



Fonctions mesurables, intégrale de Lebesgue

Exercice 1

Montrer les égalités ensemblistes suivantes :

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left] a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right[\quad \text{et} \quad]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$$

[Correction ▼](#)

[005933]

Exercice 2

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Montrer que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si } f(x) < -A \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq A \\ A & \text{si } f(x) > A \end{cases}$$

est $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

[Correction ▼](#)

[005934]

Exercice 3

Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur \mathbb{N} définie par :

$$\mu(E) = \#E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Montrer que f est $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable et que :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

[Correction ▼](#)

[005935]

Exercice 4

Soit (Ω, Σ) un espace mesurable. On dit que $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction simple* ou *étagée* si φ est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, i.e. si φ s'écrit :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i \neq j$, $c_i \neq c_j$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$. Soit φ une fonction simple positive. On rappelle que l'intégrale de φ par rapport à une mesure μ est définie par :

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^{\infty} \mu(S_{\varphi}(t)) dt,$$

où $S_{\varphi}(t) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > t\}$.

1. Montrer que

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j).$$

2. Montrer que pour toute fonction réelle mesurable positive, $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions simples positives telle que :
- (a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;
 - (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

[Correction ▼](#)

[005936]

Exercice 5

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ (i.e f est une fonction réelle mesurable positive). Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_E \cdot f d\mu.$$

Montrer que λ définit une mesure sur (Ω, Σ) .

[Correction ▼](#)

[005937]

Exercice 6

Soit $p > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}(x).$$

Calculer l'intégrale de f par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n de deux manières différentes :

- (i) En utilisant les coordonnées polaires et les méthodes standard de calcul d'intégrales ;
- (ii) En calculant la mesure des ensembles $S_f(a) = \{x \in \Omega, f(x) > a\}$ et la définition de l'intégrale de Lebesgue.

[Correction ▼](#)

[005938]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Montrons que $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a, b] \subset]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Donc $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.
 - Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a - \frac{1}{n}) \leq x \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (b + \frac{1}{n}),$$

c'est-à-dire $x \in [a, b]$. Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\subset [a, b]$ et on a démontré l'égalité entre ces deux ensembles.

2. Montrons que $]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[\subset]a, b[$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[\subset]a, b[$.
 - Soit $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[$. Ainsi $x \in]a, b[$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[\subset]a, b[$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Montrons que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si } f(x) < -A \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq A \\ A & \text{si } f(x) > A \end{cases}$$

est mesurable. Notons

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) < -A\} = f^{-1}(]-\infty, -A[), \\ E_2 &:= \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leq A\} = f^{-1}([-A, A]), \\ E_3 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) > A\} = f^{-1}(]A, +\infty[). \end{aligned}$$

Comme $]-\infty, -A[$, $[-A, A]$, $]A, +\infty[$ appartiennent à la tribu borélienne et f est $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable, les ensembles E_1 , E_2 , et E_3 appartiennent à Σ . Alors $f_A = f \cdot \mathbf{1}_{E_2} - A \cdot \mathbf{1}_{E_1} + A \cdot \mathbf{1}_{E_3}$ est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur \mathbb{N} définie par :

$$\mu(E) = \#E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Pour tout borélien E , $f^{-1}(E)$ appartient à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc f est $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Par définition de l'intégrale,

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(S_f(t)) dt,$$

où $S_f(t) = \{n \in \mathbb{N}, f(n) > t\}$. Pour tout $y \in [0, +\infty[$, posons $A_y := \{n \in \mathbb{N}, f(n) = y\}$. Alors

$$S_f(t) = \bigcup_{y > t} A_y$$

où l'union est disjointe et où A_y est vide sauf pour un ensemble dénombrable $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de valeurs de y . Par σ -additivité de la mesure μ ,

$$\mu(S_f(t)) = \mu(\bigcup_{y_i > t} A_{y_i}) = \sum_{y_i > t} \mu(A_{y_i}) = \sum_{y_i > t} \mu(\{f = y_i\}).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu &= \int_0^{\infty} \sum_{y_i > t} \mu(\{f = y_i\}) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{0 \leq t < y_i} \mu(\{f = y_i\}) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i \cdot \mu(\{f = y_i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \cdot \#\{n \in \mathbb{N}, f(n) = y_i\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit φ une fonction simple positive :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i \neq j$, $c_i \neq c_j$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$.

1. On a

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^{\infty} \mu(S_{\varphi}(t)) dt,$$

où $S_{\varphi}(t) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > t\} = \cup_{c_j > t} E_j$ et où $\mu(S_{\varphi}(t)) = \sum_{c_j > t} \mu(E_j)$. Ainsi

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^{\infty} \sum_{c_j > t} \mu(E_j) dt = \sum_{j \in J} \int_0^{c_j} \mu(E_j) dt = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned} E_{k,n} &:= \{x \in \Omega, k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\} \quad \text{pour } k = 0, \dots, n2^n - 1, \\ E_{n,n} &:= \{x \in \Omega, f(x) \geq n\} \quad \text{pour } k = n2^n. \end{aligned}$$

Puisque f est mesurable, les ensembles $E_{k,n}$ appartiennent à Σ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, les ensembles $E_{k,n}$, $0 \leq k \leq n2^n - 1$ sont deux à deux disjoints et $\cup_k E_{k,n} = \Omega$. Posons

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} k2^{-n} \mathbf{1}_{E_{k,n}}.$$

Alors φ_n est une fonction simple positive vérifiant $\varphi_n \leq f$. En outre $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$. Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_E \cdot f d\mu.$$

Montrons que λ définit une mesure sur (Ω, Σ) .

1^{ère} méthode : On montre d'abord que l'affirmation est vraie pour les fonctions simples. D'après l'exercice 4, toute fonction $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ s'écrit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$, où les φ_n sont des fonctions simples. Puisque le supremum d'une famille quelconque de mesure est une mesure, on conclut que λ est une mesure.

2^{de} méthode : On a clairement $\lambda(\emptyset) = 0$. Il suffit donc de vérifier la σ -additivité de λ . Soit $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ une suite d'éléments deux à deux disjoints. On a

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f d\mu \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_i}\right) f d\mu = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{1}_{E_i} f) d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} (\mathbf{1}_{E_i} f) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}(x).$$

(i) On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}(x) dx = \int_{|x| < 1} |x|^{-p} dx = \int_{r=0}^1 \int_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} r^{n-p-1} dr d\sigma \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 r^{n-p-1} dr. \end{aligned}$$

Pour $n \leq p$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = +\infty.$$

Pour $p < n$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\frac{r^{n-p}}{(n-p)} \right]_0^1 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

(ii) Pour $a \in [0, +\infty[$,

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p} \mathbf{1}_{|x| < 1} > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p} > a\} \cap \mathcal{B}(0, 1),$$

où $\mathcal{B}(0, 1)$ est la boule de centre 0 et de rayon 1. Ainsi

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, a^{-\frac{1}{p}} > |x|\} \cap \mathcal{B}(0, 1).$$

On en déduit que $S_f(a) = \mathcal{B}(0, 1)$ si $a^{-\frac{1}{p}} > 1$, i.e. si $a < 1$ et que $S_f(a)$ est égale à la boule $\mathcal{B}(0, a^{-\frac{1}{p}})$ de centre 0 et de rayon $a^{-\frac{1}{p}}$ lorsque $a \geq 1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \mu(S_f(a)) da = \int_0^1 \mu(\mathcal{B}(0, 1)) da + \int_1^{+\infty} \mu\left(\mathcal{B}(0, a^{-\frac{1}{p}})\right) da \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_1^{+\infty} a^{-\frac{n}{p}} da. \end{aligned}$$

Si $p \geq n$, on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = +\infty$ et pour $p < n$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left[\frac{a^{-\frac{n}{p} + 1}}{-\frac{n}{p} + 1} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(1 + \frac{p}{n-p} \right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$