L3 Maths : Cours d'Intégration (partie I)
Exercices corrigés

Noureddine Igbida [1]

2012-2013

1. Institut de recherche XLIM, UMR-CNRS 6172, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Limoges 123, Avenue Albert Thomas 87060 Limoges, France. Email : noureddine.igbida@unilim.fr

Table des matières

0.1 Exercices

Exercice 0.1 [résultat réutilisé].

Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.On pose :

$$B_n = A_n \cap (\bigcup_{p=0}^{n-1} A_p)^C \text{ avec } B_0 = A_0$$

Montrer que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

et que les B_i sont disjoints deux à deux.

(Cela signifie que toute réunion dénombrable peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties deux à deux disjointes. On remarquera aussi que si les A_n sont des élements d'une tribu $\mathcal{T}$, alors les B_n appartiennent aussi à cette tribu.)

Exercice 0.2 [Application immédiate et résultat utile].

Soient Ω et E deux ensembles et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application.

1) si $\mathcal{B}$ est une tribu de E, on note :

$$\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω (appelée image réciproque de la tribu $\mathcal{B}$).

Dans le cas où Ω est une partie de E et f définie par $f(x) = x$ pour tout x, on a : $\mathcal{T} = \{\Omega \bigcap B; B \in \mathcal{B}\}$ et on dit que $\mathcal{T}$ est la tribu de Ω induite par la tribu $\mathcal{B}$ de E.

2) Exemple : $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad E = \{0, 1, 4\}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{P}(E), \quad f : x \mapsto x^2$.

Déterminer $f^{-1}(\mathcal{P}(E))$.

3) Si $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω, alors $f(\mathcal{T}) = \{f(B); \quad B \in \mathcal{T}\}$ n'est en général pas une tribu de E. Donner un exemple.

Exercice 0.3 [Application immédiate et résultat utile] : Soit Ω un ensemble et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{A\}$.

Exercice 0.4 : Soient Ω et E deux ensembles et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. On veut montrer que l'image réciproque de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par l'image réciproque de $\mathcal{C}$.

1) Montrer que :

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \text{ et } \mathcal{T} = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

2) On note $\mathcal{T}' = \{B \subset E; f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$. Montrer que $\mathcal{T}'$ est une tribu de E, contenant $\mathcal{C}$.

3) En déduire que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ est inclus dans $f^{-1}(\mathcal{T}')$ et conclure .

4) Application : $\Omega = \{-1, 0, 1\}, \quad E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et $f : x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 0.5 .

Soit μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

1) Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{T}$ alors :

$$\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \bigcap B)$$

2) Si A , B , C sont dans $\mathcal{T}$ alors :

$$\mu(A \bigcup B \bigcup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \bigcap B) - \mu(A \bigcap C) - \mu(B \bigcap C) + \mu(A \bigcap B \bigcap C)$$

Exercice 0.6 .

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable , $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$, n mesures sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, n réels positifs. Pour A dans $\mathcal{T}$ on pose :

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(A)$$

Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ notée $\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu_i$.

Exercice 0.7 .

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$, une suite de mesures sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Pour A dans $\mathcal{T}$ on pose :

$$\mu(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(A)$$

1) Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$, notée $\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i$.

2) On suppose que les μ_n sont des probabilités (c-à -d. $\mu_n(\Omega) = 1$) et on considère une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$.

Vérifier que $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\mu_n$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

3) Vérifier que la mesure discrète définie par :

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\delta_{x_n} \text{ où } \delta_{x_n} \text{ est la mesure de Dirac au point } x_n$$

est telle que :

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_A(x_n)$$

Exercice 0.8 ([Application immédiate].

On considère les mesures suivantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$\mu_1 = \sum_{p\in\mathbb{N}} \delta_p \quad \mu_2 = \sum_{p\in\mathbb{N}} p\delta_p \quad \mu_3 = \lambda$$

où δ_p est la mesure de Dirac en p et λ est la mesure de Lebesgue.

Calculer pour chacune de ces mesures les mesures des ensembles suivants :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = [n, n+1+1/n^2], \quad C_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad D_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

$$C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \quad D = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

Exercice 0.9 .

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, ($\lambda$, mesure de Lebesgue) ; pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ on note : $A + a = \{x + a$ tels que $x \in A\}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1) Montrer que :

$$\mathcal{T}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ tel que } A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

2) montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_a$ puis que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_a$.

3) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on pose $\mu(A) = \lambda(A + a)$. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

4) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a : $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ (invariance de la mesure de Lebesgue par translation.

0.2 Corrigé des exercices :

Exercice 0.1 .

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$B_n = A_n \bigcap (\bigcup_{p=0}^{n-1} A_p)^C = A_n - (\bigcup_{p=0}^{n-1} A_p)$$

$$\text{on a : } B_n \subset A_n \text{ , d'où } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{n_0}$. Soit n_1 le plus petit entier tel que $x \in A_{n_1}$, alors :

$$x \notin A_p \quad \text{pour } p < n_1 \text{ , donc } x \in A_{n_1} - (\bigcup_{p=0}^{n_1-1} A_p) = B_{n_1} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

ainsi :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Vérifions enfin que $B_n \bigcap B_m = \emptyset$ si $m \neq n$.

$$x \in B_n \bigcap B_m \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A_n \text{ et } x \notin A_p \text{ pour } O \leq p \leq n-1 \\ \text{et} \\ x \in A_m \text{ et } x \notin A_p \text{ pour } O \leq p \leq m-1 \end{cases}$$

Si par exemple $m < n$ alors $m \leq n-1$: il y a contradiction ; les B_i sont bien disjoints.

Exercice 0.2 .

1) $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \ ; \ B \in \mathcal{B}\}$. Vérifions que $\mathcal{T}$ est une tribu :

* $\Omega = f^{-1}(E)$ et $E \in \mathcal{B}$ donc $\Omega \in \mathcal{T}$.

* soit $A \in \mathcal{T}$ alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $A = f^{-1}(B)$, on a alors $A^C = f^{-1}(B^C)$ avec $B^C \in \mathcal{B}$, car $B \in \mathcal{B}$; on a donc $A^C \in \mathcal{T}$.

* soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n = f^{-1}(B_n)$ avec $B_n \in \mathcal{B}$. Alors :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \in \mathcal{T}$$

2) Exemple : $\mathcal{P}(E)$ admet 8 éléments. Les éléments de la tribu $f^{-1}(\mathcal{P}(E))$ sont : $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(\{4\}) = \{2\}$, $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{0, -1, 1\}$, etc. On vérifie que l'on obtient dans ce cas 8 éléments distincts.

3) Exemple :

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\} \quad E = \{0, 1, 2\} \text{ et } f : \begin{cases} 0 & \longrightarrow 0 \\ 1 & \longrightarrow 1 \\ 2 & \longrightarrow 2 \\ 3 & \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{T} = \sigma(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \Omega, \{0, 1\}, \{2, 3\}\}$$

$$f(\mathcal{T}) = \{\emptyset, E, \{0, 1\}, \{2, 0\}\} \text{ mais } \{0, 1\}^C = \{2\} \notin f(\mathcal{T})$$

Exercice 0.3 .

On a : $\{\emptyset, \Omega, A, A^C\} \subset \sigma(\{A\})$. L'inclusion inverse découle du fait que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega, A, A^C\}$ est bien une tribu :

* $\mathcal{T}$ contient Ω et le complémentaire de chacun de ces éléments.

* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$; la réunion des A_n est égale à une réunion finie d'éléments distincts de $\mathcal{T}$; or toute réunion de deux éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$ (faire la liste ...) donc toute réunion finie d'éléments distincts de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.

Exercice 0.4 .

1) $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ donc $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$; or $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ est une tribu comme image réciproque d'une tribu. Et donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$

2) soit $\mathcal{T} = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ et $\mathcal{T}' = \{B \subset E \ ; \ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$. Montrons que $\mathcal{T}$' est une tribu de E.

* $E \in \mathcal{T}'$ car $f^{-1}(E) = \Omega \in \mathcal{T}$ qui est une tribu de Ω.

* si $B \in \mathcal{T}'$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ donc $(f^{-1}(B))^C = f^{-1}(B^C) \in \mathcal{T}$. On a donc $B^C \in \mathcal{T}'$.

* soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}'$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}$ donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}$; d'où $f^{-1}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}$. On a donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}'$.

Si $A \in \mathcal{C}$, on a par définition de $\mathcal{T}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ donc, par définition de $\mathcal{T}'$, on a $A \in \mathcal{T}'$. $\mathcal{T}'$ est donc une tribu contenant $\mathcal{C}$

3) on a donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}'$, et par suite $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$.

4) Application : $\mathcal{P}(E)$ est engendré par $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, donc $f^{-1}(\mathcal{P}(E)$ est engendré par la famille formée des éléments : $A = f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\} = A^C$,
$f^{-1}(\{2\}) = f^{-1}(\{3\}) = f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$. Donc $f^{-1}(\mathcal{P}(E)$ est engendré par A et est la tribu : $\{A, A^C, \emptyset, \Omega\}$.

Exercice 0.5 .

Soit μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

1) On a : $A \bigcup B = (A - B) \bigcup (B - A) \bigcup (A \bigcap B)$ (faire un dessin). On en déduit

$$\mu(A \bigcup B) = \mu(A - B) + \mu(B - A) + \mu(A \bigcap B)$$

On déduit de $A = (A - B) \bigcup (A \bigcap B)$ que l'on a $\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \bigcap B)$, on a aussi $\mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A \bigcap B)$.La mesure étant finie on peut soustraire, d'où le résultat.

2) former $A \bigcup B \bigcup C$ comme réunion d'ensembles deux à deux disjoints, en s'aidant d'un dessin éventuellement et procéder comme ci-dessus.

Exercice 0.6 .

* on a évidemment $\mu(\emptyset) = 0$

* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints . On a :

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_i(A_k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)
\end{aligned}$$

(propriété utilisée : $\sum \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$)

Exercice 0.7 .

1) Montrons que $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ est une mesure :

* On a évidemment $\mu(\emptyset) = 0$

* Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. On a :

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_i A_i) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(\bigcup_i A_i) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_n(A_i)) \ \sigma\text{-additivité des } \mu_n \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A_i)) \text{ interversion de l' ordre de sommation} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) \end{aligned}$$

2) Vérifions que si les μ_n sont des probabilités et si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs de “somme” 1 , alors $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\mu_n$ est une probabilité.D'après l'exercice 6 et ce qui précéde, on sait que μ est une mesure. Il reste à constater que l'on a bien :

$$\mu(\Omega) = \sum_n p_n\mu_n(\Omega) = \sum_n p_n = 1$$

3) Cas des mesures discrètes : (x_n) est une suite d'éléments de Ω et (p_n) une suite de réels positifs ; δ_{x_n} est la mesure de Dirac en x_n . Alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mu(A) = \sum p_n\delta_{x_n}(A) = \sum p_n \mathbb{1}_A(x_n)$$

Exercice 0.8 .

$A_1 = [1, 3]$, donc A_1 contient les trois entiers $1, 2, 3$:

$$\mu_1(A_1) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \delta_p(A_1) = \delta_1(A_1) + \delta_2(A_1) + \delta_3(A_1) = 3$$

car $\delta_p(A_1) = 0$ pour $p > 3$. De même , $\mu_2(A_1) = 1.1+2.1+3.1 = 6$. Pour $n > 1$, A_n contient les deux entiers n et $n+1$, donc, $\mu_1(A_n) = 2$ et $\mu_2(A_n) = n.1 + (n+1).1 = 2n+1$. Enfin pour tout n on a : $\lambda(A_n) = 1 + 1/n^2$.Les autres calculs se font de manière analogue. (Voir que $C_n = [1, n+1+1/n^2]$, $C = [1, +\infty]$ $D = D_n = \emptyset$ pour $n > 3$.

Exercice 0.9 .

1)- Montrons que $\mathcal{T}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad / \quad A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} + a = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ donc } \mathbb{R} \in \mathcal{T}_a$$

Soit $A \in \mathcal{T}_a$. On a $A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} A^C + a &= \{x + a \quad / \quad x \in A^C\} = \{y \quad / \quad y - a \notin A\} \\ &= \{y \quad / \quad y \notin A + a\} = (A + a)^C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Donc $A^C \in \mathcal{T}_a$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_a$; par hypothèse, $A_n + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) + a = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n + a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Donc $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}_a$.

2) Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_a$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$]x, y] + a =]x + a, y + a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ donc }]x, y] \in \mathcal{T}_a$$

Donc $\mathcal{T}_a$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, plus petite tribu contenant les intervalles $]x, y]$.

De la même manière , on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_{-a}$. Soit alors $A \in \mathcal{T}_a$ on a $A+a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc $A+a \in \mathcal{T}_{-a}$, donc $(A + a) + (-a) = A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci prouve que $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$

3)- Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $\mu(A) = \lambda(A + a)$. Montrons que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints. Alors

$$(\bigcup_n A_n) + a = \bigcup_n (A_n + a)$$

et les $(A_n + a)$ sont encore deux à deux disjoints. On a donc :

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_n A_n) &= \lambda((\bigcup_n A_n) + a) = \lambda(\bigcup_n (A_n + a)) \\ &= \sum_n \lambda(A_n + a) = \sum_n \mu(A_n) \end{aligned}$$

4)- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a $]x, y] + a =]x + a, y + a]$ .D'où :

$$\begin{aligned} \mu(]x, y]) &= \lambda(]x + a, y + a]) \\ &= y - x = \lambda(]x, y]) \end{aligned}$$

λ et μ coincident sur le semi-anneau des intervalles et λ est σ-finie donc (théorème III-3) λ et μ coincident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \lambda(A + a) = \lambda(A)$$