

MPSI
PCSI

1^{re} ANNÉE

Conforme
aux
programmes

ANALYSE

COURS
EXERCICES CORRIGÉS

2^e
édition

GILLES COSTANTINI



de boeck
supérieur

ANALYSE

Collection Prépas Scientifiques

Dirigée par Olivier Rodot

ANTONINI C., Algèbre. 2^e année

BASBOIS N. et ABBRUGIATI P., Algèbre. 1^{re} année, 2^e édition

COSTANTINI G., Analyse. 1^{re} année, 2^e édition

DAO DUC K. et DELAUNAY D., Probabilités

JAN C., Mathématiques. Une approche imagée et synthétique. 1^{re} année, 2^e éd.

RODOT O., Analyse MP-MP*. 2^e année. Cours et exercices corrigés, 2^e édition

MPSI / PCSI

1^{re} ANNÉE

Conforme
aux programmes

ANALYSE

COURS
EXERCICES CORRIGÉS

2^e
édition

GILLES COSTANTINI



de boeck
supérieur

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

© De Boeck Supérieur s.a., 2016
Rue du Bosquet, 7 B-1348 Louvain-la-Neuve

2^e édition

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale, Paris : juillet 2016

Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2016/13647/127 ISBN : 978-2-8073-0639-4

* Remerciements *

Ces quelques lignes pour adresser mes chaleureux remerciements aux différents membres de ma famille qui m'ont toujours patiemment soutenu ; à mon premier professeur de Mathématiques, en classe de sixième, Jean-Yves Bindi qui, par ses exigences m'a très tôt initié aux rigueurs de la discipline, puis à mes professeurs de l'université de Strasbourg (Michèle Audin notamment qui m'a conduit à apprécier l'algèbre et la géométrie). Un grand merci à mes collègues relecteurs, mes nombreux amis avec un clin d'œil particulier à *Bolduc* (il se reconnaîtra) qui n'a jamais douté de moi et a toujours été présent lorsqu'il le fallait.

Dans la même veine, j'adresse mes remerciements à Olivier Rodot pour ses relectures minutieuses et nombreuses remarques qui m'ont aidées à affiner les références historiques ainsi qu'à Fabrice Chrétien des éditions De Boeck Supérieur pour son pilotage logistique, son pragmatisme et sa clairvoyance.

J'adresse également ma plus vive gratitude à mes différents coordinateurs institutionnels qui, malgré les moments où la charge de travail était intense, se sont toujours montrés compréhensifs, encourageants et reconnaissants.

Et enfin, je ne peux oublier mes élèves qui, par leur intérêt et leur étonnement manifesté à chaque fois que je leur propose une escapade dans l'univers des mathématiques (comme par exemple l'équation polynomiale de degré 45 résolue par Viète, voir page 166), continuent de me conforter dans l'idée que le métier d'enseignant est le plus beau du monde.

Gilles Costantini

AVANT-PROPOS

Pour qui ? Pour quoi ?

Ce livre, d'initiation à l'analyse mathématique, est conçu en fonction des nouveaux programmes des classes préparatoires. Il est donc avant tout destiné à ce public. Mais, de nos jours, qu'est-ce qu'un étudiant de classe préparatoire ? Quels sont ses objectifs ? Avec la multiplication des filières, le public étudiant s'est largement diversifié. Les objectifs aussi. Chez certains, on peut noter un objectif désintéressé d'apprendre juste par plaisir et par goût afin de satisfaire une soif et une curiosité intellectuelle ; chez d'autres, un objectif plus utilitaire qui est la réussite à un concours ou à un examen. Ici, tout a été mis en œuvre pour s'ouvrir et s'adapter à cette diversité.

Ainsi, chaque notion, chaque propriété est étudiée très scrupuleusement ; de nombreux exemples, contre-exemples, schémas et remarques sont donnés. Les démonstrations, des plus simples aux plus ardues, sont toujours détaillées avec le même souci : les rendre accessibles et compréhensibles au plus grand nombre. Chaque chapitre est également accompagné de questions de cours, de QCM et d'exercices systématiquement corrigés.

Tout ceci permet notamment aux élèves fraîchement issus du lycée de consolider leurs connaissances tout en les préparant au mieux aux nouveautés, afin de gommer le fameux « gouffre » entre la terminale et le supérieur. Les étudiants plus ambitieux trouveront également leur bonheur grâce aux nombreux prolongements et compléments proposés. Les parties spécifiques à la filière **MPSI** sont clairement indiquées, les **compléments** également (théorèmes sur fonds roses). Cette polyvalence permettra également aux étudiants de seconde ou troisième année de pouvoir approfondir encore certaines notions. Cet ouvrage intéressera aussi les candidats aux divers concours comme le Capes ou l'Agrégation ainsi que les étudiants des écoles d'ingénieurs ou en IUT.

Enfin, de nombreuses notes historiques sont présentées pour étayer le propos et rompre avec une tradition un peu austère du discours purement mathématique. Les théorèmes les plus importants sont datés et sourcés (lorsque c'est possible !). Ces notes ne sauraient se substituer à un ouvrage de référence en histoire des mathématiques et là, tous les détails et compléments ne sont pas forcément donnés, le but étant juste de donner envie aux étudiants d'aller parcourir les écrits d'époque, tels ceux de Viète, de Wallis, de Lagrange, de Cauchy, de Bolzano, etc. La lecture et l'analyse de ces écrits ne pourra que parfaire leur degré de compréhension des notions mathématiques ici étudiées.

Précisons maintenant, plus en détail, les choix pédagogiques qui sont ceux de ce livre...

Prendre appui, réinvestir, anticiper et composer pour progresser.

On imagine souvent que les ouvrages mathématiques sont élaborés sur la base de progressions linéaires dans lesquelles les notions s'empilent et s'articulent progressivement les unes après les autres, générant ainsi de nombreuses références à des passages antérieurs. Une telle construction pourrait être un objectif louable mais ce n'est pas le choix qui est fait ici car cela aurait pour conséquence l'impossibilité de donner des applications riches et intéressantes dans les premiers chapitres faute de matériel suffisant. Par exemple, les notions de dérivation et d'intégration sont étudiées dans les chapitres 5 et 7 respectivement mais il serait bien dommage de s'en priver dans des situations des chapitres précédents. C'est le cas, parmi tant d'autres, de la preuve de la divergence vers $+\infty$ de la série harmonique (voir p. 263) qui utilise commodément une comparaison à une intégrale ; pourquoi faudrait-il se priver de cet outil dès le chapitre 3 ? Le lecteur ne sera donc pas surpris de voir régulièrement des références à des notions ultérieures ; ceci a le triple avantage de pouvoir présenter à l'instant t des exemples mathématiquement pertinents plutôt que basiques par manque d'éléments abordés, investir ou réinvestir un maximum de notions et préparer le terrain pour aborder plus en profondeur les chapitres ultérieurs (phénomène d'anticipation des notions). Autre exemple : si on prend – au hasard – la fonction sinus ou encore la fonction exponentielle, on la verra apparaître à tout moment : elle sera souvent considérée comme une fonction familière et connue mais certaines de ses propriétés fondamentales (comme sa continuité ou sa dérivabilité) ne seront détaillées qu'au moment venu. On ne peut pas apprendre les mathématiques en commençant par étudier tous les fondements et juste les fondements puis en terminant par les mathématiques avancées et appliquées. Non, l'idéal est de procéder par strates successives, centrées « vers le milieu » puis affiner ses connaissances en approfondissant dans deux directions : du côté des fondements et du côté de l'élaboration. D'une part, on prend ainsi appui sur ce qui est le plus familier à l'étudiant novice et d'autre part, historiquement, c'est ainsi que les différentes théories mathématiques se sont développées.

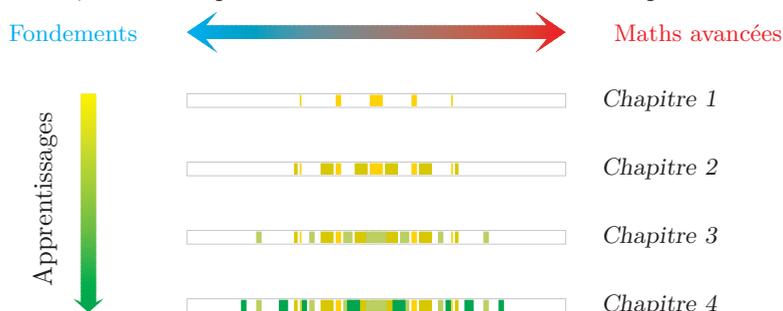


FIGURE 1 – Une progression mathématique, par **strates**.

Table des matières

1 Basic calculus...	11
1.1 Théorie des ensembles	11
1.1.1 Généralités	11
1.1.2 Opérations sur les ensembles	14
1.2 Rudiments de logique	16
1.3 Fonctions et applications	23
1.4 Quantificateurs	28
1.5 Différents types de raisonnements logiques	29
1.6 Un cas particulier de fonction : les suites	32
1.7 Propriétés de \mathbb{N} (et \mathbb{Z}). Récurrence	35
1.8 Injection, surjection, bijection	43
1.9 Cardinaux	48
1.9.1 Vers la notion de cardinal - Compléments	48
1.9.2 Définition du cardinal et applications	54
1.10 Calculs élémentaires	60
1.10.1 Sommations	60
1.10.2 Formule du binôme	64
1.11 Rudiments sur les suites numériques	73
1.11.1 Suites particulières	73
1.11.2 Suites convergentes, suites divergentes	83
1.12 Rudiments sur les fonctions	90
1.12.1 Parité d'une fonction	90
1.12.2 Fonction périodique	92
1.12.3 Fonctions exponentielle et logarithme	92

1.12.4	Fonction continue	95
1.12.5	Limite (finie ou infinie) d'une fonction	102
1.13	Rudiments d'arithmétique	107
1.13.1	Nombres premiers	107
1.14	Questions sur le cours	112
1.14.1	Énoncés	112
1.14.2	Corrigés	114
1.15	Exercices rédigés	122
2	Corps des réels	145
2.1	Introduction	145
2.2	Structure algébrique de \mathbb{R}	149
2.3	Relation d'ordre sur \mathbb{R} - MPSI	153
2.3.1	Généralités sur les relations binaires	153
2.3.2	Une relation binaire particulière : la relation d'équivalence	155
2.3.3	Une autre relation binaire particulière : la relation d'ordre	158
2.4	Valeur absolue	164
2.5	Majorant, minorant, borne supérieure	173
2.5.1	Majorant et minorant	173
2.5.2	Borne supérieure	175
2.6	Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$	183
2.7	Nombre π (épisode 1) - Compléments	185
2.7.1	Finitude du demi-périmètre	187
2.7.2	Invariance du nombre $p(r)$ pour tous les cercles	193
2.8	Intervalles de \mathbb{R}	195
2.9	Propriété d'Archimède	201
2.10	Partie entière d'un réel	204
2.11	Densité de \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R}	208
2.12	Questions sur le cours	214
2.12.1	Énoncés	214
2.12.2	Corrigés	216
2.13	Exercices rédigés	221
3	Suites et séries de nombres réels	247
3.1	Introduction	247
3.2	Convergence et divergence	248
3.3	Suites de Cauchy - Compléments	254

3.4	Opérations algébriques sur les suites convergentes	258
3.5	Opérations algébriques sur les suites divergentes	260
3.6	Théorèmes de comparaison et d'encadrement	261
3.7	Théorème de la limite monotone	264
3.8	Suites adjacentes et segments emboîtés	269
3.9	Nombre π (épisode 2) - Compléments	274
3.9.1	Première idée donnant l'égalité $\mathcal{A} = \pi$ mais manquant de rigueur .	274
3.9.2	Seconde idée incorrecte car usant de façon détournée le nombre π .	275
3.9.3	Une démarche plus rigoureuse	278
3.10	Suites extraites. Th. de Bolzano-Weierstrass - MPSI	285
3.11	Relations de comparaison (pour les suites)	293
3.11.1	Relation de domination	295
3.11.2	Relation de négligeabilité	302
3.11.3	Suites équivalentes	309
3.12	Suites à valeurs complexes	316
3.13	Séries numériques	322
3.13.1	Généralités	322
3.13.2	Cas des séries à termes positifs	325
3.13.3	Convergence absolue	330
3.14	Questions sur le cours	333
3.14.1	Énoncés	333
3.14.2	Corrigés	335
3.15	Exercices rédigés	339
4	Continuité des fonctions	369
4.1	Introduction	369
4.2	Notions élémentaires de topologie - Compléments	370
4.3	Continuité - Lien avec les limites finies	387
4.4	Opérations sur les fonctions continues	394
4.5	Prolongement par continuité	399
4.6	Continuité par morceaux	399
4.7	Théorèmes liés à la continuité et la relation d'ordre	402
4.7.1	Théorème des valeurs intermédiaires	402
4.7.2	Image d'un segment par une application continue	411
4.7.3	Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone	414
4.7.4	Continuité uniforme. Théorème de Heine - MPSI	416

4.7.5	Théorème du point fixe - Compléments	425
4.8	Questions sur le cours	429
4.8.1	Énoncés	429
4.8.2	Corrigés	430
4.9	Exercices rédigés	433
5	Dérivabilité des fonctions	443
5.1	Introduction	443
5.2	Dérivabilité en un point	444
5.3	Fonction dérivée	453
5.4	Opérations sur les dérivées	456
5.5	Étude globale des fonctions réelles	463
5.5.1	Extremum d'une fonction	463
5.5.2	Théorème de Rolle	466
5.5.3	Théorème des accroissements finis	470
5.5.4	Applications du théorème des accroissements finis	473
5.6	Dérivées successives	480
5.7	Formules de Taylor	485
5.8	Développements limités	497
5.8.1	Généralités	497
5.8.2	Opérations sur les développements limités	504
5.8.3	Applications des développements limités	518
5.8.4	Formulaires sur les développements limités	524
5.9	Fonctions convexes - Compléments	526
5.10	Formulaire sur les dérivées	542
5.11	Questions sur le cours	543
5.11.1	Énoncés	543
5.11.2	Corrigés	545
5.12	Exercices rédigés	553
6	Fonctions usuelles	581
6.1	Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances	581
6.1.1	Une construction de la fonction exponentielle de base e	581
6.1.2	Logarithme népérien	587
6.1.3	Autres fonctions exponentielles et logarithmes	590
6.2	Fonctions trigonométriques circulaires	593
6.3	Fonction exponentielle complexe	602

6.4	Fonctions trigonométriques réciproques	608
6.4.1	Fonction arcsinus	608
6.4.2	Fonction arccosinus	610
6.4.3	Fonction arctangente	612
6.5	Fonctions hyperboliques - MPSI	616
6.5.1	Introduction	616
6.5.2	Sinus et cosinus hyperbolique	620
6.6	Fonctions hyperboliques réciproques - Compléments	625
6.6.1	Fonction argument sinus hyperbolique	625
6.6.2	Fonction argument cosinus hyperbolique	628
6.6.3	Fonction argument tangente hyperbolique	629
6.6.4	Expressions explicites	631
6.7	Formulaires de trigonométrie	634
6.8	Fonctions spéciales - Compléments	636
6.8.1	Fonction de Lambert	636
6.9	Questions sur le cours	640
6.9.1	Énoncés	640
6.9.2	Corrigés	642
6.10	Exercices rédigés	647
7	Intégration	661
7.1	Introduction	661
7.2	Intégration des fonctions en escalier	667
7.3	Fonctions « intégrables » - Compléments	671
7.4	Propriétés des intégrales	680
7.5	Primitives	687
7.6	Théorème fondamental de l'analyse	689
7.7	Prolongement de l'intégrale à \mathbb{C}	692
7.8	Intégration par parties	692
7.9	Changement de variable	695
7.10	Intégrales et fonctions régulières	698
7.11	Formules de la moyenne - Compléments	700
7.12	Formule de Taylor avec reste intégral	706
7.13	Formulaire sur les primitives	708
7.14	Quelques techniques de calcul d'intégrales	709
7.14.1	Changement de variable linéaire	709

7.14.2	Intégration par parties avec une fonction $v' = 1$	710
7.14.3	Utilisation d'une forme canonique	710
7.14.4	Décomposition d'une fraction rationnelle	711
7.14.5	Utilisation de la trigonométrie	712
7.15	Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale	716
7.15.1	Méthode des « rectangles » - Sommes de Riemann	716
7.15.2	Méthode des trapèzes	719
7.16	Questions sur le cours	723
7.16.1	Énoncés	723
7.16.2	Corrigés	725
7.17	Exercices rédigés	730
8	Équations différentielles	761
8.1	Introduction	761
8.2	Équations différentielles du premier ordre	764
8.2.1	Équation différentielle du premier ordre normalisée	764
8.2.2	Équation différentielle du premier ordre non normalisée	772
8.3	Exemple d'équation différentielle non linéaire	774
8.4	Méthode d'Euler	776
8.5	Équations différentielles du second ordre	778
8.5.1	Étude de l'équation sans second membre	778
8.5.2	Étude de l'équation avec second membre	787
8.6	Questions sur le cours	792
8.6.1	Énoncés	792
8.6.2	Corrigés	794
8.7	Exercices rédigés	796
	Index	818

CHAPITRE 1

Basic calculus...

Le lecteur « expérimenté » pourra s'épargner la lecture de ce premier chapitre de bases¹. Elle est cependant recommandée à l'étudiant désireux de consolider ses acquis ou d'élargir ses horizons avant de s'attaquer au programme de première année de l'enseignement supérieur. En effet, dans cette introduction seront passés en revue les éléments théoriques et pratiques indispensables aux notions abordées par la suite. Idéalement, pour un bachelier ayant encore un niveau modeste en calcul, il serait bon que ce chapitre soit lu avant la rentrée en première année.

1.1 Théorie des ensembles

1.1.1 Généralités

Les ensembles² d'objets mathématiques sont notés à l'aide d'accolades et désignés par des majuscules. Par exemple, l'ensemble A des nombres premiers³ inférieurs à 10 se note :

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

La relation d'appartenance d'un élément à un ensemble est notée \in .

Par exemple : $3 \in A$, mais $4 \notin A$

1. Le lecteur pourra consulter un des derniers exercices de ce premier chapitre (par ex. 1.16, p. 139) pour savoir s'il est « expérimenté » ou non !

2. Nous considérons la notion d'ensemble comme intuitive et nous ne la définirons pas rigoureusement. Disons simplement qu'un ensemble est une collection d'objets que l'on peut énumérer un à un ou définir à l'aide d'une propriété caractéristique. Cependant, des collections d'objets qui se contiennent elles-mêmes ne sont pas considérées comme étant des ensembles. Sinon cela engendrerait des situations paradoxales embarrassantes comme, par exemple, le cas de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes dont on ne pourrait dire s'il se contient lui-même ou non. Ce paradoxe révélé conjointement par Ernst Zermelo et Bertrand Russel au début du xx^e siècle a ainsi poussé les mathématiciens à baliser ce champ de mines qu'est la théorie des ensembles.

3. Voir à la page 107 pour la définition et les propriétés de base des nombres premiers.

L'ensemble qui ne possède aucun élément s'appelle *ensemble vide*, il est noté \emptyset .

Un ensemble ayant un seul élément est appelé un *singleton*.

Même si nous n'en ferons pas la construction rigoureuse, on suppose connus les principaux ensembles de nombres suivants :

ENSEMBLES DE NOMBRES USUELS

\emptyset : l'ensemble des nombres premiers,
 \mathbb{N} : l'ensemble des entiers naturels,
 \mathbb{Z} : l'ensemble des entiers relatifs,
 \mathbb{D} : l'ensemble des nombres décimaux,⁴
 \mathbb{Q} : l'ensemble des nombres rationnels,⁵
 \mathbb{R} : l'ensemble des nombres réels,
 \mathbb{C} : l'ensemble des nombres complexes.

On notera, par exemple, \mathbb{R}_+ l'ensemble des réels positifs ou nuls et \mathbb{R}^* ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des réels non nuls. La notation \mathbb{R}_+^* désigne ainsi l'ensemble des réels strictement positifs, la notation \mathbb{Q}_-^* désigne l'ensemble des nombres rationnels strictement négatifs, etc.

Nous noterons également :

- $\llbracket m, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre les entiers m et n ,
- $\llbracket m, +\infty \llbracket$ l'ensemble des entiers qui sont supérieurs ou égaux à l'entier m ,
- $[a, b]$ l'ensemble des réels compris entre les réels a et b ,
- $[a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a]$) l'ensemble des réels supérieurs (resp. inférieurs) au réel a .

On dira que deux ensembles A et B sont *égaux* lorsqu'ils ont exactement les mêmes éléments. Par exemple, les ensembles $A = \{-1, 1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x^2 = 1\}$ sont égaux. On note alors $A = B$.

On emploie parfois une barre verticale $|$ ou oblique $/$ pour abrégier le « tel que »⁶ :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = n\} = \{0, 1\}$$

4. On rappelle que les nombres *décimaux* sont ceux qui **peuvent** s'écrire sous la forme d'un développement décimal **fini** comme $\frac{1}{4} = 0,25$ ou $\frac{13}{8} = 1,625$. En revanche, ce n'est pas le cas de nombres tels que $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ ou $\frac{22}{7} = 3,142857142857\dots$ qui sont des rationnels (voir note suivante) non décimaux. Ainsi, un nombre est décimal lorsque qu'on peut obtenir un entier en le multipliant par une puissance de 10 : $a \in \mathbb{D} \iff a \times 10^n \in \mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$. On notera qu'il n'y a pas unicité du développement décimal, par exemple les écritures 0,5 et 0,49999... désignent le même nombre. En effet, impossible d'insérer un réel entre les deux !

5. Les nombres *rationnels* sont ceux qui peuvent s'écrire sous la forme de fractions d'entiers comme $\frac{4}{3}$ ou $\frac{14}{11}$. Un nombre rationnel peut avoir un développement décimal illimité mais on démontre que celui-ci est toujours périodique. Cette périodicité est d'ailleurs propre aux nombres rationnels.

6. De même que, dans la langue française, un même mot peut avoir plusieurs sens (qu'il convient de saisir selon le contexte), en mathématiques, un même symbole peut également avoir plusieurs sens, c'est le cas de cette barre verticale $|$ également employée pour signifier qu'un entier divise un autre : par exemple $3 \mid 12$ ou encore $3 \nmid 11$.

Lorsque tous les éléments d'un ensemble B sont également des éléments d'un ensemble A , on dit que B est *une partie* de A ou que B est *inclus* dans A ou encore que B est un *sous-ensemble* de A .

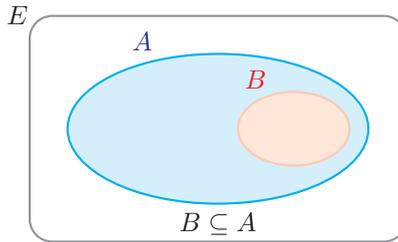


FIGURE 1.1 – Ensemble inclus dans un autre.

La relation d'inclusion⁷ est notée \subseteq : $B \subseteq A$.

Par exemple : $\{2, 5\} \subseteq \mathbb{N}$ ou encore $\{2\} \subseteq \mathbb{N}$

On suppose connues les inclusions strictes successives suivantes :

$$\emptyset \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si A est inclus dans B et B est inclus dans A :

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A)$$

Ainsi, démontrer que deux ensembles sont égaux revient à démontrer les deux inclusions ci-dessus (voir l'exemple page 15).

L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Par exemple, avec $E = \{a, b, c\}$, on a :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

Ainsi, on a :

$$A \subseteq E \iff A \in \mathcal{P}(E)$$

On appelle *cardinal*⁸ d'un ensemble fini E son nombre d'éléments. On le note $\text{Card}(E)$.

Par exemple : $\text{Card}\{x \in \mathbb{C} \mid x^4 = 1\} = \text{Card}\{-i, i, -1, 1\} = 4$

Nous verrons ultérieurement diverses méthodes pour calculer le cardinal de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble fini E (voir théorème page 59).

7. L'inclusion est encore souvent notée simplement \subset dans beaucoup d'ouvrages. On privilégie ici la notation \subseteq (« inclus ou égal ») par analogie avec la relation d'ordre \leq . En cas d'inclusion stricte, on emploiera le symbole \subsetneq . Notons que de la même manière qu'il n'est pas faux d'écrire $2 \leq 3$, on peut légitimement écrire $\{a\} \subseteq \{a, b\}$, en effet si une inclusion est stricte, elle est *a fortiori* large également.

8. Nous verrons dans la section 1.9 une définition plus rigoureuse de la notion de cardinal.

1.1.2 Opérations sur les ensembles

Définissons maintenant les principaux opérateurs qui permettent, à partir d'ensembles donnés, d'en construire de nouveaux.

Définition 1

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- L'*intersection* de A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B :

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont *disjoints*.

- L'*union* de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à A **ou** à B :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

Lorsque A et B sont disjoints, leur union est notée $A \amalg B$.

- Le *complémentaire* de A (dans E), noté $E \setminus A$, est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$x \in E \setminus A \iff x \in E \text{ et } x \notin A$$

- La *différence* de A par B , notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B :

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B$$

- La *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$, est la différence entre l'union et l'intersection, c'est-à-dire $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

$$x \in A \Delta B \iff x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B$$

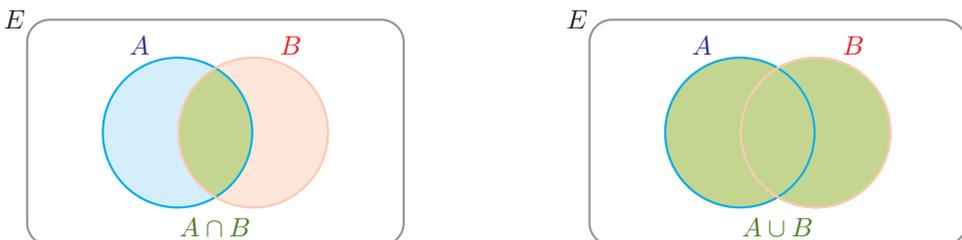


FIGURE 1.2 – Intersection et union de deux ensembles.

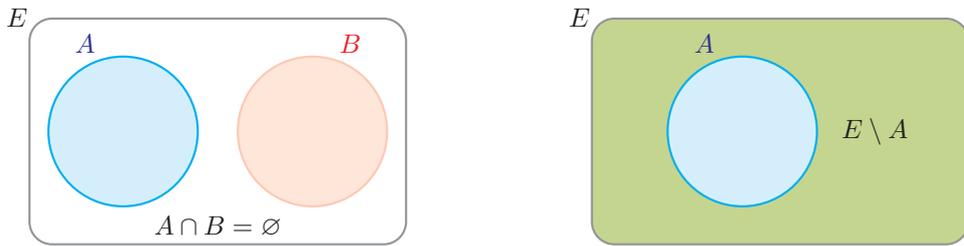


FIGURE 1.3 – Ensembles disjoints et complémentaire.

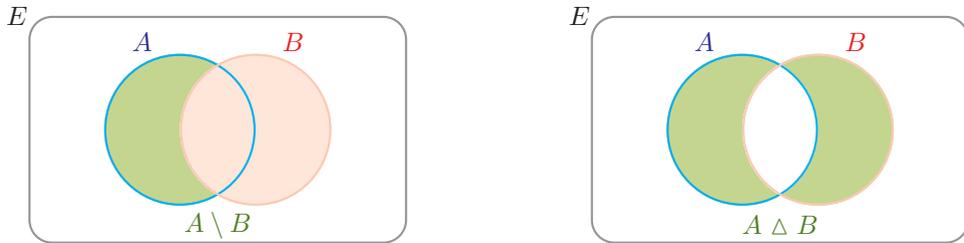


FIGURE 1.4 – Différence et différence symétrique.

Remarque

On a toujours : $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ et $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

Et dans le cas particulier d'une inclusion, on a :

$$B \subseteq A \iff A \cap B = B \iff A \cup B = A$$

Exemple

Démontrer que, quels que soient les ensembles A et B , on a :

$$A = (A \setminus B) \amalg (A \cap B)$$

Déjà, l'union est bien disjointe car si un élément x est dans $A \cap B$ (et donc dans B), il ne peut pas être dans $A \setminus B$.

- Soit $x \in A$.

Si $x \in B$ alors $x \in A \cap B$.

Si $x \notin B$ alors $x \in A \setminus B$.

Donc on a bien :

$$x \in (A \setminus B) \amalg (A \cap B)$$

Ceci prouve :

$$A \subseteq (A \setminus B) \amalg (A \cap B)$$

- Soit $x \in (A \setminus B) \amalg (A \cap B)$.

Alors on a :

$$(x \in A \setminus B) \text{ ou } (x \in (A \cap B))$$

Mais dans les deux cas :

$$x \in A$$

Ceci prouve :

$$(A \setminus B) \amalg (A \cap B) \subseteq A$$

On a bien démontré l'égalité souhaitée.

Définition 2 (Produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles.

On appelle *produit cartésien* de E et F , l'ensemble des couples⁹ (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. On note cet ensemble $E \times F$.

On peut faire le produit cartésien d'un ensemble E avec lui-même pour obtenir $E \times E$ que l'on notera E^2 , c'est ainsi qu'on l'on construit le plan usuel \mathbb{R}^2 .

La notion de produit cartésien peut se généraliser à n ensembles ($n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$).

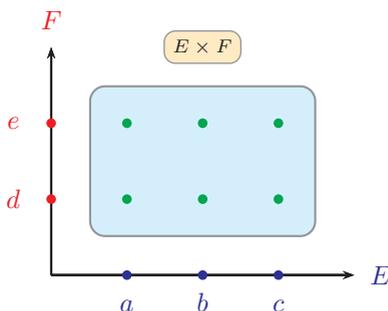
Exemple

Avec $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{d, e\}$, on a :

$$E \times F = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$$

Illustration

Ci-contre, sont représentés :
 en **bleu**, les éléments de E ,
 en **rouge**, les éléments de F ,
 et en **vert**, les éléments de $E \times F$.



1.2 Rudiments de logique

Nous avons utilisé dans la section précédente, à plusieurs reprises, le symbole d'équivalence \iff pour relier des assertions entre elles. Nous allons, dans cette section, étudier plus rigoureusement ces symboles logiques reliant les assertions. Et d'abord, qu'est-ce qu'une assertion ?

En mathématiques, vous l'avez sûrement remarqué, il existe des affirmations qui sont vraies et d'autres fausses¹⁰. Mais cette nature binaire ne s'applique pas à toutes les affir-

9. La notion de couple est difficile à définir. Une façon de procéder est de travailler sur $\mathcal{P}(E \cup F)$ et de définir un couple (x, y) par identification à la partie $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ de $\mathcal{P}(E \cup F)$. Ainsi, (x, y) et (y, x) sont des couples différents en général.

10. Il en existe également des *indécidables* telle la déclaration d'Épiménide le crétois qui déclarait : « tous les crétois sont des menteurs ». Ce paradoxe du menteur peut se synthétiser de manière logique de la façon suivante :

Théorème 1 - Le théorème 1 est faux.

Un tel théorème, s'il est vrai est alors faux et s'il est faux, est vrai ! On peut penser qu'une façon d'éviter ce genre de paradoxe est de bannir les auto-références. Malheureusement, cela ne se révéla pas suffisant et le logicien Kurt Gödel démontrera en 1931 que l'indécidabilité existe au sein même de l'arithmétique...

mations. Si j'affirme « je pense qu'il va pleuvoir demain » ou encore « cette suite semble croissante » ou encore « on obtient le chiffre 3 en lançant un dé » ou encore « $x^2 - 4 = 0$ », il n'est pas possible de donner un statut tranché (vrai ou faux) à de telles affirmations. Soit parce que l'affirmation contient un caractère aléatoire, soit parce qu'elle contient un élément relatif à l'émotionnel, soit parce que son champ d'application est insuffisamment précisé. Nous allons nous intéresser, ici, seulement aux affirmations ou phrases pour lesquelles se pose la question de sa vérité ou non. De telles phrases s'appellent des *assertions*. Par exemple, la phrase p ci-dessous :

$$p : \text{« } 27 \times 40 = 1080 \text{ »}$$

est bien une assertion (qui, en l'occurrence, est vraie).

De même, la phrase q suivante :

$$q : \text{« } (1828 - 1797)^2 = 956 \text{ »}$$

est également une assertion (bien sûr fausse).

En revanche, comme on l'a précisé ci-dessus, des phrases telles que « bienvenue ! » ou encore « du plus profond du cœur ! » ne sont pas des assertions car cela n'a aucun sens de se poser la question de savoir si elles sont vraies ou fausses. Il y a également des phrases qui ne sont pas des assertions car mal formulées comme « $1791 - 1756 =$ ».

Selon le contexte, une même assertion peut avoir un statut différent comme par exemple « il fait jour » qui est vraie ou fausse selon l'heure qu'il est ou l'endroit où l'on se situe. De même, l'assertion « l'équation $x^2 = 9$ possède une seule solution » est vraie dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et fausse dans l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs. Autre exemple : l'assertion « 2 divise n » n'a un sens que si n est entier et n'est vraie que si n est pair. Enfin, certaines assertions contiennent également des éléments variables qui les rendent vraies ou fausses selon la valeur de ces variables. Par exemple, l'assertion « x est une solution réelle de l'équation $x^3 = -1$ » est vraie si $x = -1$ mais fausse si $x = 0$.

Exemple

Considérons l'assertion suivante :

$$\text{« l'inéquation } \frac{x-9}{2-x} \geq 0 \text{ possède exactement sept solutions »}$$

Déterminer un ensemble de nombres pour lesquels cette affirmation est vraie et un ensemble de nombres pour lesquels elle est fausse¹¹.

Nous disposons de *connecteurs logiques* pour fabriquer des assertions plus élaborées à partir d'assertions élémentaires. Ces connecteurs sont la conjonction (« et »), la disjonc-

11. Si on considère l'inéquation à résoudre sur l'ensemble \mathbb{Z} , l'affirmation est vraie mais elle fausse si l'ensemble de résolution est \mathbb{R}

tion (« ou »), la négation (« non ») et bien d'autres encore.

Par exemple, pour x réel et avec les assertions p : « $x \geq 3$ » et q : « $0 \leq x < 5$ », on peut former les assertions suivantes :

- p et q : « $x \geq 3$ et $0 \leq x < 5$ », c'est-à-dire $3 \leq x < 5$;
- p ou q : « $x \geq 3$ ou $0 \leq x < 5$ », c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}_+$;
- $\text{non}(p)$ ¹² : « $x < 3$ ».

Le caractère de vérité de ces assertions combinées dépend de celui de p et de q . On peut dresser la liste des états (vrai ou faux)¹³ d'une assertion combinée en fonction des états de son ou ses arguments. Une telle liste s'appelle une *table de vérité*.

On peut ainsi définir précisément la conjonction (ET) de deux assertions (p et q) qui est vraie uniquement lorsque les assertions p et q sont toutes les deux vraies.

On définit également la disjonction (OU)¹⁴ de deux assertions (p ou q) qui est vraie lorsque l'une ou l'autre est vraie (les deux pouvant l'être en même temps).

Conjonction ET		
p	q	p et q
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0

Disjonction OU		
p	q	p ou q
0	0	0
0	1	1
1	1	1
1	0	1

Négation NON	
p	$\text{non}(p)$
0	1
1	0

FIGURE 1.5 – Table de vérité des connecteurs logiques de base.

On peut former, en tout, $2^4 = 16$ connecteurs logiques à partir de deux assertions p et q comme arguments. On peut démontrer que l'on peut engendrer ces 16 connecteurs à partir de la conjonction et la négation. Par exemple, la disjonction (p ou q) possède toujours les mêmes valeurs de vérité que l'assertion $\text{non}(\text{non}(p)$ et $\text{non}(q))$ comme le montre la table de vérité ci-dessous :

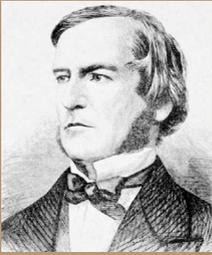
p	q	$\text{non}(p)$	$\text{non}(q)$	$\text{non}(p)$ et $\text{non}(q)$	$\text{non}(\text{non}(p)$ et $\text{non}(q))$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1

FIGURE 1.6 – Une assertion logique ayant même valeur de vérité que (p ou q).

12. Les logiciens notent souvent la négation avec le symbole \neg . Par exemple, en logique classique $\neg\neg p$ (double négation) équivaut à p . Dans un contexte ensembliste, la négation se note parfois autrement. En effet, ne pas appartenir à un ensemble A , c'est appartenir à son complémentaire noté C_A ou encore \bar{A} . On retrouve cette notation dans le langage des événements en théorie des probabilités.

13. Les logiciens adoptent la convention 0 pour coder le faux et le 1 pour coder le vrai.

14. Ce connecteur « OU » des logiciens (dit « OU inclusif ») est à distinguer de « OU exclusif » que nous utilisons dans notre langage courant. Si l'on vous propose une sortie au cinéma ou à l'opéra, c'est rarement les deux à la fois! Ce « OU exclusif » du langage courant (l'un ou l'autre mais pas les deux simultanément) est représenté par les logiciens par la *différence symétrique* notée Δ .



George Boole
(1815–1864)

Né à Lincoln en Angleterre, issu d'une famille modeste, George Boole est contraint de s'instruire en autodidacte. Il apprend notamment les langues puis les enseigne pour aider son père, cordonnier, dont les affaires ne sont guère florissantes. N'allant ainsi pas à l'école, George Boole n'obtient pas de diplôme universitaire ce qui ne l'empêche pas de créer son propre institut d'enseignement dans sa ville natale dès l'âge de 19 ans. En 1838, il succède à Robert Hall à la tête de la « Hall-Academy » de Waddington et commence à rédiger des publications régulières en algèbre et en analyse suite à l'étude des œuvres de Laplace^a et Lagrange^b. Dans les années 1840, il travaille étroitement avec De Morgan^c à la résolution algébrique d'équations différentielles. Grâce à ces

travaux, sa renommée grandissante lui permet d'obtenir une chaire au collège de Cork en 1849. C'est là qu'il rencontre la jeune mathématicienne Mary Everest^d. Ils fondent une famille unie : les cinq filles issues de cette union se consacrent aux mathématiques également ! C'est dans son ouvrage *Mathematical Analysis of Logic*^e que George Boole modélise les lois de la logique sous forme d'une algèbre (dite de Boole) très utilisée encore de nos jours dans les ordinateurs et les réseaux téléphoniques.

On retiendra de George Boole de nombreux articles sur les équations différentielles^f, le calcul des différences finies^g, les probabilités et sa démarche générale pour rattacher la logique aux mathématiques.

George Boole meurt en 1864 d'une pneumonie après avoir marché deux miles sous la pluie et dispensé une conférence transi de froid dans ses vêtements trempés.

a. cf. notice biographique page 770.

b. cf. notice biographique page 489.

c. cf. notice biographique page 21.

d. nièce de George Everest, célèbre géographe connu pour avoir, en 1852, dirigé les opérations de cartographie de la plus haute montagne du monde qui porte désormais son nom.

e. Précisément *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, Barclay et MacMillan, Londres (1847).

f. cf. *A treatise on differential equations*, MacMillan, Londres (1860).

g. cf. *A treatise on the calculus of finite differences*, MacMillan, Londres (1859).

Remarque historique

Plus généralement, le mathématicien George Boole étudia les propriétés de ces connecteurs logiques et observa une certaine analogie¹⁵ avec les opérations usuelles comme \times et $+$. Il put, ainsi, définir une algèbre faite de règles (élément neutre, distributivité, simplification) permettant de réduire des fonctions logiques complexes.

Ainsi, on peut définir des règles sur les combinaisons d'assertions logiques elles-mêmes, combinaisons que nous appellerons *expressions booléennes*.

15. Cette analogie a des limites et nous ne l'emploierons pas ici par risque de confusion. En effet, en algèbre de Boole on a par exemple : $p + p = p$ (p ou p , c'est p), $p + 1 = p$ (p ou du vrai, c'est encore p) !

Définition 3

Lorsque deux expressions booléennes $A(p, q)$ et $B(p, q)$ qui dépendent des mêmes arguments p et q ont les mêmes valeurs de vérité, on dit qu'elles sont *logiquement équivalentes* et on note :

$$A(p, q) \equiv B(p, q)$$

Ce symbole \equiv est un « métasympbole » puisqu'il ne porte plus sur des propriétés mathématiques elles-mêmes mais sur les liens logiques qui unissent les formulations de ces propriétés mathématiques d'où la nécessité d'utiliser un symbole spécifique (et pas \iff) pour ne pas tout mélanger. Ainsi, la table de vérité ci-dessus montre que :

$$(p \text{ ou } q) \equiv \text{non}(\text{non}(p) \text{ et } \text{non}(q))$$

Théorème 1 (Lois de De Morgan (1839)¹⁶)

Soient A et B des expressions booléennes. En notant \overline{A} la négation de A , on a :

$$\overline{A \text{ et } B} \equiv \overline{A} \text{ ou } \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \text{ ou } B} \equiv \overline{A} \text{ et } \overline{B}$$

Démonstration

Il suffit d'écrire les tables de vérité des expressions en question comme ci-avant.

Remarque

On notera l'analogie entre les lois de De Morgan et les relations ensemblistes suivantes lorsque A et B sont deux parties d'un ensemble E :

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B) \quad \text{et} \quad E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$$

Ces relations sont démontrées dans l'exercice 1.1, page 122.

Précisons également les tables de vérité de **l'implication** ($p \implies q$) ainsi que de **l'équivalence** mathématique ($p \iff q$).

- L'implication $p \implies q$ est définie par l'expression booléenne : q ou $\text{non}(p)$. Autrement dit, une implication $p \implies q$ est vraie lorsque q est vraie ou lorsque p est fausse. En utilisant les lois de De Morgan, on a également :

$$q \text{ ou } \overline{p} \equiv \overline{\overline{q} \text{ et } p}$$

Autrement dit, l'implication $p \implies q$ est ainsi vraie sauf quand l'assertion p est vraie et l'assertion q fausse.

Comme on pourra le constater sur la table de vérité ci-dessous, le faux peut donc entraîner autant le vrai que le faux, ainsi l'assertion « si $1 = 2$ alors $3 = 3$ » est, du

16. cf. *First notions of logic, Preparatory to the study of Geometry*, 1, Taylor and Walton, Londres.



Auguste De Morgan
(1806–1871)

Fils d'un colonel de l'armée des Indes, Auguste De Morgan naît à Madurai dans le sud de l'Inde. Mais à cause de révoltes locales, le père renvoie sa famille en Angleterre. Ayant perdu la vue à l'œil droit peu après sa naissance, le petit Auguste De Morgan est sujet aux brimades et moqueries de ses camarades. Il n'est d'ailleurs pas un brillant élève et déteste les examens. Mais, tirant force de son handicap, il réalise de brillantes études de droit à Londres et obtient un poste de professeur de mathématiques à l'université en 1827 ; il n'est alors âgé que de 21 ans !

Il s'intéresse à l'arithmétique^a, à la logique^{b,c} ainsi qu'à la trigonométrie^d.

En 1866, il fonde la Société mathématique de Londres (qu'il préside) et est élu à la Société royale d'astronomie.

De Morgan s'intéresse également à l'histoire des mathématiques, à la philosophie et à la musique, c'est un excellent flûtiste. Sa bibliothèque personnelle contient plus de 3000 livres !

a. cf. *Elements of arithmetic*, Taylor and Walton, Londres (1830).

b. cf. sa contribution à l'encyclopédie *The Penny Cyclopaedia* de la Society for the Diffusion of Useful Knowledge pour ses explications et exemples sur l'induction mathématique.

c. cf. *First notions of logic, Preparatory to the study of Geometry*, Taylor and Walton, Londres (1839), contenant les lois de De Morgan et son œuvre maîtresse *Formal logic of the Calculus of Inference*, Taylor and Walton, Londres (1847).

d. cf. *Trigonometry and double algebra*, Walton and Malbery, Londres (1849) où l'on y trouve une interprétation géométrique des nombres complexes qu'il décrit comme un ensemble bénéficiant d'une « algèbre double » ; il tente, de plus, d'étendre ces propriétés pour construire une algèbre triple décrivant notre espace mais se heurte à de nombreuses difficultés dans cette construction.

point de vue de la logique, une affirmation vraie (très facile à prouver d'ailleurs car si $1 = 2$ alors $2 = 1$ et ajoutant membre à membre les deux égalités, on obtient $3 = 3$). Cependant, le vrai n'implique jamais le faux !

VOCABULAIRE LIÉ À L'IMPLICATION $p \implies q$

Pour avoir q , il suffit d'avoir p

Pour que p se réalise, il faut que q se réalise

p est une condition *suffisante* pour q

q est une condition *nécessaire* pour p

- L'équivalence $p \iff q$ est définie par ($p \implies q$ et $q \implies p$). Ainsi, une équivalence est vraie lorsque les deux assertions p et q auront la même valeur de vérité (toutes les deux vraies ou¹⁷ toutes les deux fausses).

17. Ce « ou » est exclusif ! C'est le « ou » du langage courant.

Implication \implies		
p	q	$p \implies q$
0	0	1
0	1	1
1	1	1
1	0	0

Équivalence \iff		
p	q	$p \iff q$
0	0	1
0	1	0
1	1	1
1	0	0

FIGURE 1.7 – Table de vérité de l'implication et de l'équivalence.

Insistons sur le fait qu'il est utile de connaître la négation d'une implication :

$$\text{non}(p \implies q) \equiv p \text{ et non}(q)$$

En effet, par définition $p \implies q$ c'est $(q \text{ ou non}(p))$ donc par négation, cela donne $\text{non}(q \text{ ou non}(p))$ et d'après les lois de De Morgan, on obtient bien $(\text{non}(q) \text{ ou } p)$.

On ne confondra pas la négation avec la *contraposée* d'une implication qui est définie par $\text{non}(q) \implies \text{non}(p)$ et qui est une assertion logiquement équivalente à l'implication directe $p \implies q$. En voici, une preuve en terme de logique :

$$(\text{non}(q) \implies \text{non}(p)) \equiv (\text{non}(\text{non}(q)) \text{ ou non}(p)) \equiv (q \text{ ou non}(p)) \equiv (p \implies q)$$

Ce que l'on peut également vérifier à l'aide d'une table de vérité.

Exemple

Démontrons que l'assertion $(p \text{ et } (p \implies q)) \implies q$ est toujours vraie¹⁸ :

p	q	$p \implies q$	$p \text{ et } (p \implies q)$	$(p \text{ et } (p \implies q)) \implies q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

FIGURE 1.8 – Règle de détachement (ou *modus ponens*).

Textuellement : si on a p d'une part, et si, d'autre part, on sait que p implique q , alors on est assuré d'avoir q .

¹⁸. Une assertion toujours vraie s'appelle une *tautologie*. Dans le cas présent, on peut noter : $(p \text{ et } (p \implies q)) \implies q \equiv 1$.

1.3 Fonctions et applications

Définition 4 (Relation)

Soient E et F deux ensembles.

On appelle *relation* \mathcal{R} tout triplet (E, F, Γ) où Γ est une partie de $E \times F$.

On dit que E est l'ensemble de départ de \mathcal{R} et F l'ensemble d'arrivée de \mathcal{R} .

L'ensemble Γ s'appelle le *graphe* de la relation \mathcal{R} .

Soient $x \in E$ et $y \in F$. Lorsque $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$. L'élément y est alors appelé *une image* de x tandis que l'élément x est appelé *un antécédent* de y .

Lorsque $E = F$, on parle alors de relation *binnaire* et on verra à la page 153 une autre façon de la définir.

Exemple

Notons $E = F = \mathbb{R}$. L'ensemble des couples (x, y) de \mathbb{R}^2 qui vérifient $y^2 = x$ définit une relation \mathcal{R} dont le graphe Γ est représenté ci-dessous.

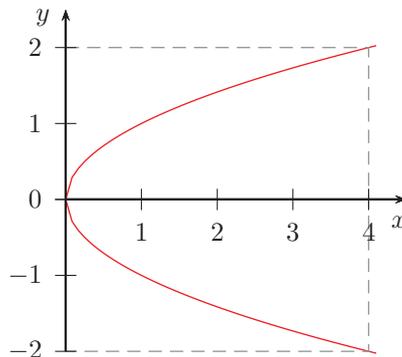


FIGURE 1.9 – Le graphe, dans \mathbb{R}^2 , de la relation $y^2 = x$.

Notons que, par cette relation, le nombre $x = 4$ possède deux images qui sont 2 et -2 .

On note :

$$4\mathcal{R}2 \text{ et } 4\mathcal{R}(-2)$$

Notons également que, en général, une relation n'est pas symétrique. Sur l'exemple ci-dessus, on a $4\mathcal{R}2$ mais on n'a pas $2\mathcal{R}4$.

Définition 5 (Fonction)

Soient E et F deux ensembles.

On appelle *fonction* f de E dans F toute relation \mathcal{R} dans laquelle chaque élément x de E est en relation avec **au plus un** élément y de F . Cet élément y , lorsqu'il existe, est appelé *l'image* de x par f et on note $y = f(x)$.

On appelle *ensemble (ou domaine) de définition* de la fonction f l'ensemble des éléments de E pour lesquels une image existe.

Exemple

Notons $E = F = \mathbb{R}$. L'ensemble des couples (x, y) de \mathbb{R}^2 qui vérifient $y = \sqrt{x}$ définit une fonction f dont le graphe Γ est représenté ci-dessous. En effet, chaque réel admet au plus une racine carrée. L'ensemble de définition de cette fonction est \mathbb{R}_+ .

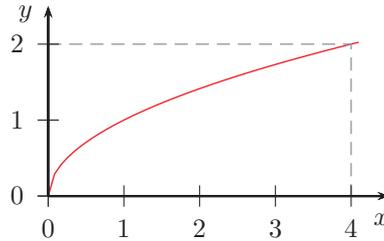


FIGURE 1.10 – Le graphe, dans \mathbb{R}^2 , de la fonction définie par $y = \sqrt{x}$.

Définition 6 (Application)

Soient E et F deux ensembles.

On appelle *application* f de E dans F toute fonction pour laquelle chaque élément x de E admet **exactement une** image y dans F .

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\text{App}(E, F)$ ou encore F^E .

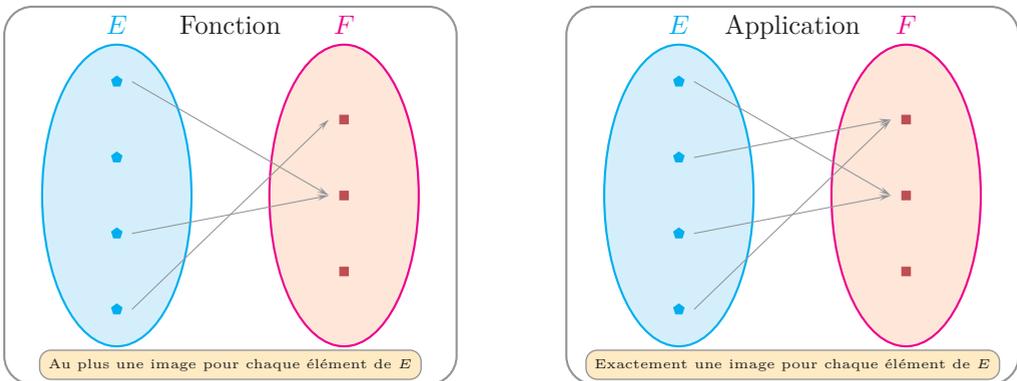


FIGURE 1.11 – Fonction et application.

Exemple

$E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}$ et f définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Remarque

Une fonction restreinte à son ensemble de définition est donc une application.

Notation

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F sera souvent notée selon le schéma fonctionnel suivant :

$$\begin{array}{ccc} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Convention importante

On se permettra également d'utiliser le schéma ci-dessus pour les fonctions mais, dans ce cas, l'ensemble de départ sera inclus dans l'ensemble de définition de la fonction. Ainsi, pour la fonction logarithme népérien, on notera :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Ainsi, dans cet ouvrage, le fait d'évoquer une fonction sous la forme $f : E \longrightarrow F$ sous-entend que la fonction en question est **bien définie** sur E .

Définition 7 (Image directe, image réciproque)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application (ou une fonction).

On appelle *image directe* d'une partie A de E l'ensemble $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.

En particulier, l'ensemble $f(E)$ s'appelle *l'image* de f encore notée $\text{Im}(f)$.

On appelle *image réciproque* d'une partie B de F l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

En particulier, pour $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ s'appelle la *fibre* de y par f .

On peut dire que $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A et $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents éventuels des éléments de B .

Remarque

On peut considérer f^{-1} comme une application de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$.¹⁹

19. On ne confondra pas l'application « fibre » f^{-1} (parfois notée encore f^{-1}) avec l'éventuelle bijection réciproque, notée également f^{-1} (voir la définition 11, page 46). La bijection réciproque f^{-1} d'une bijection f est, en effet, une application de F dans E . Ceci dit, lorsque f est bijective, on a alors :

$$\forall y \in F, f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$$

Autrement dit, la fibre du singleton $\{y\}$ est le singleton contenant l'antécédent de y .

Exemples

- Avec la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$, on a :

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } f^{-1}(\{0\}) = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

La fibre de 0 par la fonction sinus est donc l'ensemble des multiples de π .

- Avec la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, on a :

$$f([1, 2[) = [1, 4[\text{ et } f^{-1}([1, 4[) =]-2, 1] \cup [1, 2[$$

On peut constater que, dans ce dernier exemple, on a l'inclusion stricte :

$$[1, 2[\subsetneq f^{-1}(f([1, 2[))$$

Ainsi, une partie A de E et la partie « aller – retour » $f^{-1}(f(A))$ ne coïncident pas nécessairement. On a cependant toujours une inclusion dans un sens comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2

Soit $f : E \rightarrow F$ une application (ou une fonction).

Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. Alors :

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \text{ et } f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

Démonstration

Montrons $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Soit $a \in A$. Posons $b = f(a)$, donc par définition $b \in f(A)$.

Comme a est un antécédent de b , il fait partie de l'ensemble des antécédents de $f(A)$.

Donc $a \in f^{-1}(f(A))$ d'où l'inclusion souhaitée.

Montrons $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Soit $b \in f(f^{-1}(B))$. Cela signifie qu'il existe $a \in f^{-1}(B)$ tel que $f(a) = b$.

Mais dire que $a \in f^{-1}(B)$ signifie qu'il existe b' dans B tel que $f(a) = b'$.

Donc $b = b'$ et par suite $b \in B$ d'où l'inclusion voulue.

Remarque

Les inclusions de ce théorème sont « larges », cela signifie qu'il peut donc y avoir, selon les caractéristiques²⁰ de f , égalité entre les parties A et $f^{-1}(f(A))$ de même qu'il peut y avoir égalité entre les parties B de $f(f^{-1}(B))$. Mais ces égalités ne sont pas des généralités, on a déjà vu un contre-exemple précédemment où l'on avait $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$. De même

pour l'autre inclusion, si on considère maintenant que f est la fonction exponentielle, on a par exemple $f(f^{-1}(\mathbb{R})) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ donc dans ce cas $f(f^{-1}(B)) \subsetneq B$.

Théorème 3 (Images réciproques et complémentaire)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application (ou une fonction).

Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Alors :

$$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$$

Autrement dit, l'image réciproque d'un complémentaire est égale au complémentaire de l'image réciproque.

Démonstration

Procédons par double inclusion.

Si $f^{-1}(F \setminus B) = \emptyset$, on a nécessairement l'inclusion $f^{-1}(F \setminus B) \subseteq E \setminus f^{-1}(B)$.

Supposons $f^{-1}(F \setminus B) \neq \emptyset$ et soit $x \in f^{-1}(F \setminus B)$.

Il existe donc $y \in F \setminus B$ tel que $y = f(x)$.

Mais puisque $y \notin B$, on a $f(x) \notin B$, autrement dit l'image de x n'est pas dans B .

Ainsi, l'ensemble des antécédents des éléments de B ne contient pas x :

$$x \notin f^{-1}(B)$$

Ce qui signifie :

$$x \in E \setminus f^{-1}(B)$$

D'où l'inclusion :

$$f^{-1}(F \setminus B) \subseteq E \setminus f^{-1}(B)$$

Réciproquement si $E \setminus f^{-1}(B) = \emptyset$, on a alors l'inclusion $E \setminus f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(F \setminus B)$.

Supposons $E \setminus f^{-1}(B) \neq \emptyset$ et soit $x \in E \setminus f^{-1}(B)$.

Donc $x \notin f^{-1}(B)$, autrement dit aucun élément de B n'a x pour antécédent.

Donc :

$$f(x) \notin B$$

En effet, si on avait $f(x) \in B$, alors on aurait $x \in f^{-1}(B)$ ce qui n'est pas le cas.

On a donc :

$$f(x) \in F \setminus B$$

D'où :

$$x \in f^{-1}(F \setminus B)$$

D'où l'inclusion :

$$E \setminus f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(F \setminus B)$$

On en déduit bien l'égalité souhaitée.

20. En fait, on a toujours $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ avec égalité si et seulement si f est une injection et on a toujours $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ avec égalité si et seulement si f est une surjection (sur B). Voir à la page 43 les définitions d'injection et de surjection.

Remarque

Il n'y a pas de propriété équivalente avec les images directes. Même pas d'inclusion simple. Voici un contre-exemple : prenons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ constante égale à k . Considérons la partie $A = [-1, 1]$. On a :

$$f(A) = \{k\} \text{ et } f(\mathbb{R} \setminus A) = \{k\}$$

Donc $\mathbb{R} \setminus f(A) = \mathbb{R} \setminus \{k\}$, ce qui n'est pas égal à $f(\mathbb{R} \setminus A)$.

Moralité : les images réciproques sont plus « sympathiques » que les images directes ! Cela est dû au fait qu'un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents donc si $A \in \mathcal{P}(E)$, il peut arriver qu'il existe $x \in E \setminus A$ tel que $f(x) \in f(A)$.

1.4 Quantificateurs

Deux quantificateurs sont très employés en mathématiques :

- le quantificateur *universel* « quel que soit » noté \forall ;
- le quantificateur *existentiel* « il existe (au moins un) » noté \exists .

Ainsi, pour exprimer le fait que l'exponentielle de tout nombre réel est strictement positive, on notera :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

Pour exprimer le fait que tout entier naturel impair n s'écrit de la forme $n = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$ on notera :

$$n \text{ entier naturel impair} \iff (\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1)$$

Lorsqu'il existe **un unique** objet vérifiant telle ou telle propriété, on note « $\exists!$ » :

$$\exists! x \in \mathbb{R}_+, \ln(x) = 1$$

Certaines assertions mathématiques peuvent contenir successivement plusieurs quantificateurs. Par exemple, pour exprimer qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est majorée sur un intervalle I par un certain réel M on notera :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$$

Pour obtenir la négation d'une phrase quantifiée, on remplace \forall par \exists (et vice-versa) et l'affirmation finale par sa négation. Ainsi, on exprime qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} n'est pas majorée sur I en notant :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) > M$$

(Quel que soit le réel M choisi, on peut trouver un réel x de I tel que $f(x)$ dépasse M)

L'ordre des quantificateurs est important et ne peut pas, en général, être modifié.

Par exemple, les deux assertions suivantes :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = a$$

et :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+ x^2 = a$$

n'ont pas du tout la même signification. La première assertion exprime le fait que l'équation $x^2 = a$ admet au moins une solution réelle lorsque a est positif. Tandis que la seconde assertion est clairement fausse : existe-t-il un réel x dont le carré est égal à tout réel positif a ? Clairement non.

En revanche, l'ordre des quantificateurs peut être modifié lorsqu'ils sont de même nature (que des \forall ou que des \exists) et qu'ils prélèvent des objets de façon indépendante comme dans l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, (x + y \in \mathbb{Q} \text{ et } x \times y \in \mathbb{Q})$$

Et dans ce cas on peut noter « $\forall x, y \in \mathbb{Q}, \dots$ » ou encore « $\forall(x, y) \in \mathbb{Q}^2, \dots$ ».

LE CONTRE-EXEMPLE

Pour démontrer qu'une assertion du type :

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

est **fausse**, il suffit d'exhiber un contre-exemple :

$$\exists x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x))$$

Illustrons : l'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 41$ est un nombre premier » est-elle vraie ?

On peut vérifier que c'est le cas pour tous les entiers $n \in \llbracket 0, 39 \rrbracket$ mais pour $n = 40$, on a : $40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \times 41 + 41 = 41(40 + 1) = 41^2$ qui est un nombre composé.

L'affirmation est donc fausse puisqu'on a trouvé un contre-exemple. (C'est le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783, voir page 267) qui proposa²¹, en 1772, ce polynôme $X^2 + X + 41$ qui génère beaucoup de nombres premiers lorsque $X \in \mathbb{N}$.)

1.5 Différents types de raisonnements logiques

Abordons plus en détail deux types de raisonnements classiques en mathématiques : le raisonnement par contraposition et le raisonnement par l'absurde et essayons de décoriquer leur structure logique.

21. cf. *Extrait d'une lettre de M. Euler le père à M. Bernoulli concernant le mémoire imprimé parmi ceux de 1771*, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences, Berlin, pp. 335-337.

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que : n^2 pair $\implies n$ pair

Une façon de démontrer cette implication est de dire :

Supposons n impair, alors il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$ et par suite :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Comme $4k^2$ et $4k$ sont des entiers pairs, on en déduit que n^2 est impair.

On a ainsi prouvé : n impair $\implies n^2$ impair

D'où, par contraposition : n^2 pair $\implies n$ pair

Exemple 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante (où I est un intervalle).

Soient a et b dans I . Démontrer que :

$$f(a) < f(b) \implies a < b$$

Une façon de démontrer cette implication est de dire :

Supposons $a \geq b$. Alors par croissance de la fonction f sur I :

$$f(a) \geq f(b)$$

On a ainsi prouvé : $a \geq b \implies f(a) \geq f(b)$

D'où, par contraposition : $f(a) < f(b) \implies a < b$

Exemple 3

Démontrer qu'il n'existe pas de fonction polynôme P tel que pour tout réel x :

$$P(x) = e^x$$

Supposons qu'une telle fonction polynôme P existe. Notons n son degré.

En dérivant successivement $(n + 1)$ fois, on obtiendrait, pour tout réel x :

$$0 = e^x$$

Ce qui est absurde. Donc, l'exponentielle n'est pas une fonction polynomiale.

Exemple 4

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons le contraire, on pourrait alors écrire $\sqrt{2}$ sous la forme de fraction irréductible²².

Il existerait alors deux entiers a et b , premiers entre eux, tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

On en déduit, par élévation au carré, une relation entre a et b :

$$a^2 = 2b^2$$

Donc a^2 serait un entier pair, et d'après l'exemple 1 ci-dessus, a également.

En conséquence, il existerait un entier k tel que $a = 2k$ et l'égalité ci-dessus deviendrait :

$$4k^2 = 2b^2$$

$$b^2 = 2k^2$$

Donc b^2 , et par suite b , serait également un entier pair.

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux.

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel²³.

RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSITION

Démontrer une implication $p \implies q$ équivaut, d'un point de vue logique, à démontrer $\text{non}(q) \implies \text{non}(p)$:

$$(p \implies q) \equiv (\text{non}(q) \implies \text{non}(p))$$

RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

- Démontrer une assertion p équivaut, d'un point de vue logique, à supposer sa négation $\text{non}(p)$ et aboutir à une contradiction :

$$p \equiv \text{non}(p) \text{ absurde}$$

Ou encore : $p \equiv \text{non}(\text{non}(p))$

- Démontrer, sous une hypothèse p , que l'on a une assertion q équivaut, d'un point de vue logique, à supposer $\text{non}(q)$ et aboutir à une contradiction.

$$(p \implies q) \equiv (p \text{ et } \text{non}(q) \text{ absurde})$$

Ou encore : $(p \implies q) \equiv \text{non}(p \text{ et } \text{non}(q))$

22. Fraction du type $\frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers premiers entre eux, c'est-à-dire, sans autre diviseur commun que 1.

23. On verra à la page 146 une généralisation de ce résultat. Voir également à la page 36 pour une autre démonstration.

1.6 Un cas particulier de fonction : les suites

Définition 8 (Notion de suite)

Soit E un ensemble. On appelle *suite* toute fonction u de \mathbb{N} dans E .

Une suite est généralement notée (u_n) où $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque $E = \mathbb{Z}$, on dit que la suite est *entière*.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que la suite est *réelle*.

Lorsque $E = \mathbb{C}$, on dit que la suite est *complexe*.

L'ensemble des suites à valeur dans un ensemble E est noté $E^{\mathbb{N}}$. En particulier, l'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Une suite définie sur un intervalle $[[m, n]]$ (où $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$) est dite *finie*.

Ne pas confondre, u_n qui désigne le terme²⁴ de rang n ($n \in \mathbb{N}$), (u_n) qui désigne la suite et $\{u_n\}$ qui est l'ensemble des éléments de la suite (ou l'image $u(\mathbb{N})$ de la fonction u).

Remarques

- Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang. C'est le cas, par exemple, de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n-3}$ qui est définie pour $n \geq 3$.
- Certaines suites ne sont plus définies au delà d'un certain rang. C'est le cas, par exemple, de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{3-n}$ qui n'est plus définie pour $n \geq 4$. Plus subtilement, ceci peut également être le cas d'une suite définie par une relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{81}{80} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{3-2u_n} \end{cases}$$

On calcule alors $u_1 = \frac{27}{26}$, $u_2 = \frac{9}{8}$, $u_3 = \frac{3}{2}$ et pour $n \geq 4$, la suite n'est plus définie !

- Il n'existe pas que des suites numériques, on peut envisager des suites de polynômes, de fonctions, de matrices, etc.

24. Ce terme devrait logiquement se noter $u(n)$ mais l'usage en a voulu autrement. C'est à Lagrange (voir p. 489) que l'on doit la notation indiquée u_n .

Définition 9

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie au moins sur un intervalle I du type $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$)²⁵. On dit que, à partir du rang n_0 , la suite (u_n) est :

- *croissante* lorsque : $\forall n \in I, u_n \leq u_{n+1}$
- *strictement croissante* si : $\forall n \in I, u_n < u_{n+1}$
- *décroissante* lorsque : $\forall n \in I, u_n \geq u_{n+1}$
- *strictement décroissante* si : $\forall n \in I, u_n > u_{n+1}$
- *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- *strictement monotone* en cas de stricte croissance ou stricte décroissance.
- *périodique* lorsque : $\exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \in I, u_{n+T} = u_n$

On dit que la suite (u_n) est :

- *constante* sur I lorsque : $\forall n \in I, u_n = u_{n+1}$
- *stationnaire* lorsque : $\exists n_1 \in I, \forall n \geq n_1, u_n = u_{n+1}$
- *majorée* lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in I, u_n \leq M$
- *minorée* lorsque : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in I, m \leq u_n$
- *bornée* lorsqu'elle est minorée et majorée :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in I, m \leq u_n \leq M$$

En particulier, une suite minorée (resp. majorée) par 0 est une suite positive (resp. négative).

À PARTIR D'UN CERTAIN RANG

Dire qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ s'applique à partir d'un certain rang N se code :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies \mathcal{P}(n))$$

Par exemple, dire qu'une suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang se note :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies u_n \geq 0)$$

Remarques

- Pour comprendre la nuance entre une suite stationnaire et une suite constante, donnons un exemple. Notons E la partie entière d'un réel (par exemple $E(\pi) = 3$) et (u_n) la

²⁵. ou, à la rigueur, un intervalle du type $\llbracket n_0, m \llbracket$ (où $n_0, m \in \mathbb{N}$ avec $n_0 < m$) dans le cas d'une suite finie.

suite définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = E\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a $u_1 = E(1) = 1$, $u_2 = E(0,5) = 0$ puis pour tout $n \geq 2$, $u_n = 0$. La suite (u_n) est stationnaire (à partir du rang 2) mais non constante puisque $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$.

- Un exemple de suite périodique, à partir d'un certain rang, est la suite de Collatz²⁶ définie par un entier initial u_0 au choix et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases}$$

Par exemple, en choisissant $u_0 = 1$, on obtient successivement 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc. Donc la suite est périodique (dès le début).

Mais en choisissant $u_0 = 23$, on obtient successivement 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1 etc, et la suite est périodique à partir du rang 13.

- Il existe des suites qui sont ni croissantes, ni décroissantes. Par exemple : $u_n = (-1)^n$.
- Il est tout à fait correct de dire qu'une suite est croissante sur l'intervalle $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ au lieu de dire qu'elle est croissante à partir du rang n_0 .
- Contrairement aux fonctions de la variable réelle, on ne définit le sens de variation d'une suite que sur des intervalles de la forme $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$; ce qui se passe pour les premiers termes reste, ici, anecdotique.

Exemples

- Étudions le **sens de variation** de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}$$

Calculons les premiers termes de cette suite et représentons-la graphiquement :

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	9	16	25
2^n	1	2	4	8	16	32
$\frac{n^2}{2^n}$	0	0,5	1	1,125	1	0,714

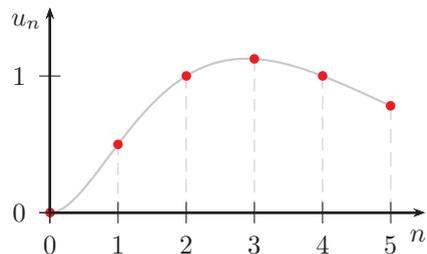


FIGURE 1.12 – La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

26. Lothar Collatz, mathématicien allemand (1910-1990) émet, en 1937, la conjecture selon laquelle, quel que soit le choix de l'entier initial u_0 , il existe un rang m pour lequel on a $u_m = 1$ (et donc $u_{m+1} = 4$, $u_{m+2} = 2$ et $u_{m+3} = 1 = u_m$) d'où la périodicité à partir d'un certain rang. Cette fameuse suite est, plus tard, étudiée de près à l'université de Syracuse (d'où la dénomination courante de « suite de Syracuse ») aux États-Unis. Aujourd'hui, on ne sait toujours pas prouver cette conjecture, vous pouvez chercher !

Cette suite semble décroissante pour $n \geq 3$.

En effet, étudions le signe de la différence de deux termes consécutifs²⁷ :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{2^{n+1}} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 2 \right) = \frac{n^2}{2^{n+1}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \right)$$

Par ailleurs, on a :

$$n \geq 3 \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \iff 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{4}{3} \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{16}{9}$$

Et comme $\frac{16}{9} < 2$, on a au final :

$$u_{n+1} - u_n < 0 \iff n \geq 3$$

La suite (u_n) est bien décroissante pour $n \geq 3$.

Notons, au passage, que cette suite (u_n) est majorée par $\frac{9}{8}$.

- **Important** : considérons la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Montrons que cette suite est **majorée**.

Pour tout $k \geq 2$, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Ainsi, pour $n \geq 2$, on obtient par télescopage :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Cette suite est bien majorée²⁸ par 2.

1.7 Propriétés de \mathbb{N} (et \mathbb{Z}). Récurrence

Plusieurs options sont possibles pour construire l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

Mais toute construction mathématique repose sur un choix d'axiomes.

Axiome 1

Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément²⁹.

27. Pour une suite dont les termes sont tous strictement positifs, on peut remarquer via la relation $u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right)$ qu'étudier le signe de la différence de deux termes consécutifs équivaut à comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

28. Cette majoration était déjà connue de Jacques Bernoulli (1654-1705, voir page 565). Dans *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis, earumque summa finita*, Basileae (1689), il s'intéresse à cette série mais il n'arrive pas à calculer la somme dont il reconnaît qu'elle est difficile à déterminer (cf. *ibid.* p. 399). Il faudra attendre Euler en 1734 qui démontre que la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$ (voir exercice page 745).

29. On admet qu'il y a un ordre « naturel » \leq sur \mathbb{N} et qu'un plus petit élément m d'une partie A de \mathbb{N} est défini par $m \leq a$ quel que soit l'élément a de A . Notons que l'on a nécessairement $m \in A$.

Exemple

Considérons l'ensemble A des entiers naturels ayant exactement cinq diviseurs. Cet ensemble est non vide (par exemple $81 \in A$ puisque 81 possède cinq diviseurs qui sont 1, 3, 9, 27 et 81). D'après l'axiome ci-dessus, cet ensemble admet donc un plus petit élément. On vérifie facilement qu'il s'agit du nombre $2^4 = 16$.

Le choix de l'axiome ci-dessus³⁰ nous permettra de faire une démonstration du principe de raisonnement par récurrence. Mais avant d'en venir à la récurrence voyons une application sympathique de cet axiome.

Application : une démonstration, par l'absurde, de l'irrationalité^{31, 32} de $\sqrt{2}$

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Cela signifie qu'il existerait une fraction $\frac{a}{b}$ d'entiers tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Autrement dit, il existerait un certain multiple de $\sqrt{2}$ qui serait un entier (ici $b\sqrt{2}$).

Considérons alors l'ensemble A des entiers non nuls n tels que $n\sqrt{2}$ soit un entier :

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, \text{ tels que } n\sqrt{2} \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Par hypothèse, cet ensemble A est une partie **non vide** de \mathbb{N}^* (et donc de \mathbb{N}) puisqu'il contient b . D'après l'axiome ci-dessus, il admet un **plus petit élément** m (avec $m \in \mathbb{N}^*$).

Considérons alors le nombre m' défini par :

$$m' = m\sqrt{2} - m$$

Nous pouvons dire plusieurs choses intéressantes sur ce nombre m' .

- D'une part : $m' \in \mathbb{N}^*$. En effet, par hypothèse, $m\sqrt{2}$ est un entier donc $m' = m\sqrt{2} - m$ également. Et il est non nul car s'il l'était, on aurait $\sqrt{2} = 1$ ce qui est absurde (il suffit d'élever au carré pour s'en convaincre).
- D'autre part : $m' \in A$. En effet :

$$m'\sqrt{2} = (m\sqrt{2} - m)\sqrt{2} = 2m - \sqrt{2}m$$

Or $2m$ est un entier, $\sqrt{2}m$ aussi par hypothèse donc $2m - \sqrt{2}m$ également. Et ce dernier entier est non nul car s'il l'était, on aurait $\sqrt{2} = 2$ ce qui est absurde (là encore, il suffit d'élever au carré pour s'en convaincre).

30. D'autres choix sont possibles, on peut notamment inclure le principe de récurrence dans l'axiomatique permettant de construire \mathbb{N} comme l'a fait le mathématicien Giuseppe Peano (1858-1932) dans son ouvrage *Arithmetices principia, nova methodo exposita* publié en 1889.

31. Un nombre est dit *irrationnel* lorsqu'il n'est pas rationnel, autrement dit, lorsqu'il ne peut pas s'exprimer sous forme de fraction de nombres entiers.

32. Voir également à la page 146 pour une démonstration classique (et généralisée) de ce résultat.

- Et enfin : $m' < m$. En effet, on a $m' = m(\sqrt{2} - 1)$. Or, $\sqrt{2} - 1$ est inférieur à 1 (si on avait $\sqrt{2} - 1 \geq 1$, on aurait $\sqrt{2} \geq 2$ ce qui est absurde, il suffit d'utiliser la croissance de la fonction « carré » sur \mathbb{R}_+ pour s'en convaincre).

Nous avons donc une contradiction puisqu'on a trouvé, dans A , un élément m' strictement inférieur à l'élément m qui était censé être le plus petit. On en déduit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Venons-en maintenant au **principe de raisonnement par récurrence** que nous allons introduire à l'aide de trois exemples simples.

Exemple 1

Considérons la suite (u_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Cette suite est définie par récurrence (chaque terme dépend du précédent). On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement chaque terme u_n en fonction de n . À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux. Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour se faire une « idée ».

Ici, nous avons :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

Stop, nous remarquons que la suite (u_n) semble obéir à une loi toute simple : en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.

Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?

Notons \mathcal{P} la propriété³³, définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

Supposons, un instant, que pour un certain entier n , on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on aurait :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Ce qui correspond à l'énoncé de $\mathcal{P}(n+1)$.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang n , alors elle l'est également au rang suivant. On dit que la propriété \mathcal{P} est *héréditaire*.

Faisons un bilan : on a vérifié que la propriété \mathcal{P} est vraie aux rangs $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 . On dit que la propriété \mathcal{P} est *initialisée*. Mais comme elle est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$, etc. Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang.

Nous venons de faire un raisonnement par récurrence :

PRINCIPE DE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE (SIMPLE)³⁴

Soit \mathcal{P} une propriété définie sur \mathbb{N} .

SI :

- la propriété \mathcal{P} est INITIALISÉE à un certain rang n_0 , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}^{35}$$

- la propriété \mathcal{P} est HÉRÉDITAIRE à partir du rang n_0 , c'est-à-dire :

$$\text{pour tout entier } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1) \right)$$

ALORS : La propriété \mathcal{P} est vraie à tout rang n plus grand que n_0 .

33. Il s'agit, en fait, d'une *famille* de propriétés.

34. On trouve des traces du raisonnement par récurrence dans les *Éléments* d'Euclide (voir page 109) qui affirmait : *nous avons vérifié la propriété pour 2, nous avons montré que si elle est vraie pour un nombre, elle est vraie pour son suivant, donc elle est générale*. Plus tard, Blaise Pascal (voir page 68) l'utilise explicitement dans son *Traité du triangle arithmétique* écrit en 1654 et publié en 1665 en l'appelant « raisonnement par induction ». Les anglo-saxons utilisent le terme « *mathematical induction* » et attribuent souvent à De Morgan, en 1838, la paternité du vocable (De Morgan rédige un effet une entrée dans l'encyclopédie *The Penny Cyclopaedia* de la Society for the Diffusion of Useful Knowledge, 12). Mais c'est oublier les contributions de leur compatriote John Wallis (voir page 697) qui, en 1656, utilise l'expression « *per modum inductionis* » dans son livre *Arithmetica Infinitorum*, page 15, proposition XIX. En 1861, dans son livre *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten* le mathématicien allemand Hermann Grassmann (1809-1877) donne la formulation moderne de ce principe telle qu'elle est utilisée aujourd'hui. Quant au terme francisé de « récurrence », il semble apparaître assez tardivement, il est employé en 1902 par Henri Poincaré dans le chapitre 1 de *La science de l'hypothèse*.

35. On peut se contenter de dire « $\mathcal{P}(n_0)$ » au lieu de « $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ». Qui dit, au quotidien, lorsqu'il pleut : « il pleut est vrai » au lieu de « il pleut » !?

Exemple 2

Voyons ici une propriété qui n'est initialisée qu'à partir d'un certain rang. Comparons les valeurs de $n!$ ³⁶ avec les puissances successives de 2.

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	8	16	32
$n!$	1	1	2	6	24	120

On ne peut pas affirmer que $n!$ est supérieur à 2^n pour tout entier naturel n . Il semble cependant que ce soit le cas pour $n \geq 4$. Nous allons le démontrer par récurrence en considérant la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) : n! \geq 2^n$$

- Puisque $4! \geq 2^4$, on a $\mathcal{P}(4)$. Ici, la propriété est initialisée au rang 4.
- Soit $n \geq 4$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors, on peut écrire :

$$(n + 1)! \geq (n + 1) \times n! \stackrel{\mathcal{P}(n)}{\geq} (n + 1) \times 2^n \stackrel{n \geq 4}{\geq} 2 \times 2^n \geq 2^{n+1}$$

Ce qui correspond à $\mathcal{P}(n + 1)$.

La propriété \mathcal{P} est donc héréditaire à partir du rang 4.

Bilan : on a montré : $\mathcal{P}(4)$ et $(\forall n \geq 4, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1))$

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier $n \geq 4$. Notons que l'on peut également démontrer (en traitant le cas $n = 0$ à part) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! \geq 2^{n-1}$$

Exemple 3

Et enfin, voici un dernier exemple où l'on fait une récurrence **finie**.³⁷

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que : $\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < 1 + \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^2$

2. En déduire que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Dans cet exemple, nous n'aurons besoin de l'hérédité que pour un nombre fini d'étapes.

1. Ici, on considère donc, fort logiquement, la propriété \mathcal{P} définie pour $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par :

$$\mathcal{P}(m) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < 1 + \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

36. On rappelle que la *factorielle* d'un entier n , notée $n!$, est définie par $0! = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par le produit $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. Par exemple $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. On convient que $0! = 1$. Petite curiosité : démontrer que $10! = 6! \times 7!$.

La notation $n!$ est introduite par le mathématicien français Christian Kramp en 1808 dans son livre *Éléments d'arithmétique universelle*.

37. Voir par exemple l'exercice 1.16 (page 139) pour un autre exemple de récurrence finie ou encore la démonstration de la formule de Leibniz, page 483.

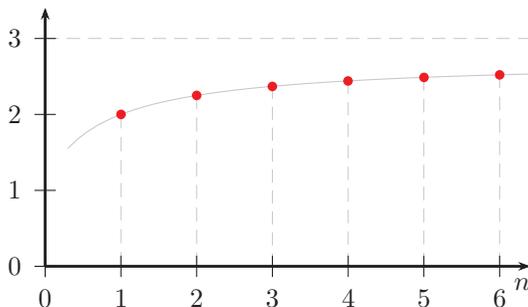


FIGURE 1.13 – Suite majorée par 3.

- Lorsque $m = 1$, on a bien $1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ d'où $\mathcal{P}(1)$.

Si $n = 1$, alors la question est terminée. Supposons désormais $n \geq 2$.

- Soit $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et supposons $\mathcal{P}(m)$.

On peut alors écrire :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1} < \left(1 + \frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

En développant le membre de droite :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{m}{n} + \frac{m}{n^2} + \frac{m^2}{n^2} + \frac{m^2}{n^3}$$

Or $0 < m < n$ donc $m^2 < mn$ et on peut majorer le dernier terme $\frac{m^2}{n^3}$ par $\frac{m}{n^2}$.

$$\text{D'où : } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1} < 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m^2+2m}{n^2} < 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)^2}{n^2}$$

Ce qui est $\mathcal{P}(m+1)$.

On a montré : $\mathcal{P}(1)$ et $(\forall m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mathcal{P}(m) \implies \mathcal{P}(m+1))$

On en déduit : $\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{P}(m)$

D'où le résultat.

2. Il suffit de spécialiser $m = n$ pour obtenir :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Remarquons que l'on peut obtenir une majoration bien meilleure à l'aide de l'inégalité

$\ln(1+x) \leq x$ (voir page 94) spécialisée avec $x = \frac{1}{n}$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

Par propriétés du logarithme : $\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \leq 1$

Puis, par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} , on obtient³⁸ :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

Donnons maintenant un énoncé précis et rigoureux du principe de raisonnement par récurrence (qui englobe toutes les formes de récurrence : finie, forte, à partir d'un certain rang).

Théorème 4 (Principe de raisonnement par récurrence)

Soit I un intervalle³⁹ de \mathbb{N} , non réduit à un singleton.

Soit \mathcal{P} une propriété définie sur I .

SI les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Initialisation : $\exists n_0 \in I$ tel que $\mathcal{P}(n_0)$
- Hérité : $\forall n \in I \cap \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ tel que $n + 1 \in I : \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$

ALORS : $\forall n \in I \cap \llbracket n_0, +\infty \llbracket, \mathcal{P}(n)$

Démonstration

Considérons l'ensemble E des entiers naturels inclus dans I et supérieurs à n_0 pour lesquels la propriété \mathcal{P} n'est pas satisfaite :

$$E = \left\{ n \in I \cap \llbracket n_0, +\infty \llbracket, \text{non}(\mathcal{P}(n)) \right\}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant E non vide. D'après l'axiome 1, page 35, cet ensemble E admet alors un plus petit élément m (supérieur à n_0).

Comme ce plus petit élément m est élément de E , on a donc $\text{non}(\mathcal{P}(m))$.

- Si $m = n_0$, alors on a $\text{non}(\mathcal{P}(n_0))$ ce qui contredit l'hypothèse d'initialisation.
- Si $m > n_0$, alors on a, du fait que m est le plus petit élément de E :

$$\mathcal{P}(m - 1) \text{ et } \text{non}(\mathcal{P}(m))$$

ce qui contredit l'hypothèse d'hérité.

En conséquence, E est vide, autrement dit :

$$\forall n \in I \cap \llbracket n_0, +\infty \llbracket, \mathcal{P}(n)$$

38. Ainsi, si l'expression $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini, cette limite est nécessairement inférieure ou égale à 3 et même à e . L'existence et la valeur de cette limite seront précisées à la page 315.

39. Les intervalles de \mathbb{N} sont les ensembles du type $\llbracket a, b \llbracket$ (ensemble des entiers compris entre les entiers a et b) ou du type $\llbracket a, +\infty \llbracket$ (ensemble des entiers supérieurs à l'entier a).

Le principe de récurrence étant démontré, nous pouvons donner maintenant un corollaire important de l'axiome 1, page 35.

Corollaire 1

1. Toute partie non vide et majorée⁴⁰ de \mathbb{N} admet un plus grand élément.
2. Toute partie non vide et majorée de \mathbb{Z} admet un plus grand élément.

Démonstration

1. Considérons la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n)$: toute partie non vide de \mathbb{N} et majorée par n admet un plus grand élément.

- Si une partie de \mathbb{N} majorée par 0, c'est qu'elle est nécessairement réduite au singleton $\{0\}$. Elle admet donc un plus grand élément qui est 0 d'où $\mathcal{P}(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$.

Considérons alors une partie A de \mathbb{N} non vide et majorée par $n + 1$.

- Si n majore A alors, d'après $\mathcal{P}(n)$, la partie A admet un plus grand élément.
- Si n ne majore pas A alors il existe dans A un élément strictement supérieur à n . Mais par ailleurs, cet élément est nécessairement inférieur ou égal à $n + 1$ qui, par hypothèse, majore A donc cet élément est bien $n + 1$. On a un majorant (à savoir $n + 1$) qui est dans A donc $n + 1$ est le plus grand élément de A .

Dans tous les cas, on obtient $\mathcal{P}(n + 1)$.

On a donc montré : $\mathcal{P}(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1))$

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Bilan : si on se donne une partie non vide et majorée de \mathbb{N} , d'après ce qu'on vient de voir, en notant n son majorant, cette partie admet un plus grand élément.

2. Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{Z} .

- Si $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$ alors A est majorée par 0.

On pose alors $B = -A = \{-x \text{ où } x \in A\}$.

Ainsi B est une partie non vide de \mathbb{N} donc admet un plus petit élément m , ce qui signifie :

$$m \in B \text{ et } \forall b \in B, m \leq b$$

Mais les éléments b de B peuvent tous s'écrire $b = -x$ où x parcourt A , ainsi :

$$-m \in A \text{ et } \forall x \in A, m \leq -x$$

40. Une partie A de \mathbb{N} (ou \mathbb{Z}) est majorée s'il existe un entier M tel que : $\forall a \in A, a \leq M$. Notons que M n'est pas nécessairement élément de A . Par exemple, la partie $A = \{1, 2, 3\}$ est majorée par 3 mais aussi par 4 ou 5.

$$-m \in A \text{ et } \forall x \in A, x \leq -m$$

Ce qui prouve que A admet un plus grand élément (à savoir $-m$).

- Si $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ alors l'ensemble $A \cap \mathbb{N}$ est une partie non vide de \mathbb{N} et majorée dans \mathbb{N} donc d'après le point précédent admet un plus grand élément N qui, *a fortiori*, est également le plus grand élément de A .

1.8 Injection, surjection, bijection

Définition 10 (Injection, surjection, bijection)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que :

- f est *injective* lorsque deux éléments distincts ont des images distinctes⁴¹ :

$$\forall x_1, x_2 \in E, (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

- f est *surjective* lorsque tout élément y de F admet au moins un antécédent :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

- f est *bijection* lorsqu'elle est injective et surjective.

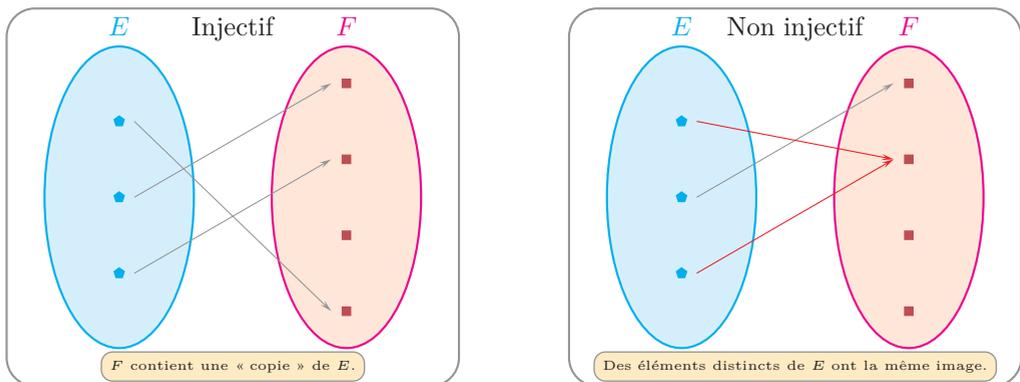


FIGURE 1.14 – Concept d'injection.

Exemples

- L'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto x^2$$

n'est pas injective puisque deux nombres opposés ont la même image.

41. Cela signifie $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$. Mais dans la pratique, l'implication contraposée (voir page 31) proposée dans la définition est, dans de nombreux cas, plus aisée à vérifier.

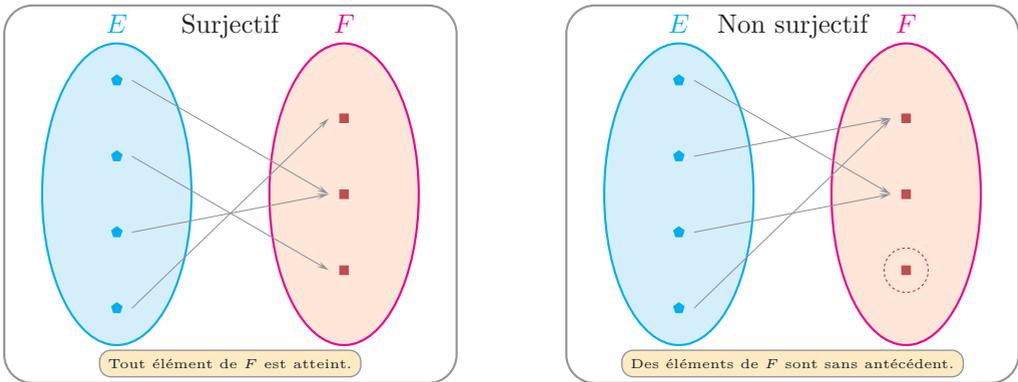


FIGURE 1.15 – Concept de surjection.

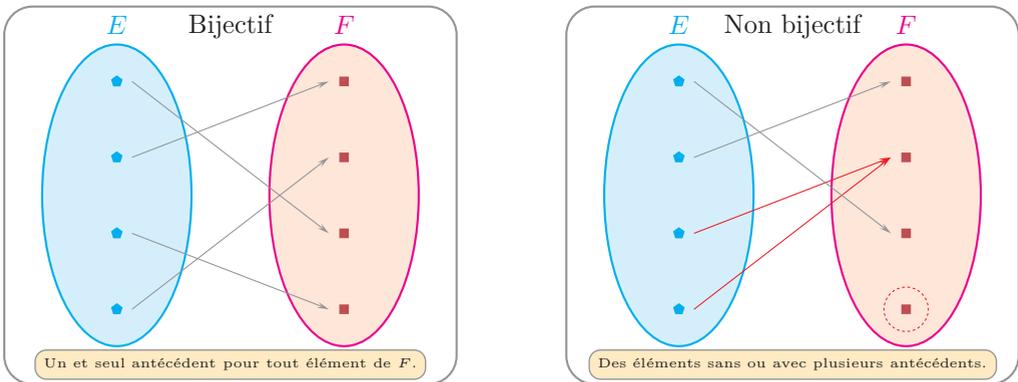


FIGURE 1.16 – Concept de bijection.

En revanche, elle est surjective puisque pour tout réel y positif, on peut trouver au moins un réel x tel que $y = x^2$, par exemple \sqrt{y} .

- L'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n^2 \end{aligned}$$

est injective. En effet, supposons qu'il existe deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que :

$$f(n_1) = f(n_2)$$

$$n_1^2 = n_2^2$$

$$(n_1 - n_2)(n_1 + n_2) = 0$$

$$n_1 = n_2 \text{ ou } n_1 + n_2 = 0$$

Mais, comme n_1 et n_2 sont des entiers naturels, la condition $n_1 + n_2 = 0$ entraîne $n_1 = n_2 = 0$. Dans tous les cas, on a $n_1 = n_2$ d'où l'injectivité de l'application f .

En revanche, cette application n'est pas surjective puisqu'il existe des éléments de l'ensemble d'arrivée (par exemple 2 ou 3) qui n'ont pas d'antécédent dans \mathbb{N} .

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Alors f est nécessairement injective. En effet, si x_1 et x_2 sont deux éléments distincts, on a $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$, mais par stricte croissance de f , ceci implique $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Il en est de même pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement décroissante.

- L'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x$$

est bijective puisque d'une part $e^x = e^y \implies x = y$ d'où l'injectivité et d'autre part, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = e^x$, à savoir $x = \ln(y)$, d'où la surjectivité. On renvoie le lecteur à la page 581 pour une construction rigoureuse de la fonction exponentielle.

Remarques

- La restriction d'une injection $f : E \rightarrow F$ à une partie $E' \subseteq E$ reste une injection. La restriction se note $f|_{E'}$.
- Toute application $f : E \rightarrow F$ peut être « rendue » surjective en restreignant l'ensemble d'arrivée à $f(E)$. Une telle opération est parfois appelée *corestriction* et est notée $f|^{f(E)}$.
- La surjectivité d'une application $f : E \rightarrow F$ assure au moins un antécédent à tout élément y de l'ensemble F . Si, de plus, f est injective, y ne peut avoir plusieurs antécédents. En conséquence, on a une nouvelle formulation pratique de la bijectivité :

$$f : E \rightarrow F \text{ est bijective} \iff \forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$$

Théorème 5 (Composition d'injections, de surjections et de bijections)

La composée⁴² de deux injections est une injection.

La composée de deux surjections est une surjection.

La composée de deux bijections est une bijection.

Démonstration

Soient E , F et G trois ensembles.

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G .

⁴² La composée (ou la composition) de deux applications $f : E \rightarrow F$ suivie de $g : F \rightarrow G$, notée $g \circ f$ est l'application :

$$g \circ f : E \rightarrow G \\ x \mapsto g(f(x))$$

En général $g \circ f \neq f \circ g$.

Supposons f et g injectives. Montrons que $g \circ f$ l'est également.

Soient z_1 et z_2 deux éléments de G tels que :

$$g \circ f(z_1) = g \circ f(z_2)$$

Mais puisque g est injective : $f(z_1) = f(z_2)$

Et comme f l'est également : $z_1 = z_2$

D'où l'injectivité de $g \circ f$.

Supposons f et g surjectives. Montrons que $g \circ f$ l'est également.

Soit z un élément de G .

Comme g est surjective, il existe y dans F tel que $g(y) = z$.

Mais comme f est surjective, il existe x dans E tel que $f(x) = y$.

Ainsi, on a $g \circ f(x) = z$ ce qui prouve la surjectivité de $g \circ f$.

Supposons f et g bijectives.

Alors f et g sont à la fois des injections et des surjections.

Mais d'après ce qui précède, on en déduit que $g \circ f$ est injective et surjective.

Ce qui, par définition, permet de conclure que $g \circ f$ est bijective.

Définition 11 (Bijection réciproque)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective.

L'application, notée f^{-1} , qui à tout élément y de F associe son unique antécédent x dans E , est appelée la *bijection réciproque* de f .

En conséquence, la bijection réciproque f^{-1} de f est bien bijective (ouf!) et on a :

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ et } \begin{cases} f^{-1} \circ f = Id_E \\ f \circ f^{-1} = Id_F \end{cases}$$

Notons que si f est une surjection de E dans F et s'il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

En effet, soit $x \in E$. Notons x' un antécédent de $f(x)$. On a donc $f(x') = f(x)$ et en composant par g :

$$g \circ f(x') = g \circ f(x)$$

Et comme, par hypothèse $g \circ f = Id_E$, on en déduit $x' = x$ donc f est injective et donc, par suite, bijective. De plus, si on note $y = f(x)$, on a $g(y) = g(f(x)) = x$ donc g envoie y sur x , on a donc bien $g = f^{-1}$.

Exemple

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

Montrons que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur un ensemble que l'on précisera et déterminons sa bijection réciproque.

Des inégalités $0 \leq x < x+1$, on déduit facilement $0 \leq f(x) < 1$. Donc $f(\mathbb{R}_+) \subseteq [0, 1[$.

Soit $y \in [0, 1[$. Cherchons s'il existe un réel positif x tel que $f(x) = y$ i.e. :

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} &= y \\ x &= y(1+x) = y + xy \\ x(1-y) &= y \end{aligned}$$

Et comme $y \neq 1$, on en déduit :

$$x = \frac{y}{1-y}$$

Ainsi, tout élément y de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent x dans \mathbb{R}_+ .

On en déduit que la fonction f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans $[0, 1[$.

On obtient une expression de la bijection réciproque en permutant les rôles de x et y :

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0, 1[&\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

On peut vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1+x-x}{1+x}} = x$$

On vérifie, de même, que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $f \circ f^{-1}(x) = x$.

Du fait du rôle permuté des images et antécédents entre bijection et bijection réciproque, les représentations graphiques de f de f^{-1} sont symétriques par rapport à la « première diagonale » $\Delta : y = x$.

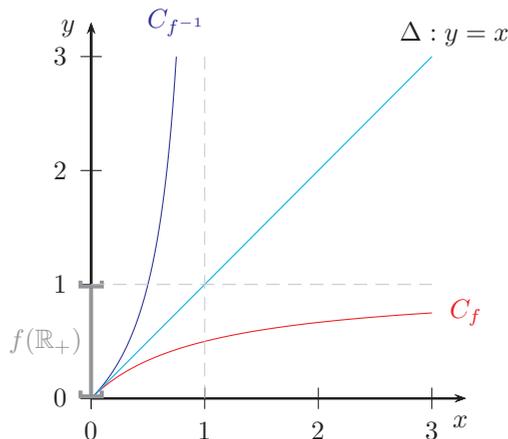


FIGURE 1.17 – Une bijection (de \mathbb{R}_+ dans $[0, 1[$) et sa réciproque.

1.9 Cardinaux

On a envie de dire que le cardinal d'un ensemble est son nombre d'éléments. Nous savons que, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ contient n éléments mais quel est, par exemple, le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E ? Comment dénombrer ces éléments tout en étant sûr de ne pas en avoir oublié? Ces notions ne sont pas aussi évidentes qu'on pourrait le croire et nous allons, ici, définir la notion de cardinal d'un ensemble à partir du concept de bijection. Ainsi, si on trouve une bijection entre un ensemble E et l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, nous pourrions affirmer que l'ensemble E en question possède exactement n éléments. À condition de s'être bien assuré que si un tel entier n existe, il est unique. . .

1.9.1 Vers la notion de cardinal - Compléments⁴³

Nous aurons besoin, dans un premier temps, de quelques petits lemmes préalables ne faisant intervenir que des ensembles de référence du type $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Lemme 1

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $e \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Il existe une bijection entre $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{e\}$.

Ce que dit ce lemme est tout simple : si on enlève un élément e à $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pourra toujours mettre l'ensemble obtenu en bijection avec $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Mais pour prouver cette « évidence », nous nous devons d'« exhiber » la bijection!

Démonstration

Considérons l'application f définie par :

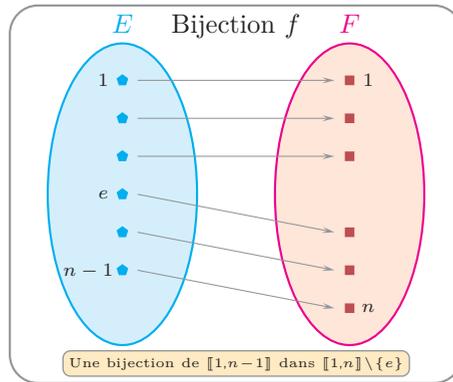
$$f : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{e\}$$

$$m \longmapsto f(m) = \begin{cases} m & \text{si } 1 \leq m < e \\ m+1 & \text{si } e \leq m \leq n-1 \end{cases}$$

Cette application est bien définie, puisque pour tout m de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on aura bien $f(m) \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{e\}$.

Notons, pour la suite de la démonstration $E = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $F = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{e\}$.

43. Cette partie est hors programme des classes préparatoires.



Montrons que f est **injective**.

Soient m_1 et m_2 dans E tels que $f(m_1) = f(m_2)$.

Procédons par disjonction des cas.

- Si $m_1 < e$ et $m_2 < e$ alors $f(m_1) = m_1$ et $f(m_2) = m_2$ d'où $m_1 = m_2$.
- Si $m_1 \geq e$ et $m_2 \geq e$ alors $f(m_1) = m_1 + 1$ et $f(m_2) = m_2 + 1$ d'où $m_1 + 1 = m_2 + 1$ et en conséquence $m_1 = m_2$.
- Si $m_1 < e$ et $m_2 \geq e$ alors $f(m_1) = m_1 < e$ et $f(m_2) = m_2 + 1 > e$, ce cas ne peut se produire puisqu'on a supposé $f(m_1) = f(m_2)$.
- Si $m_1 \geq e$ et $m_2 < e$ alors $f(m_1) = m_1 + 1 > e$ et $f(m_2) = m_2 < e$, ce cas ne peut se produire non plus.

Dans tous les cas envisageables on a $m_1 = m_2$ donc f est injective.

Montrons que f est **surjective**.

Soit $m \in F$. Trouvons-lui un antécédent.

- Si $m < e$ alors m lui-même convient puisque dans ce cas $f(m) = m$.
- Si $m > e$ alors $m - 1 \geq e$ convient puisque dans ce cas $f(m - 1) = (m - 1) + 1 = m$.

Tout élément de F admet un antécédent dans E par f ce qui prouve la surjectivité.

En conclusion f est bijective d'où le lemme.

Remarque

Le lemme ci-dessus reste encore valable si $n = 1$ car, dans ce cas, la question est de savoir si une application f de \emptyset dans \emptyset est bijective et la réponse est affirmative! En effet, existe-t-il des éléments x_1 et x_2 distincts de l'ensemble de départ ayant même image? Non, donc on ne peut pas dire que f n'est pas injective. Existe-t-il des éléments dans l'ensemble d'arrivée sans antécédent? Non, donc on ne peut pas dire que f n'est pas surjective. Donc f est bien bijective.

Une première application de ce lemme est le corollaire suivant.

Corollaire 2

Pour toute partie A de $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe une bijection de A sur $\llbracket 1, m \rrbracket$ où $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ce corollaire permettra de démontrer un peu plus loin que toute partie d'un ensemble fini est également finie.

Démonstration

On pourrait faire une démonstration par récurrence sur n mais on peut être plus efficace en utilisant le lemme précédent. Considérons l'ensemble K des entiers naturels k pour lesquels il existe une injection de A dans $\llbracket 1, k \rrbracket$:

$$K = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists f : A \longrightarrow \llbracket 1, k \rrbracket \text{ injective}\}$$

Cet ensemble est une partie de \mathbb{N} qui est **non vide** puisque qu'elle contient l'entier n . En effet, l'application de A dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui à tout élément de A s'associe à lui-même⁴⁴ est injective. D'après l'axiome 1, page 35 l'ensemble K admet donc un plus petit élément m (et on a $1 \leq m \leq n$). Ainsi, il existe une injection f de A dans $\llbracket 1, m \rrbracket$.

Supposons un instant que f ne soit pas surjective, alors il existerait un élément $e \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $e \notin f(A)$. On peut alors considérer l'application \tilde{f} définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : A &\longrightarrow \llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{e\} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Cette application \tilde{f} est toujours injective (puisque f l'est).

Par ailleurs, d'après le lemme 1, il existe une bijection g entre $\llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{e\}$ et $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$. Ainsi, la composée $g \circ \tilde{f}$ serait une injection de A dans $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$ ce qui contredirait la minimalité de m . En conclusion f est surjective, donc bijective.

Poursuivons avec un second lemme très utile...

Lemme 2

Soient n et m deux entiers naturels non nuls.

S'il existe une injection f de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ alors $n \leq m$.

44. Si $A \subseteq B$, alors l'application :

$$\begin{aligned} i : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

s'appelle une *injection canonique*. C'est clairement une injection, car $i(x_1) = i(x_2) \implies x_1 = x_2$. De plus, on a $i(A) = A$.

Index

A

absurde (raisonnement par l'–), 31, 108
 accroissement(s)
 égalité des – finis, 470
 inégalité des – finis, 476
 moyen, 444
 théorème des – finis, 470
 théorème des – finis généralisés, 472
 adhérence, 378
 valeur d'–, 285
 al jabr, 166
 Al-Khwārizmī, 166
 analyse - synthèse, 133
 angles associés, 597
 anneau, 153
 antécédent, 23
 antisymétrie, 158
 application
 bijective, 43
 définition d'une –, 24
 injective, 43
 surjective, 43
 approximation
 affine, 450
 d'une fonction continue, 422
 arccosinus, 610
 archimédien
 corps –, 201
 groupe non –, 203
 Archimède, 89, 188, 192, 247
 notice biographique, 664
 arcsinus, 608
 arctangente, 612
 argcosh, 628
 argsinh, 626
 argth, 629
 arithmétique

 moyenne –, 574
 suite –, 73, 79
 théorème fondamental de l'–, 108
 arrangement, 64
 asymptotique (développement –), 738

B

Bachet, 489
 Bachmann (notice biographique), 298
 Banach (notice biographique), 427
 Bernoulli (Jacques), 746
 épreuve de –, 72
 équation différentielle de –, 800
 inégalité de –, 81
 nombres de –, 525, 563
 notice biographique, 565
 Bernoulli (Jean), 487
 Bernstein (Felix), 52
 bijection
 continuité de la – réciproque, 414
 définition, 43
 dérivée de la – réciproque, 462
 réciproque, 46
 théorème de la –, 403
 binôme
 coefficients du –, 67
 de Newton, 70
 binomiale
 loi –, 72
 Bioche, 714
 Bolzano, 370
 notice biographique, 290
 théorème de – Weierstrass, 288
 Bonnet, 700, 702
 notice biographique, 701
 Boole (notice biographique), 19

- borne supérieure, 175
 - axiome de la $-$, 178
 - et suite, 184
- boule, 371
- Bouniakowsky, 224, 735
- boustrophédon, 526
- brachistochrone, 565
- Briggs, 588, 591
- Bürgi, 591

- C

- calculs sommatoires, 60
- Cantor, 52, 145, 148
 - notice biographique, 138
 - théorème de $-$, 137
- caractérisation séquentielle
 - de la borne supérieure, 184
 - de la continuité, 438
- cardinal, 13, 54
- cartésien (produit $-$), 16
- Cauchy, 370
 - inégalité de $-$ Schwarz, 224, 735
 - notice biographique, 257
 - problème de $-$, 581
- Cauchy-Lipschitz
 - théorème de $-$ d'ordre 1, 771
 - théorème de $-$ d'ordre 2, 785
- Cavalieri, 663
- Cesàro (théorème de $-$), 344, 433
- changement de variable, 695
- charge d'un condensateur, 810
- Chasles, 680
 - notice biographique, 684
- circonférence d'un cercle, 190
- classe
 - d'équivalence, 156
 - fonction de $- C^k$, 481
- coefficients
 - binomiaux, 67, 339
 - binomiaux généralisés, 132
- Collatz (suite de $-$), 34
- Collins (John), 614
- combinaison, 64
- comparaison
 - logarithmique, 345
 - relations de $-$, 293
 - tests de $-$ pour les séries, 326
 - tests de $-$ pour les suites, 260
 - théorème de $-$ pour les suites, 263
- compatibilité
 - avec l'ordre, 106, 261
 - avec les lois, 160
- complémentaire, 14

- composition
 - d'applications, 45
 - de limites, 375
- condition(s)
 - de Cauchy, 786
 - de Dirichlet, 786
 - nécessaire, 21
 - suffisante, 21
- conjonction, 18
- constante
 - d'Euler, 266, 332
 - variation de la $-$, 768
- continuité
 - définition, 96, 385
 - de l'exponentielle, 584
 - de la bijection réciproque, 414
 - par morceaux, 400
 - prolongement par $-$, 399
 - uniforme, 416
- contractante (fonction $-$), 417
- contraposition, 31
- contre-exemple
 - à la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires, 406
 - au théorème de Rolle dans \mathbb{C} , 468
 - principe, 29
- convergence
 - absolue (d'une série), 330
 - en moyenne, 344
 - uniforme, 424
- convexe
 - fonction $-$, 526
 - partie $-$, 198
- corestriction d'une application, 45
- corps, 152, 153
 - des réels, 145
- cosh
 - définition, 620
 - introduction, 617
- cosinus
 - dérivabilité du $-$, 601
 - divergence de la fonction $-$, 102
 - divergence de la suite $(\cos(n))$, 288
 - fonction $-$, 593
 - limite de l'accroissement moyen en 0, 600
- coupure de Dedekind, 145
- critère
 - d'équivalence, 310
 - d'intégrabilité, 676
 - de comparaison logarithmique, 345
 - de domination, 297
 - de l'équivalent (pour les séries), 329
 - de négligeabilité, 303

D

Darboux
 notice biographique, 673
 sommes de $-$, 671, 672, 674
 théorème de $-$, 555

datation au carbone 14, 811

De Moivre, 487, 604
 formules de $-$, 604
 notice biographique, 605

De Morgan
 lois de $-$, 20
 notice biographique, 21

décomposition
 en éléments simples, 711
 en facteurs premiers, 108

Dedekind, 264
 coupures de $-$, 148
 notice biographique, 148

dénombrabilité (non $-$ de \mathbb{R}), 139

dense (partie $-$), 208, 380, 438

densité
 de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , 208
 de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} , 208

dérangement, 139

dérivabilité
 de l'exponentielle, 586
 du cosinus, 601
 du logarithme, 590
 du sinus, 601
 en un point, 444

dérivée(s)
 d'un produit, 456
 d'un quotient, 456
 d'une bijection réciproque, 462
 d'une composée, 459
 d'une somme, 456
 fonction $-$, 453
 successives, 480

Desargues, 109

Descartes, 71, 267

développements limités, 497
 formulaire, 524

diagonale de Cantor, 139

différence
 ensembliste, 14
 symétrique, 14

Dirichlet, 52, 212
 fonction de $-$, 405, 436, 550, 679
 principe des tiroirs, 52

disjonction
 définition, 18
 des cas, 49, 138

distance, 170

distributivité, 152

domaine
 convexe, 198
 de définition d'une fonction, 24

double sommation, 61

droite numérique achevée, 183

duplication
 hyperbolique, 624
 trigonométrique, 598

E

égalité
 cas d' $-$ dans l'inégalité triangulaire, 169
 des accroissements finis, 470

élément
 absorbant, 152
 infidèle, 137
 maximal, 164
 neutre, 149

ensemble(s)
 dénombrable, 137
 de nombres, 12
 des parties, 13, 59
 disjoints, 54
 quotient, 158

Epiménide, 16

équation
 au(x) point(x) fixe(s), 101
 caractéristique, 779
 de la tangente, 450

équation différentielle, 761
 à variables séparables, 813
 du premier ordre, 764
 du premier ordre avec second membre non nul,
 767
 du premier ordre homogène, 764
 du premier ordre non normalisée, 772
 du premier ordre normalisée, 764
 du second ordre, 778
 du second ordre à coefficients variables, 809
 linéaire, 763
 sans second membre, 762

équipotence, 55

équivalence
 classes d' $-$, 157
 de fonctions, 518, 521
 logique, 22

escalier (fonction en $-$), 401

espace
 complet, 291
 de Banach, 427
 métrique, 370
 topologique, 374

vectériel, 91, 324, 766, 779

Euclide, 68, 108

- lemme d'–, 110
- notice biographique, 109

Eudoxe de Cnide, 661

Euler, 369, 604, 746

- constante d'–, 266, 312, 332
- équation d'–, 808
- formules d'–, 130, 604
- méthode d'–, 776
- notice biographique, 267

exhaustion, 89

exponentielle

- complexe, 319, 602
- construction, 581
- développement en série, 758
- de base a , 590

exposants conjugués, 577

extractrice, 285

extremum

- d'une fonction, 463
- local, 464, 476

F

factorielle, 39

fermé(e)

- boule –, 371
- intervalle –, 196
- partie –, 380

Fermat, 443, 489

- notice biographique, 444

Fibonacci, 247

fibre, 25

fonction(s)

- à dérivée nulle, 473
- caractéristique, 59
- concave, 528
- continue, 96, 385
- contractante, 417
- convexe, 526
- croissante, 474
- croissante et majorée, 181, 185
- définition d'une –, 24
- dérivée, 453
- de classe C^k , 481
- de classe C^∞ , 481
- de Dirichlet, 405, 436, 550, 679
- de Lambert, 636
- en escalier, 401, 667
- exponentielle, 494, 581
- exponentielle complexe, 602
- exponentielles de base a , 590
- homographique, 458
- impaire, 90, 113, 133
- indicatrice, 59
- indicatrice d'Euler, 267
- intégrable, 672
- lipschitzienne, 417, 478
- ln, 587
- monotone, 391
- paire, 90, 133
- périodique, 92
- polynôme, 397
- puissances, 592
- rationnelle, 397
- réglée, 391, 425, 436, 675
- strictement croissante, 474
- trigonométriques, 593
- uniformément continue, 419

formulaire

- dérivées, 542
- développements limités, 524
- primitives, 708
- trigonométrie, 634

formule(s)

- d'addition (trigonométrie circulaire), 595
- d'addition (trigonométrie hyperbolique), 623
- d'Euler, 130, 604
- d'Euler - Maclaurin, 731
- d'inversion de Pascal, 139
- de Carnot, 598
- de Du Bois-Reymond, 705
- de duplication, 598
- de duplication (hyperboliques), 624
- de la moyenne, 700
- de la moyenne (bis), 702
- de Leibniz, 483
- de linéarisation, 598
- de linéarisation (hyperboliques), 624
- de Machin, 656
- de Moivre, 604
- de Newton-Leibniz, 691
- de Plouffe, 751
- de Simpson, 651, 732
- de Stirling, 742
- de Strassnitzky, 657
- de Taylor-intégrale, 706
- de Taylor-Lagrange, 706
- de Taylor-Laplace, 706
- de Taylor-Young, 495
- de Vandermonde, 134
- de Werner, 597
- des trapèzes, 720
- du binôme, 70
- du multinôme, 70
- du sinus sous forme de produit infini, 750

Fréchet, 374

Frege, 248
frontière, 378

G

Galilée, 71
Gauss, 148, 770
 intégrale de – Laplace, 755
gendarmes (théorème des –), 86, 105, 376
géométrie
 moyenne –, 574
 série –, 89, 321, 322
 suite –, 76, 81, 87
 suite – complexe, 321
Gödel, 16
Gregory, 487, 493, 614
 notice biographique, 668
groupe, 149
 abélien, 149
 commutatif, 149
 de permutations, 150
 des bijections, 150
 non commutatif, 150
 symétrique, 150
Gudermann, 647

H

Halley, 489, 605
harmonique
 moyenne –, 574
 série –, 256, 263
 série – alternée, 332, 491, 614
Hausdorff, 385
 notice biographique, 374
Heine
 notice biographique, 422
 théorème de –, 420
Héron d'Alexandrie, 247, 265
Hilbert, 109
Höené, 806
Hölder (inégalité de –), 577
homéomorphisme, 237
homographique
 fonction –, 458
 suite –, 75, 78
Huygens, 444, 589

I

Ibn Yunus, 598
image, 23
 d'un intervalle par une fonction continue, 411

 directe d'une partie, 25
 réciproque d'un ouvert, 385
 réciproque d'une partie, 25
implication, 22
indicatrice
 d'Euler, 267
 de \mathbb{Q} , 405, 679
 fonction –, 59
indivisibles (méthode des –), 663
inégalité(s)
 de Bernoulli, 81, 87
 de Cauchy-Schwarz, 224, 735
 de Hölder, 577
 de Jensen, 572
 de la moyenne, 683
 de Minkowski, 224
 de Taylor-Lagrange, 494
 des accroissement finis, 476
 triangulaire (pour les intégrales), 680
 triangulaires, 169, 170
infinitude des nombres premiers, 108
inflexion (point d'–), 523, 536
injection, 43, 136
 canonique, 50
intégrale
 d'une fonction complexe, 692
 d'une fonction en escalier, 668
 d'une fonction impaire, 698
 d'une fonction périodique, 699
 d'une fonction paire, 698
 de Gauss-Laplace, 755
 de Wallis, 740
 nulle, 685
intégration
 par changement de variable, 695
 par parties, 692
intérieur, 378
intersection
 d'ensembles, 14
 d'intervalles, 200
intervalle, 200
irrationnel (nombre –), 36, 146
isochrone (courbe –), 565

J

Jensen (inégalité de –), 572
Jones (Williams), 267
Jordan (Camille), 188

K

Kepler, 71, 591

Kramp (Christian), 39

Kronecker, 138

L

Lagrange, 19, 32, 257, 402, 447, 465, 467, 470, 483, 486, 687, 768

notice biographique, 489

Laguerre, 484

Lambert

fonction de $-$, 636

notice biographique, 622

Landau (notations de $-$), 298

Laplace, 19, 257, 706

notice biographique, 770

Leibniz, 443, 487, 605, 614, 667, 691, 693

formule de $-$, 483

lemme

d'Euclide, 110

de Riemann-Lebesgue, 754

des trois pentes, 529

lemniscate, 565

limite(s)

à droite, à gauche, 389

comparaison de $-$, 104

d'une fonction, 102, 374

d'une fonction composée, 375

d'une fonction dans \mathbb{C} , 377

en un point, 387

théorème de la $-$ monotone, 264

unicité, 251, 387

linéarisation

en trigonométrie circulaire, 598

en trigonométrie hyperbolique, 624

linéarité

de l'intégrale, 680

de la dérivation, 458

Lipschitz

notice biographique, 419

théorème de Cauchy $-$, 771, 785

lipschitzienne (fonction $-$), 417

liste, 64

logarithme

décimal, 592

de base a , 592

népérien, 587

loi(s)

associative, 149

binomiale, 72

commutative, 149

de composition interne, 149

de De Morgan, 20

M

Méray, 145

notice biographique, 146

méthode

de Simpson, 722, 732

des rectangles, 716

des trapèzes, 719

Machin, 487

formule de $-$, 656

Maclaurin, 491, 731

notice biographique, 491

Madhava, 614

majorant, 173

Matsuoka, 746

Mengoli, 67, 746

notice biographique, 362

Mercator, 507, 589, 647

Mersenne, 68

Minkowski, 224

minorant, 173

modus ponens, 22

Moivre (formules de De $-$), 604

Monge, 257

Morgan (lois de De $-$), 20

moyenne

arithmético-géométrique, 354

arithmétique, 353, 354, 574

géométrique, 353, 354, 574

harmonique, 353, 574

quadratique, 574

N

Napier (Neper)

notice biographique, 591

négation

d'une assertion, 18

d'une implication, 22

d'une phrase quantifiée, 28

Newton, 443, 487, 491, 507, 589, 605, 609, 668, 684, 691, 732, 797

formule du binôme de $-$, 70

loi de refroidissement de $-$, 797

notice biographique, 71

nombre(s)

π , 185, 195, 274

e , 272, 585

algébrique, 148

d'or, 335, 339, 479

de Bernoulli, 525, 563

impairs (propriétés), 126

irrationnel, 36, 146

premier, 107

rationnel, 147
transcendant, 622

O

ordre

lexicographique, 160
partiel, 159

Oresme, 129, 258

ouvert(e)

boule $-$, 371
intervalle $-$, 196
partie $-$, 380

Ozanam, 469, 605

P

paradoxe du menteur, 16

paramétrage d'un segment, 197

pari de Pascal, 68

partie

convexe, 198
d'un ensemble, 13, 59, 132
dense, 380, 438
entière d'un réel, 204
fractionnaire d'un réel, 205
négative d'un réel, 167
positive d'un réel, 167
principale d'un développement limité, 498
régulière d'un développement limité, 497

pas d'une subdivision, 400

Pascal, 38, 139, 444, 469, 663

formule d'inversion de $-$, 139
notice biographique, 68
relation de $-$, 67
triangle de $-$, 69

Peano, 36, 247

pentagone (construction), 653

pentés (lemme des trois $-$), 529

permutation, 64

Plouffe, 751

plus grand élément, 163

plus petit élément, 163

Poincaré, 38, 138, 701

point

adhérent, 378
d'accumulation, 379
d'inflexion, 523, 536
intérieur, 378
isolé, 379
théorème du $-$ fixe, 425, 479

polygone

inscriptible, 575
régulier, 575

polynômes

de Laguerre, 484
de Tchebychev, 657
multiplication de $-$, 143

primitives, 687

problème

de Bâle, 745
de Cauchy, 581
différentiel, 771

produit

cartésien, 16

prolongement

des identités, 438
par continuité, 399

prosthaphérèse, 598

Ptolémée, 109

Q

quadratique (moyenne $-$), 574

quadrature, 664

quantificateurs, 28

Quetelet, 775

R

racine n -ième, 463

raisonnement

par analyse - synthèse, 133
par contraposition, 31
par disjonction des cas, 49, 138
par implication, 655
par l'absurde, 31, 108
par récurrence, 38

rectangles (méthode des $-$), 716

récurrence, 37, 41

finie, 39

forte, 109

réflexivité d'une relation, 155

règle(s)

d'Abel, 702
de Bioche, 714

relation, 23

antisymétrique, 158
binaire, 153
d'équipotence, 55
d'équivalence, 155
d'appartenance, 11
d'Euler, 267
d'inclusion, 13
d'ordre, 158
d'ordre sur C , 161
de Chasles, 680
de comparaison, 293

- de divisibilité, 158
 - de domination, 295
 - de négligeabilité, 302, 496
 - diagonale, 67
 - fondamentale de la dynamique, 799
 - irréflexive, 159
 - réflexive, 155
 - symétrique, 155
 - transitive, 155
 - restriction d'une application, 45
 - Riccati (Jacopo)
 - équation différentielle de –, 802
 - Riccati (Vincenzo)
 - notice biographique, 621
 - Riemann, 666, 746, 754
 - lemme de – Lebesgue, 754
 - séries de –, 350, 561
 - somme de –, 674
 - sommes de –, 716
 - Rolle
 - notice biographique, 469
 - théorème de –, 466, 554
 - Russel, 11
- S**
- séparation d'une distance, 170
 - Schwarz (inégalité de Cauchy –), 224, 735
 - secteur parabolique, 661
 - segment(s), 196
 - emboîtés, 273
 - semi-convergence, 332
 - sens de variation
 - d'une fonction dérivable, 474
 - séparation (de la valeur absolue), 167
 - série(s), 322
 - de Gregory-Leibniz, 614
 - de Madhava, 614
 - de Mengoli, 361
 - de Riemann, 327, 348, 350, 561
 - géométrique, 89, 322
 - géométrique complexe, 321
 - harmonique, 256, 263
 - harmonique alternée, 491, 614
 - Simpson (méthode de –), 732
 - sinh
 - définition, 620
 - introduction, 617
 - sinus
 - dérivabilité du –, 601
 - divergence de la fonction –, 102
 - divergence de la suite $(\sin(n))$, 288
 - fonction –, 593
 - fonction – cardinal, 399
 - limite de l'accroissement moyen en 0, 600
 - produit infini, 750
 - Sobolev, 427
 - sommation
 - de relation de comparaison, 358
 - double –, 63
 - somme(s)
 - de Riemann, 716
 - de termes d'une suite arithmétique, 79
 - de termes d'une suite géométrique, 81
 - des carrés, 124
 - des cubes, 124
 - sommes
 - de Darboux, 671, 672, 674
 - de Riemann, 674
 - Steinhaus, 427
 - Stifel, 67, 588
 - Stirling, 367, 746
 - formule de –, 605, 742
 - notice biographique, 745
 - Strassnitzky (formule de –), 657
 - Sturm, 469
 - subdivision
 - adaptée, 400
 - d'un segment, 399
 - pointée, 674, 716
 - suite
 - sous-géométrique, 88
 - suite(s)
 - adjacentes, 269, 350
 - arithmétique, 73
 - bornée, 33
 - complexe, 316, 360
 - constante, 33
 - convergente, 84, 248
 - croissante, 33
 - de Cauchy, 254
 - de Collatz, 34
 - de Fibonacci, 247
 - de Héron, 242
 - de Syracuse, 34
 - décroissante, 33
 - définition d'une –, 32
 - divergente, 84, 249
 - équivalentes, 309
 - extraite, 285, 333
 - géométrique, 76
 - homographique, 75, 78
 - implicite, 346
 - majorée, 33
 - minorée, 33
 - monotone, 33
 - périodique, 33
 - stationnaire, 33, 123

surjection, 43, 139
 symétrie
 d'une distance, 170
 d'une relation, 155
 des coefficients binomiaux, 67

T

table de vérité, 18
 tangente
 à une courbe, 450
 développement limité, 513
 fonction –, 593
 Taylor
 formule de – Lagrange, 486, 707
 formule de – reste intégral, 706
 formule de – Young, 495
 formules de –, 485
 notice biographique, 487
 Tchebychev (polynômes de –), 657
 théorème
 de Bolzano-Weierstrass, 288
 de Cantor, 137
 de Cantor-Bernstein, 52
 de Cauchy-Lipschitz, 771, 785
 de Cesàro, 344, 357, 433
 de comparaison, 104
 de comparaison (pour les suites), 260
 de compatibilité avec l'ordre, 106, 261
 de Darboux, 555
 de Dedekind, 264
 de Heine, 420
 de la bijection, 403
 de la limite de la dérivée, 553
 de prolongement des identités, 438
 de Rolle, 466
 de Rolle généralisé, 554
 de Stolz, 356
 de Thalès, 115
 des accroissements finis, 470
 des accroissements finis généralisés, 472
 des bornes, 411
 des chapeaux, 143
 des gendarmes, 86, 105, 376
 des segments emboîtés, 273
 des valeurs intermédiaires, 402
 du maximum, 411
 du point fixe, 410, 425, 479
 fondamental de l'analyse, 689
 fondamental de l'arithmétique, 108
 tiroirs (principe des –), 52
 topologie, 370
 total (ordre –), 159
 transitivité d'une relation, 155

trapèzes (méthode des –), 719
 triangle de Pascal, 69
 trigonométrie, 593
 formulaire, 634
 troncature d'un développement limité, 498

U

unicité
 d'un développement limité, 499
 d'un plus grand élément, 163
 d'un point fixe, 426
 de la borne supérieure, 175
 de la limite, 251, 387
 de la solution au problème de Cauchy, 587
 uniforme
 continuité –, 416
 convergence –, 424
 union
 d'ensembles, 14
 d'intervalles, 200
 disjointe, 14

V

valeur(s)
 absolue, 164
 d'adhérence, 285
 intermédiaires, 406
 intermédiaires (théorème des –), 402
 valuation p -adique, 147
 Vandermonde (formule de –), 134
 variation de la constante (méthode de la –), 769
 Varignon, 469, 621
 Verhulst
 loi logistique de –, 774
 modèle de –, 774
 notice biographique, 775
 Viète, 70, 135
 notice biographique, 166
 voisinage
 d'un point, 372
 de l'infini, 373
 volume d'une boule, 698

W

Wallis, 71, 740, 750
 notice biographique, 697
 Weierstrass, 145
 théorème de Bolzano –, 288
 Werner (formules de –), 597
 Wilson, 489

Wronski (notice biographique), 806
wronskien, 805

Y

Young (formule de Taylor -), 495

Z

Zermelo, 11
zeta(2), 363, 745
Zhu Shijie, 67