Mesure et Intégration

Notes de cours
Licence 3 – Semestre 5

UNIVERSITÉ de la NOUVELLE-CALÉDONIE

Ioane Muni Toke

Version 2014

Table des matières

1 Rappels sur l'intégrale au sens de Riemann **5**
1.1 Définition et propriétés élémentaires . . . 5
1.2 Sommes de Riemann . . . 9
1.3 Riemann-intégrabilité et convergence uniforme . . . 10
1.4 Calcul intégral . . . 12
1.5 Intégrales de Riemann généralisées . . . 16
1.6 Limites de l'intégrale au sens de Riemann . . . 19
1.7 Exercices . . . 19

2 Mesure **25**
2.1 Tribus, espaces mesurables . . . 25
2.2 Fonctions mesurables . . . 29
2.3 Fonctions étagées . . . 31
2.4 Mesures . . . 34
2.5 Construction partielle d'une mesure . . . 37
2.6 Unicité d'une mesure . . . 39
2.7 Exercices . . . 43

3 Intégrale par rapport à une mesure positive **47**
3.1 Intégrale d'une fonction étagée réelle positive . . . 47
3.2 Intégrale des fonctions mesurables positives . . . 49
3.3 Fonctions μ-intégrables . . . 52
3.4 Théorème de convergence dominée . . . 53
3.5 Intégrales à paramètres réels . . . 56
3.6 Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue . . . 58
3.7 Intégrale de Lebesgue et primitive . . . 60
3.8 Exercices . . . 63

4 Espaces L^p **67**
4.1 (Non-)Inclusion des espaces $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ . . . 68
4.2 Inégalités de convexité . . . 68
4.3 Espace L^p . . . 70
4.4 Théorèmes de densité . . . 73
4.5 Exercices . . . 74

5 Intégrales multiples **77**
5.1 Tribu produit 77
5.2 Mesure produit 78
5.3 Théorèmes de Fubini 79
5.4 Changement de variables 80
5.5 Exercices 81

A Convergence dominée allégée **83**

B Produit de convolution sur $\mathbb{R}$ **85**
B.1 L'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ 85
B.2 Convolution avec une fonction régulière 85
B.3 Convolution $L^1 - L^p$ 86
B.4 Régularisation par le produit de convolution 86

C Annales **89**
C.1 Contrôle continu du 9 mars 2012 89
C.2 Contrôle continu du 24 avril 2012 90
C.3 Examen du 16 mai 2012 92
C.4 Examen du 17 août 2012 94
C.5 Examen du 3 avril 2013 96
C.6 Examen du 6 mai 2013 97
C.7 Examen du 27 juin 2013 99

Chapitre 1

Rappels sur l'intégrale au sens de Riemann

Et d'abord, que doit-on entendre par $\int_a^b f(x)dx$? Pour répondre à cette question, prenons entre a et b une série de valeurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$ rangées par ordre de grandeur, depuis a jusqu'à b, et désignons pour abréger $x_1 - a$ par δ_1, $x_2 - x_1$ par δ_2, ..., $b - x_{n-1}$ par δ_n ; soient en outre ϵ_i des nombres positifs plus petits que l'unité. Il est clair que la valeur de la somme

$$S = \delta_1 f(a + \epsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \epsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \epsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \epsilon_n\delta_n)$$

dépendra du choix des intervalles δ et des fractions ϵ. Si elle a la propriété, de quelque manière que les δ et les ϵ puissent être choisis, de s'approcher indéfiniment d'une limite fixe A, quand les δ tendent tous vers 0, cette limite s'appelle *la valeur de l'intégrale définie* $\int_a^b f(x)dx$.

Bernhard Riemann, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* (1854), in : "Oeuvres mathématiques de Riemann", Trad. L.Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

Dans ce chapitre, nous rappelons et complétons les résultats établis en première et deuxième année sur l'intégrale au sens de Riemann. $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des réels, soit celui des complexes.

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Soit a et b deux réels distincts vérifiant $a < b$.

Définition 1.1 (Subdivision et pas de subdivision)**.** On appelle *subdivision* (d'ordre N) du segment $[a, b]$ tout $(N+1)$-uplet $\sigma = (a_0, \ldots, a_N)$ tel que $a = a_0 < \ldots < a_N = b$. On appelle *pas de la subdivision* σ la quantité $\max\limits_{i\in\{0,\ldots,N-1\}} (a_{i+1} - a_i)$.

Il s'agit donc d'un découpage en N intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ du segment $[a, b]$.

Définition 1.2 (Fonction en escalier)**.** On appelle *fonction en escalier* toute fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ de $[a, b]$ et un N-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$ de $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \varphi(x) = \lambda_i. \tag{1.1}$$

On notera $\mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une subdivision comme à la définition précédente est *adaptée* à φ. On dit qu'une subdivision σ' est plus fine que (ou est un raffinement de) la subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$, et on note $\sigma' \supset \sigma$, si tous les points $a_i, i \in \{1, \dots, N-1\}$ de σ sont aussi points de la subdivision σ'. On vérifie que si σ est une subdivision adaptée à une fonction en escalier φ, alors tout raffinement σ' de σ est encore adapté à φ.

Proposition 1.3 (Espace $\mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K})$)**.** *$\mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K})$. Soit σ_f (resp. σ_g) une subdivision adaptée à f (resp. g). Notons $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g$ la subdivision formée l'union ordonnée des points de σ_f et σ_g. Alors σ est une subdivision adaptée à $\lambda f + g$. □

Définition 1.4 (Intégrale d'une fonction en escalier)**.** Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$, $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ, et des scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$ comme dans la définition 1.2. On définit l'intégrale de φ sur $[a, b]$, notée $\displaystyle\int_a^b \varphi$ par :

$$\int_a^b \varphi = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i (a_{i+1} - a_i). \tag{1.2}$$

Remarque 1.5. La notation est cohérente puisque la définition ne dépend pas de la subdivision σ adaptée choisie (exercice).

Proposition 1.6 (Propriétés de l'intégrale des fonctions en escaliers)**.** *Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K})$. Alors :*

(a) (linéarité) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda\varphi + \psi) = \lambda \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi$;

(b) (inégalité triangulaire) $\displaystyle\left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi|$;

(c) (croissance, positivité) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\displaystyle\varphi \leq \psi \Longrightarrow \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$;

(d) l'application $\displaystyle\int_a^b : (\mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue[1].

Démonstration. (a) Par linéarité de la somme de l'équation (1.2).

(b) Il s'agit simplement de l'inégalité triangulaire pour l'équation (1.2).

(c) On a $\psi - \varphi \geq 0$, donc par linéarité puis inégalité triangulaire

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^b (\psi - \varphi) = \int_a^b |\psi - \varphi| \geq \left| \int_a^b (\psi - \varphi) \right| \geq 0. \tag{1.3}$$

1. On rappelle que par définition $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. C'est une norme sur $\mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K})$.

(d) La linéarité est la propriété (a). Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K})$, on en utilisant l'inégalité triangulaire puis la croissance :

$$\left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi| \leq \int_a^b \|\varphi\|_\infty = (b-a)\|\varphi\|_\infty, \tag{1.4}$$

d'où la continuité de la forme linéaire $\int_a^b$.

□

Définition 1.7 (Fonction intégrable au sens de Riemann)**.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est *intégrable au sens de Riemann* ou *Riemann-intégrable* si pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux fonctions en escalier $\varphi_\epsilon \in \mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{K})$ et $\psi_\epsilon \in \mathcal{E}sc([a, b]; \mathbb{R}_+)$ telles que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - \varphi_\epsilon(x)| \leq \psi_\epsilon(x) \text{ et } \int_a^b \psi_\epsilon \leq \epsilon. \tag{1.5}$$

Cette définition ne donne pas directement la valeur de l'intégrale. On peut en revanche la construire aisément. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit deux fonctions en escalier φ_n et ψ_n sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \psi_n(x) \text{ et } \int_a^b \psi_\epsilon \leq \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

La suite $\left(\int_a^b \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi_p - \int_a^b \varphi_q \right| &= \left| \int_a^b (\varphi_p - \varphi_q) \right| \leq \int_a^b |\varphi_p - \varphi_q| \\ &\leq \int_a^b (|\varphi_p - f| + |f - \varphi_q|) \leq \int_a^b (\psi_p + \psi_q) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Elle est par conséquent convergente dans $\mathbb{K}$ complet. On vérifie en outre que la limite ainsi obtenue ne dépend pas des suites $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ choisies. Si $(\varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varphi'_n, \psi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux couples de suites choisies comme à l'équation (1.6), et si on note $I = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n$, alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi'_n - I \right| &= \left| \int_a^b (\varphi'_n - f + f - \varphi_n + \varphi_n) - I \right| \\ &\leq \int_a^b \left(|\varphi'_n - f| + |f - \varphi_n| \right) + \left| \int_a^b \varphi_n - I \right| \\ &\leq \int_a^b \left(\psi_n + \psi'_n \right) + \left| \int_a^b \varphi_n - I \right| \\ &\leq \frac{2}{n} + \left| \int_a^b \varphi_n - I \right|, \end{aligned} \tag{1.8}$$

et par conséquent $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi'_n = I = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n$, et cette limite est par définition l'intégrale au sens de Riemann de f sur $[a, b]$. On la notera naturellement $\int_a^b f$, ou encore avec une variable muette : $\int_a^b f(t)dt$. On notera $\mathcal{RI}([a,b];\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On énonce maintenant les propriétés usuelles de l'intégrale des fonctions Riemann-intégrables, obtenues en étendant celles connues pour les fonctions en escaliers.

Proposition 1.8 (Propriétés usuelles). *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

(a) f est bornée sur $[a,b]$.

(b) (Linéarité) $\mathcal{RI}([a,b];\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $\int_a^b$: $\mathcal{RI}([a,b];\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

(c) (Stabilité par produit) fg est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

(d) (Inégalité triangulaire) $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

(e) (Croissance) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(f) (Continuité) La forme linéaire $\int_a^b : (\mathcal{RI}([a,b];\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K}$ est continue.

(g) (Relation de Chasles) Pour tout réel c, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, avec les conventions usuelles : $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Démonstration. (a) Soit ϵ fixé. Par définition de la Riemann-intégrabilité de f, il existe deux fonctions en escalier φ_ϵ et ψ_ϵ telles que : $|f| = |\varphi_\epsilon + (f - \varphi_\epsilon)| \leq |\varphi_\epsilon| + \psi_\epsilon$. Or, les fonctions en escaliers sont bornées, d'où le résultat.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ_ϵ^f et ψ_ϵ^f (resp. φ_ϵ^g et ψ_ϵ^g) comme dans la définition 1.7 de la Riemann-integrabilité de f (resp. g). Alors :

$$|(\lambda f + g) - (\lambda\varphi_\epsilon^f + \varphi_\epsilon^g)| = |\lambda(f - \varphi_\epsilon^f) + (g - \varphi_\epsilon^g)| \leq |\lambda|\psi_\epsilon^f + \psi_\epsilon^g, \tag{1.9}$$

et $|\lambda|\psi_\epsilon^f + \psi_\epsilon^g$ est une fonction en escalier vérifiant

$$\int_a^b (|\lambda|\psi_\epsilon^f + \psi_\epsilon^g) \leq (|\lambda| + 1)\epsilon, \tag{1.10}$$

par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, ce qui donne par définition la Riemann-intégrabilité de $\lambda f + g$. De plus, si on choisit les suites $\left(\varphi_n^f\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\psi_n^f\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\varphi_n^g)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n^g)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, on obtient :

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lim_n \int_a^b (\lambda\varphi_n^f + \varphi_n^g) = \lim_n \lambda \int_a^b \varphi_n^f + \int_a^b \varphi_n^g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g,$$

toujours par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier.

(c) Soit $\epsilon > 0$. D'après (a), f et g sont bornées. La Riemann-intégrabilité de g entraîne l'existence de fonctions en escalier φ_ϵ^g et ψ_ϵ^g vérifiant

$$|g - \varphi_\epsilon^g| \leq \psi_\epsilon^g \text{ et } \int_a^b \psi_\epsilon^g \leq \frac{\epsilon}{\|f\|_\infty}, \tag{1.11}$$

et la Riemann-intégrabilité de f entraîne l'existence de fonctions en escalier φ_ϵ^f et ψ_ϵ^f vérifiant

$$|f - \varphi_\epsilon^f| \leq \psi_\epsilon^f \text{ et } \int_a^b \psi_\epsilon^f \leq \frac{\epsilon}{\|\psi^g\|_\epsilon}. \tag{1.12}$$

Alors :

$$|fg - \varphi_\epsilon^f \varphi_\epsilon^g| = |f(g - \varphi_\epsilon^g) + \varphi_\epsilon^g(f - \varphi_\epsilon^f)| \leq \|f\|_\infty \psi_\epsilon^g + \|\psi_\epsilon^g\|_\infty \psi_\epsilon^f, \tag{1.13}$$

et le terme de droite est une fonction en escalier vérifiant

$$\int_a^b \left(\|f\|_\infty \psi_\epsilon^g + \|\psi_\epsilon^g\|_\infty \psi_\epsilon^f\right) \leq 2\epsilon, \tag{1.14}$$

ce qui prouve la Riemann-intégrabilité de fg.

(d) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ_ϵ et ψ_ϵ comme dans la définition 1.7. Alors $||f| - |\varphi_\epsilon|| \leq |f - \varphi_\epsilon| \leq \psi_\epsilon$, ce qui donne par définition la Riemann-intégrabilité de $|f|$. De plus, si on choisit les suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, on obtient : $\displaystyle\int_a^b |f| = \lim_n \int_a^b |\varphi_n| \geq \lim_n \left|\int_a^b \varphi_n\right| = \left|\int_a^b f\right|$, l'inégalité étant connue pour les fonctions en escalier.

(e) D'après ce qui précède, si h est Riemann-intégrable et à valeurs réelles positives, alors $\displaystyle\int_a^b h = \int_a^b |h| \geq \left|\int_a^b h\right| \geq 0$. On a la propriété voulue en appliquant ce résultat à $h = g - f$.

(f) On observe d'après les propriétés précédentes que : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty$. L'application $\displaystyle\int_a^b$ est donc lipschitzienne de rapport $(b-a)$.

(g) Exercice.

□

1.2 Sommes de Riemann

La définition 1.7 de la Riemann-intégrabilité proposée à la section précédente n'est pas la plus "naturelle". Dans cette section, on rappelle la notion de somme de Riemann et sa convergence. La démonstration est proposée à l'exercice 1.1. Une autre construction très géométrique de l'intégrale peut se faire pour les fonctions à valeurs réelles avec les sommes de Darboux (voir l'exercice 1.2).

Définition 1.9 (Somme de Riemann)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ une subdivision de $[a,b]$. Soit $c = (c_0, \dots, c_{N-1})$ un N-uplet tel que $\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, c_i \in [a_i, a_{i+1}]$. On appelle *somme de Riemann* de f pour la subdivision σ et les points c la quantité

$$R(f,\sigma,c) = \sum_{i=0}^{N-1} f(c_i)(a_{i+1} - a_i). \tag{1.15}$$

Remarque 1.10. Le couple (σ, c) est appelé *subdivision pointée.*

Remarque 1.11. Dans le cas pratique où la subdivision est de pas constant (i.e. $\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{N} \in \mathbb{R}_+$), la subdivision est dite *régulière.* Si de plus $\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, c_i = a_{i+1}$, on parle de somme de Riemann *régulière à droite.* Pour une subdivision régulière avec $\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, c_i = a_i$, on parle de somme de Riemann *régulière à gauche.*

Théorème 1.12 (Convergence des sommes de Riemann)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision σ de $[a,b]$ de pas inférieur à α et pour toute suite finie de points c* vérifiant les conditions de la définition 1.9*,*

$$\left| R(f,\sigma,c) - \int_a^b f \right| \leq \epsilon. \tag{1.16}$$

Démonstration. Voir l'exercice 1.1. □

Remarque 1.13. Dans la pratique, le théorème 1.12 est rarement la meilleure méthode pour calculer analytiquement une intégrale. En revanche, il peut-être utilisé pour déterminer la convergence et la limite d'une suite pouvant d'écrire sous la forme d'une somme de Riemann régulière. Les écritures les plus utiles sont probablement les suivantes :

$$\frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(a + i\frac{b-a}{N}) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_a^b f, \tag{1.17}$$

pour les subdivisions régulières à gauche, ou

$$\frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(a + i\frac{b-a}{N}) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_a^b f, \tag{1.18}$$

pour les subdivisions régulières à droite.

Remarque 1.14. Pour des fonctions numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$, comme celles qui nous occupent ici, on peut montrer que les fonctions Riemann-intégrables de la définition 1.7 sont *exactement* les fonctions dont les sommes de Riemann convergent. Ce résultat n'est plus valable si on travaille avec des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie (hors programme de ce cours).

1.3 Riemann-intégrabilité et convergence uniforme

Dans cette section, on montre que la limite uniforme d'une suite de fonctions Riemann-intégrable est uniforme. Ce résultat central entraîne en particulier que toute fonction continue par morceaux sur un segment est Riemann-intégrable (en tant que limite uniforme de fonctions en escaliers), résultat d'une grande importance pratique, par exemple pour affirmer lors d'exercices la Riemmann-intégrabilité de fonctions usuelles. Autre conséquence de ce même résultat : la limite d'une série de fonctions Riemann-intégrables convergeant uniformément est Riemann-intégrable.

On commence par rappeler un résultat de L2 sur l'approximation uniforme de fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier. On énonce ensuite le théorème principal et on conclut la section avec les conséquences pratiques de ces résultats.

Théorème 1.15. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction* continue*. Alors f est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. f est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle y est également uniformément continue, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a,b], |x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{b-a}{N} < \alpha$. Posons $\varphi = \sum_{i=1}^{N-1} f(a_i)\mathbf{1}_{[a_{i-1},a_i[} + f(a_N)\mathbf{1}_{[a_{N-1},a_N]}$ où l'on a posé $\forall i \in \{0,\dots,N\}, a_i = a + i\dfrac{b-a}{N}$. Alors φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ vérifiant : $\forall x \in [a_{i-1}, a_i[, |f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_i)| \leq \epsilon$, donc $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$. En notant φ_n la fonction construite pour $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, on a la suite voulue. □

Cela se généralise immédiatement aux fonctions continues par morceaux.

Corollaire 1.16. *Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème 1.15 sur les intervalles d'une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux et de recoller proprement les suites. Ecrire proprement cette démonstration est un excellent exercice. □

Venons-en maintenant au résultat principal de convergence dans la théorie de Riemann.

Théorème 1.17. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant* uniformément *sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$. De plus, par définition de la Riemann-intégrabilité de f_N, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ vérifiant $|f_N - \varphi| \leq \psi$ et $\int_a^b \psi \leq \epsilon$. Posons $\mu = \psi + \epsilon$. Notons que μ est évidemment une fonction en escalier et on a :

$$|f - \varphi| \leq |f - f_N| + |f_N - \varphi| \leq \epsilon + \psi = \mu, \tag{1.19}$$

et

$$\int_a^b \mu = \int_a^b (\psi + \epsilon) \leq \epsilon(1 + (b-a)), \tag{1.20}$$

ce qui donne, par la définition 1.7, la Riemann-intégrabilité de f. On conclut alors en écrivant que :

$$\forall n \geq N, \left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| \leq (b-a)\epsilon. \tag{1.21}$$

□

Les exercices 1.3 et 1.4 permettent de vérifier sur des exemples simples l'importance des hypothèses de ce théorème. L'hypothèse de convergence uniforme sur le segment $[a,b]$ est essentielle dans la théorie de Riemann.

Nous énonçons les conséquence pratiques du théorème sous la forme de deux corollaires.

Corollaire 1.18. *Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur ce segment.*

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement de l'application combinée du corollaire 1.16 et du théorème 1.17. □

Corollaire 1.19 (Intégration terme à terme d'une série au sens de Riemann)**.** *Soit $(f_n)_n$ une série de fonctions Riemann-intégrables sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la série de fonctions $\left(\sum_n f_n\right)$ converge* uniformément *sur $[a,b]$, alors sa limite est Riemann-intégrable, et*

$$\int_a^b \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n \tag{1.22}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite des sommes partielles. Rappelons que ce résultat a été vu en L2, cours d'Analyse 3. □

1.4 Calcul intégral

Dans cette section, on rappelle les résultats pratiques permettant de mener à bien des calculs théoriques ou numériques d'intégrales au sens de Riemann. Ces théorèmes, certains connus depuis le lycée d'autres seulement depuis la L2, nécessitent pour être utilisés de fortes conditions de régularité. Les hypothèses adéquates doivent impérativement être vérifiées lors de la résolution d'exercices. L'un des objectifs de la construction de l'intégrale de Lebesgue aux chapitres suivants sera de proposer des versions bien plus souples de certains de ces résultats.

Théorème 1.20 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{K}, x \mapsto \int_a^x f$ est continue sur $[a,b]$. Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors F est continûment dérivable sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)$.*

Démonstration. Soit f Riemann-intégrable. Alors,

$$\forall x, y \in [a,b], |F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f \right| \leq |x-y| \sup_{[x,y]} |f| \leq |x-y| \|f\|_\infty, \tag{1.23}$$

donc F est lipschitzienne de rapport $\|f\|_\infty$, donc continue.

Supposons de plus f est continue en x_0. Alors par continuité, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$. Ainsi,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x}(f(t) - f(x_0))dt\right| \leq \epsilon, \tag{1.24}$$

dès que $|x - x_0| \leq \alpha$, donc F est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$. □

Remarque 1.21. On renvoie au cours de L1 pour un tableau des primitives usuelles devant être connues.

Théorème 1.22 (Intégration par parties)**.** *Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})$. Alors :*

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g. \tag{1.25}$$

Démonstration. Par hypothèse, f' et g' sont continues sur $[a,b]$, donc $f'g + gf'$ est continue sur $[a,b]$, donc d'après le théorème 1.20, et par linéarité de l'intégrale :

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(t)dt = \int_a^b f(t)g'(t)dt + \int_a^b f'(t)g(t)dt, \tag{1.26}$$

d'où le résultat. □

Théorème 1.23 (Changement de variable)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Soit f une fonction* continue *sur $\varphi([a,b])$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors :*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f. \tag{1.27}$$

Démonstration. f est continue, donc par le théorème 1.20, elle admet une primitive F sur $[a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $F \circ \varphi$ est alors dérivable (composée de fonctions dérivables), de dérivée $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$ continue. Ainsi, toujours par le théorème 1.20,

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_a^b (F \circ \varphi)'(u)du = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt, \tag{1.28}$$

d'où le résultat. □

Théorème 1.24 (Première formule de la moyenne)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction* continue*. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction Riemann-intégrable* positive*. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g. \tag{1.29}$$

Démonstration. f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ car continue $[a,b]$, donc fg est bien Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes. Soient donc x_m et x_M deux points de $[a,b]$ tels que :

$$f(x_m) = \min_{t\in[a,b]} f(t) \quad \text{et} \quad f(x_M) = \max_{t\in[a,b]} f(t) \tag{1.30}$$

Alors pour tout $t \in [a,b]$, $f(x_m)g(t) \leq f(t)g(t) \leq f(x_M)g(t)$ et par croissance de l'intégrale

$$f(x_m)\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq f(x_M)\int_a^b g. \tag{1.31}$$

Si $\displaystyle\int_a^b g = 0$, alors l'inégalité entraîne $\displaystyle\int_a^b fg = 0$ et le résultat est trivial. Sinon, la positivité de g entraînant celle de $\displaystyle\int_a^b g$, il vient :

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq f(x_M) \tag{1.32}$$

La propriété des valeurs intermédiaires appliquée à f continue entraîne l'existence de $c \in [x_m, x_M] \subset [a,b]$ vérifiant l'égalité (1.29). □

Théorème 1.25 (Seconde formule de la moyenne)**.** *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables. On suppose f* positive et décroissante*. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g. \tag{1.33}$$

Démonstration. L'exercice 1.8 propose deux démonstrations de ce résultat, la première en supposant de fortes conditions de régularité sur f et g, la seconde selon les termes de l'énoncé ci-dessus. □

On termine cette section avec les théorèmes de continuité et de dérivabilité d'intégrales à paramètres. On énonce en premier lieu un lemme permettant de faciliter l'écriture des démonstrations. On rappelle que ces théorèmes ont été vu en L2, cours d'Analyse 4. Ces théorèmes pourront par la suite être vus comme des cas particuliers des théorèmes plus puissants des chapitres suivants.

Lemme 1.26. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Si une fonction $f : I \times [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue sur $I \times [a,b]$, alors*

$$\forall x^* \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \left(|x - x^*| < \delta \Longrightarrow \forall t \in [a,b], |f(x,t) - f(x^*,t)| < \epsilon\right). \tag{1.34}$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x^* \in I$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall \delta > 0, \exists x \in I : |x - x^*| < \delta \ \text{ et } \ \exists t \in [a,b], |f(x,t) - f(x^*,t)| \geq \epsilon. \tag{1.35}$$

En choisissant $\delta = \dfrac{1}{n}$, on peut construire une suite $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$|x_n - x^*| < \frac{1}{n} \ \text{ et } \ |f(x_n, t_n) - f(x^*, t)| \geq \epsilon. \tag{1.36}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est par construction convergente de limite x^*. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans le segment $[a,b]$, partie compacte de $\mathbb{R}$, donc elle admet une suite extraite $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente. Soit t^* sa limite. Alors par continuité de la fonction f sur $I \times [a,b]$, il vient :

$$\left|f(x_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n)}) - f(x^*, t_{\varphi(n)})\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{1.37}$$

en contradiction avec $\left|f(x_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n)}) - f(x^*, t_{\varphi(n)})\right| \geq \epsilon$. D'où le résultat. □

Théorème 1.27 (Continuité sous le signe somme)**.** *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Si une fonction $f : I \times [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue sur $I \times [a, b]$, alors la fonction $F : I \to \mathbb{K}, x \mapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$ est continue sur I.*

Démonstration. Soit $x^* \in I$. Soit $\epsilon > 0$. Le lemme précédent 1.26 entraîne l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, |x - x^*| < \delta \Longrightarrow \forall t \in [a, b], |f(x,t) - f(x^*,t)| < \epsilon. \tag{1.38}$$

Il vient alors, pour tout $x \in I$, vérifiant $|x - x^*| < \delta$:

$$|F(x) - F(x^*)| = \left| \int_a^b f(x,t)\, dt - \int_a^b f(x^*,t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x^*,t)|\, dt < \epsilon(b - a), \tag{1.39}$$

ce qui prouve la continuité de F en x^*. Ce dernier point étant quelconque, F est bien continue sur I. □

Théorème 1.28 (Dérivabilité sous le signe somme)**.** *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit une fonction $f : I \times [a, b] \to \mathbb{K}$. Si f est continue sur $I \times [a, b]$ et si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times [a, b]$, alors $F : I \to \mathbb{K}, x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est continûment dérivable sur I, et :*

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt. \tag{1.40}$$

Démonstration. Soit $x^* \in I$. Soit $\epsilon > 0$. Le lemme 1.26 s'écrit pour la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times [a, b]$:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x^*| < \delta \Longrightarrow \forall t \in [a, b], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,t) \right| < \epsilon. \tag{1.41}$$

Pour $t \in [a, b]$ fixé, on pose la fonction $\varphi_t(x) = f(x,t) - x\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,t)$. Soit $x \in I$ vérifiant $|x - x^*| < \delta$. Les hypothèses sur f entraînent que φ_t est continue sur $[x, x^*]$ (ou $[x^*, x]$), dérivable sur $]x, x^*[$ (ou $]x^*, x[$), de dérivée vérifiant :

$$|\varphi_t'(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,t) \right| < \epsilon. \tag{1.42}$$

Il vient alors par l'inégalité des accroissements finis :

$$\left| f(x,t) - f(x^*,t) - (x - x^*)\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,t) \right| = |\varphi_t(x) - \varphi_t(x^*)| < \epsilon |x - x^*|. \tag{1.43}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $t \in [a,b]$, il vient :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(x) - F(x^*)}{x - x^*} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, t)\, dt \right| \\
= \ & \frac{1}{|x - x^*|} \left| F(x) - F(x^*) - (x - x^*) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, t)\, dt \right| \\
= \ & \frac{1}{|x - x^*|} \left| \int_a^b \left(f(x,t) - f(x^*,t) - (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, t) \right) dt \right| \\
\leq \ & \frac{1}{|x - x^*|} \int_a^b \left| f(x,t) - f(x^*,t) - (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, t) \right| dt \\
< \ & \epsilon(b - a),
\end{aligned} \tag{1.44}$$

ce qui prouve la dérivabilité de F en x^*, avec $F'(x^*) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, t)\, dt$. x^* étant quelconque, F est dérivable sur I, de dérivée $F' : x \mapsto \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$. Enfin, le théorème 1.27 appliqué à la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times [a,b]$ assure la continuité de F'. □

Il est important de noter que dans ces théorèmes, on intègre des fonctions continues sur des segments, donc uniformément continues (bien regarder le résultat du lemme 1.26), et que c'est cette régularité qui est à l'origine de ces résultats dans la théorie de Riemann.

1.5 Intégrales de Riemann généralisées

Dans cette section nous introduisons la notion d'intégrale de Riemann généralisée ou impropre et rappelons les principaux résultats permettant d'établir la Riemann-intégrabilité en ce sens généralisé. On rappelle une fois de plus que ces résultats ont été établis en L2, cours d'Analyse 4.

Définition 1.29 (Fonction localement intégrable)**.** Une fonction f est dite *localement Riemann-intégrable* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si elle est Riemann-intégrable sur tout segment $[c,d]$ inclus dans I.

Remarque 1.30. Dans la suite de cette section, on énoncera les résultats avec $I = [a,b[$ intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$, possiblement non borné (i.e. $b \in]a,+\infty[\cup \{+\infty\}$). Le cas de l'intervalle semi-ouvert $I =]a,b]$ se traite de la même manière. Le cas de l'intervalle ouvert possiblement non borné $]a,b[$ se traite en deux parties en étudiant les intégrales sur $]a,c]$ et $[c,b[$ successivement, pour $c \in]a,b[$ quelconque.

Définition 1.31 (Intégrales convergentes)**.** Une fonction $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est dite *Riemann-intégrable au sens généralisé* si elle est localement Riemann-intégrable et si $\displaystyle\int_a^x f$ converge dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers b par valeurs négatives. On note $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x \to b} \int_a^x f$ et on dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est *convergente*.

Remarque 1.32. On parle aussi d'intégrales *impropres* pour désigner les intégrales de Riemann au sens généralisé. Une intégrale qui n'est pas convergente est dite *divergente*. Elle peut diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou la limite peut ne pas exister.

Définition 1.33 (Intégrales absolument convergentes)**.** Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est localement Riemann-intégrable et si $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente, on dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est absolument convergente.

Proposition 1.34. *Une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction localement Riemann-intégrable. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels inférieurs à b et de limite b. Alors $\forall m \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_a^{b_n} f(t)dt - \int_a^{b_m} f(t)dt\right| = \left|\int_{b_m}^{b_n} f(t)dt\right| \leq \left|\int_{b_m}^{b_n} |f(t)|dt\right| = \left|\int_a^{b_n} |f(t)|dt - \int_a^{b_m} |f(t)|dt\right|. \tag{1.45}$$

Ainsi, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{b_n} |f(t)|dt$ est convergente, donc de Cauchy, donc par l'inégalité précédente la suite $\displaystyle\int_a^{b_n} f(t)dt$ est de Cauchy, donc convergente. D'où le résultat. □

Remarque 1.35. On rappelle que la réciproque est fausse. L'exercice 1.9 développe le contre-exemple classique $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Une intégrale de Riemann généralisée qui est convergente mais pas absolument convergente est appelée *semi-convergente.*

On rappelle enfin les résultats suivants, très utiles pour la détermination pratique de la nature d'une intégrale généralisée.

Proposition 1.36 (Critère de Riemann)**.** *Soit $a > 0$. Alors :*

(a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma}dx$ *est absolument convergente si et seulement si* $\gamma > 1$.

(b) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x^\gamma}dx$ *est absolument convergente si et seulement si* $\gamma < 1$.

Démonstration. Si $\gamma = 1$, pour tout réel $x \geq a$,

$$\int_a^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln a, \tag{1.46}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t} = +\infty$ et l'intégrale ne converge pas. Idem pour la limite en 0.

Si $\gamma \neq 1$, pour tout réel $x \geq a$,

$$\int_a^x t^{-\gamma}dt = \left[\frac{t^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_a^x = \frac{1}{1-\gamma}(x^{-\gamma+1} - a^{-\gamma+1}), \tag{1.47}$$

et par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x t^{-\gamma}dt < +\infty$ si et seulement si $-\gamma+1 < 0$, i.e. $\gamma > 1$. Idem pour la limite en 0. □

Proposition 1.37 (Comparaisons pour des fonctions à valeurs *positives* - I)**.** *Soient f et g deux fonctions à valeurs* positives, *localement Riemann-intégrables sur* $[a, b[$.

(a) Si $f \leq g$ et si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.

(b) Si $f \leq g$ et si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.

Démonstration. (a) Par positivité de f, $\int_a^x f$ est une fonction croissante de x et par croissance de l'intégrale, $f \leq g$ entraîne $\int_a^x f \leq \int_a^x g < \infty$, d'où le résultat.

(b) C'est la contraposée de la proposition précédente.

$\square$

Proposition 1.38 (Comparaisons pour des fonctions à valeurs *positives* - II)**.** *Soient f et g deux fonctions à valeurs* positives, *localement Riemann-intégrables sur* $[a, b[$.

(a) Si $f = O(g)$ (resp. $f = o(g)$) au voisinage de b et si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge et $\int_x^b f = O\left(\int_x^b g\right)$ (resp. $\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right)$).

(b) Si $f = O(g)$ (resp. $f = o(g)$) au voisinage de b et si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge et $\int_a^x f = O\left(\int_a^x g\right)$ (resp. $\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right)$).

(c) Si $f \sim g$ au voisinage de b, alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature. Si elles sont convergentes, alors $\int_x^b f \sim \int_x^b g$. Si elles sont divergentes, alors $\int_a^x f \sim \int_a^x g$.

Démonstration. (a) Si $f = O(g)$ au voisinage de b, il existe $K > 0$ et $c \in]a, b[$ tels que pour tout $t \in [c, b[$, on a $0 \leq f(t) \leq Kg(t)$. Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_c^b Kg$ converge et d'après la proposition 1.37 $\int_c^b f$ converge. De plus, en intégrant l'inégalité de domination, il vient, pour tout $x \in [c, b[$, $0 \leq \int_x^b f \leq K \int_x^b g$, i.e. $\int_x^b f = O\left(\int_x^b g\right)$. La démonstration dans le cas $f = o(g)$ est similaire.

(b) La divergence de $\int_a g$ est affirmée par la contraposée de la proposition précédente. Ensuite, si $f = O(g)$ au voisinage de b, il existe $K > 0$ et $c \in]a, b[$ tels que pour tout $t \in [c, b[$, on a $0 \leq f(t) \leq Kg(t)$, i.e. pour tout $x \in [c, b[$, $0 \leq \int_c^x f \leq \int_c^x Kg$. Par la relation de Chasles, cette inégalité devient :

$$0 \leq \int_a^x f \leq K \int_a^x g + \left(\int_a^c f - K \int_a^c g\right). \tag{1.48}$$

Puisque $\int_a^b g$ diverge, il vient pour x assez grand, $\int_a^x g \geq \left(\int_a^c f - K \int_a^c\right)$, et par suite $0 \leq \int_a^x f \leq (K+1) \int_a^x g$ pour x assez grand, d'où $\int_a^x f = O\left(\int_a^x g\right)$. La démonstration dans le cas $f = o(g)$ est similaire.

(c) Le cas de la relation d'équivalence est laissée en exercice.

□

1.6 Limites de l'intégrale au sens de Riemann

Notons en vrac les remarques suivantes sur l'intégrale au sens de Riemann :
- Une fonction égale à une fonction Riemann-intégrable sauf sur un ensemble dénombrable n'est pas nécessairement Riemann-intégrable. Voir par exemple la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cup[0,1]}$ aux exercices 1.1 et 1.2.
- Les théorèmes de calcul intégral nécessitent de fortes contraintes de régularité : continuité sur un segment, classe $\mathcal{C}^1$, etc.
- Les théorèmes d'interversion de limite et intégrales (voir la section 1.3) sont d'un usage restreint : la convergence uniforme est toujours nécessaire.
- Les théorèmes usuels ne se généralisent pas facilement à l'intégration généralisée hors d'un segment $[a, b]$ (voir par exemple l'exercice 1.4). Il est souvent nécessaire de "couper" les intervalles d'intégration et de calculer les limites manuellement.

La théorie de l'intégration de Lebesgue va tenter de répondre au moins partiellement à ces problèmes.

1.7 Exercices

Exercice 1.1 (Sommes de Riemann)**.** Le but de cet exercice est de fournir une démonstration du théorème 1.12. On montre d'abord le résultat pour des fonctions en escalier, puis on l'étend aux fonctions Riemann-intégrables.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(\sigma, x) = ((a_0, \ldots, a_N), (x_1, \ldots, x_N))$ une subdivision pointée d'ordre N de $[a, b]$ *quelconque*. On note $\rho(\sigma)$ le pas de cette subdivision. Soit $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_M)$ une subdivision d'ordre M de $[a, b]$ *adaptée à* φ.
   (a) Montrer que pour tout M-uplet $(y_1, \ldots, y_M)$ vérifiant $\forall i, y_i \in]\eta_{i-1}, \eta_i[$, on a $R(\varphi, \eta, y) = \int_a^b \varphi$.
   (b) Montrer que $\left| \int_a^b \varphi - R(\varphi, \sigma, x) \right| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\varphi(t) - \varphi(x_i)| \, dt$.
   (c) On pose $E = \{i \in \{1, \ldots, N\} : \exists j \in \{0, \ldots, M\}, \eta_j \in [a_{i-1}, a_i]\}$. Montrer que $\operatorname{card} E \leq 2(M+1)$.
   (d) En utilisant la question précédente, montrer que
$$\left| \int_a^b \varphi - R(\varphi, \sigma, x) \right| \leq 4(M+1)\|\varphi\|_\infty \rho(\sigma).$$

(e) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\rho(\sigma) \leq \alpha \Longrightarrow \left| \int_a^b \varphi - R(\varphi, \sigma, x) \right| \leq \epsilon.$$

2. Soit maintenant $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ Riemann-intégrable. Soit $\epsilon > 0$. Soient φ et ψ deux fonctions en escaliers comme dans la définition 1.7 de la Riemann-intégrabilité de f.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\rho(\sigma) \leq \alpha \Longrightarrow |R(\psi, \sigma, x)| \leq 2\epsilon \text{ et } |R(\varphi, \sigma, x) - R(f, \sigma, x)| \leq 2\epsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe $\alpha' > 0$ tel que $\rho(\sigma) \leq \alpha' \Longrightarrow \left| \int_a^b \varphi - R(f, \sigma, x) \right| \leq 3\epsilon$.

(c) En déduire que $\rho(\sigma) \leq \alpha' \Longrightarrow \left| \int_a^b f - R(f, \sigma, x) \right| \leq 4\epsilon$.

3. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 1.2 (Sommes de Darboux)**.** Soit f une fonction de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f bornée. Pour toute subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_N)$ d'ordre N de $[a, b]$, on définit les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f pour la subdivision σ par :

$$D_-(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{N} m_i(f, \sigma)(a_i - a_{i-1}), \tag{1.49}$$

$$D_+(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{N} M_i(f, \sigma)(a_i - a_{i-1}). \tag{1.50}$$

où l'on a posé pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$m_i(f, \sigma) = \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i[} f(x), \tag{1.51}$$

$$M_i(f, \sigma) = \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i[} f(x). \tag{1.52}$$

On note $\mathcal{S}([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. On dit que les sommes de Darboux de f convergent si $\sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} D_-(f, \sigma) = \inf_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} D_+(f, \sigma)$.

1. Questions préliminaires.

(a) Montrer que pour toute subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_N)$ de $[a, b]$, $D_+(f, \sigma)$ et $D_-(f, \sigma)$ sont les intégrales de deux fonctions en escalier auxquelles σ est adaptée, que l'on notera $e_+(f, \sigma)$ et $e_-(f, \sigma)$.

(b) Vérifier que $\forall x \in [a, b[, e_-(f, \sigma)(x) \leq f(x) \leq e_+(f, \sigma)(x)$.

(c) Montrer que si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$ telles que $\sigma \subset \sigma'$, alors $D_+(f, \sigma') \leq D_+(f, \sigma)$ et $D_-(f, \sigma') \geq D_-(f, \sigma)$. (Indication : on pourra se contenter de le montrer dans le cas $\sigma' = \sigma \cup (a, x^*, b)$ pour $x^* \in [a, b]$ fixé.)

(d) Vérifier que $\sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} D_-(f, \sigma) < +\infty$ et $\inf_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} D_+(f, \sigma) > -\infty$

2. On suppose ici que les sommes de Darboux de f convergent.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une subdivision σ^n de $[a,b]$ telle que $D_+(f,\sigma^n) - D_-(f,\sigma^n) \leq \frac{1}{n}$.

(b) En déduire que f est Riemann-intégrable. (Indication : construire à l'aide de $e_+(f,\sigma^n)$ et $e_-(f,\sigma^n)$ des fonctions φ_n et ψ_n vérifiant la définition1.7.)

(c) Montrer qu'on peut choisir la suite de subdivisions $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante.

(d) En déduire que $\sup_{\sigma\in\mathcal{S}([a,b])} D_-(f,\sigma) = \inf_{\sigma\in\mathcal{S}([a,b])} D_+(f,\sigma) = \int_a^b f$.

3. On montre ici la réciproque de la question précédente.

(a) Vérifier que si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions en escalier telles que $\phi_1 \leq f \leq \phi_2$, alors pour toute subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_N)$ adaptée à la fois à ϕ_1 et ϕ_2, on a $\forall x \in [a,b[, \phi_1(x) \leq e_-(f,\sigma)(x) \leq f(x) \leq e_+(f,\sigma)(x) \leq \phi_2(x)$.

(b) En déduire que si f est Riemann-intégrable, alors il existe une suite de subdivision $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $D_+(f,\sigma^n) - D_-(f,\sigma^n) \leq \frac{1}{n}$.

(c) En déduire qu'alors ses sommes de Darboux convergent.

4. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Remarque 1.39. On voit que l'on peut aussi définir l'intégrale de Riemann pour des fonctions à valeurs réelles avec les sommes de Darboux : l'exercice précédent assure que les fonctions dont les sommes de Darboux convergent sont les mêmes que celles intégrables au sens de la définition 1.7. Noter cependant que la construction par les sommes de Darboux n'est plus possible pour des fonctions à valeurs complexes ou à valeurs dans un espace vectoriel normé, puisque l'on a besoin d'un ordre total pour les définir.

Exercice 1.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'unique fonction affine sur $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et $[\frac{2}{n}, 1]$ telle que $f(0) = 0, f(\frac{1}{n}) = n, f(\frac{2}{n}) = 0$ et $f(1) = 0$.

1. Représenter graphiquement f_n.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est convergente et déterminer $f = \lim_n f_n$.
3. La convergence est-elle uniforme ?
4. Calculer $\int_0^1 f$, $\lim_n \int_0^1 f_n$, et conclure.

Exercice 1.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'unique fonction affine sur $[0,n], [n,n+1]$ et $[n+1,+\infty[$ telle que $f(0) = \frac{1}{n}, f(n) = \frac{1}{n}, f(n+1) = 0$ et $f(n+2) = 0$.

1. Représenter graphiquement f_n.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est convergente et déterminer $f = \lim_n f_n$.
3. La convergence est-elle uniforme ?
4. Calculer $\int_0^{+\infty} f$, $\lim_n \int_0^{+\infty} f_n$, et conclure.

Exercice 1.5 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$. Montrer que
$$\lim_n \int_a^b \varphi(t)\cos(nt)dt = 0. \tag{1.53}$$
2. Montrer que ce résultat reste valide pour toute fonction f continue par morceaux[2].

Exercice 1.6 (Un critère d'intégrabilité)**.**
1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur un segment $[a,b]$ et Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $]a,b[$. Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
2. Donner un contre-exemple au résultat précédent dans le cas où f n'est pas bornée.
3. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = \sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ sur $]0,1]$ et $g(0) = 0$. g est-elle continue ? continue par morceaux ? Riemann-intégrable ?

Exercice 1.7 (Dérivée et primitive)**.** On définit la fonction $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $F(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $F(0) = 0$.
1. Montrer que F est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée.
2. F' est-elle Riemann-intégrable ?
3. Conclure.

Exercice 1.8. Dans cet exercice on se propose de prouver la seconde formule de la moyenne, énoncée au théorème 1.25, de deux manières différentes. La première utilise des hypothèses de régularité fortes pour les fonctions en jeu, la seconde utilise uniquement le cadre de l'énoncé du théorème 1.25.

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables. On suppose f *positive et décroissante.*
1. Montrer que $G : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_a^x g$ est continue et bornée. On notera m sa borne inférieure et M sa borne supérieure.
2. Dans cette question, on suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que g est continue.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b fg = f(b)G(b) + \int_a^b (-f'G)$.
   (b) Montrer qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b (-f'G) = (f(a) - f(b))G(d)$.
   (c) En déduire que $mf(a) \leq \displaystyle\int_a^b fg \leq Mf(a)$.
   (d) En déduire la seconde formule de la moyenne pour f et g.
3. Désormais, on ne suppose plus les conditions de régularité de la question précédente. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $a_j = a + j\dfrac{b-a}{N}, j = 0, \ldots, N$ les points de la subdivision régulière d'ordre N de $[a,b]$. On pose enfin $I_N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(a_j)g(t)\,dt$.

2. Voir aussi l'exercice 4.4 pour une extension encore plus large du résultat

(a) Montrer que $K : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x |g|$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

(b) Montrer que $\left| I_N - \int_a^b fg \right| \leq (f(a) - f(b)) \sup_{t \in \left[a, b - \frac{b-a}{N}\right]} \left(K\left(t + \frac{b-a}{N}\right) - K(t) \right)$.

(c) En déduire que $\lim_{N \to +\infty} I_N = \int_a^b fg$.

(d) Montrer que $I_N = \sum_{j=0}^{N-1} (f(a_j) - f(a_{j+1}))G(a_{j+1}) + f(b)G(b)$.

(e) En déduire que $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$.

(f) En déduire la seconde formule de la moyenne pour f et g.

Exercice 1.9 (Convergence, convergence absolue, semi-convergence)**.** On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. On va montrer que I est convergente sans être absolument convergente.

1. Montrer que $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^A \frac{\sin(t)}{t} dt$ est une intégrale de Riemann proprement définie.
2. Par une intégration par parties, montrer que I est une intégrale convergente.
3. Montrer que $\forall A \in]1, +\infty[, \int_1^A \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \int_1^A \frac{1 - \cos^2(t)}{t} dt$.
4. En déduire que I n'est pas absolument convergente.

Exercice 1.10 (Nature d'intégrales impropres)**.** Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} dt$;

(b) $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt$;

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.11 (Intégrales de Bertrand)**.** Pour tous α et β réels, on définit les intégrales $I_{\alpha,\beta}$ et $J_{\alpha,\beta}$, dites intégrales de Bertrand, par :

$$I_{\alpha,\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} dx \text{ et } J_{\alpha,\beta} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha (-\ln(x))^\beta} dx. \qquad (1.54)$$

1. Montrer que $I_{1,1}$ est divergente.
2. Montrer que $I_{1,\beta}$ est absolument convergente si et seulement si $\beta > 1$.
3. Montrer que $I_{\alpha,\beta}$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
4. Enoncer un résultat similaire pour $J_{\alpha,\beta}$.

Exercice 1.12 (Intégrale généralisée et somme de Riemann)**.** Soient $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que $\displaystyle\int_a^b f$ soit convergente.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin x)dx$. (Indication : On pourra admettre le résultat suivant : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$).

Chapitre 2

Mesure

> Si l'on traduit en langage géométrique les conditions du problème d'intégration des fonctions [qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1], on a un nouveau problème, *le problème de la mesure des ensembles.*
> (...) Voici la question à résoudre :
> *Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble E borné, formé de points de Ox un nombre positif ou nul, $m(E)$, que nous appelons* la mesure de E *et qui satisfait aux conditions suivantes :*
> *1'. Deux ensembles égaux ont même mesure ;*
> *2'. Un ensemble somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures ;*
> *3'. La mesure de l'ensemble de tous les points de* $(0,1)$ *est* 1.
>
> Henri Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

Ce chapitre est une introduction à la théorie de la mesure. Les sections 2.1 à 2.3 définissent les notions d'espaces et de fonctions mesurables. La section 2.4 définit axiomatiquement la mesure sur un espace abstrait, avant que les sections 2.5 et 2.6 n'esquissent le difficile problème d'existence et d'unicité de mesure. La mesure de Lebesgue sur la droite réelle, répondant au "problème de la mesure des ensembles" donné en épigraphe, y est partiellement construite.

2.1 Tribus, espaces mesurables

Pour répondre au "problème de la mesure des ensembles", nous devons commencer par caractériser ces ensembles que nous allons mesurer. Il nous faut donc un minimum d'outils ensemblistes. L'objectif de cette section est de se doter d'une "bonne" structure pour les parties d'un ensemble qui soit suffisamment stable et souple pour pouvoir définir une "mesure" de ces éléments : c'est la notion de tribu, dont on donne ici la définition et quelques exemples fondamentaux et propriétés essentielles pour la suite.

Soit Ω un ensemble quelconque.

Définition 2.1 (Tribu)**.** On appelle *tribu* sur Ω toute famille $\mathcal{T}$ de parties de Ω telle que :

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

(T2) $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{T}$, alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{T}$;

(T3) $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable : si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Remarque 2.2. Une tribu est aussi appelée une *σ-algèbre*. En effet, une famille de parties de Ω contenant $\emptyset$, stable par complémentarité et réunion *finie* est appelée *algèbre de parties de* Ω. Une tribu est donc une algèbre de parties stable par additivité dénombrable au lieu de finie, d'où l'appellation de *σ-algèbre*, où le préfixe σ renvoie à la dénombrabilité. *Tribu* est utilisé dans la littérature francophone, mais la littérature mathématique anglophone utilise *σ-algebra* ou encore *σ-field*. Ce dernier nom justifie l'emploi fréquent de la lettre $\mathcal{F}$ pour désigner une tribu (au lieu de $\mathcal{T}$ le plus souvent dans ce texte).

Exemple 2.3.
- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, parfois appelée *tribu grossière*.
- L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est une tribu sur Ω, appelée *tribu triviale*, ou encore *tribu discrète*.
- Soit A une partie de Ω. $\{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$ est une tribu.
- Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble à 3 éléments. $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ est une tribu sur Ω.

Proposition 2.4 (Propriétés élémentaires d'une tribu)**.** *Soit $\mathcal{T}$ une tribu. Alors :*

(a) $\Omega \in \mathcal{T}$;

(b) $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable : si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$;

(c) $\mathcal{T}$ est stable par réunion et intersection finie ;

(d) $\mathcal{T}$ est stable par différence et différence symétrique : si A et B sont deux éléments de $\mathcal{T}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{T}$ et $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{T}$;

(e) $\mathcal{T}$ est stable par passage aux limites inférieures et supérieures : si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{T}$, alors $\liminf_n A_n \in \mathcal{T}$ et $\limsup_n A_n \in \mathcal{T}$.

Démonstration. (a) Ω est le complémentaire de $\emptyset$.

(b) Si $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors :

$$\Omega \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n) \in \mathcal{T}, \tag{2.1}$$

d'où le résultat.

(c) Soit $(A_n)_{n=0,\ldots,N}$ une famille *finie* d'éléments de $\mathcal{T}$. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ définie par $B_i = A_i$ pour $i = 0, \ldots, N$ et $B_i = \emptyset$ sinon. Alors :

$$\bigcup_{i=0}^{N} A_i = \bigcup_{i=0}^{N} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{T}. \tag{2.2}$$

Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille d'éléments de $\mathcal{T}$ définie par $C_i = A_i$ pour $i = 0,\dots,N$ et $C_i = \Omega$ sinon. Alors :

$$\bigcap_{i=0}^{N} A_i = \bigcap_{i=0}^{N} C_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \in \mathcal{T}. \tag{2.3}$$

(d) Il suffit d'écrire $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{T}$.

(e) Il suffit de rappeller les définitions des limites inférieures et supérieures de familles de parties. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors :

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{T}, \tag{2.4}$$

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \in \mathcal{T}. \tag{2.5}$$

□

Définition 2.5 (Espace mesurable)**.** Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé *espace mesurable.*

Remarque 2.6. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelées les *parties $\mathcal{T}$-mesurables de* Ω, ou simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, *parties mesurables de* Ω.

Proposition 2.7 (Tribu engendrée)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une* famille *de parties de Ω. L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$ est une tribu. On l'appelle* tribu engendrée *par $\mathcal{A}$, et elle est usuellement notée $\sigma(\mathcal{A})$.*

Démonstration. La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.8 (Intersection quelconque de tribus)**.** *Soit I un ensemble* quelconque*, et $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus. Alors $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu.*

Démonstration. $\forall i \in I, \emptyset \in \mathcal{T}_i$ et (T1) est bien vérifié. Si $A \in \mathcal{T}$, alors pour tout $i \in I$, $A \in \mathcal{T}_i$, donc $\Omega \setminus A \in \mathcal{T}_i$ pour tout i, et par conséquent $\Omega \setminus A \in \mathcal{T}$. Finalement, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, alors, de la même manière, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}_i$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i$ pour tout i, et par conséquent $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. □

$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$, donc l'ensemble $\mathcal{E}$ des tribus contenant $\mathcal{A}$ est non vide. Le lemme 2.8 entraîne donc que $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathcal{E}} \mathcal{T}$ est une tribu. □

Remarque 2.9. $\sigma(\mathcal{A})$ est donc la plus petite tribu contenant A au sens de l'inclusion.

Proposition 2.10 (Propriétés d'une tribu engendrée)**.** *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles de parties de Ω. Alors :*

(a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$;

(b) pour toute tribu $\mathcal{T}$ sur Ω, $\mathcal{A} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}$.

Démonstration. $\sigma(\mathcal{A})$ est par définition l'intersection de toutes les tribus contenant A, et dans les assertions proposées $\sigma(\mathcal{B})$ et $\mathcal{T}$ sont des tribus contenant $\mathcal{A}$. □

Définition 2.11 (Tribu de Borel)**.** On appelle *tribu de Borel* ou *tribu borélienne* de $\mathbb{R}^d$, et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Ses éléments sont appelés *boréliens.*

Proposition 2.12. *La tribu borélienne de* $\mathbb{R}$ *est engendrée par les intervalles de la forme* $]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{A} = \{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}$. On va montrer que $\sigma(\mathcal{A})$ est égale à la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ par double inclusion. Pour tout réel a, $]-\infty, a[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc la famille $\mathcal{A}$ est incluse dans l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\sigma(\mathcal{A})$ est incluse dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par la proposition 2.10(a). Pour montrer l'inclusion réciproque, remarquons que :

$$\forall a \in \mathbb{R},]-\infty, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\infty, a + \frac{1}{n}\right[\in \sigma(\mathcal{A}), \tag{2.6}$$

et que par conséquent :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,]a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a] \in \sigma(\mathcal{A}), \tag{2.7}$$

i.e. tout intervalle ouvert est élément de $\sigma(\mathcal{A})$. Or, on a le résultat suivant :

Lemme 2.13. *Tout ouvert de* $\mathbb{R}$ *peut s'écrire comme une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts* $]a, b[, (a, b) \in \mathbb{Q}^2$.

Démonstration. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in U$, il existe $r_x > 0$ tel que la boule ouverte de centre x et de rayon r_x soit incluse dans U, autrement dit $U = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$ avec I un ensemble *quelconque* (non nécessairement dénombrable). Or, pour tout $i \in I$ fixé, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut construire une suite $(r_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments rationnels de $]a_i, \frac{a_i + b_i}{2}[$ qui soit décroissante et de limite a_i. On peut également, toujours par densité, construire une suite $(s_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments rationnels de $]\frac{a_i + b_i}{2}, b_i[$ qui soit croissante et de limite b_i. Alors,

$$U = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[= \bigcup_{i\in I} \bigcup_{n\in N}]r_{n,i}, s_{n,i}[= \bigcup_{(r,s)\in J}]r, s[, \tag{2.8}$$

avec $J = \{(r_{n,i}, s_{n,i}) : i \in I, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}^2$. J est par conséquent dénombrable, d'où le résultat. □

Ainsi, $\sigma(\mathcal{A})$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\sigma(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par la proposition 2.10(b). Finalement, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Remarque 2.14. On vérifie immédiatement que la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est aussi engendrée par les familles suivantes : $\{[a, b], (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ ou $\{[a, b], (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ par exemple, mais aussi $\{]a, b[, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$, $\{[a, +\infty[, a, \in \mathbb{Q}\}$, $\{]a, +\infty[, a \in \mathbb{Q}\}$, etc. Ce résultat se généralise dans $\mathbb{R}^d$ aux pavés ouverts, fermés, etc.

Remarque 2.15. La tribu borélienne est "grosse", en ce sens qu'elle contient un grand nombre de parties de $\mathbb{R}$. Cependant, il est important de garder à l'esprit que toutes les parties de $\mathbb{R}$ ne sont pas boréliennes, i.e. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Les ensembles de Vitali sont des exemples de parties non boréliennes de $\mathbb{R}$. Voir à ce sujet l'exercice 2.13.

Proposition 2.16 (Tribu image-réciproque)**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{T})$ *et* $(\Omega', \mathcal{T}')$ *deux espaces mesurables. Soit* f *une application de* Ω *dans* Ω'*. Alors :*

(a) $\left\{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{T}'\right\}$ *est une tribu, appelée* tribu image-réciproque *de* $\mathcal{T}'$*, et usuellement notée* $f^{-1}(\mathcal{T}')$ *;*

(b) pour une famille $\mathcal{A}'$ *de parties de* Ω'*,* $f^{-1}\left(\sigma\left(\mathcal{A}'\right)\right) = \sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{A}'\right)\right)$*.*

Démonstration. (a) Il suffit de rappeler que pour l'application f, l'image réciproque f^{-1} préserve le passage au complémentaire et l'union quelconque[1]. Si $A \in f^{-1}(\mathcal{T}')$, avec $A = f^{-1}(A')$, alors :

$$\Omega \setminus A = \Omega \setminus f^{-1}(A') = f^{-1}\underbrace{(\Omega' \setminus A')}_{\in \mathcal{T}'} \in \mathcal{T}. \tag{2.9}$$

De même, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $f^{-1}(\mathcal{T}')$, avec $A_n = f^{-1}(A'_n)$ pour tout n, alors il vient :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A'_n) = f^{-1}\underbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right)}_{\in \mathcal{T}'} \in \mathcal{T}. \tag{2.10}$$

(b) L'une des inclusions est immédiate : $f^{-1}\left(\sigma\left(\mathcal{A}'\right)\right)$ est une tribu contenant $f^{-1}\left(\mathcal{A}'\right)$ (par définition de la tribu image-réciproque), donc contenant $\sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{A}'\right)\right)$. Réciproquement, soit $\mathcal{F}' = \left\{A' \in \mathcal{P}(\Omega') : f^{-1}(A') \in \sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{A}'\right)\right)\right\}$. On a $\emptyset \in \mathcal{F}'$. Si $A' \in \mathcal{F}'$, alors

$$f^{-1}(\Omega \setminus A') = \Omega \setminus f^{-1}(A') \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{A}')\right), \tag{2.11}$$

i.e. $\Omega \setminus A' \in \mathcal{F}'$. De même, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}'$, alors

$$f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A'_n) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{A}')\right), \tag{2.12}$$

i.e. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \in \mathcal{F}'$. Ainsi, $\mathcal{F}'$ est une tribu, et elle contient $\mathcal{A}'$, donc $\sigma\left(\mathcal{A}'\right)$. Ainsi, par définition de $\mathcal{F}'$, on a bien $f^{-1}\left(\sigma\left(\mathcal{A}'\right)\right) \subset \sigma\left(f^{-1}\left(\mathcal{A}'\right)\right)$.

□

2.2 Fonctions mesurables

Les espaces mesurables seront donc les espaces sur lesquels nous allons développer la notion de mesure, toujours dans l'optique de la construction de l'intégrale de Lebesgue. Nous devrons donc nous "restreindre" (on verra que la contrainte n'est pas forte...) aux fonctions qui respectent la structure de tribu de ces espaces mesurables. Ce sont les fonctions mesurables que nous définissons ici.

Définition 2.17 (Fonction mesurable)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\Omega', \mathcal{T}')$ est dite *mesurable* si l'image réciproque de la tribu $\mathcal{T}'$ par f est incluse dans la tribu $\mathcal{T}$, i.e. $f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$, ou encore :

$$\forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}. \tag{2.13}$$

1. et l'intersection quelconque, dont nous n'avons pas besoin ici.

Remarque 2.18. Lorsque les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont les tribus boréliennes, on parle de *fonction borélienne.*

Ainsi, pour montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne, il faut vérifier que pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B)$ est borélien, ce qui est une tâche gigantesque. La proposition suivant permet de grandement simplifier ce problème.

Proposition 2.19 (Mesurabilité et tribu engendrée)**.** *Si $\mathcal{T}'$ est la tribu engendrée par une famille de parties $\mathcal{A}'$ de Ω', alors f est mesurable si et seulement si l'image réciproque de la famille $\mathcal{A}'$ par f est incluse dans la tribu $\mathcal{T}$, i.e. $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{T}$, ou encore*

$$\forall A' \in \mathcal{A}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}. \tag{2.14}$$

Démonstration. Si f est mesurable, alors $\mathcal{A}' \subset \mathcal{T}' \implies f^{-1}(\mathcal{A}') \subset f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$ par définition de la mesurabilité de f. Réciproquement, si $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω' contenant $f^{-1}(\mathcal{A}')$, donc contenant $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{A}')\right) = f^{-1}\left(\sigma\left(\mathcal{A}'\right)\right) = f^{-1}(\mathcal{T}')$, où on a utilisé la proposition 2.16, ce qui prouve la mesurabilité de f. □

Reprenons notre exemple de fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La combinaison des propriétés 2.12 et 2.19 nous permet désormais, lorsque l'on cherche à prouver que f est mesurable (borélienne), de ne nous intéresser qu'aux images réciproques des intervalles $]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}$, ou aux images réciproques des intervalles des formes données à la remarque 2.14. Voir par exemple les démonstrations des propositions 2.25 et 2.27.

Proposition 2.20 (Fonctions réelles usuelles)**.** *(a) Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $\mathbf{1}_A$ est mesurable.*

(b) Toute fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$ est borélienne.

Démonstration. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
- si $a < 0$, $\mathbf{1}_A^{-1}(]-\infty, a]) = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
- si $a \in [0, 1[$, $\mathbf{1}_A^{-1}(]-\infty, a]) = \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
- si $a \in [1, +\infty[$, $\mathbf{1}_A^{-1}(]-\infty, a]) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Donc par la proposition 2.19, $\mathbf{1}_A$ est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (borélienne).

(b) On sait que l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert, i.e. un borélien, donc toujours par la proposition 2.19, une fonction continue est borélienne. □

Proposition 2.21 (Composition)**.** *Soient $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\Omega', \mathcal{T}')$ et $g : (\Omega', \mathcal{T}') \to (\Omega'', \mathcal{T}'')$ deux fonctions mesurables. Alors $g \circ f$ est mesurable.*

Démonstration. $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{T}'') = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{T}'')\right) \subset \mathcal{T}$. □

Exemple 2.22. Si f est mesurable, alors f^+, f^-, $|f|$ le sont par combinaison des deux propositions précédentes.

Proposition 2.23 (Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$)**.** *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f = (f_1, \dots, f_p) : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$. Alors f est mesurable si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $f_i : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.*

Démonstration. Admise. □

Remarque 2.24. En assimilant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on en déduit qu'une fonction à valeurs complexes est mesurable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont mesurables.

Proposition 2.25 (Espace des fonctions mesurables à valeurs de $\mathbb{K}$)**.** *L'ensemble des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$, noté $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$, est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

Démonstration. Commençons par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Remarquons que pour tout réel a,

$$(\lambda f + g)^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcup_{(r,r') \in \mathbb{Q}^2 : \lambda r + r' < a} f^{-1}(]-\infty, r[) \cap g^{-1}\left(]-\infty, r'[\right), \tag{2.15}$$

et

$$(fg)^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcup_{(r,r') \in \mathbb{Q}^2 : rr' < a} f^{-1}(]-\infty, r[) \cap g^{-1}\left(]-\infty, r'[\right). \tag{2.16}$$

Les images réciproques de tout intervalle $]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}$ par $\lambda f + g$ et par fg sont donc mesurables, donc on peut conclure avec la proposition 2.19.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on conclut avec la remarque 2.24, en utilisant le résultat que l'on vient de montrer aux parties réelle et imaginaire de $\lambda f + g$ et fg. □

Proposition 2.26 (Fonctions réelles usuelles, II)**.** *Toute fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$ est borélienne.*

Démonstration. Une fonction continue par morceaux s'écrit comme une combinaison linéaire de produit de fonctions continues et de fonctions indicatrices. □

Proposition 2.27 (Suites de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$)**.** *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$. Alors $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\liminf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_n f_n$ et $\lim\limits_n f_n$ (si elle existe) sont mesurables.*

Démonstration. Pour les bornes inférieures et supérieures, on observe que pour tout a réel, $(\sup\limits_n f_n)^{-1}(]-\infty, a]) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, a])$ et $(\inf\limits_n f_n)^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(]-\infty, a[)$. En ce qui concerne les limites inférieures et supérieures, on a $\liminf\limits_n f_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k \geq n} f_k$ et $\limsup\limits_n f_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k \geq n} f_k$. Finalement, si la limite existe elle est égale aux limites inférieures et supérieures. □

La combinaison des propositions 2.20 à 2.27 permet de déterminer la mesurabilité de toutes les fonctions usuelles. Voir les exercices 2.2, 2.3 et 2.5.

2.3 Fonctions étagées

Parmi les fonctions mesurables, on distingue les plus "simples", celles qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Elles seront le pendant des fonctions en escalier utilisées pour construire l'intégrale de Riemann.

Définition 2.28 (Fonction étagée)**.** Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable est dite *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.29 (Forme canonique d'une fonction étagée)**.** *Toute fonction étagée s'écrit de façon unique sous la forme*

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} \tag{2.17}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$, les $(\alpha_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts*, et les $(A_i)_{i\in I}$ sont des éléments de $\mathcal{T}$ formant une partition de Ω.*

Démonstration. Toute fonction sous la forme de l'équation 2.17 répond évidemment à la définition d'une fonction étagée. Réciproquement, si f est une fonction étagée, alors l'ensemble $f(\Omega)$ est fini, et s'écrit de façon unique sous la forme $f(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ avec des éléments deux à deux distincts. Posons $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Les A_i sont mesurables car f est mesurable, deux à deux disjoints car les α_i sont distincts, et leur union est Ω puisque $f(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$. Finalement, $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, d'où le résultat. □

Proposition 2.30 (Espace des fonctions étagées)**.** *On note $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions étagées sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$.*

(a) $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{T}\}\right)$.

(b) $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Démonstration. (a) La structure d'espace vectoriel engendré est immédiate avec la proposition 2.29.

(b) Il suffit de remarquer que si $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{i=1}^{M} \beta_i \mathbf{1}_{B_i}$, alors

$$f + g = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad fg = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \alpha_i \beta_j \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}, \tag{2.18}$$

où la famille de parties $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ forme une partition de Ω. Le résultat s'en déduit. □

Théorème 2.31 (Approximation des fonctions mesurables par les fonctions étagées). *Soit une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable. Alors f est limite (simple*[2]*) d'une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la fonction f est bornée, alors la suite peut être choisie de sorte que la convergence soit uniforme*[3]*.*

Démonstration. On commence par le cas d'une fonction mesurable à valeurs réelles positives $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_{n,k} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, k \in \{0, \dots, n2^n - 1\} \tag{2.19}$$

1. i.e. $\forall x \in \Omega, \lim_n f_n(x) = f(x)$.
3. i.e. $\lim_n \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

et

$$B_n = \{x \in \Omega : n \leq f(x)\}, \tag{2.20}$$

puis

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{A_{n,k}} + n\mathbf{1}_{B_n}. \tag{2.21}$$

On vérifie que les $A_{n,k}$ et les B_n sont bien mesurables (images réciproques d'intervalles de $\mathbb{R}_+$ par des fonctions mesurables), et que par conséquent les f_n sont des fonctions étagées. De plus,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in f^{-1}([0,N[), \forall n \geq N, \;\; 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}, \tag{2.22}$$

donc

$$\forall x \in \Omega, \exists N_x \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_x, \;\; 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}, \tag{2.23}$$

donc $\forall x \in \Omega, \lim\limits_{n} f_n(x) = f(x)$.

Si f est bornée, alors $\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in \Omega, x \in f^{-1}([0,N[)$, i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in \Omega, \;\; |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \tag{2.24}$$

i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \;\; \sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \tag{2.25}$$

donc la convergence est uniforme.

Si f est à valeurs réelles, on écrit $f = f^+ - f^-$ et on applique le résultat précédent à f^+ et f^-. Si f est à valeurs complexes, on écrit $f = \Re(f) + i\Im(f)$ et on applique ce dernier résultat $\Re(f)$ et $\Im(f)$. □

Corollaire 2.32. *Soit une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ mesurable. Alors f est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.*

Démonstration. Supposons donc f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et reprenons la suite construite par les équations (2.19)- (2.21). La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment positive. Le théorème principal 2.31 établit la convergence simple pour tout x tel que $f(x) < +\infty$, et dans le cas $f(x) = +\infty$, on a $x \in B_n$ donc $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. f est donc limite simple d'une suite de fonctions étagées positives.

Reste à vérifier la croissance. On remarque que :

$$\begin{aligned} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[&= \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right[\cup \left[\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}\right[\\ &= \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right[\cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right[, \end{aligned} \tag{2.26}$$

ce qui entraîne :

$$x \in A_{n,k} \Longrightarrow x \in A_{n+1,2k} \cup A_{n+1,2k+1}. \tag{2.27}$$

Autrement dit si $x \in A_{n,k}$, alors deux cas se présentent :

$$x \in A_{n+1,2k} \Longrightarrow f_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = f_n(x), \tag{2.28}$$

ou

$$x \in A_{n+1,2k+1} \Longrightarrow f_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = f_n(x). \tag{2.29}$$

De la même manière, $[n, +\infty[= \displaystyle\bigcup_{j=n2^{n+1}}^{(n+1)2^{n+1}-1} \left[\frac{j}{2^{n+1}}, \frac{j+1}{2^{n+1}}\right[\cup [n+1, +\infty[$, donc si $x \in B_n$, alors $f_{n+1}(x) \geq \dfrac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = n = f_n(x)$. Par conséquent, la suite construite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante. □

Remarque 2.33. La démonstration du théorème 2.31 utilise pour le première fois un schéma qui sera très souvent utilisé dans les chapitres suivants. On montre une propriété d'abord pour une fonction à valeurs réelles positives, puis on l'étend à une fonction réelle en appliquant ce résultat à ses parties positives et négatives, et enfin à une fonction complexe en appliquant ce dernier résultat à ses parties réelle et imaginaire.

2.4 Mesures

Il ne nous reste plus qu'à aborder la dernière composante du "problème de la mesure des ensembles" donné en introduction du chapitre, la ... mesure. Etant donné ce qui précède, deux axiomes suffisent à définir une notion de mesure vérifiant les propriétés intuitives que l'on attend d'un tel objet.

Définition 2.34 (Mesure)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On appelle *mesure* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

(M1) la mesure de l'ensemble vide est nulle : $\mu(\emptyset) = 0$;

(M2) μ est σ-additive : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Remarque 2.35. On ne traite ici que de *mesure positive*. Une mesure pouvant prendre des valeurs négatives est appelée *mesure signée*.

Remarque 2.36. On rappelle (voir la remarque 2.2) que le préfixe σ renvoie à la notion de dénombrabilité : la propriété (M2) est aussi appelée *additivité dénombrable*.

Remarque 2.37. Si $\mu(\Omega) < \infty$, la mesure est dite *finie* ou *bornée*. Si $\mu(\Omega) = 1$, μ est une (mesure de) probabilité [4].

Exemple 2.38. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace mesurable.
- $\mu : A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \operatorname{card} A$ si A est une partie finie et $+\infty$ sinon, est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ appelée *mesure de comptage*.
- Soit $a \in \Omega$ fixé. $\mu : A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \mathbf{1}_{\{a\in A\}}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ appelée *mesure de Dirac* en $a \in \Omega$.

Définition 2.39 (Espace mesuré)**.** Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

Remarque 2.40. Si $\mu(\Omega) = 1$, c'est un espace probabilisé, ou encore espace de probabilité. Voir le cours de Probabilité 2 du semestre 6.

4. Voir le cours Probabilités 2.

On énonce les propriétés fondamentales d'une mesure. Bien noter l'enchaînement des propriétés permettant de montrer l'ensemble des résultats à partir des seuls deux axiomes de la définition 2.34.

Proposition 2.41 (Propriétés fondamentales)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré.*

(a) (Additivité finie) Pour toute famille finie $(A_n)_{n=1,\dots,N}$ *d'éléments* deux à deux disjoints *de* $\mathcal{T}$*,* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$.

(b) (Croissance) Pour tous $A, B \in \mathcal{T}$*, si* $A \subset B$*, alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(c) Pour tous $A, B \in \mathcal{T}$*, si* $A \subset B$ *et si* $\mu(A) < +\infty$*, alors* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(d) ("Principe d'inclusion-exclusion") Pour tous $A, B \in \mathcal{T}$*,* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(e) Pour toute suite croissante[5] $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$*,* $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$.

(f) Pour toute suite décroissante[6] $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$ *telle que l'un au moins de* A_n *soit de mesure finie,* $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$.

(g) (Sous-additivité dénombrable) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$*,* $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Démonstration. (a) Il suffit de poser $A_n = \emptyset$ pour $n \geq N+1$ et d'utiliser la σ-additivité pour la famille dénombrable ainsi construite.

(b) On écrit que pour $A \subset B, B = A \cup (B \setminus A)$ union disjointe, d'où par le point précédent (a) : $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(c) Immédiat avec le point précédent (b). La condition de finitude est essentielle pour éviter une forme indéterminée $\infty - \infty$.

(d) On a la décomposition $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (B \cap A)) \cup (A \cap B)$ (union disjointe), d'où le résultat avec les points précédents (a) et (c).

(e) Posons $B_0 = A_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. On vérifie par récurrence immédiate que pour tout entier N, $A_N = \bigcup_{n=0}^{N} B_n$. On a aussi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. De plus, les $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construits sont deux à deux disjoints, donc il vient :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_N \sum_{n=0}^{N} \mu(B_n) \\ &= \lim_N \mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} B_n\right) = \lim_N \mu(A_N). \end{aligned} \tag{2.30}$$

4. Au sens de l'inclusion, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
6. Au sens de l'inclusion, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$.

(f) Supposons A_N de mesure finie. La suite étant décroissante, pour tout $n \geq N$, A_n est également de mesure finie. Toujours par décroissance, $\bigcap_{n\geq N} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Posons $B_n = A_N \setminus A_n$ pour tout $n \geq N$. Alors la suite $(B_n)_{n\geq N}$ est croissante, donc d'après (e) puis (c), on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq N} B_n\right) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n \left(\mu(A_N) - \mu(A_n)\right) = \mu(A_N) - \lim_n \mu(A_n). \tag{2.31}$$

Or,

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq N} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq N} A_N \setminus A_n\right) = \mu\left(A_N \setminus \bigcap_{n\geq N} A_n\right) = \mu(A_N) - \mu\left(\bigcap_{n\geq N} A_n\right), \tag{2.32}$$

où la dernière égalité est due à (c). D'où le résultat.

(g) La sous-additivité *finie* se montre aisément par récurrence. Pour $N = 2$, le principe d'inclusion-exclusion initialise la récurrence, et si la propriété est vraie aux rangs $2, \ldots, N$, alors :

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=0}^{N+1} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n \cup A_{N+1}\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) + \mu\left(A_{N+1}\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} \mu\left(A_n\right) + \mu\left(A_{N+1}\right) = \sum_{n=0}^{N+1} \mu\left(A_n\right).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Maintenant, la suite des $(B_N)_{N\in\mathbb{N}} = \left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc d'après (e) :

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \lim_N \mu(B_N) = \lim_N \mu(\bigcup_{n=0}^{N} A_n) \\ &\leq \lim_N \sum_{n=0}^{N} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).\end{aligned} \tag{2.34}$$

□

On termine cette section par la définition de deux notions liées que nous utiliserons abondamment dans les chapitres suivants.

Définition 2.42 (Partie négligeable)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie N de Ω est dite *μ-négligeable* s'il existe un élément A de $\mathcal{T}$ contenant N et tel que $\mu(A) = 0$.

Remarque 2.43. Une partie négligeable n'est donc pas nécessairement mesurable...

Définition 2.44 (Propriété vraie μ-presque-partout)**.** On dit qu'une propriété est vraie *μ-presque partout* sur Ω si l'ensemble $\{x \in \Omega :$ la propriété est fausse$\}$ est une partie négligeable de Ω. On note $\mu - p.p.$

2.5 Construction partielle d'une mesure et application à la mesure de Lebesgue

Nous avons défini une mesure de façon axiomatique, en considérant toutes les "bonnes" propriétés que l'on attend d'un tel objet. Prouver l'existence de tels objets sur un espace Ω donné est un problème complexe. Nous esquissons ici partiellement la démarche de construction d'une mesure sur un espace Ω quelconque, en donnant en application les éléments permettant de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.45 (Mesure extérieure)**.** Soit Ω un ensemble. On appelle *mesure extérieure* une application $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) (croissance) si A et B sont deux parties de Ω vérifiant $A \subseteq B$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) (sous-additivité dénombrable) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de Ω, alors

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Considérons le cas $\Omega = \mathbb{R}$. Pour toute partie $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) : \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_i, b_i] \supset A\right\}, \tag{2.35}$$

avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$. λ^* est la borne inférieure de l'ensemble des sommes des longueurs des éléments d'un recouvrement dénombrable de A par des segments. On montre que λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$:

(i) $\lambda^*(\emptyset) = 0$ car $\emptyset = [a, a]$ pour $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $A \subset B$, alors $\left\{(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_i, b_i] \supset B\right\} \subset \left\{(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_i, b_i] \supset A\right\}$, et par conséquent $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

(iii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de Ω. Si l'un des A_n vérifie $\lambda^*(A_n) = +\infty$, alors l'inégalité est triviale. Supposons donc que pour tout n, $\lambda^*(A_n) < \infty$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition d'une borne inférieure, il existe pour tout n un recouvrement de A_n par des segments $[a_{n,i}, b_{n,i}]$ vérifiant

$$\lambda^*(A_n) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}(b_{n,i} - a_{n,i}) \leq \lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}. \tag{2.36}$$

Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_{n,i}, b_{n,i}] = \bigcup_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}[a_{n,i}, b_{n,i}]$, autrement dit on a un recouvrement dénombrable de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ par des segments. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lambda^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &\leq \sum_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}(b_{n,i} - a_{n,i}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_{n,i} - a_{n,i}) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda^*(A_n) + 2\epsilon. \end{aligned} \tag{2.37}$$

ϵ étant quelconque, on a bien la sous-additivité dénombrable de λ^*.

On peut énoncer quelques premières propriétés de la mesure extérieure λ^*.

(a) *La mesure extérieure* λ^* *d'un singleton est nulle* : $\{a\} \subset [a,a]$ et par conséquent $0 \leq \lambda^*(\{a\}) \leq a - a = 0$.

(b) *La mesure extérieure* λ^* *d'un segment* $[a,b]$ *est sa longueur*. Commençons par remarquer que $[a,b]$ est un recouvrement par des segments de $[a,b]$, et par conséquent que $\lambda^*([a,b]) \leq b - a$. Montrons l'inégalité réciproque. Soit $([a_i,b_i])_{i\in I}$ un recouvrement *quelconque* de $[a,b]$. Alors $\left(\left]a_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, b_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right[\right)_{i\in I}$ est un recouvrement quelconque par des ouverts de $[a,b]$ partie compacte de $\mathbb{R}$, donc par la propriété de Borel-Lebesgue [7], on peut extraire un sous-recouvrement fini, que l'on indice $i_j, j = 1, \ldots, N$:

$$[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{N} \left]a_{i_j} - \frac{\epsilon}{2^{i_j+1}}, b_{i_j} + \frac{\epsilon}{2^{i_j+1}}\right[. \tag{2.38}$$

En prenant la longueur de ces intervalles il vient :

$$b - a \leq \sum_{j=1}^{N} \left(b_{i_j} - a_{i_j} + \frac{\epsilon}{2^{i_j}}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(b_i - a_i + \frac{\epsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) + 2\epsilon. \tag{2.39}$$

ϵ étant quelconque, on a $b - a \leq \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i)$. Le recouvrement $([a_i,b_i])_{i\in I}$ étant quelconque, on a $b - a \leq \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (b_i - a_i) : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [a_i,b_i] \supset A\right\} = \lambda^*([a,b])$.

(c) *La mesure extérieure* λ^* *d'un intervalle ouvert* $]a,b[$ *est sa longueur* : Par la propriété précédente et par croissance d'une mesure extérieure, pour tout $\epsilon > 0$ $\left[a + \frac{\epsilon}{2}, b - \frac{\epsilon}{2}\right] \subset]a,b[\subset [a,b]$, on a :

$$b - a - \epsilon = \lambda^*\left(\left[a + \frac{\epsilon}{2}, b - \frac{\epsilon}{2}\right]\right) \leq \lambda^*(]a,b[) \leq \lambda^*([a,b]) = b - a. \tag{2.40}$$

ϵ étant quelconque, on a bien l'égalité.

(d) *La mesure extérieure* λ^* *de* $\mathbb{R}$ *est infinie* : par croissance d'une mesure extérieure, $\lambda^*(\mathbb{R}) \geq \lambda^*([a,b]) = b - a$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(e) *La mesure extérieure* λ^* *est invariante par translation* : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement d'une partie A de $\mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a + A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $a + A$, où l'on a utilisé la notation $a + X = \{a + x : x \in X\}$.

Disposer d'une telle mesure extérieure se révèle crucial grâce au théorème fondamental suivant, permettant d'affirmer l'existence d'une mesure sur les parties "mesurables" au sens de la mesure extérieure.

Théorème 2.46 (Restriction d'une mesure extérieure)**.** *Soit* Ω *un ensemble et* μ^* *une mesure extérieure sur* Ω. *On définit la famille* $\mathcal{F}^*$ *des* parties μ^*-mesurables de Ω *par :*

$$\mathcal{F}^* = \{A \in \Omega : \forall E \in \mathcal{P}(\Omega), \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (\Omega \setminus A))\}. \tag{2.41}$$

Alors $\mathcal{F}^*$ *est une tribu, et la restriction* μ *de* μ^* *à* $\mathcal{F}^*$ *est une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{F}^*)$.

7. Voir le cours de Topologie.

Démonstration. Admis. □

Remarque 2.47. Le théorème 2.46 est un résultat partiel. Il nous suffit pour avancer dans notre construction de mesure sur $\mathbb{R}$ parce que nous disposons d'une mesure extérieure λ^* sur $\mathbb{R}$. Mais dans le cas général abstrait, on a simplement remplacé la difficulté de construire une mesure par celle de construire une mesure extérieure... L'énoncé général levant ces difficultés "d'un seul coup" est connu sous le nom de théorème de prolongement de Carathéodory, et constitue le résultat central dans la construction de mesures. Il ne sera pas abordé dans ce cours.

Revenons à notre cas réel. Le théorème 2.46 permet donc d'affirmer l'existence d'une mesure λ sur la tribu des parties λ^*-mesurables de $\mathbb{R}$. La mesure ainsi construite est appelée *mesure de Lebesgue.* On peut montrer que les ouverts de $\mathbb{R}$, et par conséquent les boréliens de $\mathbb{R}$ sont des parties λ^*-mesurables de $\mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue est donc bien définie sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [8]. Par construction, on a pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\lambda(I) = \lambda^*(I) =$ longueur de I. Enfin, λ est invariante par translation, puisque λ^* l'est.

2.6 Unicité d'une mesure

La section précédente 2.5 nous a donc permis de construire une mesure sur la tribu des boréliens qui coïncide sur les intervalles de $\mathbb{R}$ à la mesure "intuitive", la longueur des intervalles. On aborde maintenant le problème de l'unicité d'une mesure. En particulier, existe-t-il une autre mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que la mesure d'un intervalle soit sa longueur ? La structure de tribu, parfaitement adaptée dans les sections précédentes pour décrire les ensembles que l'on souhaite mesurer, se révèle trop "grosse" pour y vérifier directement l'unicité d'une mesure. Nous avons donc besoin de définir des familles de parties plus "simples" pour travailler.

Définition 2.48 (λ-système)**.** On appelle λ-système toute famille Λ de parties de Ω vérifiant :

(i) $\emptyset \in \Lambda$;

(ii) (stabilité par différence) pour tous A, B éléments de Λ, $A \subset B \Longrightarrow B \setminus A \in \Lambda$;

(iii) (stabilité par réunion dénombrable croissante) pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Λ, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Lambda$.

$\mathcal{P}(\Omega)$ est un λ-système. De plus, il n'est pas difficile de montrer que l'intersection *quelconque* de λ-systèmes est un λ-système. Par conséquent, pour toute famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω, il existe un plus petit λ-système contenant $\mathcal{A}$, le λ-système engendré par $\mathcal{A}$, que l'on notera $\Lambda(\mathcal{A})$. Bien noter que ce raisonnement est tout à fait similaire à celui fait à la proposition 2.7 pour la construction d'une tribu engendrée.

Définissons également un autre type de famille de parties de Ω, qui est au coeur du problème de l'unicité d'une mesure.

Définition 2.49 (π-système)**.** On appelle π-système toute famille Π de parties de Ω vérifiant :

(i) $\Omega \in \Pi$;

8. et même sur une tribu plus grosse, mais nous ne détaillerons pas ce point ici.

(ii) (stabilité par intersection finie) pour toute famille *finie* $(A_n)_{n=1,\dots,N}$ d'éléments de Π, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{N} A_n \in \Pi$.

Le lien entre ces nouvelles structures et la tribu est donné par la proposition suivante.

Proposition 2.50 ("λ-système + π-système $\Longleftrightarrow$ tribu")**.** *Une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une tribu si et seulement si elle est à la fois un λ-système et un π-système.*

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est à la fois un λ-système et un π-système :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est un λ-système.

(ii) $\Omega \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est un π-système, donc pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (stabilité par différence du λ-système).

(iii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Posons $B_n = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ pour $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire (on vient de le montrer) et par intersection finie (π-système), donc également par union finie (pourquoi ?), donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{A}$. On a ainsi une suite *croissante* de parties de $\mathcal{A}$, donc par stabilité par union dénombrable croissante (λ-système), $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est bien une tribu. □

Le théorème fondamental pour l'unicité des mesures est connu sous le nom de théorème de la classe monotone, (on appelle en effet classe monotone un λ-système contenant Ω). Les résultats d'unicité proprement dit en sont les corollaires.

Théorème 2.51 (Théorème de la classe monotone)**.** *Si Π est π-système, alors $\Lambda(\Pi) = \sigma(\Pi)$.*

Démonstration. $\sigma(\Pi)$ est une tribu, donc également un λ-système, et elle contient Π, donc $\sigma(\Pi) \supset \Lambda(\Pi)$. De la même manière, $\Lambda(\Pi)$ contient Π, donc pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit donc de vérifier que $\Lambda(\Pi)$ est une tribu. En vertu de la proposition 2.50, il suffit de vérifier que $\Lambda(\Pi)$ est un π-système, et puisque $\Omega \in \Pi \subset \Lambda(\Pi)$, il suffit même de vérifier que $\Lambda(\Pi)$ est stable par intersection finie. Pour cela on pose pour toute partie B de Ω fixée :

$$\Lambda_B = \{A \in \Lambda(\Pi) : A \cap B \in \Lambda(\Pi)\}, \tag{2.42}$$

et on montre que Λ_B est un λ-système.

(i) $\emptyset \in \Lambda(\Pi)$ et $\emptyset \cap B = \emptyset \in \Lambda(\Pi)$, donc $\emptyset \in \Lambda_B$.

(ii) Si A_1 et A_2 sont deux éléments de Λ_B vérifiant $A_1 \subset A_2$, alors $(A_2 \setminus A_1) \cap B = (A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \Lambda(\Pi)$, donc $A_2 \setminus A_1 \in \Lambda_B$.

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de Λ_B, alors $\displaystyle\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B) \in \Lambda(\Pi)$, car $(A_n \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\Lambda(\Pi)$, donc $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Lambda_B$

Λ_B est donc un λ-système, et si on suppose $B \in \Pi$ alors Λ_B contient Π (car $A \in \Pi$ et $A \cap B \in \Pi \subset \Lambda(\Pi)$ (stabilité par intersection finie du π-système)), et par conséquent Λ_B contient $\Lambda(\Pi)$, d'où $\Lambda_B = \Lambda(\Pi)$. Autrement dit,

$$\forall B \in \Pi, \forall A \in \Lambda(\Pi), A \cap B \in \Lambda(\Pi). \tag{2.43}$$

Il reste à vérifier que cela reste vrai pour tout $B \in \Lambda(\Pi)$. Soit donc $B \in \Lambda(\Pi)$. Alors par l'équation (2.43), pour tout $A \in \Pi, A \cap B \in \Lambda(\Pi)$, donc $A \in \Lambda_B$, autrement dit $\Pi \subset \Lambda_B$. Λ_B est donc encore un λ-système contenant Π, donc $\Lambda_B = \Lambda(\Pi)$, et finalement,

$$\forall B \in \Lambda(\Pi), \forall A \in \Lambda(\Pi), A \cap B \in \Lambda(\Pi). \tag{2.44}$$

$\Lambda(\Pi)$ est donc stable par intersection finie, donc c'est une tribu, ce qui achève la démonstration du théorème de classe monotone. $\square$

Corollaire 2.52 (Unicité d'une mesure finie)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{T})$ *un espace mesurable. Soient* μ *et* ν *deux mesures* finies *sur* $(\Omega, \mathcal{T})$. *On suppose qu'il existe un* π*-système* Π *engendrant* $\mathcal{T}$, *i.e.* $\mathcal{T} = \sigma(\Pi)$. *Si* μ *et* ν *coïncident sur* Π, *alors elles sont égales.*

Démonstration. On pose $\Lambda = \{A \in \mathcal{T} : \ \mu(A) = \nu(A)\}$. On montre que Λ est un π-système :

(i) $\emptyset \in \Lambda$ puisque $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$ par définition des mesures ;

(ii) si A et B sont deux éléments de Λ tels que $A \subset B$, alors, μ et ν étant *finies* on a $\mu(A) = \nu(A) < \infty$, et par propriété fondamentale des mesures : $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$, donc $B \setminus A \in \Lambda$;

(iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *croissante* d'éléments de Λ, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Lambda$.

Par ailleurs, Λ contient Π par hypothèse, donc il contient $\Lambda(\Pi)$, et par le théorème de classe monotone 2.51, il contient $\sigma(\Pi) = \mathcal{T}$. μ et ν coïncident donc sur $\mathcal{T}$. $\square$

Corollaire 2.53 (Unicité d'une mesure σ-finie)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{T})$ *un espace mesurable. Soient* μ *et* ν *deux mesures sur* $(\Omega, \mathcal{T})$. *On suppose qu'il existe un* π*-système* Π *tel que :*

(i) Π *engendre* $\mathcal{T}$, *i.e.* $\sigma(\Pi) = \mathcal{T}$ *;*

(ii) il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* Π *vérifiant* $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *et* $\mu(E_n) < \infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Si μ *et* ν *coïncident sur* Π, *alors elles sont égales.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose $\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n)$ et $\nu_n(A) = \nu(A \cap E_n)$. Il est facile de vérifier que pour tout n, μ_n et ν_n sont des mesures *finies* sur $(\Omega, \mathcal{T})$. De plus, pour tout $A \in \Pi$, $A \cap E_n \in \Pi$ (stabilité par intersection finie d'un π-système), pour tout n, $\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n) = \nu_n(A)$ et μ_n et ν_n coïncident sur Π, donc par le corollaire 2.52 μ_n et ν_n coïncident sur $\mathcal{T}$. On conclut en remarquant que pour tout $A \in \mathcal{T}$, $(A \cap E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\left(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A\cap E_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A \cap E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \nu_n(A) = \lim_{n\to+\infty} \nu\left(A\cap E_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A\cap E_n)\right) = \nu(A). \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

μ et ν sont bien égales. □

Remarque 2.54. Bien comparer les deux corollaires 2.52 et 2.53 : on a remplacé l'hypothèse de finitude de la mesure μ par l'hypothèse de l'existence d'une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Π vérifiant $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une mesure μ satisfaisant à cette hypothèse est appelée σ-finie, le préfixe σ évoquant une fois encore la dénombrabilité.

Reprenons notre cas réel $\Omega = \mathbb{R}$. Le travail réalisé dans les pages précedentes nous permet de montrer que la mesure de Lebesgue construite à la section 2.5 est unique. Considérons en effet l'ensemble des intervalles ouverts (non nécessairement bornés) :

$$\Pi_{\mathbb{R}} = \{]a, b[: \ a, b \in \overline{\mathbb{R}}\} \qquad (2.46)$$

On vérifie sans difficulté que $\Pi_{\mathbb{R}}$ est un π-système, et on sait par la proposition 2.12 que ce π-système engendre la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$: $\sigma(\Pi_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Posons également $E_n =]-n, n[$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\Pi_{\mathbb{R}}$ vérifiant $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\lambda(E_n) = 2n < +\infty$. Alors, par le corollaire 2.53, toute mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ égale à la longueur sur les intervalles est égale à la mesure de Lebesgue λ sur tout borélien.

Finalement, nous pouvons conclure ce chapitre en résumant le travail fait dans les sections 2.5 et 2.6 par le résultat suivant :

Théorème 2.55 (Mesure de Lebesgue). *Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant*

(i) $\lambda([0, 1]) = 1$,

(ii) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}, \lambda(\{a + x | x \in A\}) = \lambda(A)$. *(invariance par translation)*

λ *est appelée* mesure de Lebesgue.

Démonstration. En vertu de ce qui précède, il suffit de vérifier que la mesure caractérisée par ces deux propriétés coïncide sur les intervalles avec la notion de longueur. Cette preuve est proposée à l'exercice à l'exercice 2.8 □

Remarque 2.56. Dans tout ce qui précède nous nous sommes concentrés sur la mesure de Lebesgue sur la droite réelle. Les résultats présentés se généralisent dans $\mathbb{R}^d$ sans (trop) de difficulté : la mesure de Lebesgue d'un pavé de $\mathbb{R}^d$ est le volume de ce pavé.

2.7 Exercices

Exercice 2.1 (Tribu, tribu engendrée, tribu de Borel)**.** On se place sur $\Omega = \mathbb{R}$.

1. Déterminer la tribu engendrée par la famille formée de l'unique partie $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathcal{T}_K$ la tribu engendrée par les compacts de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{T}_K = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A \text{ ou } \mathbb{R} \setminus A \text{ est au plus dénombrable}\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\mathcal{D} \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
5. Soit $\mathcal{T}_s$ la tribu engendrée par les singletons de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{T}_s = \mathcal{D}$.

Exercice 2.2 (Mesurabilité de fonctions usuelles)**.** Etudier la mesurabilité des fonctions définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ suivantes :

1. $x \mapsto 1_{\mathbb{Q}}(x)$;
2. $x \mapsto \cosh(x)$;
3. $x \mapsto \exp(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x)$;
4. $x \mapsto \sin(\frac{1}{x^2})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.

Exercice 2.3 (Mesurabilité d'une dérivée)**.** Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable dérivable. Montrer que sa dérivée f' est mesurable.

Exercice 2.4 (Mesurabilité pour des tribus particulières)**.** Soit une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit mesurable dans les cas suivants :

(a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$;

(b) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$;

(c) $\mathcal{T} = \sigma(\{A_i : i \in I\})$, où I est une partie *finie* de $\mathbb{N}$ et les A_i forment une partition de Ω. (Indication : on pourra commencer par montrer que $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j : J \subset I \right\}$.)

Exercice 2.5 (Mesurabilité de l'ensemble des points de convergence)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'ensemble des points de Ω où la suite $(f_n)_n$ est convergente est mesurable.

Exercice 2.6 (Mesures sur $\mathbb{N}$)**.** On se place sur $\Omega = \mathbb{N}$ muni de sa tribu triviale.

1. Vérifier que le cardinal est bien une mesure, notée ν, sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
2. Pour tout $A \subset \mathbb{N}$, on pose $\mu(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{(k+1)^2}$ si A est non vide, et $\mu(\emptyset) = 0$. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
3. Déterminer les parties négligeables de la mesure ν.
4. Déterminer les parties négligeables de la mesure μ.

Exercice 2.7 (Caractérisation d'une mesure)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Soit une application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que μ est une mesure si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

(M'1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(M'2) $\forall A, B \in \mathcal{T}, A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

(M'3) pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$.

Exercice 2.8 (Mesure de Lebesgue et longueur d'un intervalle)**.** Dans ce exercice, on vérifie que la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie au théorème 2.55, coïncide avec la fonction longueur d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{x\}) = \lambda(\{0\})$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n\lambda(\{0\}) \leq 1$, et énoncer le résultat pour les singletons de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n\lambda\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) = 1$.
4. En déduire le résultat pour les intervalles de la forme $]r, r'], r, r' \in \mathbb{Q}$.
5. En déduire le résultat pour les intervales $]a, b[, a, b \in \mathbb{R}$.
6. Conclure.

Exercice 2.9 (Mesure de Lebesgue d'une partie bornée)**.** On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue λ.

1. Montrer que pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}$, O borné $\Longrightarrow \lambda(O) < +\infty$, mais que la réciproque est fausse.
2. Montrer que pour tout borélien B, B contient un ouvert non vide $\Longrightarrow \lambda(B) > 0$, mais que la réciproque est fausse.

Exercice 2.10 (Mesure image)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{E})$ une fonction mesurable. Montrer que $\mu_f : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+, A \mapsto \mu(f^{-1}(A))$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ [9].

Exercice 2.11 (Fonction de répartition)**.** Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \mu(]-\infty, x])$. F est appelée fonction de répartition de la mesure μ [10].

1. Exemple : donner la fonction de répartition de la mesure de Dirac en 0.
2. Montrer que F est croissante.
3. Calculer $\lim_{-\infty} F$ et $\lim_{+\infty} F$.
4. Montrer que F est continue à droite.
5. Montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
6. Montrer que F caractérise μ. (Attention, des notions vues uniquement en cours et non exposées dans le poly sont nécessaires.)

Exercice 2.12 ((Une version du) Théorème d'Egorov)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré de masse *finie* (i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, convergeant simplement vers une fonction f sur Ω.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, A_n^k = \left\{x \in \Omega : \forall i \geq n, |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\right\}$. On fixe $\epsilon > 0$.

9. Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace de probabilité, alors f est une variable aléatoire et μ_f sa loi de probabilité. Voir le cours de Probabilités 2.

10. Voir le cours de Probabilités 2.

1. Vérifier que les A_n^k sont mesurables.
2. Vérifier que la suite $\left(A_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à k fixé est croissante.
3. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^k = \Omega$.
4. Déduire des questions précédentes que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_{k,\epsilon} \in \mathbb{N}^* : \mu\left(\Omega \setminus A_{N_{k,\epsilon}}^k\right) \leq \frac{\epsilon}{2^k}$.
5. Vérifier que $A_\epsilon = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_{N_{k,\epsilon}}^k$ est une partie mesurable et que $\mu\left(\Omega \setminus A_\epsilon\right) \leq \epsilon$.
6. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur A_ϵ.
7. Enoncer le résultat qui vient d'être montré.
8. En donner un contre-exemple dans le cas $\epsilon = 0$.
9. En donner un contre-exemple dans le cas $\mu(\Omega) = +\infty$.

Exercice 2.13 (Vitali)**.** Soit R la relation d'équivalence sur $[0,1]$ définie par

$$\forall x, y \in [0,1], x\mathtt{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}. \tag{2.47}$$

L'axiome du choix permet d'associer à chaque classe d'équivalence un représentant unique. Soit V l'ensemble de ces représentants uniques choisis. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels de $[-1,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = r_n + V = \{x + r_n : x \in V\}$.

L'objectif de l'exercice est de montrer par l'absurde que V n'est pas mesurable. On suppose donc V mesurable et on note λ la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda(V_n) = \lambda(V)$.
2. Montrer que $[0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset [-1,2]$.
3. Montrer que si $n \neq m$, alors $V_n \cap V_m = \emptyset$.
4. En déduire que V n'est pas mesurable.

Chapitre 3

Intégrale par rapport à une mesure positive

> Pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante $y(x)$, $(a < x < b)$, on divise l'intervalle (a, b) en intervalles partiels et l'on fait la somme des quantités obtenues en multipliant la longueur de chaque intervalle partiel par l'une des valeurs de y quand x est dans cet intervalle. Si x est dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}), y varie entre certaines limites m_i et m_{i+1}, et réciproquement si y est entre m_i et m_{i+1}, x est entre a_i et a_{i+1}. De sorte qu'au lieu de se donner la division de la variation de x, c'est-à-dire les nombres a_i, on aurait pu se donner la division de la variation de y, c'est-à-dire les nombres m_i. De là deux manières de généraliser la notion d'intégrale. On sait que la première (se donner les a_i) conduit à la définition donnée par Riemann et aux définitions des intégrales par excès et par défaut données par M.Darboux. Voyons la seconde.
>
> Henri Lebesgue, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Vol.132, 1901.

Ce chapitre est le chapitre central de ce cours. Son premier objectif est de construire une intégrale par rapport à μ sur des espaces de fonctions mesurables. Cette construction est détaillée dans les sections 3.1 à 3.3 pour les fonctions étagées positives, puis mesurables positives et enfin pour les fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une fois cette intégrale construite et ses propriétés élémentaires prouvées, on prouve le théorème de convergence dominée, outil crucial de cette nouvelle intégrale, et ses conséquences immédiates pour le calcul intégral (sections 3.4 et 3.5). On conclut le chapitre en énonçant à la section 3.6 plusieurs résultats établissant des liens entre les intégrales au sens de Riemann et de la mesure de Lebesgue, permettant d'utiliser dans la pratique nombre de résultats établis dans les classes antérieures.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle que l'on a déjà introduit la notation $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ pour désigner l'ensemble des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$.

3.1 Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

On commence par définir de façon "naturelle" l'intégrale pour les fonctions étagées réelles positives. On montre aisément la linéarité et la croissance d'une telle intégrale.

Définition 3.1 (Intégrale d'une fonction étagée réelle positive)**.** Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ une fonction étagée *positive* (i.e. $\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et les $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ forment une partition mesurable de Ω). On définit l'intégrale de φ par rapport à la mesure μ par

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i). \tag{3.1}$$

Remarque 3.2. Il est important de vérifier la cohérence de cette définition : l'intégrale d'une fonction étagée ne dépend pas de la décomposition en fonctions indicatrices choisie (exercice).

Remarque 3.3 (Notation). Lorsque qu'il sera nécessaire de préciser une variable muette d'intégration, on utilisera indifféremment les notations suivantes :

$$\int_\Omega f(t)\,\mu(dt) \text{ ou } \int_\Omega f(t)\,d\mu(t) \text{ ou encore } \int_\Omega f(t)\,d\mu_t.$$

Proposition 3.4 (Propriétés élémentaires)**.** *Soient φ et ψ deux fonctions étagées réelles positives sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.*

(a) $\displaystyle\int_\Omega (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_\Omega \varphi \, d\mu + \int_\Omega \psi \, d\mu.$

(b) $\displaystyle\forall \lambda \geq 0, \int_\Omega \lambda\varphi \, d\mu = \lambda \int_\Omega \varphi \, d\mu.$

(c) $\displaystyle\varphi \leq \psi \Longrightarrow \int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \int_\Omega \psi \, d\mu.$

Démonstration. (a) Soient $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ et $\psi = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$ deux fonctions étagées. Les familles $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ et $(B_j)_{j\in\{1,\ldots,M\}}$ sont des partitions mesurables de Ω. On a alors $\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j)\mathbf{1}_{A_i \cap B_j}$, où les $(A_i \cap B_j)$ sont mesurables et forment une partition de Ω. Par ailleurs, par définition d'une partition et additivité d'une mesure :

$$\forall i, \;\; \mu(A_i) = \mu\left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^{M} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{M} (A_i \cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^{M} \mu\left(A_i \cap B_j\right) \tag{3.2}$$

$$\forall j, \;\; \mu(B_j) = \mu\left(B_j \cap \bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} (A_i \cap B_j)\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu\left(A_i \cap B_j\right) \tag{3.3}$$

Ainsi :

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu + \int_\Omega \psi \, d\mu \;\; = \;\; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \mu(B_j)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{M} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \int_\Omega (\varphi + \psi)\, d\mu, \qquad (3.4) \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat cherché.

(b) Immédiat.

(c) L'intégrale d'une fonction étagée réelle positive est par définition positive. Par linéarité, en écrivant $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$ et en appliquant cette remarque à la fonction positive $\psi - \varphi$, on obtient bien le résultat voulu.

□

3.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

On étend maintenant la définition aux fonctions mesurables réelles positives (donc non nécessairement étagées). La définition adoptée permet d'obtenir directement positivité et croissance de l'intégrale. Pour la linéarité, c'est un théorème fondamental, le théorème de convergence monotone, qui permet d'avancer. Ce théorème est le premier résultat d'interversion limite-intégrale pour notre nouvelle intégrale. Noter que cette section voit également l'énoncé des premières propriétés valides μ-presque partout.

Définition 3.5 (Intégrale d'une fonction mesurable positive)**.** Soit f une fonction de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$ (i.e. mesurable, à valeurs réelles *positives*, éventuellement infinies). On définit l'intégrale de f par rapport à la mesure μ par

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi\, d\mu : \varphi \text{ fonction étagée positive}, \varphi \leq f \right\}. \qquad (3.5)$$

Proposition 3.6 (Positivité et croissance)**.** *Soit* $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$*.*

(a) $\displaystyle\int_\Omega f\, d\mu \geq 0$ *;*

(b) $f \leq g \Longrightarrow \displaystyle\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu$*.*

Démonstration. (a) La fonction nulle sur Ω est une fonctions étagée inférieure à f, donc $\displaystyle\int_\Omega f\, d\mu$ est positive par la définition 3.5.

(b) Si $f \leq g$, alors l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_\Omega \varphi\, d\mu : \varphi \text{ fonction étagée }, \varphi \leq f \right\}$ est inclus dans l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_\Omega \varphi\, d\mu : \varphi \text{ fonction étagée }, \varphi \leq g \right\}$ et on conclut directement avec la définition 3.5.

□

Théorème 3.7 (Théorème de convergence monotone, ou de Beppo-Levi)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante*[1] *de fonctions de* $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors* $\lim_n f_n$ *est une fonction de* $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$ *et*

$$\int_\Omega \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$. Cette suite admet nécessairement une limite f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, mesurable comme limite de fonctions mesurables. De plus, la suite étant croissante, on a $\forall n$, $f_n \leq f$, d'où par croissance (proposition 3.6), $\int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu$. Notons tout de suite que si $\lim_n \int_\Omega f_n d\mu = +\infty$, alors cette inégalité entraîne $\int_\Omega f \, d\mu = +\infty$, d'où le résultat dans ce cas. Maintenant, si $\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu < +\infty$, on obtient le résultat en montrant que l'on a aussi $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega f \, d\mu$. Commençons à cet effet par un lemme.

Lemme 3.8. *Soit* $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{R}_+)$ *(i.e.* φ *est une fonction étagée à valeurs positives). Soit* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de parties mesurables de* Ω*, vérifiant* $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. *Alors,*

$$\lim_n \int_\Omega \varphi \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \int_\Omega \varphi \, d\mu. \tag{3.7}$$

Démonstration. On peut écrire φ sous la forme $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_\Omega \varphi \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i\cap E_n} \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu\left(A_i \cap E_n\right). \tag{3.8}$$

Or, pour i fixé, $(A_i \cap E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$, donc d'après la proposition 2.41 :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_i \cap E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_i \cap E_n)\right) = \mu\left(A_i \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu(A_i). \tag{3.9}$$

On a par conséquent,

$$\lim_n \int_\Omega \varphi \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \lim_n \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu\left(A_i \cap E_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu\left(A_i\right) = \int_\Omega \varphi \, d\mu, \tag{3.10}$$

ce qui achève la démonsration du lemme. □

Reprenons la démonstration du théorème de convergence monotone. Considérons $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{R}_+)$ telle que $\varphi \leq f$. Soient $\lambda \in]0, 1[$ et pour n entier naturel, on pose

$$E_n = \left\{x \in \Omega : f_n(x) \geq \lambda\varphi\right\}. \tag{3.11}$$

1. i.e. $\forall x \in \Omega, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions du lemme 3.8 (la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers $f \geq \lambda\varphi$), donc par croissance de l'intégrale de fonctions mesurables positives (deux fois), utilisation du lemme 3.8 et homogénéité positive de l'intégrale des fonctions étagées réelles positives :

$$\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \lim_n \int_\Omega f_n \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu \geq \lim_n \int_\Omega \lambda\varphi \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \int_\Omega \lambda\varphi \, d\mu = \lambda \int_\Omega \varphi \, d\mu. \tag{3.12}$$

En passant à la limite quand λ tend vers 1, on obtient $\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega \varphi \, d\mu$, d'où, φ étant quelconque,

$$\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : \varphi \in \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{R}_+), \varphi \leq f \right\} = \int_\Omega f \, d\mu, \tag{3.13}$$

ce qui est bien l'inégalité qui nous manquait pour conclure. □

Proposition 3.9 (Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions mesurables positives)**.** *Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$.*

(a) $\displaystyle\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu.$

(b) $\displaystyle\forall \lambda \geq 0, \int_\Omega \lambda f \, d\mu = \lambda \int_\Omega f \, d\mu.$

(c) $\displaystyle\int_\Omega f \, d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \;\; \mu - p.p.$

(d) $\displaystyle f = g \;\; \mu - p.p. \Longrightarrow \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu.$

Démonstration. (a) D'après le théorème 2.31 (corollaire 2.32), f et g sont limites de suites croissantes de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées positives. Par application répétée du théorème de convergence monotone et linéarité de l'intégrale des fonctions étagées, on a :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f+g) \, d\mu &= \int_\Omega \lim_n (f_n + g_n) \, d\mu = \lim_n \int_\Omega (f_n + g_n) \, d\mu \\ &= \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu + \lim_n \int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu. \end{aligned} \tag{3.14}$$

(b) Idem avec $\lambda f_n \to \lambda f$.

(c) Toujours par le théorème 2.31 (corollaire 2.32), f est limite d'une suite croissante de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées positives, et :

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_\Omega f_n \, d\mu = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \mu\left(f_n^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^*\right)\right) = 0. \tag{3.15}$$

où l'on a utilisé successivement la croissance de l'intégrale des fonctions mesurables positives et la définition de l'intégrale des fonctions étagées. De plus, par croissance de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite d'ensembles $\left(f_n^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^*\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (\{x \in \Omega : \; f_n(x) > 0\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion et vérifie

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^*\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : \; f_n(x) > 0\} = \{x \in \Omega : \; f(x) > 0\}. \tag{3.16}$$

Ainsi,

$$\mu\left(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^*\right)\right) = \lim_n \mu\left(f_n^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^*\right)\right) = 0, \tag{3.17}$$

et f est bien nulle μ-presque partout. Réciproquement, si $\mu\left(f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^*\right)\right) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \mu\left(f_n^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^*\right)\right) = 0$ (croissance) et par suite $\int_\Omega f_n\,d\mu = 0$ (puisque les f_n sont étagées). Par le théorème de convergence monotone, il vient alors $\int_\Omega f\,d\mu = 0$.

(d) On applique le résultat précédent à la fonction h mesurable positive et nulle $\mu - p.p.$ définie par $\max(f,g) - \min(f,g)$ si f et g sont finies et 0 si f et g sont infinies. Alors $\int_\Omega h\,d\mu = 0$, et l'égalité $\max(f,g) = \min(f,g) + h$ donne par la linéarité (a) $\int_\Omega \max(f,g)\,d\mu = \int_\Omega \min(f,g)\,d\mu$. Or, $\int_\Omega \max(f,g)\,d\mu \geq \int_\Omega f\,d\mu \geq \int_\Omega \min(f,g)\,d\mu$ par croissance de l'intégrale, idem pour g, d'où l'égalité.

□

3.3 Fonctions μ-intégrables

Définition 3.10 (Fonction μ-intégrable)**.** Une fonction f de $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ est dite μ-intégrable, ou μ-sommable, si $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions μ-intégrables à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque 3.11. En l'absence d'ambiguïté, on pourra simplifier la notation $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ en $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega;\mathbb{K})$. Pour des fonctions à valeurs réelles, on pourra même se contenter de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega)$.

Remarque 3.12. Si $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, on dira aussi que la fonction est Lebesgue-intégrable, ou encore Lebesgue-sommable. S'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur la mesure (et le type d'intégrale...), on parlera simplement de fonction intégrable ou sommable.

Définition 3.13 (Intégrale d'une fonction $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$)**.** (a) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{R})$. Alors f^+ et f^- sont éléments de $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{T};\overline{\mathbb{R}}_+)$ et on définit l'intégrale de f par rapport à μ par

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu. \tag{3.18}$$

(b) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{C})$. Alors les parties réelle $\mathfrak{Re}(f)$ et imaginaire $\mathfrak{Im}(f)$ de f sont éléments de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{R})$ et on définit l'intégrale de f par rapport à μ par

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega \mathfrak{Re}(f)\,d\mu + \mathfrak{i}\int_\Omega \mathfrak{Im}(f)\,d\mu. \tag{3.19}$$

avec $\mathfrak{i}^2 = -1$.

Voila donc définie l'intégrale de fonctions numériques à valeurs réelles ou complexes pour une mesure μ quelconque sur un espace abstrait Ω. Si l'on s'intéresse principalement dans la suite du cours à l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue, il n'est pas inutile de réfléchir à ce que signifie l'intégrale par rapport à la mesure de Dirac (voir l'exercice 3.2), ou par rapport à la mesure de comptage par exemple (voir l'exercice 3.3).

La simplicité de la définition permet d'étendre sans peine les propriétés élémentaires montrées à la section précédente pour les fonctions mesurables positives.

Proposition 3.14 (Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$)**.** *Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$.*

(a) (linéarité) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\displaystyle\int_\Omega(\lambda f+g)\,d\mu=\lambda\int_\Omega f\,d\mu+\int_\Omega g\,d\mu.$

(b) (croissance) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $f\leq g\Longrightarrow\displaystyle\int_\Omega f\,d\mu\leq\int_\Omega g\,d\mu.$

(c) $f=g\ \ \mu-p.p.\Longrightarrow\displaystyle\int_\Omega f\,d\mu=\int_\Omega g\,d\mu.$

(d) (inégalité triangulaire) $\displaystyle\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|\leq\int_\Omega|f|\,d\mu.$

Démonstration. Les propriétés (a) à (c) sont celles de la proposition 3.9 étendues aux fonctions de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ par application directe de la définition 3.13. Pour le dernier point, choisissons $\alpha\in\mathbb{C}$ de module 1 tel que $\displaystyle\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|=\alpha\int_\Omega f\,d\mu$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| &= \int_\Omega \alpha f\,d\mu=\int_\Omega\mathfrak{Re}(\alpha f)\,d\mu+\mathfrak{i}\int_\Omega\mathfrak{Im}(\alpha f)\,d\mu=\int_\Omega\mathfrak{Re}(\alpha f)\,d\mu\\ &\leq \int_\Omega|\mathfrak{Re}(\alpha f)|\,d\mu\leq\int_\Omega|f|\,d\mu,\end{aligned}\tag{3.20}$$

où les inégalités sont données par la croissance démontrée au point (c). □

Corollaire 3.15 (Espace $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$)**.** $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Démonstration. Immédiat avec la proposition précédente. □

Les espaces de fonctions sommables seront étudiés au chapitre 4.

3.4 Théorème de convergence dominée

Nous prouvons maintenant le théorème de convergence de dominée. Ce théorème est capital dans la théorie de l'intégration de Lebesgue et sera d'un usage très fréquent dans la suite du cours. C'est le second théorème pratique d'interversion limite-intégrale après celui de convergence monotone 3.7. Le lien entre ces deux théorèmes est donné par le lemme de Fatou.

Théorème 3.16 (Lemme de Fatou)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{T};\overline{\mathbb{R}}_+)$*. Alors :*

$$0\leq\int_\Omega\liminf_n f_n\,d\mu\leq\liminf_n\int_\Omega f_n\,d\mu\leq+\infty.\tag{3.21}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, donc par le théorème de convergence monotone,

$$\int_\Omega \liminf_n f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_n \inf_{k\geq n} f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_n g_n \, d\mu = \lim_n \int_\Omega g_n \, d\mu, \tag{3.22}$$

puis en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq f_n$, il vient :

$$\lim_n \int_\Omega g_n \, d\mu = \liminf_n \int_\Omega g_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{3.23}$$

□

Corollaire 3.17 (Lemme de Fatou "étendu"). *Soit $g \in \mathcal{L}^1_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$.*

(a) Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq g \;\; \mu - p.p.$, alors $\displaystyle\int_\Omega \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n \, d\mu$;

(b) Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq g \;\; \mu - p.p.$, alors $\displaystyle\int_\Omega \limsup_n f_n \, d\mu \geq \limsup_n \int_\Omega f_n \, d\mu$.

Démonstration. Le deuxième point se déduit du premier en posant $h_n = -f_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dans le premier cas, soit $N = \{x \in \Omega : f_n(x) < g(x)\}$. N est mesurable, et par hypothèse, N est μ-négligeable. Posons $h_n = (f_n - g)\,\mathbf{1}_{\Omega\setminus N}$. Les fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mesurables et positives *partout*, donc par le lemme de Fatou : $\displaystyle\int_\Omega \liminf_n h_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega h_n \, d\mu$. Or,

$$\int_\Omega \liminf_n h_n \, d\mu = \int_\Omega \liminf_n \,(f_n - g)\,\mathbf{1}_{\Omega\setminus N} \, d\mu = \int_\Omega \liminf f_n \, d\mu - \int_\Omega g \, d\mu, \tag{3.24}$$

et

$$\liminf_n \int_\Omega h_n \, d\mu = \liminf_n \int_\Omega (f_n - g)\,\mathbf{1}_{\Omega\setminus N} \, d\mu = \liminf_n \int_\Omega f_n \, d\mu - \int_\Omega g \, d\mu, \tag{3.25}$$

d'où le résultat. □

On peut maintenant énoncer le résultat principal de la section.

Théorème 3.18 (Théorème de convergence dominée). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$. Si :*

(i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mu - p.p.$ vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}$ mesurable ;

(ii) il existe une fonction g de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g \;\; \mu - p.p.$.

Alors f est μ-intégrable et

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{3.26}$$

Démonstration. Soient les ensembles

$$M = \{x \in \Omega : f_n(x) \text{ ne converge pas vers } f(x)\}, \tag{3.27}$$

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : |f_n(x)| > g(x)\}. \tag{3.28}$$

M et N sont mesurables (exercice), et par hypothèse, $\mu(M \cup N) = 0$, puisque les deux ensembles sont μ-négligeables, donc :

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f\mathbf{1}_{\Omega\setminus(M\cup N)}\,d\mu = \int_\Omega \lim_n f_n\mathbf{1}_{\Omega\setminus(M\cup N)}\,d\mu \leq \int_\Omega g\mathbf{1}_{\Omega\setminus(M\cup N)}\,d\mu = \int_\Omega g\,d\mu < +\infty, \tag{3.29}$$

et f est bien μ-intégrable.

On considère maintenant les fonctions $h_n = (2g - |f_n - f|)\,\mathbf{1}_{M\cup N}, n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mesurables et positives, donc par le lemme de Fatou :

$$\int_\Omega \liminf_n h_n\,d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega h_n\,d\mu. \tag{3.30}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \liminf_n h_n\,d\mu &= \int_\Omega \liminf_n\,(2g - |f_n - f|)\,\mathbf{1}_{\Omega\setminus(M\cup N)}\,d\mu \\
&= 2\int_\Omega g\mathbf{1}_{M\cup N}\,d\mu - \int_\Omega \limsup_n |f_n - f|\mathbf{1}_{\Omega\setminus(M\cup N)}\,d\mu \\
&= 2\int_\Omega g\,d\mu, \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\liminf_n \int_\Omega h_n\,d\mu &= \liminf_n \int_\Omega (2g - |f_n - f|)\,\mathbf{1}_{\Omega\setminus(M\cup N)}\,d\mu \\
&= 2\int_\Omega g\mathbf{1}_{\Omega\setminus(M\cup N)}\,d\mu - \limsup_n \int_\Omega |f_n - f|\mathbf{1}_{\Omega\setminus(M\cup N)}\,d\mu \\
&= 2\int_\Omega g\,d\mu - \limsup_n \int_\Omega |f_n - f|\,d\mu, \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

donc on obtient :

$$0 \leq \liminf_n \int_\Omega |f_n - f|\,d\mu \leq \limsup_n \int_\Omega |f_n - f|\,d\mu \leq 0, \tag{3.33}$$

donc $\lim_n \int_\Omega |f_n - f|\,d\mu = 0$ et a fortiori $\int_\Omega f\,d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\,d\mu$ [2]. □

Remarque 3.19. On peut s'affranchir de l'hypothèse de mesurabilité de f dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, à la condition de poser $f = \liminf_n f_n$ ou $f = \limsup_n f_n$ (exercice).

Le théorème de convergence dominée aura de nombreuses applications pratiques dans la suite du cours. Enonçons dès maintenant l'une d'entre elles, laquelle consiste à appliquer le théorème de convergence dominée aux sommes partielles d'une série de fonctions pour obtenir un théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions.

2. Puisque $\left|\int_\Omega f_n\,d\mu - \int_\Omega f\,d\mu\right| \leq \int_\Omega |f_n - f|\,d\mu$.

Théorème 3.20 (Intégration terme à terme des séries de fonctions)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ *telle que* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega |f_n|\,d\mu < +\infty$*. Alors la fonction* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *(définie* $\mu - p.p.$*) est* μ*-intégrable et*

$$\int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega f_n\,d\mu \tag{3.34}$$

Démonstration. Posons $\forall N \in \mathbb{N}, G_N = \sum_{n=0}^{N}|f_n|$. $(G_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, donc par le théorème de convergence monotone,

$$\int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}}|f_n|\,d\mu = \int_\Omega \lim_N G_N\,d\mu = \lim_N \int_\Omega G_N\,d\mu = \lim_N \sum_{n=1}^{N}\int_\Omega |f_k|\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega |f_n|\,d\mu < +\infty, \tag{3.35}$$

donc $G = \sum_{n\in\mathbb{N}}|f_n|$ est μ-intégrable, et par conséquent finie μ-presque partout (cf. exercice 3.4), donc la série de fonctions $\sum_n f_n$ est absolument convergente μ-presque partout, et la fonction $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est bien définie μ-presque partout.

Posons maintenant $\forall N \in \mathbb{N}, F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$. La suite $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers F $\mu - p.p.$, et $\forall N \in \mathbb{N}, |F_N| \le \sum_{n=0}^{N}|f_n| \le G \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$, donc par le théorème de convergence dominée, la fonction $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ (définie $\mu - p.p.$) est μ-intégrable et $\int_\Omega F d\mu = \lim_N \int_\Omega F_N d\mu$[3]. □

3.5 Intégrales à paramètres réels

On donne maintenant plusieurs résultats permettant de mener à bien des calculs d'intégrales dans des cas concrets. On commence dans cette sections par les théorèmes de Lebesgue pour les intégrales à paramètres, bien plus souples que ceux de la théorie de Riemann. Ces résultats se trouvent parfois rassmeblés sous la dénomination "fonctions définies par des intégrales" résultats. Ils constituent une application importante du théorème de convergence dominée.

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

3. La μ-intégrabilité de F peut s'obtenir directement sans invoquer le théorème de convergence dominée en écrivant :

$$\left|\int_\Omega F\,d\mu\right| = \left|\int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,d\mu\right| \le \int_\Omega \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right|\,d\mu \le \int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}}|f_n|\,d\mu < +\infty,$$

d'après l'équation (3.35).

Théorème 3.21 (Continuité sous le signe somme). *Soit une fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{K}$. Si*

(i) $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$;

(ii) pour μ-presque tout t de Ω, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;

(iii) il existe une fonction g de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ telle que pour tout $x \in I$ et pour μ-presque tout $t \in \Omega, |f(x,t)| \leq g(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_\Omega f(x,t)\,\mu(dt)$ est définie pour tout point de I et continue sur I.

Démonstration. Soit $x^* \in I$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de I convergeant vers x^*. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) : \Omega \to \mathbb{K}, t \mapsto f(x_n, t)$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables (hypothèse (i)), elle converge $\mu - p.p.$ vers $f(x^*, \cdot)$ mesurable (hypothèse (ii)), et elle satisfait à une hypothèse de domination (hypothèse (iii)), donc par le théorème de convergence dominée, $f(x^*, \cdot)$ est μ-intégrable, et

$$\lim_n \int_\Omega f(x_n, t)\,\mu(dt) = \lim_n \int_\Omega f_n(t)\,\mu(dt) = \int_\Omega \lim_n f_n(t)\,\mu(dt) = \int_\Omega f(x^*, t)\,\mu(dt), \quad (3.36)$$

d'où le résultat [4]. □

Théorème 3.22 (Dérivation sous le signe somme). *Soit une fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{K}$. Si*

(i) $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable, i.e. est un élément de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$;

(ii) pour μ-presque tout t de Ω, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I ;

(iii) il existe une fonction g de $\mathcal{L}^1_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ telle que pour tout $x \in I$ et pour μ-presque tout $t \in \Omega, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_\Omega f(x,t)\mu(dt)$ est dérivable sur I, et

$$\forall x \in I, \frac{\partial}{\partial x} \int_\Omega f(x,t)\,\mu(dt) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mu(dt). \quad (3.37)$$

Démonstration. Soit $x^* \in I$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de I (différents de x^*) convergeant vers x^*. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, d_n : \Omega \to \mathbb{K}, t \mapsto \dfrac{f(x^*, t) - f(x_n, t)}{x^* - x_n}$. Alors la suite de fonctions mesurables $(d_n)_n$ converge $\mu - p.p.$ vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, \cdot)$ mesurable (hypothèse (ii)). De plus, pour μ-presque tout t, par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto f(x,t)$ dérivable sur I, il existe y_n entre x^* et x_n tel que

$$d_n(t) = \frac{f(x^*, t) - f(x_n, t)}{x^* - x_n} = \frac{\partial f}{\partial x}(y_n, t), \quad (3.38)$$

donc la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par une fonction intégrable :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |d_n| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(y_n, \cdot)\right| \leq g \quad \mu - p.p.. \quad (3.39)$$

4. On a utilisé ici la caractérisation séquentielle d'une limite.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\int_\Omega f(x^*,t)\,\mu(dt) &= \lim_n \frac{\int_\Omega f(x^*,t)\,d\mu - \int_\Omega f(x_n,t)\,d\mu}{x^*-x_n} = \lim_n \int_\Omega \frac{f(x^*,t)-f(x_n,t)}{x^*-x_n}\,d\mu \\ &= \int_\Omega \lim_n \frac{f(x^*,t)-f(x_n,t)}{x^*-x_n}\,d\mu = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,t)\,d\mu, \end{aligned} \tag{3.40}$$

d'où le résultat. □

Remarque 3.23. Il est facile d'utiliser de façon combinée ces deux théorèmes : si f est μ-intégrable pour la variable t sur Ω, continûment dérivable pour la variable x sur I pour presque tout t, et si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ satisfait à une hypothèse de domination, alors la fonction $x \to \displaystyle\int_\Omega f(x,t)\,\mu(dt)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

3.6 Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue

> J'ose dire qu'elle [la définition de Lebesgue d'une intégrale] est, en un certain sens, plus simple que celle de Riemann, aussi facile à saisir que celle-ci et que, seules, des habitudes d'esprit antérieurement acquises peuvent la faire paraître plus compliquée. Elle est plus simple parce qu'elle met en évidence les propriétés les plus importantes de l'intégrale, tandis que la définition de Riemann ne met en évidence qu'un procédé de calcul.
>
> Henri Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

On montre dans cette section que dans de nombreux cas pratiques, les intégrales au sens de Riemann et au sens de la mesure de Lebesgue coïncident, ce qui permet d'utiliser dans le nouveau cadre de Lebesgue les éléments de calcul intégral étudiés dans les classes antérieures.

On rappelle que λ désigne la mesure de Lebesgue.

Théorème 3.24 (Théorème de caractérisation de Lebesgue)**.** *Une fonction définie sur un intervalle borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est bornée sur $[a,b]$ et continue λ-presque partout.*

Démonstration. Admis. □

Définition 3.25 (Intégrale sur une partie de Ω)**.** Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré. Soit une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$. Pour tout A élément de $\mathcal{T}$, on définit l'intégrale de f par rapport à μ sur A, et on note $\displaystyle\int_A f\,d\mu$, par :

$$\int_A f\,d\mu = \int_\Omega f\mathbf{1}_A\,d\mu \tag{3.41}$$

Théorème 3.26 (Fonction Riemann-intégrable sur un segment). *Toute fonction borélienne Riemann-intégrable sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable sur ce segment et les deux intégrales coïncident :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda \tag{3.42}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable Riemann-intégrable. Notons que si f est en escalier, alors f est étagée, et donc Lebesgue-intégrable. En effet, si $\sigma = (a_0, \dots, a_N)$ est une subdivision adaptée à f, il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i\in 1,\dots,N}$ et $(\beta_i)_{i\in 0,\dots,N}$ tels que $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{]a_{i-1},a_i[} + \sum_{i=0}^{N} \beta_i \mathbf{1}_{\{a_i\}}$ et :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda(]a_{i-1}, a_i[) = \int_{[a,b]} f\,d\lambda, \tag{3.43}$$

d'où le résultat évident dans ce cas.

Dans le cas général, il existe par définition de la Riemann-intégrabilité de f (définition 1.7) deux suites de fonctions en escaliers $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $|\varphi_n - f| \leq \psi_n$ et $\lim_n \int_a^b \psi_n = 0$ (et alors $\lim_n \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f$). On pose $\forall n \in \mathbb{N}, m_n = \max_{i=1,\dots,n}(\varphi_i - \psi_i)$ et $M_n = \min_{i=1,\dots,n}(\varphi_i + \psi_i)$. $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées, majorée par f, et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions étagées, minorée par f. Ces deux suites sont donc convergentes de limites m et M mesurables. Par croissance de l'intégrale il vient :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\varphi_n - \psi_n) &\leq \int_a^b m_n = \int_{[a,b]} m_n d\lambda \leq \int_{[a,b]} m\,d\lambda \\ &\leq \int_{[a,b]} M d\lambda \leq \int_{[a,b]} M_n\,d\lambda = \int_a^b M_n\,d\lambda \leq \int_a^b (\varphi_n + \psi_n), \end{aligned} \tag{3.44}$$

et en passant à la limite, on en déduit que toutes ces intégrales sont égales à $\int_a^b f$. Ainsi, $m \leq f \leq M$, et $M - m$ est une fonction mesurable positive telle que $\int_{[a,b]} (M - m)\,d\lambda = 0$. On en conclue que $m = f = M$ $\mu - p.p.$, d'où le résultat. □

Remarque 3.27. Cet énoncé peut être formulé de manière plus générale de la façon suivante : Toute fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est égale λ-presque-partout à une fonction $\tilde{f}$ Lebesgue-intégrable sur ce segment ($m\mathbf{1}_{\{x\in\Omega:m(x)=M(x)\}}$ dans la démonstration précédente) et les deux intégrales coïncident. Mais il existe des fonctions Riemann-intégrables non boréliennes.

Théorème 3.28 (Fonction localement Riemann-intégrable)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}_+, a < b$ et $I = [a, b[$* [5]*. Toute fonction borélienne localement Riemann-intégrable sur I (i.e. Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I) est Lebesgue-intégrable si et seulement si elle est Riemann-absolument convergente. Dans ce cas, les deux intégrales coïncident :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\lambda. \tag{3.45}$$

Démonstration. Soit f une fonction borélienne localement Riemann-intégrable sur I.

($\Longrightarrow$) Si f est Lebesgue-intégrable, alors, d'après le théorème 3.26 :

$$\forall x \in I, \int_a^x |f| = \int_{[a,x]} |f|\,d\lambda \leq \int_I |f|\,d\lambda < +\infty \tag{3.46}$$

donc en passant à la limite quand $x \to b$, on obtient bien que $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente.

($\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente. Pour toute suite $(b_n)_n$ de réels convergeant vers b, on a d'après le théorème 3.26 :

$$\int_a^{b_n} |f| = \int_{[a,b_n]} |f|\,d\lambda = \int_I |f| \mathbf{1}_{[a,b_n]}\,d\lambda \tag{3.47}$$

donc en passant à la limite avec le théorème de convergence monotone apppliqué à la suite $\left(|f|\mathbf{1}_{[a,b_n]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, suite croissante de fonctions mesurables positives :

$$\int_I f\,d\lambda = \lim_n \int_I |f|\mathbf{1}_{[a,b_n]}\,d\lambda = \lim_n \int_a^{b_n} |f| = \int_a^b f < +\infty \tag{3.48}$$

donc f est Lebesgue-sommable. □

Remarque 3.29. La théorie de Lebesgue ne prend donc pas en compte le cas des intégrales semi-convergentes au sens de Riemann. La fonction $f \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est donc pas Lebesgue-sommable sur $\mathbb{R}_+$ (voir l'exercice 1.9).

3.7 Intégrale de Lebesgue et primitive

Le théorème fondamental du calcul intégral a été énoncé au chaptre 1 au sens de Riemann (théorème 1.20). L'intégrale au sens de Lebesgue permet de s'affranchir de l'hypothèse de continuité nécessaire au théorème 1.20, *sans pour autant faire de l'intégration et de la dérivation deux opérations exactement réciproques.* Nous commençons par énoncer la continuité de la fonction d'une borne de l'intégrale d'une fonction sommable. Nous énonçons ensuite le théorème fondamental sous deux formes. Le premier résultat est partiel, mais il a l'avantage de pouvoir être démontré assez facilement. Le second est le résultat général à connaître, mais nous ne le démontrons pas dans le cadre de ce cours.

5. Le cas $I =]a, b]$, $a \in \overline{\mathbb{R}}_-, b \in \mathbb{R}, a < b$ se traite évidemment de la même manière.

Théorème 3.30 (Continuité de la fonction d'une borne d'une intégrale d'une fonction sommable)**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}^1([a,b];\mathbb{R})$*. La fonction* $F : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_{[a,x]} f\, d\lambda$ *est continue sur* $[a,b]$*.*

Démonstration. Soit $x \in [a,b[$. Pour tout $h > 0$ tel que $x+h < b$,

$$F(x+h) - F(x) = \int_{]x,x+h]} f\, d\lambda = \int_{[a,b]} f \mathbf{1}_{]x,x+h]}\, d\lambda. \tag{3.49}$$

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels de limite 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $f_n = f\mathbf{1}_{]x,x+h_n]}$. On voit aisément que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables, que tous ses termes sont dominés par la fonction f Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$, et qu'elle converge presque partout vers la fonction nulle. Par le théorème de convergence dominée, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x+h_n) = F(x)$, d'où la continuité à droite de F en x par caractérisation séquentielle de la limite. La continuité à gauche se traite de la même manière. □

Théorème 3.31 (Théorème fondamental du calcul intégral, version partielle)**.** *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b$*. Soit* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Si :*

(i) F *est dérivable* en tout point x *de* $[a,b]$ *;*

(ii) F' *est une fonction* bornée *sur* $[a,b]$ *;*

alors $F' \in \mathcal{L}^1([a,b];\mathbb{R})$ *et :*

$$\forall x \in [a,b], \int_{[a,x]} F'(t)\, \lambda(dt) = F(x) - F(a). \tag{3.50}$$

Démonstration. Soit $x \in [a,b[$. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall t \in [a,x], f_n(t) = \frac{n}{\delta}\left(F\left(t + \frac{\delta}{n}\right) - F(t)\right) \tag{3.51}$$

avec $\delta > 0$ suffisamment petit de sorte que $x + \delta \leq b$. F étant dérivable en tout point, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers F' sur $[a,x]$. Pour tout $t \in [a,x]$, le théorème des accroissements finis appliqué à F dérivable sur $\left[t, t+\frac{\delta}{n}\right] \subset [a,b]$ donne l'existence de $\theta_{n,t} \in \left]0, \frac{\delta}{n}\right[$ tel que :

$$F'(t + \theta_{n,t}) = \frac{n}{\delta}\left(F\left(t + \frac{\delta}{n}\right) - F(t)\right) = f_n(t). \tag{3.52}$$

F' étant bornée, on en déduit que toutes les f_n sont bornées, avec $\|f_n\|_\infty \leq \|F'\|_\infty$ pour tout n. Toute fonction constante étant intégrable sur $[a,x]$, on est en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,x]} F'(t)\,\lambda(dt) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,x]} f_n(t)\,\lambda(dt) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,x]} \frac{n}{\delta}\left(F\left(t+\frac{\delta}{n}\right) - F(t)\right)\lambda(dt) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\delta}\left(\int_{[a,x]} F\left(t+\frac{\delta}{n}\right)\lambda(dt) - \int_{[a,x]} F(t)\,\lambda(dt)\right). \quad (3.53)
\end{aligned}$$

La fonction F étant continue, on peut faire un changement de variable linéaire (donc de classe $\mathcal{C}^1$) dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,x]} F'(t)\,\lambda(dt) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\delta}\left(\int_{\left[a+\frac{\delta}{n},x+\frac{\delta}{n}\right]} F(t)\,\lambda(dt) - \int_{[a,x]} F(t)\,\lambda(dt)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\delta}\left(\int_{\left[x,x+\frac{\delta}{n}\right]} F(t)\,\lambda(dt) - \int_{\left[a,a+\frac{\delta}{n}\right]} F(t)\,\lambda(dt)\right). \quad (3.54)
\end{aligned}$$

F est continue sur $\left[x, x+\frac{\delta}{n}\right]$ et sur $\left[a, a+\frac{\delta}{n}\right]$, donc par double application de la première formule de la moyenne, il existe $\gamma_n, \gamma'_n \in \left[0, \frac{\delta}{n}\right]$ tels que :

$$\frac{n}{\delta}\int_{\left[x,x+\frac{\delta}{n}\right]} F(t)\,\lambda(dt) = \frac{n}{\delta} F\left(x+\gamma_n\right)\frac{\delta}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x), \quad (3.55)$$

$$\frac{n}{\delta}\int_{\left[a,a+\frac{\delta}{n}\right]} F(t)\,\lambda(dt) = \frac{n}{\delta} F\left(a+\gamma'_n\right)\frac{\delta}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(a). \quad (3.56)$$

Finalement, on a bien montré que pour tout $x \in [a,b[$, F' est Lebesgue-intégrable sur $[a,x]$ et que :

$$\int_{[a,x]} F'(t)\,\lambda(dt) = F(x) - F(a). \quad (3.57)$$

Pour le cas $x = b$, il suffit de définir la suite (f_n) "par la gauche" pour obtenir le résultat. □

Théorème 3.32 (Théorème fondamental du calcul intégral, version générale)**.** *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b$. *Soit* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si :*

(i) F *est dérivable* en tout point x *de* $[a,b]$ *;*

(ii) $F' \in \mathcal{L}^1([a,b];\mathbb{R})$ *;*

alors :

$$\forall x \in [a,b], \int_{[a,x]} F'(t)\,\lambda(dt) = F(x) - F(a). \quad (3.58)$$

Démonstration. Admis. Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet pourra consulter [Rudin, 1998, p.177 et sq.] (niveau Master). □

Remarque 3.33. La condition de dérivabilité partout est essentielle, voir par exemple l'exercice 3.12.

3.8 Exercices

Exercice 3.1 (Fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$)**.** Dans cet exercice, on travaille sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ.

1. Montrer que la fonction caractéristique des rationnels $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue par morceaux.
2. Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable.
3. Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est étagée.
4. Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est Lebesgue-intégrable.

Exercice 3.2 (Intégrale par rapport à la mesure de Dirac)**.** On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note δ_a la mesure de Dirac en a.

Montrer que toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est δ_a-intégrable, et que :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_a = f(a). \tag{3.59}$$

Exercice 3.3 (Intégration et familles sommables)**.** Dans cet exercice, on travaille sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage ν. Soit f une fonction mesurable positive sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f \, d\nu$. (Indication : considérer la suite des $f_n = f\mathbf{1}_{\{0,\dots,n\}}$.)
2. En déduire une caractérisation des fonctions ν-intégrables sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
3. Montrer que pour toute famille de réels *positifs* $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i,j} \quad \in \overline{\mathbb{R}}_+ \tag{3.60}$$

Exercice 3.4 (Inégalité de Markov)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$.

1. Montrer que $\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \mu\left(\{x \in \Omega : f(x) \geq M\}\right) \leq \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_{\Omega} f \, d\mu$.
2. En déduire que si f est μ-intégrable, alors l'ensemble sur lequel f prend la valeur $+\infty$ est négligeable.

Exercice 3.5 (Intégration d'une limite)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = nx(1-x)^n$

1. Montrer que $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(x) \, dx = 0$ par calcul direct (au sens de Riemann).
2. Montrer que f_n ne converge pas uniformément vers 0. (et donc ?)
3. Retrouver le résultat de la question 1 sans calcul.

Exercice 3.6 (La "bosse glissante")**.** On travaille sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ. Soit f une fonction continue positive nulle en dehors de $[0,1]$, d'intégrale non nulle. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \dfrac{f(x-n)}{n}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait-elle à une hypothèse de domination ? Conclure.

Exercice 3.7 (Intégration d'une série)**.** Le but de cet exercice est de montrer l'identité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par : $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,1], f_n(x)=x^{2n}(1-x)$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction F à préciser.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{[0,1]} f_n\,d\lambda=\ln 2$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_N\sum_{n=0}^{2N}\frac{(-1)^n}{n+1}$.
4. Conclure.

Exercice 3.8 (Calculs de limites)**.** (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[}\frac{1-\cos^n(x)}{1+x^2}\,\lambda(dx)$.

(b) Soit a_n le terme général d'une série absolument convergente. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(1+\frac{b_n}{p}\right)^p$.

Exercice 3.9 (Constante d'Euler)**.** Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln x\,dx$.

1. Montrer que $x\mapsto e^{-x}\ln x$ est à la fois Riemann-intégrable et Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et que les deux intégrales coïncident.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\ln x$ est à la fois Riemann-intégrable et Lebesgue-intégrable sur $]0,n]$, et que les deux intégrales coïncident.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}e^{-x}\ln x\,d\lambda_x=\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,n]}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ln x\,d\lambda_x$.
4. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}-1}{1-t}\,dt=(n+1)\int_0^1 t^n\ln(1-t)\,dt$.
5. Utiliser ce résultat pour calculer pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{]0,n]}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ln x\,d\lambda_x$.
6. Conclure l'exercice.

Exercice 3.10 (Intégrale à paramètre)**.** Etudier la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de $F:x\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixt}}{1+t^2}\,d\lambda_t$.

Exercice 3.11 (Intégrale de Gauss avec des intégrales à paramètres)**.** Soit F et G deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F:x\mapsto\left(\int_{[0,x]}e^{-t^2}\,d\lambda_t\right)^2\quad\text{et}\quad G:x\mapsto\int_{[0,1]}\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,d\lambda_t.\tag{3.61}$$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer F'.
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer G'.
3. En déduire $F+G$.
4. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 3.12 (Les escaliers du diable)**.** On se place sur l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. On construit par récurrence la suite de fermés $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ comme suit :

$$\begin{aligned} J_0 &= [0,1], \\ J_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ J_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \text{ etc.} \end{aligned}$$

1. **Ensemble triadique de Cantor**. Soit $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$.
   (a) Montrer que K est une partie compacte.
   (b) Montrer que K est négligeable.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\bigcup_{(e_1,\dots,e_n)\in\{0,1\}^n} \left[\sum_{i=1}^n \frac{2e_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{2e_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}\right]$.
   (d) Soit $\tilde{K} = \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2e_i}{3^i} : \forall i \in \mathbb{N}^*, e_i \in \{0,1\} \right\}$. Montrer que $\tilde{K} \subseteq K$.
   (e) Montrer que $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to \tilde{K}$, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2e_i}{3^i}$ est injective.
   (f) En déduire que K n'est pas dénombrable.

   L'ensemble K est donc un ensemble compact, mesurable, négligeable, non dénombrable. On l'appelle *ensemble triadique de Cantor*.
2. **Escaliers du diable**. On définit maintenant une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme suit. Pour tout n fixé, f_n vaut 0 en 0, croît linéairement de $\dfrac{1}{2^n}$ sur chacun des intervalles fermés composant J_n, et est constante en dehors.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, $f_n(1) = 1$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{[0,x]} \left(\frac{3}{2}\right)^n \mathbf{1}_{J_n}(t)\,\lambda(dt)$.
   (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   (c) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. On notera f sa limite.
   (d) Montrer que f est continue.
   (e) Montrer que f est dérivable λ-presque partout, de dérivée nulle.
   (f) En déduire que $\displaystyle\int_{[0,1]} f'(t)\,\lambda(dt) \neq f(1) - f(0)$.

   La fonction f est connue sous le nom de *fonction de Cantor-Lebesgue*.

Chapitre 4

Espaces L^p

Le théorème [de Riesz-Fischer] servit, en premier lieu, de billet permanent d'aller et retour entre les deux espaces à une infinité de dimensions dont l'intérêt s'attache à la théorie des équations intégrales, à savoir l'espace à une infinité de coordonnées de Hilbert et l'ensemble L^2 des fonctions mesurables et de carré sommable, deux espaces que l'on envisage d'ailleurs aujourd'hui, avec M. von Neumann, comme deux réalisations d'une notion plus générale, à savoir de l'espace abstrait de Hilbert. C'était peut-être la première application de la théorie de Lebesgue, après, bien entendu, celles faites par lui-même et par Fatou qui attirait l'intérêt des Mathématiciens et qui mettait en lumière l'importance de sa notion d'intégrale.

Frédéric Riesz, *L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue*, Annales de l'Institut Fourier, Tome 1, 1949.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On définit l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{K}$ dont la p-ième puissance est μ-intégrable :

$$\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K}) = \left\{ f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \text{ mesurables } : \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \right\}. \tag{4.1}$$

On pourra utiliser s'il n'y a pas ambiguïté la notation abrégée $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega; \mathbb{K})$ et même $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega)$ dans le cas de fonctions à valeurs réelles.

Proposition 4.1. *$\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ en écrivant $|\lambda f + g|^p \leq (2 \max(|\lambda||f|, |g|))^p \leq 2^p |\lambda|^p |f|^p + 2^p |g|^p$. Le reste est immédiat. □

Pour une fonction f de $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$, on définit la fonction $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.2}$$

On utilisera cette même définition, avec la même notation, pour des fonctions de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$ (i.e. mesurables positives mais non nécessairement intégrables) en remarquant que la fonction $\|\cdot\|_p$ est alors à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

On rappelle la définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *norme* sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

(N1) (homogénéité) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;

(N2) (inégalité triangulaire) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$;

(N3) (séparation) $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Une application vérifiant (N1) et (N2), mais pas (N3), est une *semi-norme*. On va montrer dans ce chapitre que les espaces vectoriels $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ muni de $\|\cdot\|_p$ ne sont que semi-normés. On cherchera alors à construire des espaces fonctionnels “proches” sur lesquels $\|\cdot\|_p$ est une norme. Ces espaces, notés $L^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$, possèdent des propriétés importantes qui les rendent essentiels en analyse fonctionnelle (analyse de Fourier, espaces de Sobolev, équations aux dérivées partielles, etc. au niveau master).

4.1 (Non-)Inclusion des espaces $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$

Dans le cas général, on ne dispose pas de résultats d'inclusion entre deux espaces $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ et $\mathcal{L}^q_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$, pour $p \neq q$ (trouver des contre-exemples simples avec des fonctions réelles). Le seul cas particulier est celui des mesures finies [1].

Proposition 4.3 (Inclusion des espaces $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ pour une mesure finie)**.** *Si μ est une mesure finie (i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$), et si $0 < p \leq q$ alors $\mathcal{L}^q_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$.*

Démonstration. Soient $0 < p \leq q$ fixés. Si $f \in \mathcal{L}^q_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$, alors

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \int_\Omega \left(|f|^q \mathbf{1}_{\{|f| \geq 1\}} + 1 \times \mathbf{1}_{\{|f| < 1\}}\right) d\mu \leq \int_\Omega |f|^q d\mu + \mu(\{|f| < 1\}) < +\infty. \quad (4.3)$$

□

4.2 Inégalités de convexité

Nous montrons dans cette section les inégalités de Hölder et de Minkowski. L'inégalité de Hölder se montre à partir d'une simple inégalité due à la concavité de la fonction logarithme. Elle entraîne l'inégalité de Minkowski, laquelle fournit l'inégalité triangulaire pour les normes $\|\cdot\|_p$.

Théorème 4.4 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient p et q deux exposants conjugués, i.e. deux réels de $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(a) Soient deux fonctions f et g de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}; \overline{\mathbb{R}}_+)$ (i.e. mesurables positives). Alors :

$$0 \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty. \quad (4.4)$$

(b) Soient deux fonctions $f \in \mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{L}^q_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ et

$$\left|\int_\Omega fg d\mu\right| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (4.5)$$

1. donc en particulier celui des mesures de probabilités. . .

Démonstration. (a) Commençons par remarquer que si $\|f\|_p = 0$ (ou $\|g\|_q = 0$), alors $f = 0 \quad \mu - p.p.$ (ou $g = 0 \quad \mu - p.p.$) et par suite $fg = 0 \quad \mu - p.p.$, donc l'inégalité est vérifiée. Remarquons ensuite que si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$, alors l'inégalité est trivialement vérifiée. On suppose donc désormais le terme $\|f\|_p\|g\|_q$ strictement positif et fini.

La fonction $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tous réels strictement positifs a et b :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln(ab), \tag{4.6}$$

d'où

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{4.7}$$

Cette inégalité [2] appliquée à $\frac{f}{\|f\|_p}$ et $\frac{g}{\|g\|_q}$ s'écrit en un point quelconque de Ω :

$$fg = |fg| \leq \|f\|_p\|g\|_q \left(\frac{f^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{g^q}{q\|g\|_q^q}\right), \tag{4.8}$$

donc en intégrant sur Ω :

$$\int_\Omega fg d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q \left(\frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q\|g\|_q^q}\right) = \|f\|_p\|g\|_q < +\infty, \tag{4.9}$$

d'où l'inégalité centrale et dans ce cas fini la μ-intégrabilité de fg.

(b) On obtient l'inégalité de droite en appliquant le résultat précédent à $|f|$ et $|g|$. L'inégalité de gauche est alors simplement l'inégalité triangulaire pour $fg \in \mathcal{L}_\mu^1(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$.

□

Remarque 4.5. Dans le cas $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Théorème 4.6 (Inégalité de Minkowski). *Soit $p \in [1, +\infty[$. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}_\mu^p(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$. Alors*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{4.10}$$

Démonstration. Dans le cas $p = 1$, on a immédiatement :

$$\|f + g\|_1 = \int_\Omega |f + g| d\mu \leq \int_\Omega |f| d\mu + \int_\Omega |g| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1, \tag{4.11}$$

ce qui est bien le résultat cherché.

Dans le cas général $p \in]1, +\infty[$, commençons par remarquer que si $\|f + g\|_p = 0$, alors l'inégalité est triviale. On suppose donc $\|f + g\|_p > 0$ et on écrit :

$$\|f + g\|_p^p = \int_\Omega |f + g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_\Omega |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int_\Omega |g||f + g|^{p-1} d\mu. \tag{4.12}$$

2. connue sous le nom d'inégalité de Young. En posant $\rho = \frac{1}{p}, x = a^p$, et $y = b^q$, elle s'écrit aussi $x^\rho y^{1-\rho} \leq \rho x + (1 - \rho)y$.

Soit alors q tel que p et q soient exposants conjugués : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, i.e. $(p-1)q=p$. Il vient :

$$\|(f+g)^{p-1}\|_q=\left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}}=\|f+g\|_p^{p-1}<+\infty, \tag{4.13}$$

et par conséquent $(f+g)^{p-1}\in\mathcal{L}^q_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$. On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder (théorème 4.4) aux deux membres de droite de l'équation (4.12) :

$$\|f+g\|_p^p\leq \|f\|_p\|(f+g)^{p-1}\|_q+\|g\|_p\|(f+g)^{p-1}\|_q=(\|f\|_p+\|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p-1}, \tag{4.14}$$

d'où le résultat. □

Proposition 4.7 (Espace semi-normé)**.** $\|\cdot\|_p$ *est une semi-norme sur l'espace* $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$.

Démonstration. L'homogénéité est immédiate et l'inégalité de Minkowski fournit l'inégalité triangulaire. □

Remarque 4.8. Ce n'est évidemment pas une norme : sur l'espace $\mathcal{L}^1_\lambda(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\|\mathbf{1}_{\{0\}}\|_1=\displaystyle\int_\mathbb{R}\mathbf{1}_{\{0\}}d\lambda=0$, et cependant $\mathbf{1}_{\{0\}}$ n'est pas la fonction nulle.

4.3 Espace L^p

On définit sur $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ la relation $\mathtt{R}$ par :

$$f\mathtt{R}g\iff\|f-g\|_p=0. \tag{4.15}$$

On vérifie que $\mathtt{R}$ est une relation d'équivalence [3], et que deux fonctions appartiennent à la même classe d'équivalence si et seulement elles sont égales $\mu-p.p.$. On peut donc définir l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ par $\left\{f\in\mathcal{L}^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K}):\|f\|_p=0\right\}$. On vérifie (exercice) que ce dernier espace ("noyau" de la semi-norme) est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel quotient ainsi obtenu est noté usuellement $L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ [4].

$L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ est donc l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\mathtt{R}$. Si $f\in\mathcal{L}^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$, sa classe d'équivalence s'écrit

$$\tilde{f}=\left\{g\in\mathcal{L}^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K}):g=f\ \ \mu-p.p.\right\}. \tag{4.16}$$

Posons $\tilde{N}_p:L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})\to\mathbb{R}_+,\tilde{f}\mapsto\tilde{N}_p(\tilde{f})=\|f\|_p$. Il est important de noter que cette définition est cohérente, puisque $\|f\|_p=\|g\|_p$ si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ égales $\mu-p.p.$.

Proposition 4.9 (Norme $\tilde{N}_p$)**.** *Soit* $p\in[1,+\infty[$. *L'application* $\tilde{N}_p$ *définie ci-dessus est une norme sur* $L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$.

3. réflexive, symétrique, transitive,...
4. Pour la construction des espaces vectoriels quotient, voir le cours d'Algèbre 5.

Démonstration. Pour tout élément $\tilde{f}$ de $L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$,

$$\tilde{N}_p(\tilde{f}) = 0 \Longrightarrow \|f\|_p = 0 \Longrightarrow f = 0 \ \ \mu - p.p. \Longrightarrow \tilde{f} = \tilde{0}. \tag{4.17}$$

□

Théorème 4.10 (Norme $\|\cdot\|_p$). *Soit $p \in [1,+\infty[$. L'application $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$.*

Démonstration. C'est une réécriture de la proposition précédente 4.9, avec **l'abus de notation usuel consistant à confondre $\tilde{f}$ et f et $\tilde{N}_p$ et $\|\cdot\|_p$. Cet abus de notation sera utilisé dans toute la suite de l'exposé**. □

Nous allons maintenant montrer que l'espace vectoriel normé $L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ ainsi construit est un espace de Banach. Nous aurons besoin de deux lemmes intermédiaires. Le premier est une caractérisation des espaces vectoriels normés complets (i.e. de Banach). Le second montre que dans les espaces qui nous occupent, cette caractérisation est vérifiée. Le théorème, dit de Riesz-Fischer, en découle.

Lemme 4.11. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ est complet si et seulement si toute série absolument convergente converge dans E.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons E complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On suppose que la série $\sum_{k\geq 0} x_k$ est absolument convergente et on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ la somme partielle d'ordre n de cette série. Alors pour tous $i,j \in \mathbb{N}$,

$$\|S_{i+j} - S_i\| = \left\| \sum_{k=i+1}^{i+j} x_k \right\| \leq \sum_{k=i+1}^{i+j} \|x_k\| \leq \sum_{k=i+1}^{+\infty} \|x_k\| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0. \tag{4.18}$$

$(S_n)_n$ est donc de Cauchy dans E complet, donc elle converge dans E.

($\Leftarrow$) Réciproquement, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. On construit une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$n_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, n_k = \min\left\{ m > n_{k-1} : \forall l \geq m, \|x_l - x_m\| < \frac{1}{2^k} \right\}. \tag{4.19}$$

Cette construction est possible puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Alors :

$$\left\| \sum_{k=0}^{N} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \left\|(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})\right\| < \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty, \tag{4.20}$$

donc $(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série absolument convergente, donc par hypothèse cette série converge dans E, donc la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{i=1}^{k} (x_{n_i} - x_{n_{i-1}}) \right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente dans E, et finalement la suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge [5] dans E, qui est donc complet. □

5. Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence...

Lemme 4.12. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Toute série de fonctions de $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ absolument convergente converge μ-p.p. dans $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$, telle que la série associée $\sum_{k\geq 0} f_k$ soit absolument convergente : $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p < +\infty$. On note que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{N} |f_k|\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, donc par le théorème de convergence monotone,

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|\right)^p d\mu = \lim_N \int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{N} |f_k|\right)^p d\mu. \tag{4.21}$$

Or, par l'inégalité de Minkowski [6] :

$$\left\|\sum_{k=0}^{N} |f_k|\right\|_p \leq \sum_{k=0}^{N} \|f_k\|_p \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p < +\infty, \tag{4.22}$$

donc il vient en combinant ces deux résultats :

$$\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|\right\|_p = \lim_N \left\|\sum_{k=0}^{N} |f_k|\right\|_p \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p < +\infty. \tag{4.23}$$

Ainsi [7], $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|$ est une fonction de puissance p intégrable, donc finie μ-presque partout (voir par exemple l'exercice 3.4). De plus, puisque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet, on en déduit que pour tout $x \in \Omega$ tel que $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(x)| < +\infty$, on a aussi $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) < +\infty$, ce qui entraîne bien que $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ converge μ-presque partout sur Ω. Finalement, définissons la fonction F par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ si cette somme est finie, et 0 sinon. Alors F est bien dans $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ converge μ-presque partout vers F. □

Théorème 4.13 (Théorème de Riesz-Fisher)**.** *Soit $p \in [1, +\infty[$. L'espace vectoriel normé $\left(L^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p\right)$ est complet. (C'est donc un espace de Banach.)*

Démonstration. C'est la conséquence directe de la combinaison des deux lemmes précédents. □

6. qu'on généralise immédiatement à N termes par récurrence.
7. On vient d'obtenir une inégalité de Minkowski "dénombrable"…

Corollaire 4.14 (Convergence μ-presque partout d'une suite extraite). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$, convergeant au sens de la norme $\|\cdot\|_p$ vers une fonction f de $L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ (i.e. $\lim_n \|f_n - f\|_p = 0$). Alors il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant $\mu - p.p.$ vers f.*

Démonstration. Admis. □

Il n'y a ni équivalence ni implication directe entre la convergence $\mu - p.p.$ et la convergence-L^p (i.e. au sens de la norme $\|\cdot\|_p$). Voir par exemple l'exercice **??**. Les rapports entre ces différents types de convergence seront étudiés en cours de Probabilités 2.

Remarque 4.15. On rappelle qu'une norme est une application continue (exercice), et que par conséquent $\|f_n - f\|_p \to 0 \Longrightarrow \|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

4.4 Théorèmes de densité

Théorème 4.16 (Densité des fonctions étagées sommables). *Soit $p \in [1,+\infty[$. L'espace des fonctions étagées sommables est dense dans $\left(L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K}), \|\cdot\|_p\right)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p_\mu(\Omega;\mathbb{R}_+)$ (à valeurs réelles positives). Le théorème 2.31 et son corollaire 2.32 nous donnent l'existence d'une suite croissante de fonctions étagées positives $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f. Ces fonctions sont aussi dans $L^p_\mu(\Omega,\mathcal{T};\mathbb{K})$ (puisque $\forall n, 0 \leq \varphi_n \leq f$). De plus, par le théorème de convergence dominée appliqué à la suite $((f-\varphi_n)^p)_{n\in\mathbb{N}}$, de limite 0 partout, dominée par f^p intégrable :

$$\lim_n \|f-\varphi_n\|_p = \lim_n \left(\int_\Omega (f-\varphi_n)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega \lim_n (f-\varphi_n)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0, \tag{4.24}$$

d'où le résultat dans le cas où f est réelle positive. Si f est à valeurs réelles, on applique le résultat à f^+ et f^-. Enfin, si f est à valeurs complexes, on applique le cas réel aux parties réelles et imaginaires. □

Théorème 4.17 (Densité des fonctions en escalier à support compact). *Soit $p \in [1,+\infty[$. L'espace des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p_\lambda(\mathbb{R};\mathbb{K})$.*

Démonstration. Ce résultat découle de précédent grâce au lemme suivant :

Lemme 4.18. *Si $A \subset B \subset L^p_\lambda(\mathbb{R};\mathbb{K})$ et que A est dense dans B et B est dense dans $L^p_\lambda(\mathbb{R};\mathbb{K})$, alors A est dense dans $L^p_\lambda(\mathbb{R};\mathbb{K})$, toutes ces densités étant évidemment au sens de la norme $\|\cdot\|_p$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p_\lambda(\mathbb{R};\mathbb{K})$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g_\epsilon \in B$ telle que $\|f - g_\epsilon\| < \epsilon$, puis il existe $h_\epsilon \in A$ telle que $\|h_\epsilon - g_\epsilon\| < \epsilon$, et finalement $\|f - h_\epsilon\| < 2\epsilon$. □

Il suffit donc d'approcher une fonction étagée par des fonctions en escalier à support compact. Par linéarité, il suffit même d'approcher $\mathbf{1}_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ce dernier morceau de la preuve est admis. □

Théorème 4.19 (Densité des fonctions continues à support compact). *Soit $p \in [1,+\infty[$. L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p_\lambda(\mathbb{R};\mathbb{K})$.*

Démonstration. Exercice. Indication : d'après le lemme précédent 4.18, il suffit d'approcher toute fonction 1_I avec I intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$, par des fonctions continues à support compact, toujours au sens de la norme $\|\cdot\|_p$. □

Noter que ces deux derniers résultats sont donnés pour $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda$ mesure de Lebesgue. On rappelle que le support d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est par définition : $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$

Théorème 4.20 (Densité des fonctions indéfiniment dérivables à support compact)**.** *Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'espace usuellement noté $C_K^\infty(I)$ des fonctions indéfiniment dérivables sur I à support compact est dense dans $L^p_\lambda(I; \mathbb{K})$.*

Démonstration. Admis. Voir l'annexe B. □

4.5 Exercices

Exercice 4.1 (Hölder etc.)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soient p et q deux réels de $]1, \infty[$. Soient $f \in L^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$ et $g \in L^q_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$.

1. Supposons qu'il existe $r \in [1, \infty[$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Montrer que
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.25}$$
2. Supposons qu'il existe $r \in]1, \infty[$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$. Montrer que pour toute fonction $h \in L^r_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$
$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r. \tag{4.26}$$

Exercice 4.2 (Cas d'égalité des inégalités de Hölder et Minkowski)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$.

1. Soit $q \in]1, \infty[$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et soit $g \in L^q_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Hölder appliquée à f et g soit une égalité.
2. Soit maintenant $g \in L^p_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Minkowski appliquée à f et g soit une égalité.

Exercice 4.3 (Espace L^2)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que $L^2_\mu(\Omega; \mathbb{C})$ est un espace de Hilbert [8].

Exercice 4.4 (Lemme de Riemann-Lebesgue [9])**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit f une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans I. Montrer que
$$\lim_n \int_I f(t) \cos(nt) d\lambda_t = 0. \tag{4.27}$$
2. Montrer que ce résultat reste valide pour toute fonction f Lebesgue-intégrable.

8. i.e. préhilbertien complet
9. Voir aussi l'exercice 1.5

Exercice 4.5 (Inégalité de Hardy)**.** On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Soient $p \in]1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ à valeurs réelles positives. On pose

$$F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{1}{x} \int_{[0,x]} f(t) d\lambda_t. \tag{4.28}$$

1. Vérifier la cohérence de la définition.
2. On suppose dans cette question f continue à support compact.
   (a) Montrer que $G : x \mapsto xF(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle admet une limite finie en 0.
   (c) Montrer que
   $$\int_{\mathbb{R}_+} F^p d\lambda = \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}_+} f F^{p-1} d\lambda. \tag{4.29}$$
   (d) En déduire que
   $$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p. \tag{4.30}$$
3. On ne suppose plus f continue à support compact.
   (a) Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact de limite f dans $L^p(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_n(x) = \frac{1}{x} \int_{[0,x]} f_n(t) d\lambda_t$ converge $\lambda - p.p$ vers F.
   (c) Montrer que cette suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi dans $L^p(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$.
   (d) En déduire que l'inégalité de Hardy (4.30) est toujours valide pour f.

Exercice 4.6 (Inégalité de Jensen)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$ [10]. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; I)$ où $I =]a, b[, (a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soit φ une fonction convexe sur I.

1. Soit $x^* \in I$. Montrer qu'il existe un réel β tel que :
$$\forall x \in I, \varphi(x) \geq \varphi(x^*) + \beta(x - x^*). \tag{4.31}$$
2. En déduire que $\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu$.

10. $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est donc un espace de probabilité.

Chapitre 5

Intégrales multiples

> Mais peut-être ai-je parlé déjà assez des fonctions d'une seule variable. Heureusement, je n'aurai pas beaucoup à dire des fonctions de plusieurs variables. En effet, les diverses définitions de l'intégrale et la théorie qui s'y attache, peuvent être répétées presque sans changement, bien entendu, en remplaçant, dans la définition des fonctions en escalier et dans les autres détails, les intervalles linéaires par des rectangles, etc., ou comme on dit aussi, par des intervalles à plusieurs dimensions.
>
> Frédéric Riesz, *L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue*, Annales de l'Institut Fourier, Tome 1, 1949.

L'objectif de ce chapitre est de construire l'intégrale de Lebesgue pour des fonctions définies sur des espaces produits. On reprend donc le déroulement déjà connu : définition de tribus sur les espaces produits, puis de mesures et donc d'intégrales. On donne les théorèmes de Fubini permettant le calcul d'intégrales multiples dans de nombreux cas concrets. On énonce un théorème de changement de variables pour les intégrales sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

La majeure partie des résultats de ce chapitre est énoncée sans démonstration. Se reporter à l'un des manuels de la bibliographie pour plus de détails.

5.1 Tribu produit

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables.

Définition 5.1 (Tribu produit)**.** On appelle *tribu produit* de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, et on note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ la tribu engendrée par les éléments de $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, i.e.

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \sigma\left(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2\}\right). \tag{5.1}$$

$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ est ainsi un espace mesurable.

Remarque 5.2. Cette définition est nécessaire puisqu'on vérifie aisément que la famille $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2\}$ n'est pas une tribu. Elle n'est stable ni par union finie ni par passage au complémentaire.

Proposition 5.3 (Une caractérisation de la tribu produit)**.** *Soient* $\pi_1 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_1, (x, y) \mapsto x$ *et* $\pi_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_2, (x, y) \mapsto y$ *les projections canoniques.* $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$

est la plus petite tribu $\mathcal{T}$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ rendant π_1 et π_2 mesurables de $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T})$ vers respectivement $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$.

Démonstration. D'abord, $\forall A_1 \in \mathcal{T}_1, \pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, donc la projection canonique $\pi_1 : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \to (\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ est bien mesurable (idem pour π_2).

Ensuite, si les projections $\pi_i : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}) \to (\Omega_i, \mathcal{T}_i), i = 1, 2$ sont mesurables, alors $\forall A_1 \in \mathcal{T}_1, \forall A_2 \in \mathcal{T}_2, A_1 \times A_2 = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{T}$ par définition de la mesurabilité, donc $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$ et par suite $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$. □

Proposition 5.4 (Mesurabilité de fonctions à valeurs vectorielles)**.** *Soit une application $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\Omega'_1 \times \Omega'_2, \mathcal{T}'_1 \otimes \mathcal{T}'_2), x \mapsto f(x) = ((f_1(x), f_2(x))$. Alors f est mesurable si et seulement si ses coordonnées $f_i : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\Omega'_i, \mathcal{T}'_i), i = 1, 2$ sont mesurables.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si f est mesurable, alors $\forall A'_1 \in \mathcal{T}'_1, f_1^{-1}(A'_1) = f^{-1}(A'_1 \times \Omega'_2) \in \mathcal{T}$ par définition de l'image réciproque puis par définition de la mesurabilité de f.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si f_1 et f_2 sont mesurables, alors $\forall A'_1 \in \mathcal{T}'_1, \forall A'_2 \in \mathcal{T}'_2$,

$$\begin{aligned} f^{-1}(A'_1 \times A'_2) &= f^{-1}\left((A'_1 \times \Omega'_2) \cap (\Omega'_1 \times A'_2)\right) \\ &= f^{-1}(A'_1 \times \Omega'_2) \cap f^{-1}(\Omega'_1 \times A'_2) = f_1^{-1}(A'_1) \cap f_2^{-1}(A'_2) \in \mathcal{T} \end{aligned} \tag{5.2}$$

où l'on a utilisé le fait que l'image réciproque conserve l'intersection, la mesurabilité de f_1 et f_2, et enfin la stabilité d'une tribu par intersection au plus dénombrable. D'où la mesurabilité de f par la proposition 2.19 pour $\mathcal{T}'_1 \otimes \mathcal{T}'_2 = \sigma\left(\mathcal{T}'_1 \times \mathcal{T}'_2\right)$. □

Proposition 5.5 (Tribu produit borélienne et produit des tribus boréliennes)**.** *Dans le cas $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{K}$, on a : $\mathcal{B}(\mathbb{K} \times \mathbb{K}) = \mathcal{B}(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Admis. □

Remarque 5.6. Attention, le résultat précédent 5.5 n'est plus valide dans le cas général de tribus boréliennes pour des topologies quelconques.

Remarque 5.7. Une combinaison des propositions 5.4 et 5.5 a été énoncée et admise à la proposition 2.23 dans le cas particulier $\Omega'_1 = \Omega'_2 = \mathbb{R}$ pour obtenir la mesurabilité de fonctions à valeurs complexes.

5.2 Mesure produit

Définition 5.8 (Mesure σ-finie)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Une mesure μ sur cet espace est dite *σ-finie* s'il existe une suite croissante $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ de mesure finie et recouvrant Ω, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \quad \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mu(\Omega_n) < +\infty. \tag{5.3}$$

$(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est alors appelé espace mesuré σ-fini.

Remarque 5.9. La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est σ-finie (exercice). La mesure de comptage ν sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est σ-finie. La mesure de comptage ν sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas σ-finie. Voir le début de l'exercice 5.1.

Théorème 5.10 (Mesure produit). *Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures telles que $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ soient deux espaces mesurés σ-finis, alors il existe une unique mesure μ, appelée* mesure produit *et notée $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, telle que*

$$\forall A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2, \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2). \tag{5.4}$$

$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ est alors un espace mesuré σ-fini.

Démonstration. Admis. □

Proposition 5.11 (Associativité). *L'opération $\otimes$ est associative pour les tribus et les mesures σ-finies :*

(a) $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3 = (\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \otimes (\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3)$;

(b) $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$.

Démonstration. Exercice pour les tribus, admis pour les mesures. □

Remarque 5.12. L'opération n'est évidemment pas commutative...

5.3 Théorèmes de Fubini

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. On note $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$). $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est donc l'espace mesuré produit. En suivant une démarche maintenant familière au lecteur, on énonce le théorème d'inversion des intégrales doubles ("Fubini") d'abord pour les fonctions mesurables à valeurs réelles positives, puis pour les fonctions intégrables.

Théorème 5.13 (Théorème de Tonelli-Fubini). *Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. Alors :*

(a) la fonction $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy)$ *est $\mathcal{T}_1$-mesurable ;*

(b) la fonction $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_1(dx)$ *est $\mathcal{T}_2$-mesurable ;*

(c) $\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_1(dx) \right) \mu_2(dy)$.

Démonstration. Admis. Bien noter que l'égalité (c) est dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

XXX Donner des éléments de preuve XXX

□

Théorème 5.14 (Théorème de Fubini (ou Fubini-Lebesgue))**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\Omega, \mathcal{T}; \mathbb{K})$. *Alors :*

(a) pour μ_1*-presque tout* $x \in \Omega_1$, $y \mapsto f(x, y) \in \mathcal{L}^1_{\mu_2}(\Omega_2, \mathcal{T}_2; \mathbb{K})$ *;*

(b) pour μ_2*-presque tout* $y \in \Omega_2$, $x \mapsto f(x, y) \in \mathcal{L}^1_{\mu_1}(\Omega_1, \mathcal{T}_1; \mathbb{K})$ *;*

(c) $x \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x, y)\mu_2(dy) \in \mathcal{L}^1_{\mu_1}(\Omega_1, \mathcal{T}_1; \mathbb{K})$*, (fonction définie* μ_1*-presque partout) ;*

(d) $y \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(x, y)\mu_1(dx) \in \mathcal{L}^1_{\mu_2}(\Omega_2, \mathcal{T}_2; \mathbb{K})$*, (fonction définie* μ_2*-presque partout) ;*

(e) $\displaystyle\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y)\mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y)\mu_1(dx) \right) \mu_2(dy).$

Démonstration. Admis. Suivant la démarche connue, on commence par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on applique le théorème de Tonelli-Fubini 5.13 à f^+ et f^-. On traite ensuite le cas complexe en considérant les parties réelle et imaginaire $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$. □

Remarque 5.15. Dans la pratique, pour calculer une intégrale sur un espace produit, on utilise d'abord le théorème de Tonelli-Fubini 5.13 pour déterminer si la fonction est Lebesgue-intégrable, puis le théorème de Fubini 5.14 pour calculer sa valeur.

Remarque 5.16. Si l'on considère les espaces mesurés σ-finis $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, alors on retrouve le théorème d'intégration terme à terme des séries 3.20 (exercice).

Remarque 5.17. Si l'on considère les espaces mesurés σ-finis $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ et $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, alors on obtient un théorème de sommation de séries doubles (exercice).

Remarque 5.18. Voir l'exercice 5.1 pour un contre-exemple dans le cas de mesures non σ-finies.

5.4 Changement de variables

On donne ici sans démonstration un théorème général de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 5.19. *Soit* D *et* Δ *deux ouverts de* $\mathbb{R}^d$. *Soit* $f : D \to \mathbb{K}$ *une fonction borélienne. Soit* $\varphi : \Delta \to D$ *un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme*[1]. *On note de façon usuelle* $J_\varphi = \det \varphi'$ *le jacobien de* φ.
Alors f *est intégrable sur* D *si et seulement si* $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ *est intégrable sur* Δ*, et dans ce cas :*

$$\int_D f(x)\lambda(dx) = \int_\Delta (f \circ \varphi)(u)|J_\varphi|(u)\lambda(du). \tag{5.5}$$

Démonstration. Admis. □

Le résultat suivant peut être utile pour effectuer des changements de variables dans des cas concrets où φ est connu explicitement mais pas sa réciproque.

1. Rappel : on appelle $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ dans D toute application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ dont la réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. Une application est continûment différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues en tout point de cet ouvert. Voir le cours de calcul différentiel.

Théorème 5.20. *Soit φ une application sur un ouvert Δ de $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que :*
(a) φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ ;
(b) φ est injective ;
(c) le jacobien J_φ de φ ne s'annule pas sur Δ.
Alors $D = \varphi(\Delta)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur D.

Démonstration. Admis. □

5.5 Exercices

Exercice 5.1 (Fubini et mesures σ-finies)**.** On note $I = [0,1]$. Soient $(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ et $(I, \mathcal{P}(I), \nu)$ deux espaces mesurés, où l'on a noté de façon usuelle λ la mesure de Lebesgue et ν la mesure de comptage. On note $\Delta = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$ la diagonale de $I \times I$.

1. Montrer que $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ est un espace mesuré σ-fini.
2. Montrer que $(I, \mathcal{P}(I), \nu)$ n'est pas un espace mesuré σ-fini.
3. Vérifier que $\Delta \in \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{P}(I)$.
4. Calculer $\displaystyle\int_I \left(\int_I \mathbf{1}_\Delta(x,y)\nu(dy) \right) \lambda(dx)$.
5. Calculer $\displaystyle\int_I \left(\int_I \mathbf{1}_\Delta(x,y)\lambda(dx) \right) \nu(dy)$.
6. Conclure.

Exercice 5.2 (Fubini et intégrabilité)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$.

1. Vérifier la mesurabilité de f sur $(\mathbb{R}_+ \times [0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}([0,1]))$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\lambda(dx)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x,y)\lambda(dy)$.
4. Conclure.

Exercice 5.3 (Coordonnées polaires)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^{-\alpha}$. Soit $D = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : x^2+y^2 < 1\right\}$.

1. Vérifier que h est mesurable sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que h soit Lebesgue-intégrable sur D.

Exercice 5.4 (Une intégration par parties généralisée)**.** Soit f et g deux fonctions localement Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{[0,x]} f d\lambda \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{[0,x]} g d\lambda. \tag{5.6}$$

On va montrer que F et G vérifient une formule d'intégration par parties. On commence par le montrer dans le cas $x \geq 0$. On note $\Delta = \left\{(t,s) \in [0,x]^2 : 0 \leq s \leq t \leq x\right\}$, et on pose $\forall (t,s) \in [0,x]^2, \varphi(t,s) = \mathbf{1}_\Delta(t,s) f(t) g(s)$.

1. Appliquer le théorème de Fubini à φ.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{[0,x]}\left(\int_{[0,x]}\varphi(t,s)d\lambda_s\right)d\lambda_t=\int_{[0,x]}fGd\lambda$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{[0,x]}\left(\int_{[0,x]}\varphi(t,s)d\lambda_t\right)d\lambda_s=\int_{[0,x]}g(s)\left(\int_{[0,x]}\mathbf{1}_{]s,x]}(t)f(t)d\lambda_t\right)d\lambda_s$.
4. Conclure en remarquant que $\forall s\in[0,x], \mathbf{1}_{]s,x]}=\mathbf{1}_{[0,x]}-\mathbf{1}_{[0,s]}$.

Exercice 5.5 (Produit de convolution)**.** Voir l'annexe B.

Annexe A

Convergence dominée version "continue par morceaux"

La théorie de l'intégration de Lebesgue n'est pas au programme des classes préparatoires, et par conséquent pas non plus au programme des écrits du CAPES. La théorie de l'intégration proposée dans ces classes n'est la plupart du temps énoncée pour les fonctions continues par morceaux. Cependant, toute fonction continue par morceaux étant mesurable (proposition 2.26), on peut aisément reformuler les résultats liés à la convergence dominée de Lebesgue en des énoncés acceptables pour les seules fonctions continues par morceaux.

Cette annexe fournit ces énoncés "allégés" comme corollaire du présent cours, mais ne leur donne pas de nouvelles démonstrations qui feraient l'impasse sur la théorie de la mesure.

Théorème A.1 (Convergence dominée pour les fonctions continues par morceaux)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si :*

(i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f elle-même continue par morceaux sur I ;

(ii) il existe une fonction g continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leq g(t)$;

alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Théorème A.2 (Intégration terme à terme des suites de fonctions continues par morceaux)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si :*

(i) la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux ;

(ii) la série $\displaystyle\sum_n \int_I |f_n|$ est absolument convergente ;

alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n$

Théorème A.3 (Continuité sous le signe somme pour des fonctions continues par morceaux)**.** *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si*

(i) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur J ;*

(ii) $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ *est* continue *sur I ;*

(iii) il existe une fonction $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable sur J telle que $\forall x \in I$, $\forall t \in J$, $|f(x,t)| \leq g(t)$ *;*

alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ *est continue sur I.*

Théorème A.4 (Dérivabilité sous le signe somme pour des fonctions continues par morceaux)**.** *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si*

(i) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur J ;*

(ii) $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ *est* dérivable *sur I et sa dérivée* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur J et* continue *sur I ;*

(iii) il existe une fonction $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable sur J telle que $\forall x \in I$, $\forall t \in J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$ *;*

alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et* $F'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$*.*

Annexe B

Produit de convolution sur $\mathbb{R}$

B.1 L'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$

Définition B.1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{K})$. On appelle *convolée de f et g au point x* la quantité si elle existe

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\lambda(dy). \tag{B.1}$$

Théorème B.2. *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{K})$. Le* produit de convolution *$f * g$ est une fonction définie λ-presque partout, Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Démonstration. On décompose la preuve comme suit :

(a) Montrer que $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto h(x,y) = f(x)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \varphi(x,y) = (x-y, y)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

(c) En déduire que $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

(d) Conclure sur les trois points du théorème.

□

Théorème B.3. *L'opération $*$ du produit de convolution est commutative et associative sur $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.*

Démonstration. Par calcul direct et changements de variables. □

Théorème B.4. *Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\big(L^1(\mathbb{R}; \mathbb{K}), +, .\big)$ muni de l'opération $*$ est une algèbre commutative ne possédant pas d'unité.*

B.2 Convolution avec une fonction régulière

On note $\mathcal{C}^k_K(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe k fois continûment différentiables à support compact.

Théorème B.5. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}^k_K(\mathbb{R}; \mathbb{K})$. Alors le produit de convolution $f * g$ est une fonction bien définie (partout), de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, et ses dérivées vérifient :*

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\}, (f * g)^{(j)} = f * g^{(j)}. \tag{B.2}$$

Démonstration. On décompose la preuve comme suit :

(a) On suppose $k=0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)\lambda(dy)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose $k=1$. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)\lambda(dy)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et préciser sa dérivée.

(c) Conclure.

□

B.3 Convolution $L^1 - L^p$

Théorème B.6. *Soit $p \in]1,+\infty[$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{K})$ et $g \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{K})$. Alors le produit de convolution $f * g$ est défini λ-presque partout, est de puissance p-intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. $f * g \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{K})$, et vérifie*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \tag{B.3}$$

Démonstration. On décompose la preuve comme suit :

(a) Soit $q \in]1,+\infty[$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\lambda(dy) \leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g-y)|^p \lambda(dy)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{B.4}$$

(b) Conclure en utilisant le théorème B.2.

□

B.4 Régularisation par le produit de convolution

Définition B.7 (Suite régularisante)**.** On appelle *suite régularisante* toute suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs positives* vérifiant :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n \in \mathcal{C}_K^k(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{Supp}(f) \subset \left[0,\frac{1}{n}\right]$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} \rho_n d\lambda = 1$.

Théorème B.8. *Soit $p \in [1,+\infty[$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{K})$. Si $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante, alors $\rho_n * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R};\mathbb{K})$, i.e.*

$$\|\rho_n * f - f\|_p = 0. \tag{B.5}$$

Lemme B.9. *Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{K})$, alors $\rho_n * f - f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. (a) Soit K un compact fixé.Montrer que

$$\forall x \in K, |\rho_n * f - f|(x) \leq \int_{[0,\frac{1}{n}]} |f(x-y)-f(x)|\rho_n(y)\lambda(dy).$$

(b) Conclure en utilisant l'uniforme continuité de f sur K.

$\square$

Démonstration. (du théorème B.8) Soit $\epsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $f_1 \in \mathcal{C}_K^0(\mathbb{R})$ telle que $\|f - f_1\|_p \leq \epsilon$.

(b) Montrer que $\operatorname{Supp} \rho_n * f_1 \subset \overline{\left[0, \frac{1}{n}\right] + \operatorname{Supp} f_1}$.

(c) En déduire, en utilisant le lemme B.9, que $\rho_n * f_1$ converge vers f_1 dans $L^1(\mathbb{R})$ (i.e. au sens de la norme $\|\cdot\|_1$).

(d) Conclure.

$\square$

Corollaire B.10. *Soit $p \in [1, +\infty[$. $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.*

Remarque B.11. Cette annexe fournit donc une preuve permettant de passer du théorème 4.19 au théorème 4.20 de ce cours.

Annexe C

Annales

C.1 Contrôle continu du 9 mars 2012

Durée : 2h00. Calculatrices et documents interdits. Cet examen comporte 4 exercices. Barème approximatif : 5 pts - 4 pts - 7 pts - 4 pts.

Exercice 1

Vrai ou faux ? Justifier vos réponses par une brève démonstration ou bien donner par un contre-exemple le cas échéant.

(a) Une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est bornée.

(b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\lim_n \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^N}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^{N+1}} = \dfrac{N+2}{N+1}$.

(c) Si $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors $\{x \in \Omega : f(x) \leq g(f(x))\}$ est une partie $\mathcal{T}$-mesurable de Ω.

(d) Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Alors pour tout $B \in \mathcal{T}$, on a : $A \subset B \Longrightarrow A \in \mathcal{T}$.

(e) Sur l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ où ν est la mesure cardinal, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante au sens de l'inclusion, alors $\nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \nu(A_n)$.

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

1. Vérifier que $\forall n, f_n$ est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.
2. Vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Calculer $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.
4. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$, mais que c'est le cas sur tout $[a, 1]$, $a > 0$.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \lim_n f_n(x)dx$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$, on pose $I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_n = \left\{ \bigcup_{k \in J} I_{n,k} : J \subset \{1, \ldots, 2^n\} \right\}$ est une tribu sur $[0, 1[$.
2. Décrire les éléments de $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\{I_{n,k} : k \in \{1, \ldots, 2^n\}\}\right)$, tribu engendrée par la famille des $I_{n,k}$ à n fixé.
3. On note λ la mesure de Lebesgue sur $([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[))$. Calculer $\lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{n,1}\right)$ de deux manières différentes.
4. $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ est-elle une tribu sur $[0, 1[$?
5. Proposer une mesure différente de celle de Lebesgue sur l'espace mesurable $([0, 1[, \mathcal{T}_n)$.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue sur $[a, +\infty[$. On suppose que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_a^{+\infty} f$ est convergente.

1. Enoncer le critère de Cauchy pour la convergence de $\int_a^{+\infty} f$.
2. Montrer que si f n'admet pas 0 pour limite en $+\infty$, alors il existe $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :
$$\forall A \geq a, \exists x_0 \geq A : \forall t \in \left[x_0 - \frac{\alpha}{2}, x_0 + \frac{\alpha}{2}\right], |f(t)| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$
3. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

C.2 Contrôle continu du 24 avril 2012

Durée : 2 heures. Calculatrices et documents interdits. Cet examen comporte 4 exercices énoncés sur 2 pages. Précision et clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Barème approximatif : 3 pts - 6 pts - 8 pts - 3pts.

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Rappeler *précisément* la définition d'une mesure (positive).
2. On suppose que μ est une mesure finie, avec $\mu(\Omega) = 1$. On considère la famille de parties
$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{T} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$
Montrer que $\mathcal{U}$ est une tribu sur Ω.

Exercice 2

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x).$$

.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est mesurable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à préciser.
3. Montrer que $\forall t \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+t) \leq t$.
4. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x) dx$$

   est convergente.
5. Calculer $\lim_n u_n$.

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On note dans cet exercice $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ de puissance p-intégrables pour la mesure μ.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On suppose que $\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}) > 0$. On considère la fonction φ définie comme suit :

$$\varphi : \quad [1, +\infty[\to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad p \mapsto \varphi(p) = \int_\Omega |f|^p d\mu.$$

On pose $I = \{p \in [1, +\infty[: \varphi(p) < +\infty\}$.

1. Montrer que la fonction φ est strictement positive sur I.
2. Enoncer *précisément* l'inégalité de Hölder pour les fontions intégrables.
3. Soit $\theta \in [0, 1]$. Montrer que si p_1 et p_2 sont deux éléments de I alors $\theta p_1 + (1 - \theta)p_2$ appartient à I. *(Indication : vérifier que $f^{\theta p_1} \in \mathcal{L}^{\frac{1}{\theta}}_\mu(\Omega)$ et utiliser l'inégalité de Hölder.)*
4. Montrer que la fonction $\ln \varphi$ est convexe sur I.
5. Soient p, q, r trois réels vérifiant $1 \leq q < p < r$.
   (a) Montrer que

$$\mathcal{L}^q_\mu(\Omega) \cap \mathcal{L}^r_\mu(\Omega) \subset \mathcal{L}^p_\mu(\Omega)$$

   .

   (b) Montrer que si $f \in \mathcal{L}^p_\mu(\Omega)$, alors $\|f\|_p \leq \max(\|f\|_q, \|f\|_r)$.

Exercice 4

1. Calculer pour x non nul : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$.
2. En déduire $\displaystyle\int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} d\lambda_y \right) d\lambda_x$.
3. La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ est-elle intégrable sur $[-1,1]\times[-1,1]$?

C.3 Examen du 16 mai 2012

Durée : 2h30. Calculatrices et documents interdits. Cet examen comporte cinq exercices énoncés sur deux pages. Précision et clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. Il est demandé de nommer précisément les théorèmes du cours utilisés et d'en vérifier scrupuleusement les hypothèses. Il est toujours possible d'admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes. Les exercices sont indépendants. Barème approximatif : 4 pts - 4 pts - 4 pts - 6 pts - 2 pts

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\Omega;\mathbb{R})$, i.e. f est une fonction à valeurs réelles intégrable sur Ω pour la mesure μ. On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\mathbf{1}_{A_n} - f| d\mu = 0. \tag{C.1}$$

1. Préliminaire : Soit $M > 0$. Montrer l'inégalité de Markov :
$$\mu\left(\{x \in \Omega : |f(x)| \geq M)\}\right) \leq \frac{1}{M}\int_\Omega |f| d\mu. \tag{C.2}$$
2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \{x \in \Omega : |f(x| \geq 2\} \subset \{x \in \Omega : |\mathbf{1}_{A_n}(x) - f(x)| \geq 1\}$, et en déduire que $|f| \leq 2\ \ \mu - p.p.$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\mathbf{1}_{A_n} - f^2| d\mu = 0$.
4. En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $f = \mathbf{1}_A\ \ \mu - p.p.$.
5. On rappelle la notation $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ (différence symétrique). On suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \Delta A) < +\infty$. On note $C = \displaystyle\bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n}(\Omega\setminus(A_k\Delta A))$. Montrer que $\mu(\Omega\setminus C) = 0$. En déduire que la suite $(\mathbf{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque-partout vers $\mathbf{1}_A$.

Exercice 2

Soit $L : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, L(x) = \int_\mathbb{R} \frac{e^{xt}}{\operatorname{ch} t} d\lambda_t = 2\int_\mathbb{R} \frac{e^{xt}}{e^t + e^{-t}} d\lambda_t. \tag{C.3}$$

On note $J =]-1,1[$.

1. Montrer si $x \in J$, alors $L(x) < +\infty$, et donner la valeur de L en dehors de J.
2. Montrer que la fonction L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, et exprimer L' sous forme intégrale. *(Indication : on pourra travailler sur $[-a, a]$ avec un réel a vérifiant $0 < a < 1$.)*
3. Montrer que la fonction L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J, et exprimer L'' sous forme intégrale.
4. En déduire que les fonctions L et $\ln L$ sont convexes sur J. *(Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz.)*

Exercice 3

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}_+, x \mapsto f(x) = e^{-x \ln x}$.

1. Montrer que f est Lebesgue-intégrable sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{[0,1]} f d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1]} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} \lambda(dx)$.
3. On note $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I_{m,n} = \displaystyle\int_{[0,1]} x^n (\ln x)^m \lambda(dx)$. Montrer que
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I_{m,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$
(Indication : on pourra faire une récurrence sur m.)
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 4

Soit μ une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ (μ n'est pas nécessairement la mesure de Lebesgue). On pose pour $t \geq 0, F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} \mu(dx)$. On note $I = \{t \in \mathbb{R}_+ : F(t) < +\infty\}$.

1. Donner un exemple de mesure pour laquelle $I = \emptyset$.
2. Déterminer I dans le cas particulier où μ est une mesure finie.
3. On suppose dorénavant μ quelconque et I non vide. Montrer que si $a \in I$, alors $[a, +\infty[\subset I$.
4. Montrer que F est décroissante.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} F(t) = \mu(\mathbb{R}_+)$.
6. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = \mu(\{0\})$.
7. On note $A = \inf I$. Montrer que F est continue sur $]A, +\infty[$.
8. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit intégrable sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ pour la mesure de Lebesgue λ.
9. Montrer que si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et si $0 < s \leq t$, alors $F(t) \leq F(ps)^{\frac{1}{p}} F(q(t-s))^{\frac{1}{q}}$.

Exercice 5

Soit a_n le terme général d'une série absolument convergente. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(1+\frac{b_n}{p}\right)^p$.

C.4 Examen du 17 août 2012

Durée : 2h30. Calculatrices et documents interdits. Cet examen comporte trois exercices énoncés sur deux pages. Précision et clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. Il est toujours possible d'admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.
Barème approximatif : 3 pts - 5 pts - 12 pts.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[}\frac{1-\cos^n(x)}{1+x^2}\lambda(dx)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

Exercice 2

1. Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\nu)$ où $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et ν la mesure de comptage.
   (a) Caractériser l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ une fonction à valeurs réelles positives. Montrer que
   $$\int_{\mathbb{N}} f d\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(k). \tag{C.4}$$
   (Indication : on pourra par exemple considérer la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, f_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbf{1}_{\{k\}}$.)
   (c) Enoncer le théorème de Tonelli-Fubini pour des fonctions définies sur l'espace mesuré produit $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N}),\nu\otimes\nu)$.
   (d) En déduire que pour toute suite "double" $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de réels positifs,
   $$\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n}. \tag{C.5}$$
2. Application : Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures définies sur $(\Omega,\mathcal{T})$. Montrer que $\mu=\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu_k$ est une mesure sur $(\Omega,\mathcal{T})$.

Exercice 3

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}_+$ et λ la mesure de Lebesgue. On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions réelles Lebesgue-intégrables sur cet espace. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$L^f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} f(x) d\lambda_x. \tag{C.6}$$

1. (a) Vérifier que la fonction $t \mapsto L^f(t)$ est bien définie en tout point de $\mathbb{R}_+$ et que

$$L^f(0) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\lambda_x. \tag{C.7}$$

   (b) Montrer que L^f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) Montrer que $\lim_{t\to+\infty} L^f(t) = 0$. *(Indication : on pourra par exemple considérer une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs de limite $+\infty$.)*

2. Dans cette question, on suppose que $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = xf(x)$ est une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

   (a) Montrer que L^f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée continue donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \left(L^f\right)'(t) = -L^g(t). \tag{C.8}$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} L^g(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\lambda_x$.

   (c) Montrer que si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{x} d\lambda_x < +\infty$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} L^f(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{x} d\lambda_x$.

3. Dans cette question, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x)\sin(x)$.

   (a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, L^{f_n}(t) = \frac{1 - e^{-nt}(\cos(n) + t\sin(n))}{1+t^2}. \tag{C.9}$$

   (Indication : remarquer que $L^{f_n}(t) = \mathfrak{Im}\left(\int_0^n e^{x(i-t)}dx\right)$, où $\mathfrak{Im}$ désigne la partie imaginaire d'un complexe, et i le complexe tel que $i^2 = -1$.)

   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \left|e^{-nt}(\cos(n) + t\sin(n)\right| \leq e^{-(n-1)t} \leq 1. \tag{C.10}$$

   (c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \left|L^{f_n}(t)\right| \leq \dfrac{2}{1+t^2}$.

   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} L^{f_n}(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

   (e) Montrer en utilisant ce qui précède et le résultat de la question 2.c que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{C.11}$$

C.5 Examen du 3 avril 2013

Durée : 2h30. Calculatrices et documents interdits. Cet examen comporte 5 exercices. La rédaction doit être rigoureuse et soignée.
Barème approximatif : 2 pts - 4 pts - 7 pts - 3 pts - 4 pts.

Notations : On utilise les notations usuelles suivantes :
- $\mathcal{C}^1$ désigne la classe des fonctions réelles continûment dérivables ;
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-1,1]$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)\,dt$. Montrer que la fonction $x \mapsto F(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2

1. Soit un réel α strictement positif.
   (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ est absolument convergente.
   (b) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,dt$ est convergente (on justifiera soigneusement les calculs).
2. Soit un réel β positif ou nul. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre β pour que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\beta}}\,dt$ soit convergente.

Exercice 3

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement Riemann-intégrable sur $\mathbb{R}$, T-périodique. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. On veut montrer dans cet exercice que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\,dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt\right)\int_a^b f(t)\,dt. \qquad (*)$$

1. Transformation du problème et préliminaires.
   (a) Montrer qu'il existe une constante K à déterminer telle que $(*)$ soit équivalente à
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\psi(nt)\,dt = 0, \qquad (**)$$
   où l'on a posé $\psi = \varphi - K$.
   (b) Montrer que ψ est bornée sur $[0,T]$, et en déduire qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} \psi(t)\,dt = 0$.

2. Dans cette question, on suppose que $f = \mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}$, i.e. f est la fonction indicatrice d'un segment $[\alpha, \beta]$ fixé inclus dans $[a, b]$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $p = \max\{k \in \mathbb{N} : n\alpha + kT \leq n\beta\}$. Montrer que
   $$\int_a^b f(t)\psi(nt)\,dt = \frac{1}{n}\int_{n\alpha+pT}^{n\beta} \psi(t)\,dt.$$
   (b) En déduire que $\left|\int_a^b f(t)\psi(nt)\,dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_0^T |\psi(t)|\,dt.$
   (c) En déduire $(**)$ dans le cas $f = \mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}$.
3. On suppose maintenant que f est une fonction en escalier. En utilisant le résultat précédent, montrer $(**)$ dans ce cas.
4. On revient enfin au cas général et on suppose f seulement Riemann-intégrable.
   (a) Rappeler la définition de la Riemann-intégrabilité de f.
   (b) En utilisant les résultats précédents, montrer $(**)$.
   (c) De quel résultat connu ce que nous venons de démontrer est-il une généralisation ?

Exercice 4

Dans cet exercice, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble $\{-a : a \in A\}$. On définit la famille $\mathcal{A}$ de parties de $\mathbb{R}$ par $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *(Indication : considérer l'image réciproque par f d'un singleton de $\mathbb{R}$.)*

Exercice 5

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable.

1. On suppose $\mu(\Omega) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq n\}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T}$.
   (b) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.
   (c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) > 0$.
   (d) En déduire qu'il existe une partie $A \in \mathcal{T}$ telle que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.
2. En reproduisant le schéma de la question précédente, montrer que si l'on suppose $\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > 0\}) > 0$, alors il existe une partie $B \in \mathcal{T}$ telle que $\mu(B) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur B par une constante strictement positive.

C.6 Examen du 6 mai 2013

Durée : 2h30. Calculatrices et documents interdits. Cet examen comporte 4 exercices. La rédaction doit être rigoureuse et soignée. Les calculs doivent être justifiés, et l'utilisation d'un résultat du cours suppose d'en vérifier toutes les hypothèses.
Barème indicatif : 1.5 pts - 4.5 pts - 6 pts - 8 pts.

Exercice 1

On se place sur $\Omega = [0,3]$.

1. Déterminer la tribu engendrée par la famille de parties $\mathcal{A} = \{[0,1[\}$.
2. Déterminer la tribu engendrée par la famille de parties $\mathcal{B} = \{[0,1[, [2,3]\}$.

Exercice 2

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq e^{-x}$.
3. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} x^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Exercice 3

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $\lambda \otimes \lambda$ la mesure produit sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\alpha > 2$. On pose :

$$I = \int_{]1,+\infty[^2} (x+y)^{-\alpha} \; \lambda \otimes \lambda(dx, dy). \tag{C.12}$$

1. Calculer I en utilisant directement le théorème de Tonelli-Fubini.
2. Calculer I en utilisant d'abord le changement de variable $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.

Exercice 4

Notations : $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de l'espace Ω et $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de la partie A.
Formulaire : Il a été établi en cours que sur l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ où ν est la mesure de comptage (cardinal), pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive, $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f \, d\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$.

On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour tout réel $L > 0$, on définit l'application $\mu_L : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}, \;\; \mu_L(A) = \sum_{k\in A} L^k.$$

1. Montrer que pour tout réel $L > 0$, μ_L est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
2. μ_1 est une mesure usuelle vue en cours, laquelle ?
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de L pour lesquelles μ_L est une mesure finie.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs de L pour lesquelles μ_L est une mesure de probabilité (i.e. vérifie $\mu_L(\mathbb{N}) = 1$).

5. On pose pour tout entier naturel n : $A_n = \mathbb{N} \cap [n, +\infty[$. Calculer $\mu_L(\mathbb{N} \setminus A_n)$ puis $\mu_L(A_n)$ pour tous réels $L > 0$ et entiers $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs. On suppose que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L^* \in]0, +\infty[$.
   Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion) de parties de $\mathbb{N}$. On pose $B^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
   Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ par $f_n(k) = (L_n)^k \mathbf{1}_{B_n}(k)$.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
   (c) Montrer que $\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu_1 = \mu_{L_n}(B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Calculer $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_1$.
   (e) Déduire des questions précédentes que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \mu_{L_n}(B_n) = \mu_{L^*}(B^*).$$
   (f) Pour quelles suites $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce résultat est-il un résultat du cours ?

C.7 Examen du 27 juin 2013

Durée : 2h30. Calculatrices et documents interdits. Cet examen comporte 4 exercices. La rédaction doit être rigoureuse et soignée. Les calculs doivent être justifiés, et l'utilisation d'un résultat du cours suppose d'en vérifier toutes les hypothèses.
Barème indicatif : 2 pts - 4 pts - 4 pts - 10 pts.

Exercice 1

On se place sur $\Omega = \mathbb{R}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, valant 1 sur $[0, +\infty[$ et 0 partout ailleurs. Déterminer la plus petite tribu $\mathcal{T}$ rendant la fonction f mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer la tribu engendrée par la famille de parties $\mathcal{A} = \left\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\right\}$.

Exercice 2

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \; f_n(x) = \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{(1+x)^3}. \tag{C.13}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\sin(x)| \leq x$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f à préciser.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\lambda$ (on pourra laisser le résultat sous forme intégrale).

Exercice 3

Soit la fonction $F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, F(t) = \ln\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right). \tag{C.14}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\cos t}\, dt = F(x)$.
2. Soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé. On pose $A = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times]0, \alpha[: 0 < \rho < \frac{1}{\cos\theta}\right\}$.
   Montrer que $\displaystyle\int_A \rho\cos\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{F(\alpha)}{2}$.

Bibliographie

Nino Boccara. *Intégration*. Collection Mathématiques pour l'ingénieur. Ellipses, 1995.

Hakim Boumaza and Florent Schaffhauser. Partie Intégration et théorie de la mesure. In Jean-Pierre Marco, editor, *Mathématiques Analyse L3*. Pearson Education, 2009.

Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Collection Sciences Sup. Dunod, 2005.

Marc Briane and Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 3ème edition, 2004.

Henri Buchwalter. *Le calcul intégral*. Ellipses, 1991.

Jacques Faraut. *Calcul intégral*. Collection Enseignement Sup Mathématiques. EDP Sciences, 2006.

Denis Monasse. *Mathématiques - Cours Complet MP et MP**. Vuibert, 1998.

Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Collection Sciences Sup. Dunod, 3ème edition, 1998.