان $\varphi(0) = 1$ استنتجنا أنّ φ' موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ، فالتابع φ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. وبوجه خاص $\varphi(t) \geq 1$ في حالة $t \geq 0$. إذن،

$$\forall t \geq 0, \;\; \varphi'(t) = \varphi(t) + t$$

وعليه، يكون

$$\forall t \geq 0, \;\; (\varphi(t)e^{-t})' = te^{-t} = -((1+t)e^{-t})'$$

إذن

$$\forall t \geq 0, \;\; \varphi(t)e^{-t} - \varphi(0) = 1 - (1+t)e^{-t}$$

وأخيراً

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi(t) = 2e^t - (1+t)$$

لمّا كان التابع φ مستمرّاً ومتزايداً تماماً على $\mathbb{R}$ ، عرّفنا المجال $J = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ وهو يحوي، استناداً إلى ما رأيناه، $\mathbb{R}_+$. ليكن $\alpha = \inf J$ فيكون $-\infty \leq \alpha < 0$. عندئذ

$$\forall t \in \,]\alpha, 0], \quad \varphi'(t) = \varphi(t) - t$$

وعليه، يكون

$$\forall t \in \,]\alpha, 0], \quad (\varphi(t)e^{-t})' = -te^{-t} = ((1+t)e^{-t})'$$

إذن

$$\forall t \in \,]\alpha, 0], \quad \varphi(t)e^{-t} - \varphi(0) = (1+t)e^{-t} - 1$$

وأخيراً

$$\forall t \in \,]\alpha, 0], \quad \varphi(t) = 1 + t$$

وهكذا نرى، بناءً على تعريف α ، أنّ $\alpha = -1$. ولأنّ $\varphi(\alpha) = 0$ ، والتابع φ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ، نستنتج أنّ

$$\forall t \in \,]-\infty, -1], \quad \varphi(t) \leq 0$$

إذن،

$$\forall t \in \,]-\infty, -1], \quad \varphi'(t) = -\varphi(t) - t$$

وعليه، يكون

$$\forall t \in \,]-\infty, -1], \quad (\varphi(t)e^{t})' = -te^{t} = ((1-t)e^{t})'$$

إذن

$$\forall t \in \,]-\infty,-1],\quad \varphi(t)e^t - \varphi(-1) = (1-t)e^t - 2e^{-1}$$

وأخيراً

$$\forall t \in \,]-\infty,-1],\quad \varphi(t) = 1 - t - 2e^{-t-1}$$

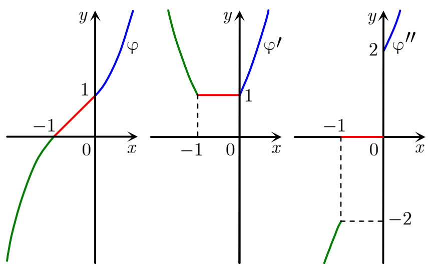
وأخيراً نستنتج أنّ التابع φ يُعطى بالصيغة

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2e^t - 1 - t & : \quad 0 \le t \\ t+1 & : \quad -1 < t < 0 \\ 1 - t - 2e^{-t-1} & : \quad t \le -1 \end{cases}$$

ونلاحظ أنّه في حالة $t \notin \{-1,0\}$ لدينا

$$\varphi''(t) = \begin{cases} 2e^t & : \quad 0 < t \\ 0 & : \quad -1 < t < 0 \\ -2e^{-t-1} & : \quad t < -1 \end{cases}$$

والتابع φ لا يقبل الاشتقاق مرّتين على $\mathbb{R}$.



ونلاحظ أنّ الخط البياني للحل φ متناظر بالنسبة إلى النقطة $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. ■

التمرين 7. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال، وليكن $q : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً، ثُمّ لنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$(\mathcal{E}) : \quad y'' + q(t)\,y = 0$$

I. أثبت أنّه أيّاً كان (t_0, y_0, y_0') من $I \times \mathbb{R}^2$ ، يوجدْ حلٌّ أعظمي وحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0,y_0')}$ المتعلّقة بالمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$. وأنّ هذا الحل معرّف على I .

II. لتكن t_0 من I. وليكن φ حلّاً للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ يُحقِّق $\varphi(t_0) = 0$ و $\varphi'(t_0) = 0$. أثبت أنّ $\varphi = 0$.

III. ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير تافه محتوى في $\mathbb{R}$. وليكن φ حلّاً للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ معرّفاً على المجال $[a,b]$، ومختلفاً عن الصفر. أثبت أنّ المجموعة

$$\{t \in [a,b] : \varphi(t) = 0\}$$

خالية أو منتهية.

IV. ليكن φ و ψ حلّين للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ معرّفين على المجال نفسه J. ولنفترض أنّه توجد t_0 في J تُحقِّق $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = 0$. أثبت أنّ الحلّين φ و ψ مرتبطان خطّياً.

V. ليكن φ و ψ حلّين أعظميين غير صفريَّيْن للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$. أثبت أنّ $\varphi' \cdot \psi - \varphi \cdot \psi'$ تابعٌ ثابتٌ. استنتج أنّه إذا كان a و b جذرين متتاليَيْن للتابع φ يُحقّقان $a < b$ عندئذ يوجد c في $]a,b[$ يُحقِّق $\psi(c) = 0$.

VI. ليكن q_1 و q_2 تابعين مستمرّين من I إلى $\mathbb{R}$. ولنفترض أنّ $q_2(t) \leq q_1(t)$ أيّاً كان t من I. نتأمّل حلاً أعظمياً ψ للمعادلة التفاضليّة $y'' + q_1(t)\,y = 0$ وكذلك حلّاً أعظمياً φ غير صفري للمعادلة التفاضليّة $y'' + q_2(t)\,y = 0$.

① لنفترض أنّ a و b هما جذران متتاليان للحل φ، أثبت أنّ للتابع ψ جذر في المجال $]a,b[$.

② نفترض وجود عددٍ Λ من $\mathbb{R}_+^*$ يحقّق $\forall t \in I,\ q(t) \leq \Lambda^2$. وليكن φ حلّاً أعظميّاً للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$. أثبت أنّه إذا كان α و β جذرين متتاليين للتابع φ، كان $\left|\alpha - \beta\right| \geq \pi / \Lambda$.

③ نفترض وجود عددٍ λ من $\mathbb{R}_+^*$ يحقّق $\forall t \in I,\ \lambda^2 \leq q(t)$. وليكن φ حلّاً أعظمياً للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$. أثبت أنّ التابع φ ينعدم على كلّ مجال، محتوى في I، من الشكل $[\ell, \ell + \pi / \lambda]$.

VII. نفترض في هذا السؤال أنّ التابع q هو تابع دوري، ويقبل العدد $\varpi > 0$ دوراً.

① أثبت أنّ إحدى الخاصتين الآتيتين تكون دوماً محقّقة:

$\mathcal{A}$: لكلّ حلٍّ أعظمي φ غير صفري للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ جذر حقيقي واحد على الأكثر.

$\mathcal{B}$: لكلّ حلٍّ أعظمي φ غير معدوم للمعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$ عدد لا نهائي من الجذور الحقيقيّة.

② أثبت أنّه في حالة $q \geq 0$ تكون الخاصّة $\mathcal{A}$ محقَّقة.

③ أثبت أنّه في حالة $q \leq 0$ و $q \not\equiv 0$ تكون الخاصّة $\mathcal{B}$ محقَّقة.

الحل

I. هذه الخاصّة هي من خواص المعادلات التفاضليّة الخطيّة، التي تكون جميع حلولها الأعظميّة شاملة، وأيّاً كانت (t_0, y_0, y_0') من $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ تقبل مسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,y_0,y_0')}$ حلّاً أعظميّاً وحيداً.

II. لنتأمّل التابع الثابت $\psi : I \to \mathbb{R}, t \mapsto 0$. عندئذ يكون التابعان ψ و φ حلَّين لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0,0,0)}$. وبسبب وحدانيّة الحلّ نستنتج أنّ $\psi = \varphi$ وهي النتيجة المطلوبة.

III. لنفترض جدلاً أنّ المجموعة $\mathcal{Z} = \left\{t \in [a,b] : \varphi(t) = 0\right\}$ غير منتهية. عندئذ يوجد تابع متباين

$$\lambda : \mathbb{N} \to \mathcal{Z}, n \mapsto \lambda_n$$

《 نختار λ_0 عنصراً ما من $\mathcal{Z}$ ، وإذا افترضنا أننا عرّفنا λ_0 و λ_1 و... و λ_n عندئذ نعرّف λ_{n+1} بأنّه عنصر ما من $\mathcal{Z} \backslash \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. 》

لمّا كانت المجموعة $[a,b]$ مجموعة متراصّة، والمتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ متتالية من المجال $[a,b]$ استنتجنا وجود تابع متزايد تماماً $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئيّة $(\lambda_{\theta(n)})_{n\geq 0}$ من عناصر $\mathcal{Z}$ متقاربة من عنصر t_0 ينتمي إلى المجال المغلق $[a,b]$. لنعرّف $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_n = \lambda_{\theta(n)}$.

نستنتج من استمرار الحل φ أنّ

$$\varphi(t_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\mu_n) = 0$$

ومن جهة أخرى، مهما تكن n من $\mathbb{N}$ ، لدينا $\varphi(\mu_n) = \varphi(\mu_{n+1}) = 0$ إذن استناداً إلى مبرهنة Rolle يوجد عددٌ ν_n يقع بين μ_n و μ_{n+1} يُحقّق $\varphi'(\nu_n) = 0$. ولكن، لمّا كان $\lim_{n\to\infty} \mu_n = t_0$ ، استنتجنا من كون ν_n يقع بين μ_n و μ_{n+1} أنّ $\lim_{n\to\infty} \nu_n = t_0$.

واستنتجنا من استمرار التابع φ' ومن كون $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi'(\nu_n) = 0$ أنّ

$$\varphi'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi'(\nu_n) = 0$$

فإذا استفدنا من نتيجة السؤال II. استنتجنا من كون $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = 0$ أنّ $\varphi \equiv 0$ وهذا يناقض الفرْض. إذن المجموعة $\mathcal{Z}$ خالية أو منتهية.

IV. لنعرّف التابع $t \mapsto \Phi(t) = \psi'(t_0)\varphi(t) - \varphi'(t_0)\psi(z)$. نلاحظ أنّه حلٌّ للمعادلة $(\mathcal{E})$ وهو يُحقّق وضوحاً $\Phi(t_0) = \Phi'(t_0) = 0$ فهو إذن صفريٌّ، أي $\Phi \equiv 0$. وهذا يعبِّر عن الارتباط الخطي لجملة الحلَّين (φ, ψ) .

V. لنعرّف التابع $t \mapsto W(t) = \varphi'(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi'(t)$ وهو تابع Wronski . نجد بالاشتقاق

$$\begin{aligned}\forall t \in I,\quad W'(t) &= \varphi''(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi''(t)\\ &= -q(t)\big(\varphi(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi(t)\big) = 0\end{aligned}$$

فالتابع W ثابتٌ على I ، ولتكن ω قيمته : $\forall t \in I,\ W(t) = \omega$.

لنفترض على سبيل الجدل أنّ ψ لا ينعدم على المجال $]a,b[$. عندئذ يكون أيضاً $\psi(b) \neq 0$ ، وإلاّ كان $\varphi(b) = \psi(b) = 0$ ونتج من ذلك، بناءً على نتيجة السؤال السابق، أنّه يوجد ثابتٌ α يُحقّق $\psi = \alpha\varphi$ ، وهذا يقتضي أن يكون $\psi(a) = 0$ ، ومن ثَمّ فهو يناقض الفرْض. نستنتج من كون $\psi(t) \neq 0$ مهما كانت t من $[a,b]$ الأمرين الآتيين:

- **أولاً** : $\omega = W(a) = \varphi'(a)\psi(a) \neq 0$.
- **ثانياً** : مهما تكن t من $[a,b]$ فلدينا $\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right)'(t) = \dfrac{W(t)}{\psi^2(t)} = \dfrac{\omega}{\psi^2(t)}$.

إذن التابع $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)}$ تابعٌ مطّردٌ تماماً على $[a,b]$، وينعدم عند كلٍّ من a و b، وهذا خُلفٌ واضح. إذن يوجد عدد c ينتمي إلى المجال $]a,b[$ ويُحقّق $\psi(c) = 0$.

①.VI يمكننا أن نفترض أنّ

$$\forall t \in\ ]a,b[,\quad \varphi(t) > 0$$

وذلك على أن نستبدل التابع $-\varphi$ بالتابع φ إذا دعت الحاجة. وعندئذ يكون لدينا

$$\varphi'(b) = \lim_{t\to b^-} \frac{\varphi(t) - \cancel{\varphi(b)}}{t-b} \leq 0 \quad \text{و} \quad \varphi'(a) = \lim_{t\to a^+} \frac{\varphi(t) - \cancel{\varphi(a)}}{t-a} \geq 0$$

ولكن أن يكون $\varphi'(a) = 0$ أو $\varphi'(b) = 0$ أمران مستثنيان، وإلّا كان φ مُطابقاً للصفر، وهذا مُخالف للفرْض. إذن $\varphi'(a) > 0$ و $\varphi'(b) < 0$.

لنفترض جدلاً أنّ ψ لا ينعدم على المجال $]a,b[$. عندئذ يمكننا أن نفترض، على أن نستبدل التابع $-\psi$ بالتابع ψ إذا دعت الحاجة، أنّ

$$\forall t \in\ ]a,b],\quad \psi(t) > 0 \tag{$\mathcal{H}$}$$

لنعرّف إذن التابع $t \mapsto \Delta(t) = \varphi'(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi'(t)$ فيكون

$$\begin{aligned}\forall t \in I,\quad \Delta'(t) &= \varphi''(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi''(t)\\ &= -q_2(t)\varphi(t)\psi(t) + q_1(t)\varphi(t)\psi(t)\\ &= \big(q_1(t) - q_2(t)\big)\varphi(t)\psi(t) \geq 0\end{aligned}$$

وعليه يكون $\Delta(b) \geq \Delta(a)$، إذن

$$\varphi'(b)\psi(b) \geq \varphi'(a)\psi(a)$$

أو

$$0 > \frac{\varphi'(b)}{\varphi'(a)} \geq \frac{\psi(a)}{\psi(b)}$$

أو $\psi(a)\psi(b) < 0$، وهذا يناقض استمرار ψ على المجال $[a,b]$ والافتراض $(\mathcal{H})$. إذن الافتراض $(\mathcal{H})$ افتراضٌ خاطئ. ولا بُدّ أن ينعدم التابع ψ على المجال $]a,b[$.

②.VI يمكننا أن نفترض أنّ $\beta > \alpha$. لنعرّف التابع $t \mapsto \psi(t) = \sin\big(\Lambda(t-\alpha)\big)$. إنّ ψ حلٌّ للمعادلة التفاضليّة $y'' + \Lambda^2 y = 0$. ولأنّ $\forall t \in I,\ q(t) \leq \Lambda^2$ استنتجنا أنّ ψ ينعدم في المجال $]\alpha,\beta[$. ولكن مجموعة جذور التابع ψ هي $\{\alpha + \pi k/\Lambda : k \in \mathbb{Z}\}$ إذن يجب أن يكون $\beta - \alpha \geq \pi/\Lambda$. وهي النتيجة المطلوبة.

VI.③ لنعرّف التابع $t \mapsto \tilde{\varphi}(t) = \sin\big(\lambda(t-\alpha)\big)$. إنّ $\tilde{\varphi}$ حلٌّ للمعادلة التفاضليّة الخطيّة $y'' + \lambda^2 y = 0$. ولأنّ $\forall t \in I,\ \lambda^2 \le q(t)$، والحلّ $\tilde{\varphi}$ ينعدم عند ℓ و $\ell + \pi/\lambda$، استنتجنا أنّ φ ينعدم في المجال $\big]\ell, \ell+\pi/\lambda\big[$.

تطبيق. **جذور تابع Bessel**

نعرّف في حالة x من $\mathbb{R}$ المقدار $J(x)$ بالعلاقة

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp\big(\mathrm{i}\,x\cos t\big)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\big(x\cos t\big)\,\mathrm{d}\,t$$

إنّ التابع $x \mapsto J(x)$ هو بالتعريف تابع Bessel من المرتبة 0. نلاحظ أنّه، في حالة $x > 0$ لدينا

$$\begin{aligned}
J'(x) &= \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^\pi \cos t \cdot e^{\mathrm{i}\,x\cos t}\,\mathrm{d}\,t\\
J''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t \cdot e^{\mathrm{i}\,x\cos t}\,\mathrm{d}\,t\\
&= -J(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t \cdot e^{\mathrm{i}\,x\cos t}\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
J''(x) + J(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t \cdot e^{\mathrm{i}\,x\cos t}\,\mathrm{d}\,t\\
&= \left[-\sin t \cdot \frac{e^{\mathrm{i}\,x\cos t}}{\mathrm{i}\,x\pi}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{\mathrm{i}}{x\pi}\int_0^\pi \cos t \cdot e^{\mathrm{i}\,x\cos t}\,\mathrm{d}\,t\\
&= -\frac{1}{x}J'(x)
\end{aligned}$$

إذن J هو حلٌّ للمعادلة التفاضليّة

$$xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) = 0$$

لنعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ التابع المساعد $x \mapsto h(x) = \sqrt{x}J(x)$. عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned} h''(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}J(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\big(J'(x) + xJ''(x)\big) \\ &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}J(x) - \sqrt{x}J(x) = -\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)h(x) \end{aligned}$$

أو

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h''(x) + q(x)h(x) = 0$$

حيث $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ q(x) = 1 + \dfrac{1}{4x^2}$.

- لمّا كان $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ q(x) \geq 1$ استنتجنا أنّ كلّ مجال من النمط $\left[\ell, \ell + \pi\right[$ محتوى في $\mathbb{R}_+^*$ يحتوي على جذرٍ للتابع h، ومن ثَمّ على جذرٍ للتابع J .
- ومن جهة أخرى، $\forall x \geq a, \ q(x) \leq 1 + \dfrac{1}{4a^2}$ ، فإذا كان α و β جذرين متتاليين للتابع J في المجال $\left[a, +\infty\right[$ كان $\left|\beta - \alpha\right| \geq \dfrac{\pi}{\sqrt{1 + 1/(4a^2)}}$.
- لتكن إذن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية الجذور الموجبة تماماً للتابع J مرتّبة ترتيباً متزايداً تماماً. لمّا كان كلُّ مجال من النمط $[0, M]$ يحوي عدداً منتهياً من حدود المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بناء على نتيجة السؤال III. استنتجنا أنّ $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ونستنتج من النقطتين السابقتين:

$$\forall \left(n, m\right) \in \mathbb{N}^2, \quad n > m \Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{1 + 1/(4x_m^2)}} \leq x_{n+1} - x_n \leq \pi$$

ومن ثَمّ، أياً كان العدد الطبيعي m كان

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + 1/(4x_m^2)}} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \left(x_{n+1} - x_n\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(x_{n+1} - x_n\right) \leq \pi$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \pi$$

وبالاستفادة من توطئة Cesàro نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = \pi$ ، أو $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.

VII.① نفترض أنّ φ حلٌّ أعظمي غير مُطابق للصفر للمعادلة $(\mathcal{E})$، ولنفترض أنّه يقبل جذرين مختلفين. إذن ليكن a و b جذرين متتاليين $(a < b)$ للتابع φ، ولنبرهن أنّ للتابع φ جذراً ثالثاً. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، تُحقّق $n > \frac{b-a}{\varpi}$، ولنعرّف $\psi(t) = \varphi(t + n\varpi)$. إنّ ψ حلٌّ أعظمي للمعادلة $(\mathcal{E})$، واستناداً إلى نتيجة الطلب V يوجد جذرٌ α للتابع ψ في المجال $]a,b[$، أي ينعدم φ عند $c = \alpha + n\varpi$، حيث

$$c = \alpha + n\varpi \geq a + n\varpi > a + b - a = b$$

ونستنتج من هذه النتيجة أنّ مجموعة جذور الحلّ φ غير منتهية. وهي من ثَمّ ليست محدودة من الأعلى.

وإذا كان Θ حلّاً أعظمياً غير معدوم آخر للمعادلة $(\mathcal{E})$ لوجدنا بين كلِّ جذرين متتاليين للحل φ جذراً للتابع Θ، وينتج من ذلك أنّ للحلِّ Θ عدداً لانهائيّاً من الجذور. وبذا نكون قد أثبتنا صحةالخاصة المطلوبة.

VII.② لنفترض أنّ $q \geq 0$. ولنفترض جدلاً أنّ φ حلٌّ أعظمي غير مُطابق للصفر للمعادلة $(\mathcal{E})$، ولنفترض أنّ له جذرين متتاليين a و b مع $(a < b)$. عندئذ يمكننا أن نفترض أنّ φ موجب تماماً على المجال $]a,b[$، على أن نستبدل $-\varphi$ بالتابع φ إذا دعت الحاجة.

عندئذ يكون لدينا

$$\varphi'(a) = \lim_{t \to a^+} \frac{\varphi(t) - \cancel{\varphi(a)}}{t - a} \geq 0$$

ولمّا كان φ لا يُطابق الصفر استنتجنا أنّ $\varphi'(a) \neq 0$ إذن $\varphi'(a) > 0$.

ويكون لدينا من جهة ثانية

$$\forall t \in \;]a,b[, \quad \varphi''(t) = -q(t)\varphi(t) \geq 0$$

فالتابع φ' متزايدٌ على المجال $]a,b[$ ومن ثَمّ $\varphi'(b) > 0$. ولكن

$$\varphi'(b) = \lim_{t \to b^-} \frac{\varphi(t) - \cancel{\varphi(b)}}{t - b} \leq 0$$

وهذا التناقض يبرهن أنّه لا يمكن للتابع φ أن يقبل جذرين مختلفين، ونحن في الحالة $(\mathcal{A})$.

③.VII لنفترض أنّ $q \geq 0$ وأنّ $q \neq 0$، إذن يوجد a في I يُحقّق $q(a) > 0$. ليكن φ الحلُّ الأعظمي للمعادلة $(\mathcal{E})$ الذي يُحقّق

$$\varphi(a) = 1 \quad \text{و} \quad \varphi'(a) = 0$$

عندئذ يكون $\varphi''(a) = -q(a) < 0$، فالتابع φ' متناقص تماماً في جوار a ومن ثَمّ نجد قيمتين a_1 و a_2 تُحقّقان

$$a_1 < a < a_2 \quad \text{و} \quad \varphi'(a_1) > 0 > \varphi'(a_2)$$

إذا افترضنا أنّ φ لا ينعدم على المجال $[a, +\infty[$، وجب أن يكون موجباً تماماً على هذا المجال، ومن ثَمّ يكون $\varphi'' = -q\varphi \leq 0$ على $[a, +\infty[$ ونتج من ذلك أنّ φ' متناقصٌ على $[a, +\infty[$. ولكن في حالة $x \geq a_2$ لدينا

$$\begin{aligned} 0 < \varphi(x) &= \varphi(a_2) + \int_{a_2}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &\leq \varphi(a_2) + \varphi'(a_2)(x - a_2) \end{aligned}$$

وهذا يقودنا إلى تناقض إذا جعلنا x تسعى إلى $+\infty$. إذن لا بُدّ أن ينعدم φ في نقطة من المجال $]a, +\infty[$.

وبأسلوب مماثل، إذا افترضنا أنّ φ لا ينعدم على المجال $]-\infty, a]$، وجب أن يكون موجباً تماماً على هذا المجال، ومن ثَمّ يكون $\varphi'' = -q\varphi \leq 0$ على $]-\infty, a]$، وينتج من ذلك أنّ φ' متناقصٌ على $]-\infty, a]$. ولكن في حالة $x \leq a_1$ لدينا

$$\begin{aligned} 0 < \varphi(x) &= \varphi(a_1) + \int_{a_1}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &\leq \varphi(a_1) + \varphi'(a_1)(x - a_1) \end{aligned}$$

وهذا يقودنا إلى تناقض إذا جعلنا x تسعى إلى $-\infty$. إذن لا بُدّ أن ينعدم φ في المجال في نقطة من المجال $]-\infty, a]$. إذن للتابع φ جذران مختلفان، ونحن إذن في الحالة $(\mathcal{B})$. ■

التمرين 8. ليكن I مجالاً مفتوحاً غير خال، وليكن $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ تابعاً مستمرّاً، نفترض أنّه يُحقِّق الشرط الآتي:

> أيّاً كان المجال المغلق والمحدود K المحتوى في I فهناك عددان حقيقيّان موجبان a_K و b_K بحيث تتحقّق المتراجحة:
> $$\forall (t,y) \in K \times \mathbb{R}^m, \quad \langle f(t,y), y \rangle \le a_K \|y\|_2^2 + b_K$$
> حيث $\langle \cdot,\cdot \rangle$ و $\|\cdot\|_2$ هما الجداء السلمّي والنظيم الإقليديين المألوفين على $\mathbb{R}^m$.

نريد أن نبرهن أنّه إذا كان (J,φ) حلّاً أعظمياً للمعادلة التفاضليّة

$$(\mathcal{E}) : \quad y' = f(t,y)$$

فإنّ $\sup J = \sup I$. لهذا سنتبع طريقة نقض الفرْض. لنضع تعريفاً $t_1 = \sup J$ ولنفترض جدلاً أنّ $t_1 < \sup I$ إذن t_1 ينتمي إلى I. ولتكن t_0 من J ثُمَّ لنعرّف $y_0 = \varphi(t_0)$.

1. ليكن التابع $R : [t_0,t_1[\to \mathbb{R}_+,\ R(t) = \|\varphi(t)\|_2^2$، أثبت وجود عددين (α,β) من $\mathbb{R}_+^{*2}$، يُحقّقان: $\forall t \in [t_0,t_1[, \quad R'(t) \le \alpha R(t) + \beta$.
2. استنتج أنّ التابع R محدود على $[t_0,t_1[$، ثُمَّ أثبت أنّ الحلّ (J,φ) ليس حلّاً أعظمياً.

الحل

1. ليكن $K = [t_0,t_1]$، ولنعرّف $\alpha = 2a_K$ و $\beta = 2b_K$. عندئذ، أيّاً كانت t من K كان

$$\begin{aligned} R'(t) &= 2\langle \varphi'(t),\varphi(t) \rangle = 2\langle f\big(t,\varphi(t)\big),\varphi(t) \rangle \\ &\le \alpha \|\varphi(t)\|_2^2 + \beta = \alpha R(t) + \beta \end{aligned}$$

2. نستنتج، أيّاً كانت t من K أنّ $(R(t)e^{-\alpha t})' \le \beta e^{-\alpha t}$ ومن ثَمَّ أياً كان t من $[t_0,t_1[$

$$R(t)e^{-\alpha t} - \|y_0\|_2^2 e^{-\alpha t_0} \le \int_{t_0}^{t} \beta e^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s = \frac{\beta}{\alpha}(e^{-\alpha t_0} - e^{-\alpha t})$$

أو

$$R(t) \leq \|y_0\|_2^2 e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)} - 1)$$

وعليه يكون $\forall t \in [t_0, t_1[,\ R(t) \leq \Lambda^2$ ، حيث عرّفنا

$$\Lambda^2 = \|y_0\|_2^2 e^{\alpha(t_1-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t_1-t_0)} - 1)$$

لنتأمّل المجموعة المتراصّة $\mathcal{K} = [t_0, t_1] \times \overline{B}(0, \Lambda)$. إنّ التابع f مستمرٌّ على المجموعة المتراصّة $\mathcal{K}$ فهو محدود عليها، لنعرّف إذن $M = \sup_{\mathcal{K}} \|f\|$ فيكون لدينا

$$\forall t \in [t_0, t_1[,\quad \|\varphi'(t)\|_2 = \|f(t, \varphi(t))\|_2 \leq M$$

ومن ثَمّ

$$\forall (t,s) \in [t_0, t_1[^2,\quad \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_2 \leq M|t-s|$$

وهذا، يُثبت وجود النهاية $\lim_{t \to t_1} \varphi(t) = A$ ، ومن ثَمّ لا يكون الحل (J, φ) أعظمياً. يثبت هذا التناقض أنّ $\sup J = \sup I$ ، هي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 9. ليكن λ عدداً حقيقياً، ولنتأمّل المعادلة التفاضليّة

$$(\mathcal{E}):\quad \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = \lambda + \frac{y^2}{1+t^2}$$

I. ادرس مسألة وجود ووحدانيّة حلول المعادلة التفاضليّة $(\mathcal{E})$.

II. ليكن (J, φ_λ) الحل الأعظمي للمعادلة $(\mathcal{E})$، الذي يُحقّق الشرط $\varphi_\lambda(0) = 0$ ، ولنضع $\sup J = d_\lambda$.

① نفترض أنّ $d_\lambda < +\infty$ ، أثبت أنّ $\lim_{t \to d_\lambda} \varphi_\lambda(t) = +\infty$. تمكن الاستفادة من التابع $g(t) = \varphi_\lambda(t) - \lambda t$.

② أثبت صحة المتراجحة : $\forall t \in [0, d_\lambda[,\quad \varphi_\lambda(t) \geq \lambda t$.

III. ليكن $h : [a, b[\to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً. أثبت أنّ التابع

$$h^* : [a, b[\to \mathbb{R},\quad h^*(t) = \max_{a \leq s \leq t} h(s)$$

مستمرٌّ أيضاً.

IV. نفترض أنّ $\lambda \geq \frac{1}{4}$، ونعرّف التابع

$$M : [0, d_\lambda[\to \mathbb{R}, \quad M(t) = \begin{cases} \sup\limits_{0<s\leq t} \dfrac{\varphi_\lambda(s)}{s} & : \quad t \in]0, d_\lambda[\\ \lambda & : \quad t = 0 \end{cases}$$

① أثبت أنّ M تابع مستمرٌّ ويُحقّق المتراجحة

$$\forall t \in [0, d_\lambda[, \; M(t) \leq \lambda + M^2(t)$$

② استنتج أنّ

$$\forall t \in [0, d_\lambda[, \quad \varphi_\lambda(t) \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} \cdot t$$

③ أثبت من ثَمّ أنّ $d_\lambda = +\infty$.

V. نفترض أنّ $\lambda < \frac{1}{4}$، ونعرّف التابع

$$\psi_\lambda : [0, d_\lambda[\to \mathbb{R}, \; \psi_\lambda(t) = \frac{\varphi_\lambda(t)}{\sqrt{1 + t^2}}$$

① أثبت أنّه مهما تكن t من المجال $[0, d_\lambda[$ يكن

$$\psi_\lambda^2(t) - \psi_\lambda(t) + \lambda \leq \psi_\lambda'(t) \cdot \sqrt{1 + t^2} \leq \psi_\lambda^2(t) + \lambda$$

② استنتج أنّ $d_\lambda < +\infty$ وأنّ

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \leq d_\lambda < \operatorname{sh} \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda - 1}}$$

الحل

I. التابع $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (t, y) \mapsto \lambda + \dfrac{y^2}{1 + t^2}$ تابعٌ مستمرٌّ وقابلٌ للاشتقاق بالنسبة إلى y ومشتقّه مستمر. إذن، استناداً إلى مبرهنة كوشي–لِبشتز، نستنتج أنّه مهما تكن (t_0, y_0) من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ يوجد حلٌّ أعظمي وحيد لمسألة كوشي $\mathbb{P}_{(t_0, y_0)}$.

II.① لمّا كان $g(t) = \varphi_\lambda(t) - \lambda t$ استنتجنا :

$$\forall t \in [0, d_\lambda[, \quad g'(t) = \frac{\varphi^2(t)}{1 + t^2} \geq 0$$

إذن g متزايدٌ على المجال $[0,d_\lambda[$، وهذا يثبت وجود عنصر α في المجموعة $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ يُحقّق $\lim_{t\to d_\lambda} g(t)=\alpha$، وهذا بدوره يثبت وجود النهاية $\lim_{t\to d_\lambda}\varphi_\lambda(t)=\alpha+\lambda d_\lambda$ في $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. فإذا كانت هذه النهاية منتهية ناقض ذلك كون الحلّ φ_λ حلّاً أعظميّاً. إذن في حالة $d_\lambda<+\infty$ يكون $\lim_{t\to d_\lambda}\varphi_\lambda(t)=+\infty$.

II.② لمّا كان g متزايداً على $[0,d_\lambda[$ استنتجنا أنّ $\forall t\in[0,d_\lambda[,\ g(t)\geq g(0)=0$، ومن ثمّ $\forall t\in[0,d_\lambda[,\ \varphi_\lambda(t)\geq\lambda t$.

III. التابع h^* تابعٌ متزايدٌ وضوحاً. لتكن t_0 من $]a,b[$ ولنثبت استمرار h^* عند t_0. لتكن $0<\varepsilon$ عندئذ، بالاستفادة من استمرار h عند t_0، نجد η في المجال $]0,b-t_0[$ تُحقّق الاقتضاء:

$$t\in\left]t_0-\eta,t_0+\eta\right[\Rightarrow\left|h(t)-h(t_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

لنتأمّل t من المجال $]t_0-\eta,t_0+\eta[$. عندئذ

- في حالة $t<t_0$ لدينا $h^*(t_0)=\max(h^*(t),\max_{t\leq s\leq t_0}h(s))$ فإذا لاحظنا أنّ

$$\begin{aligned}t\leq s\leq t_0\Rightarrow h(s)&=h(t)+\big(h(s)-h(t_0)\big)-\big(h(t)-h(t_0)\big)\\&\leq h(t)+2\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

استنتجنا

$$h^*(t)\leq h^*(t_0)\leq h^*(t)+\varepsilon$$

- وفي حالة $t\geq t_0$ لدينا $h^*(t)=\max(h^*(t_0),\max_{t_0\leq s\leq t}h(s))$ فإذا لاحظنا أنّ

$$\begin{aligned}t_0\leq s\leq t\Rightarrow h(s)&=h(t_0)+\big(h(s)-h(t_0)\big)\\&\leq h(t_0)+\frac{\varepsilon}{2}<h^*(t_0)+\varepsilon\end{aligned}$$

استنتجنا

$$h^*(t_0)\leq h^*(t)\leq h^*(t_0)+\varepsilon$$

إذن في حالة t من المجال $]t_0-\eta,t_0+\eta[$ تتحقّق المتراجحة $|h^*(t_0)-h^*(t)|\leq\varepsilon$. وهذا يثبت استمرار h^* على $]a,b[$.

IV.① نطبّق الخاصّة السابقة على التابع :

$$h:[0,d_\lambda[\to\mathbb{R},\ h(t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_\lambda(t)}{t} & : \quad t>0\\ \lambda & : \quad t=0\end{cases}$$

فنستنتج أنّ التابع $M=h^*$ مستمرٌّ على المجال $[0,d_\lambda[$.

لتكن t من $[0,d_\lambda[$، توجد قيمة $\tilde{t}$ من المجال $[0,t]$ تحقّق $M(t)=\dfrac{\varphi_\lambda(\tilde{t})}{\tilde{t}}$ ، واستناداً إلى مبرهنة التزايدات المحدودة، توجد قيمة $\hat{t}$ من المجال $[0,\tilde{t}]$ تُحقّق

$$\begin{aligned}M(t)&=\frac{\varphi_\lambda(\tilde{t})}{\tilde{t}}=\varphi_\lambda'(\hat{t})\\&=\lambda+\frac{\varphi_\lambda^2(\hat{t})}{1+\hat{t}^2}=\lambda+\frac{\hat{t}^2}{1+\hat{t}^2}\left(\frac{\varphi_\lambda(\hat{t})}{\hat{t}}\right)^2\\&\leq\lambda+\frac{\hat{t}^2}{1+\hat{t}^2}M^2(t)\leq\lambda+M^2(t)\end{aligned}$$

أو

$$\forall t\in[0,d_\lambda[,\quad \left(M(t)-\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{1}{4}-\lambda$$

IV.② إذن يأخذ التابع المستمرّ M قيمه في المجموعة

$$\left]-\infty,\tfrac{1}{2}-\sqrt{\tfrac{1}{4}-\lambda}\right]\cup\left[\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-\lambda},+\infty\right[$$

ولأنّ $M(0)=\lambda\leq\dfrac{1}{4}$ استنتجنا أنّ $M(0)$ لا ينتمي إلى المجال $\left[\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-\lambda},+\infty\right[$، وبسبب مبرهنة القيمة الوسطى، نستنتج أنّ

$$\forall t\in[0,d_\lambda[,\quad M(t)\in\left]-\infty,\tfrac{1}{2}-\sqrt{\tfrac{1}{4}-\lambda}\right]$$

وهذا يبرهن صحة المتراجحة

$$\forall t\in[0,d_\lambda[,\quad \varphi_\lambda(t)\leq\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}\right)t$$

IV.③ لو افترضنا أنّ $d_\lambda<+\infty$ استنتجنا مما سبق أنّ φ_λ يبقى محدوداً على المجال $[0,d_\lambda[$، وهذا يناقض نتيجة السؤال II.① ، إذن لا بُدّ أن يكون $d_\lambda=+\infty$.

①.V لمّا كان $\varphi_\lambda(t)=\sqrt{1+t^2}\psi_\lambda(t)$ على $[0,d_\lambda[$، استنتجنا أنّ

$$\lambda+\psi_\lambda^2(t)=\varphi_\lambda'(t)=\psi_\lambda'(t)\sqrt{1+t^2}+\psi_\lambda(t)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

فإذا لاحظنا أنّ φ_λ موجبٌ على المجال $[0,d_\lambda[$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall t\in[0,d_\lambda[,\quad \lambda+\psi_\lambda^2(t)-\psi_\lambda(t)\le\psi_\lambda'(t)\sqrt{1+t^2}\le\lambda+\psi_\lambda^2(t)$$

②.V نستنتج مما سبق أنّ

$$\forall t\in[0,d_\lambda[,\quad \frac{\psi_\lambda'(t)}{\lambda+\psi_\lambda^2(t)}\le\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\le\frac{\psi_\lambda'(t)}{\lambda+\psi_\lambda^2(t)-\psi_\lambda(t)}$$

ومنه، مهما كان t من $[0,d_\lambda[$ كان

$$\int_0^{\psi_\lambda(t)}\frac{\mathrm{d}\,u}{\lambda+u^2}\le\int_0^{t}\frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{1+u^2}}\le\int_0^{\psi_\lambda(t)}\frac{\mathrm{d}\,u}{\lambda+u^2-u}\le\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,u}{\lambda+u^2-u}$$

ولكن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,u}{\lambda+u^2-u}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,u}{\lambda-\frac14+(u-\frac12)^2}=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda-\frac14}}$$

إذن

$$(*)\qquad \forall t\in[0,d_\lambda[,\quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{\psi_\lambda(t)}{\sqrt{\lambda}}\le\operatorname{arg\,sh}t\le\frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda-1}}$$

نستنتج من المتراجحة اليمنى ، بجعل t تسعى إلى d_λ، أنّ $d_\lambda<+\infty$ وأنّ

$$d_\lambda\le\operatorname{sh}\frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda-1}}$$

ومن جهة أخرى، لمّا كان $d_\lambda<+\infty$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{t\to d_\lambda}\varphi_\lambda(t)=+\infty$، ومن ثَمّ $\lim\limits_{t\to d_\lambda}\psi_\lambda(t)=+\infty$ ، فإذا جعلنا t تسعى إلى d_λ في المتراجحة اليسرى في $(*)$ وجدنا

$$\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\le d_\lambda$$

فنكون بذلك قد أثبتنا صحة المتراجحة المطلوبة. ■

دليل مفردات الجزء الثالث

العدد هو رقم صفحة يظهر فيها المفهوم المشار إليه ظهوراً معنوياً

احتلَّ الدكتور عمران قوبا المركز الثاني في مسابقة انتقاء أساتذة التعليم العالي على مستوى الجمهورية الفرنسية "أغرغاسيون" في عام 1985، وحصل على شهادة الدكتوراه في الرياضيات البحتة في اختصاص التحليل التابعي من جامعة بيير وماري كوري في باريس عام 1990.

يدرّس الدكتور قوبا الرياضيات في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا منذ عام 1990. وقد وضع في هذه السلسلة من الكتب العلميّة أغلب الموضوعات التي درّسها في المعهد العالي في مجالات الجبر العام، والجبر الخطّي، والتحليل، والمعادلات التفاضلية، والتحليل العقدي، والتحويلات التكامليَّة وغيرها، وقد أغنى السلسلة بالعديد من الأمثلة والتطبيقات والمسائل والتمرينات.

تمثّل هذه السلسلة أداة مهمّة لكلِّ الراغبين في دراسة الرياضيّات بصفتها علماً وفنّاً قائمَيْن بذاتهما، أو لأولئك الراغبين في استعمال الرياضيّات بصفتها أداة مهمّة ومفيدة في جميع العلوم الحديثة.

في هذا الجزء الثالث من سلسلة التحليل الرياضي، يتابع القارئ ما بدأه في الجزأين الأوّل والثاني فيدرس الفضاءات الشعاعية المنظمة، والتوابع لعدّة متحولات والمعادلات التفاضلية العاديّة.

ISBN 978-9933-9-2610-6
9 789933 926106

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

Higher Institute for Applied Sciences and Technology

www.hiast.edu.sy