Chapitre I

Equations de la physique mathématique

I.1 Classification des équations

I.1.1 Notions générales

La relation reliant des variables indépendantes d'une fonction inconnue et ses dérivées partielles s'appelle équation aux dérivées partielles :

$$\varphi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0\ ,$$

la fonction *u(x,y)* est continue dans un domaine D, ainsi que ses dérivées. En transformant cette équation en identité, elle s'appelle la solution régulière ou classique de cette équation. On va considérer l'équation de deuxième ordre suivante :

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathrm{B}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{F}\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y},\right) = 0;$$

Cette équation est quasi-linaire si A, B, C dépendent de x, y, u, u_x, u_y et linéaire si A, B, C dépendent seulement de x et y avec F- est une fonction linéaire par rapport à u, u_x, u_y.

Soit l'équation linéaire de deuxième ordre sous sa forme générale :

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathrm{B}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{D}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{F}u = g,$$

où A, B, C,…, F, g- des fonctions de x et y. L'équation est linéaire et non homogène si $g(x,y) \not\equiv 0$ et linéaire homogène si $g(x,y) \equiv 0$

I.1.2 Equation linéaire homogène de premier ordre

Soient n variables indépendantes $x=(x_1,\dots x_n)$. Considérons l'équation linéaire homogène aux dérivées partielles de premier ordre :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0 \qquad (\mathrm{I}.1)$$

Admettons que $X_k(x_1, \dots, x_n)$ est continue, différentiable dans le domaine D de l'espace E_n, alors :

$$X_k(x) \in C^1(D), DC\ E_n$$

Le système d'équations différentielles ordinaires est :

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt \qquad (\mathrm{I}.2)$$

On appelle

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t) \qquad (I.3)$$

la solution (courbe intégrale) du système (I.2). Si la fonction $\psi(x_1, \dots, x_n)$ est constante

$$\psi\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \equiv C$$

sur chaque courbe intégrale du système (I.2), alors l'équation $\psi(x_1, \dots, x_n) = C_1$ est la première intégrale de ce système.

<u>**Théorème**</u>**.** La fonction $\omega = \psi(x_i, \dots, x_n)$ sera la solution de l'équation linéaire homogène aux dérivées partielles si et seulement si $\psi(x_i, \dots, x_n) = C$ est l'intégrale des équations différentielles ordinaires du système correspondant.

Démonstration.

La fonction $\omega = \psi(x_i, \dots, x_n)$ est la solution de l'équation (I.1) signifie que :

$$\sum_1^n \frac{\partial\psi}{\partial x_k} X_k \equiv 0.$$

Par ailleurs, la fonction ψ dépend seulement de t :

$$\psi\big(x_1(t), x_2(t) \dots, x_n(t)\big) \equiv \psi(t)$$

par conséquent

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{dt} \;;$$

mais $x_k = x_k(t),\ k = 1, 2, \dots, n$ - solution du système (I.2), d'où

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial\psi}{\partial x_k} X_k \equiv 0 \Longrightarrow \psi\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \equiv C.$$

Si $\psi(x_1, \dots, x_n) = C$- la première intégrale du système (I.2) ; sur la courbe intégrale $x_k = x_k(t), k = 1, \dots, n$, on a $\psi\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \equiv C,$

par conséquent

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} \equiv 0.$$

mais $x_k = x_k(t), k = 1, \dots, n$ - la solution du système (I.2), ce qui signifie

$$x_k(t) \equiv X_k \Longrightarrow \sum_1^n \frac{\partial\psi}{\partial x_k} X_k \equiv 0.$$

c'est-à-dire que $\omega = \psi(x_1, \dots, x_n)$ – est la solution de (I.1)

I.1.3 Types d'équations de second ordre

Les courbes de deuxième ordre

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

sont de trois types (hyperbolique, parabolique et elliptique) selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Ainsi, pour une équation de type :

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = g \qquad \text{(I.4)}$$

qui au point (*x*, *y*) sera hyperbolique si $\Delta(x, y) = B^2 - 4\,Ac > 0$, parabolique si $\Delta(x, y) = 0$ et elliptique si $\Delta(x, y) < 0$

Si les coefficients *A*, *B*, *C* de (I.4) dans le domaine *D* sont constants, Δ (*x*, *y*) = const et le type d'équation sera le même à tous les points du domaine.

Si Δ dépend de (*x*, *y*), on pourra avoir Δ (*x*, *y*) > 0 et l'équation sera hyperbolique, alors que dans l'autre partie $\Delta(x, y) < 0$ —elle sera elliptique et sur la courbe Δ (*x*, *y*) = 0, se produit une dégénération du type d'équation. Alors, la courbe Δ (*x*, *y*) = 0 s'appelle *ligne de dégénérescence parabolique.*

Ainsi, l'équation

$$yu_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = g$$

a le descriminant $\Delta = B^2 - 4Ac = 1 - 3y$, c'est-à-dire que l'équation sera de type hyperbolique si 1–3y > 0, elliptique si 1–3y < 0 et sur la ligne (1-3y) se produira une dégénérescence du type parabolique.

Dans le cas de n variables indépendantes (n>2) :$x_1, \dots, x_n$, la forme générale de l'équation quasi-linéaire est :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f\,; \qquad \text{(I.5)}$$

ici a_{ij}, b_j, c, f- sont fonctions de $x_1, \dots, x_n$.
Au point fixe $(x_1, \dots, x_n)$ soit la forme quadratique :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \qquad \text{(I.6)}$$

On peut passer, à l'aide de la transformation linéaire de (I.6), à la forme canonique : $\sum_{1}^{n} \delta_j \tau_j^2$, où $\delta_j = +1, -1, 0$. L'équation (I.5) sera alors de type elliptique au point $(x_1, \dots, x_n)$ si $\delta_j = 1$, *j*=1, … , *n* , hyperbolique si $\delta_j = 1$ pour *j* = 1, … , *m* < *n* et $\delta_j = -1$ pour *j* = *m*+*1*, … ,*n* et parabolique si au moins un des coefficients $\delta_j = 0$.

I.2 Transformations des équations de deuxième ordre

I.2.1 Invariance du type d'équation

Soit dans le domaine D, l'équation

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad \text{(I. 7)}$$

qui est linaire par rapport aux dérivées d'ordre supérieur. Admettons, que les coefficients A, B, C sont continus dans le domaine D et montrons que le type d'équation est invariant par rapport à la transformation des variables indépendantes.

Introduisons de nouvelles variables :

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y). \qquad \text{(I. 8)}$$

Admettons que (I.8) est résolvable aux alentours du point $(x, y) \in D$, ce qui signifie que :

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x > \xi_y \\ \eta_x > \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{(I. 9)}$$

Si $u = u(\xi, \eta)$ est composée, alors :

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \text{ ; } u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}; \qquad \text{(I. 10)}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}u_x u_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy};$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

En remplaçant les dérivées dans (I.7), on peut écrire :

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad \text{(I. 11)}$$

où

$$A_1 = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2;$$

$$B_1 = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\xi_y; \qquad \text{(I. 12)}$$

$$C_1 = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

En calculant le discriminant Δ de (I.11) :

$$\Delta_1(\xi, \eta) \equiv B_1^2 - A_1C_1 = (A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y)^2 -$$

$$-(A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2)(A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2) =$$

$$= A^2\left(\xi_x^2\eta_y^2 - \xi_x^2\eta_y^2\right) + B^2\left(\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right)^2 - u\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y\right) +$$

$$+C^2\left(\xi_y^2\eta_y^2 - \xi_y^2\eta_y^2\right) + AB\left(2\xi_x\eta_x\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) - 2\xi_x^2\eta_x\eta_y - 2\xi_x\xi_y\eta_x^2\right) +$$

$$+BC\ \left(2\xi_y\eta_y\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) - \xi_x\xi_y\eta_y^2 - \xi_y^2\eta_x\eta_y\right) + AC\left(2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - \xi_x^2\eta_y^2 - \xi_y^2\eta_x^2\right) =$$

$$= (B^2 - AC)\left(\xi_x^2\eta_y^2 + \xi_y^2\eta_x^2 - 2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y\right) = (B^2 - AC)\left(\xi_x\xi_y - \xi_y\xi_x\right)^2.$$

Alors :

$$B_1^2 - A_1C_1 = (B^2 - AC)\left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^2 \Leftrightarrow \Delta_1 = \Delta.\left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^2. \qquad (\mathrm{I}.13)$$

Donc, si A, B, C sont continus aux alentours du point (x, y), alors que la transformation (I.8) n'est pas dégénérée, donc les signes des discriminants Δ et Δ_1 aux alentours correspondant aux points (x, y) et (ξ, η) sont les mêmes et par conséquent le type d'équation est conservé.

I.2.2 Forme canonique

On peut choisir les fonctions $\xi(x,y), \eta(x,y)$ de façon à simplifier l'équation aux dérivées partielles. Alors, choisissons $\xi(x,y), \eta(x,y)$ pour que dans l'équation (I.11) les coefficients soient nuls pour $u_{\xi\xi}$, $u_{\eta\eta}$:

$$A_1 \equiv A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0;$$
$$C_1 \equiv A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0,$$

c'est-à-dire que les fonctions ξ, η soient des solutions de :

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 0. \qquad (\mathrm{I}.14)$$

L'équation différentielle ordinaire

$$Ady^2 + 2Bdy\,dx + Cdx^2 = 0, \qquad (\mathrm{I}.15)$$

correspondant à (I.14) est la caractéristique et ses intégrales sont les équations caractéristiques aux drivées partielles (I.7). Supposons que A≠0 et résolvons (I.15) par rapport à y' :

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A};\ y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \qquad (\mathrm{I}.16)$$

Considérons trois cas :

<u>Type hyperbolique</u>. Le discriminant $\Delta(x,y) = B^2 - AC > 0$. Les parties droites de (I.16) sont différentes, d'où les intégrales :

$$\varphi(x,y) = C\,;\ \ \psi(x,y) = C \qquad (\mathrm{I}.17)$$

de ces équations qui sont indépendantes. Posons les nouvelles variables indépendantes suivantes :

$$\xi = \varphi(x,y) \ ; \ \eta = \psi(x,y)$$

Alors, on peut écrire les caractéristiques (I.17) de l'équation (I.7) sous la forme :

$$2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

En divisant l'équation par $2B_1$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad \text{(I.18)}$$

qui est la première forme canonique de l'équation hyperbolique.

Si on pose :

$$\xi_1 = \xi + \eta \ \ ; \eta_1 = \xi - \eta \, ,$$

alors, l'équation (I.18) sous la deuxième forme canonique de l'équation hyperbolique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2} + F_2\left(\xi, \eta_1, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right) = 0 \, . \qquad \text{(I.19)}$$

Type elliptique. Le discriminant $\Delta(x,y) = B^2 - AC < 0$, les parties à droite de l'équation (I.16) sont complexes et conjuguées, c'est pourquoi :

$$\varphi(x,y) \equiv \alpha(x,y) + i\beta(x,y) = C \, ; \ \ \psi(x,y) = C \ \equiv \alpha(x,y) - i\beta(x,y) = C$$

qui sera complexe et conjuguée.

Si l'on passe à de nouvelles variables :

$$\xi = \varphi(x,y) \ ; \ \eta = \psi(x,y) \, ,$$

alors, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \qquad \text{(I.20)}$$

où ξ et η sont des variables complexes. Si l'on passe à de nouvelles variables

$$\xi_1 = \frac{\xi + \eta}{2} = \alpha(x,y); \ \eta_1 = \frac{\xi - \eta}{2i} = \beta(x,y)$$

alors,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right) \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}$$

et l'équation (I.20) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2} + F_3\left(\xi_1, \eta_1, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right) = 0 \,. \tag{I.21}$$

qui est la forme canonique de l'équation elliptique.

<u>Type parabolique</u>. Le discriminant $\Delta(x,y) = B^2 - 4AC = 0$ et on a un ensemble de caractéristiques $\varphi(x,y) = C$. En introduisant de nouvelles variables, alors :

$$\xi = \varphi(x,y) \ ; \ \eta = \psi(x,y) \,,$$

où $\varphi(x,y)$- les caractéristiques de l'équation (I.7) et $\psi(x,y)$ une fonction différentielle quelconque ne dependant pas de $\varphi(x,y)$.

La fonction $\omega = \varphi(x,y)$ est la solution de (I.14), d'où :

$$A_1 \equiv A\,\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_x^2 \equiv 0.$$

Le type d'équations ne change pas pendant la transformation et par conséquent, $\Delta_1 = B_1^2 - A_1C_1 = 0$. Cependant, $A_1 \equiv 0$, signifie que $B_1 \equiv 0$

Montrons, que $C \neq 0$ aux alentours du point (x, y). Admettons l'inverse, soit

$$C_1 = A\,\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_x^2 = 0 \,.$$

A condition que les coefficients A, B, C ne s'annulent pas en même temps, c'est pourquoi si l'on pose $A = 0$, $C = 0$, alors de $\Delta = B^2 - AC = 0 \Rightarrow B = 0$, $A = B = C = 0$, donc on a soit $A \neq 0$ soit $C \neq 0$.

Si $A > 0$ aux alentours du point (x, y), alors de $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow C \geq 0$ et on peut écrire $B = \sqrt{A}\,\sqrt{C}$. Alors,

$$C_1 = \sqrt{A}\,\psi_x^2 + 2\sqrt{A}\,\psi_x \,.\sqrt{C}\,\psi_y + \left(\sqrt{C}\,\psi_y\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{A}\,\psi_x + \sqrt{C}\,\psi_y\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}.$$

Analogiquement, de $A_1 = A\,\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_x^2 \equiv 0$, on trouve

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \Rightarrow \frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \Rightarrow \psi_x\varphi_y - \varphi_y\psi_x = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = 0 \,,$$

Par conséquent, $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ sont dépendantes, ce qui contredit la condition de choix de la fonction $\varphi(x,y)$ et signifie, que $C_1 \neq 0$ aux alentours du point (x, y). Donc, on obtient enfin $A_1 \equiv B_1 \equiv 0$, $C_1 \neq 0$, et la transformation de l'équation (I.7), après division par C_1, s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \,. \tag{I.22}$$

qui s'appelle la forme canonique de l'équation parabolique.

Donc, l'équation hyperbolique $(\Delta(x, y) > 0)$ a deux familles de caractéristiques indépendantes $\varphi(x, y) = C$, $\psi(x, y) = C$.

L'équation elliptique $(\Delta(x, y) < 0)$ ne possède pas de caractéristiques. Si l'on passe à de nouvelles variables $\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = C$, alors l'équation se transformera sous la forme canonique.

L'équation parabolique (Δ (x, y) = 0) a une seule famille de caractéristiques $\varphi(x, y) = C$. Si l'on passe à de nouvelles variables $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, où ψ ne dépend pas de φ, alors, l'équation se transformera sous la forme canonique.

Si l'on a plus de deux variables indépendantes, on peut transformer chaque point de l'équation sous la forme canonique, et donc on a :

le type hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + F\left(x_1, \dots, x_n, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} ; \frac{\partial u}{\partial t}\right) ;$$

le type parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + F\left(x_1, \dots, x_n, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) ;$$

le type elliptique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 .$$

Afin de simplifier davantage l'équation, on peut introduire une nouvelle fonction inconnue. Soit l'équation hyperbolique linéaire sous la forme canonique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = F(x, y) \qquad (\mathrm{I}.23)$$

On admet dans le domaine D, que les coefficients a, f, $c \in C'(D)$ sont continus et différentiables. Introduisons une nouvelle fonction v (x, y) :

$$u = \omega(x, y)v , \qquad (\mathrm{I}.24)$$

où $\omega(x, y)$ restent pour le moment quelconques. De (I.24), on trouve

$$u_x \; \omega_x \; v + \omega \; v_x \; ; \quad u_y \; \omega_y \; v + \omega \; v_y \; ;$$

$$u_{xy} \; \omega_{xy} \; v + \omega_x v_y + \omega_y v_x + \omega \; v_{xy} \; ;$$

En substituant les dérivées dans (I.123), on a :

$$\omega \; v_{xy} + a_1 \; v_x + b_1 \; v_y + c_1 \; v = F , \qquad (\mathrm{I}.25)$$

où

$$a_1 \equiv \omega_y + a\omega; \quad b_1\ \omega_x + b\omega\ ;$$

$$C_1 \equiv \omega_{xy} + a\omega_x; \quad b\omega_y + C\omega$$

$\omega(x,y)$ étant arbitraires, on peut annuler un des coefficients dans (I.25), et par conséquent simplifier davantage l'équation.

Théorème 1. La forme canonique de l'équation hyperbolique peut s'écrire, en posant $u = \omega v$, sous la forme :

$$v_{xy} + C_2\, v = F \tag{I.26}$$

si et seulement si $a_x = b_y$

Démonstration.

Soit l'équation (I.23) transformée sous forme de (I.26), alors :

$$a_1 \equiv \omega_y + a\omega = 0\ ; \qquad b_1 \equiv \omega_x + b\omega = 0 \tag{I.27}$$

En différentiant a_1 par rapport à x et b_1 par rapport à y, on a :

$$\omega_{xy} + a_x\omega + a\omega_x = 0\ ; \qquad \omega_{xy} + b_y\omega + b\omega_y = 0.$$

En remplaçant dans ces égalités ω_x, ω_y à partir de (I.27), on a :

$$\omega_{yx} + a_x\omega - ab\omega = 0\ ; \qquad \omega_{xy} + b_y\omega - Ca\omega = 0,$$

on obtient enfin $a_x = b_y$.

Soit $a_x = b_y$. La fonction $\omega(x,y)$ est choisie de sorte que dans (I.25) le coefficient :

$$a_1 \equiv \omega_y + a\omega = 0 \implies \ln\omega + \int_{y_0}^{y} a(x,y)dy = \alpha(x). \tag{I.28}$$

où $\alpha(x)$- une fonction quelconque

En différentiant (I.27) par rapport à x et en utilisant $a_x = b_y$, on obtient :

$$(\ln\omega)_x + \int_{y_0}^{y} a(x,y)dy = \alpha'(x) \implies (\ln\omega)_x + \int_{y_0}^{y} b_y(x,y)dy = \alpha'(x) \tag{I.29}$$
$$\Rightarrow (\ln\omega)_x + b(x,y) - b(x,y_0) = \alpha'(x).$$

Choisissons $\alpha(x)$ afin que

$$\alpha'(x) = -b(x,y_0) \Rightarrow \alpha(x) = -\int_{x_0}^{x} b(x,y_0)dx\ ;$$

Donc, de (I.29), on a :

$$(\ln \omega)_x + b(x, y) = 0 \Rightarrow b_1 \equiv \omega_x + b\omega \equiv 0.$$

En remplaçant $\alpha(x)$ dans (I.28), on a

$$\omega(x, y) = e^{-\int_{x_0}^{x} b(x,y_0)dx - \int_{y_0}^{y} a(x,y_0)dy} \qquad (\mathrm{I}.30)$$

Alors, les coefficients seront $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, c'est-à-dire que l'équation (I.23) se ramène à la forme (I.26).

Conséquence.

Si les coefficients de l'équation

$$u_{xy} + au_x + bu_y + Cu = F$$

satisfont les conditions

$$a_x = b_y \ ; \quad C = a_x + ab \, ,$$

alors, on peut écrire $v_{xy} = F$.

Démonstration.

En prenant $\omega(x, y)$ selon la formule (I.30), on aura :

$$a_1 = \omega_y += 0 \, ; \;\; b_1 = \omega_x + b\omega = 0$$

d'où

$$C_1 = \omega_{xy} + a\omega_x + b\omega_y + c\omega =$$

$$= \left(\left(\omega_y + a\omega\right)_x - a_x\omega\right) + b(-a\omega) + c\omega =$$

$$= \left(\omega_y + a\omega\right)_x - (a_x\omega + ab - C)\omega \Rightarrow c_1 = 0.$$

Ainsi, on suit la même procédure pour l'équation elliptique

$$u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y cu = F$$

Théorème 2. L'équation canonique de type elliptique, en posant $u = \omega(x, y)v$, peut s'écrire, sous la forme :

$$v_{xy} + v_{yy} + c_2 \, v = F$$

si et seulement si $a_y = b_x$. Si l'on pose $c = a_x = b_y$, alors on peut écrire aussi l'équation sous la forme $v_{xy} + v_{yy} = F$.

Si les coefficients sont constants dans l'équation de deuxième ordre donnée sous forme canonique, alors la condition $a_x = b_y$ est accomplie. En introduisant une nouvelle fonction $u = e^{\lambda x + \mu y . v}$, où λ et μ sont constantes, alors :

$$v_{xy} + c_1 v = F; \qquad v_{xx} + v_{yy} + c_1 v = F; \qquad v_{yy} + cb_1 v_x = F$$

En introduisant de nouvelles variables indépendantes :

$\xi = c_1 x\,, \eta = y$ - hyperbolique
$\xi = \sqrt{c_1}x\,, \eta = \sqrt{c}\,, y$ - elliptique
$\xi = x\,, \eta = \sqrt{b_1}\,, y$ - parabolique

on aura les coefficients $a_1\,, t_1$ égaux à un.

I.2.3 Solution générale

La solution générale d'une équation différentielle ordinaire de deuxième ordre dépend de deux constantes arbitraires. La notion de solution générale pour une équation aux dérivées partielles peut se ramener à une solution dépendant de deux fonctions arbitraires.

Exemple. Trouver la solution générale de :

$$yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} = 0.$$

Solution.

Transformons cette équation sous la forme canonique

$$\Delta(x,y) = B^2 - AC = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad ;$$

Si $x + y \neq 0$, l'équation sera hyperbolique et si $x + y = 0$, elle sera paraboliquement dégénérée.
L'équation caractéristique est :

$$ydy^2 - (x-y)dydx - xdx^2 = 0 \Rightarrow y' = \frac{(x-y) \pm (x+y)}{2y}$$

En intégrant pour $x + y \neq 0$, on a

$$x + y = C\,; \quad x^2 - y^2 = C$$

ce qui représente une famille de droites et une famille d'hyperboles.

En introduisant les variables caractéristiques $\xi = x + y\,, \eta = x^2 - y^2$, on trouve

$$u_x = u_\xi + u_\eta\,.2x\,; \quad u_y = u_\xi + u_\eta\,.2y\,;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\,.\ u_x + u_{\eta\eta}\,.ux^2 + 2u_\eta\,; \ u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\,(-uy) + u_{\eta\eta}\,.uy^2 - 2u_\eta\,;$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\,(-2y + 2x) + u_{\eta\eta}\,(-uxy).$$

En substituant les dérivées dans l'équation de départ, on a :

$$2(x+y)^2\, u_{\xi\eta}\, 2(x+y)u_\eta = 0\,,$$

En simplifiant par $2(x+y)$, on a l'équation aux variables caractéristiques :

$$\xi u_{\xi\eta} + u_\eta = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + u\right) = 0$$

En considérant le facteur entre parenthèse comme une nouvelle fonction inconnue, en intégrant suivant η, on trouve :

$$\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + u = \alpha_1(\xi)$$

où $\alpha_1(\xi)$ est une fonction arbitraire de ξ. L'équation trouvée peut être considérée comme une fonction différentielle linéaire ordinaire de premier ordre (ξ - une variable indépendante, η- fixe). En l'intégrant, on a la solution générale:

$$u = \frac{\int \alpha_1(\xi)d\xi + \beta(\eta)}{\xi}$$

où $\beta(\eta)$ est arbitraire. Désignons par $\frac{\int \alpha_1(\xi)d\xi}{\xi} = \alpha(\xi)$ et revenons aux anciennes variables, on aura la solution générale de l'équation initiale :

$$u(x,y) = \alpha(x+y) + \frac{\beta(x^2-y^2)}{x+y}\ , x+y \neq 0\ ,$$

qui dépend de α et β.

I.3 Equations principales de la physique mathématique

Soit le point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans un espace multidimensionnel et soit t – le temps. $u(x, t)$ est la fonction cherchée. Les principales équations de la physique mathématique sont les :

- Equations d'oscillations

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\right) + q(x)u(x,t) = F(x,t),$$

avec $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$- les coefficients du milieu, $F(x,t)$- caractérise l'intensité de l'action (force) extérieure.

Si $\rho(x),\ p(x) \equiv \text{const},\ q(x) \equiv 0,$ alors $\frac{p}{\rho} = a^2,\ \frac{F(x,t)}{\rho} = f(x,t),$

et on obtient l'équation d'onde dans l'espace E_n:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) + f(x,t);$$

Introduisons l'opérateur de Laplace :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

l'équation d'onde devient alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,t).$$

Les processus d'oscillations sont décrits par l'équation hyperbolique.

- Equation de la chaleur

La conductibilité thermique et la diffusion sont exprimées par l'équation parabolique :

$$\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \right) - q(x)u(x,t) + F(x,t).$$

si, en particulier $\rho(x),\ p(x) = \text{const},\ q(x) = 0,$

alors, on aura :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t).$$

- Equations stationnaires

Si les processus décrits par l'équation d'oscillations ou de la chaleur ne dépendent pas du temps, c'est-à-dire s'ils sont stationnaires, alors on passe à l'équation de type elliptique suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) - q(x)u(x) = F(x)$$

et en particulier à l'équation de Poisson, si $p(x)$ = const, q (x) = 0,

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x);$$

Si l'action extérieure est absente $(f(x) \equiv 0),$ alors on obtient l'équation de Laplace :

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0,$$

- Equation de Helmholtz

Pour chaque équation de type elliptique, on cherche la solution de l'équation d'onde :

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

sous forme d'un produit $u(x,t) = \upsilon(x)T(t)$. Alors, en la remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\upsilon(x)T''(t) = T(t)\,a^2\Delta\upsilon(x);$$

En divisant par : $a^2\upsilon(x)T(t)$, on obtient l'égalité $\dfrac{\Delta\upsilon(x)}{\upsilon(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}$,

qui n'existera que si le rapport des termes constants situés à la partie gauche ne dépend pas de *t*, et celui de droite ne dépend pas de *x*. Si l'on égalise ces rapports à λ pour T (*t*) et υ (*x*), alors :

$$T''(t) - \lambda a^2\,T(t) = 0,$$

$$\Delta\upsilon(x) - \lambda\upsilon(x) = 0.$$

L'équation elliptique pour la détermination de υ (*x*) s'appelle équation de Helmoholtz.

Considérons maintenant la déduction d'équations et des conditions aux limites pour certains cas concrets.

Vibrations d'une corde

On considère les équations de vibrations transversales d'une corde fine, flexible et élastique.

Le principe de base est celui de d'Alembert : la force résultante, y compris les forces d'inerties agissant sur le système, est nulle.

Considérons que la corde, à la position d'équilibre, soit tendue selon l'axe *ox* et soit *u* (*x, t*) l'élongation d'un point de cette corde au temps *t*. *u* = *u* (*x, t*) est alors l'équation décrivant la forme de la corde à l'instant *t*.

Soient $\rho(x)$ la densité de la corde, *F* (*x, t*) - la densité des forces exterieures agissant suivant la direction $0x$, $F(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}$ - la densité des forces de résistance- proportionnelle à la vitesse u_t. Soient α l'angle d'inclinaison de la corde par rapport à $0x$ au point *x et ds* – la différentielle de la longueur de l'arc de la corde. Alors, approximativement, on a :

$$ds = \sqrt{1+u_x^2}\,dx = \left(1+\frac{1}{2}u_x^2+\dots\right)dx \approx dx \Rightarrow ds \approx dx;$$

$$tg\,\alpha(x) = u_x,\ \cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = 1-\frac{1}{2}u_x^2+\dots\approx 1;$$

$$\sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} = u_x\left(1-\frac{1}{2}u_x^2+\dots\right)\approx u_x;$$

ici, on décompose $\left(1+u_x^2\right)^{\pm\frac{1}{2}}$ en série de Taylor.

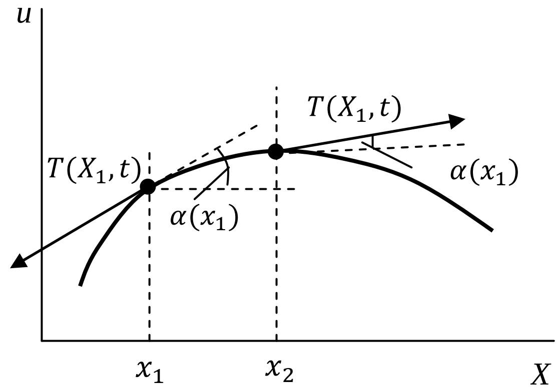

Fig I.1

Imaginons qu'une partie de la corde de projections (x_1, x_2) et de tensions correspondantes $T(x_1, t)$, $T(x_2, t)$ est dirigée tangentiellement par rapport à la corde. La longueur de cette partie considérée est :

$$S(x_1,x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x^2}\,dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1,$$

La projection sur *ox* de la force agissant sur le morceau (x_1, x_2), selon le principe de d'Alembert, est :

$$T(x_1)\cos(\pi-\alpha(x_1))+T(x_2)\cos\alpha(x_2)=0 \Rightarrow T(x_1)\cos\alpha(x_1)=T(x_2)\cos\alpha(x_2).$$

mais $\cos\alpha(x_1)\approx\cos\alpha(x_2)\approx 1$, alors, $T(x_1)\approx T(x_2)$, c'est-à-dire que la tension $T(x,t)\equiv T$ ne dépend pas de x. Ainsi, on a $T(x,t)\equiv T$, où T est la longueur du vecteur tension de la corde à l'état de repos.

La projection des forces de tension sur *ox* sera :

$$T\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha(x_1)\right)+T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha(x_2)\right)=T(-\sin\alpha(x_1)+\sin\alpha(x_2))\approx T(-u_x(x_1,t)+u_x(x_2,t))=$$
$$=\int_{x_1}^{x_2} Tu_{xx}(x,t)dx.$$

Les forces exterieures, les résistances et l'inertie agissent à travers *ox* et la projection de leur résultante sur *ox* sera alors :

$$\int_{x_1}^{x_2} Tu_{xx}dx+\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dx+\int_{x_1}^{x_2} -k(x)u_t dx+\int_{x_1}^{x_2} -\rho(x)u_{tt}dx=0,$$

En admettant, que la fonction sous intégrale est continue et si l'on applique le théorème de la moyenne et qu'on divise par (x_2 – x_1) et en passant par la suite à la limite $x_1 \to x,\ \ x_2 \to x,$ on obtiendra l'équation de vibrations de la corde sous forme de :

$$Tu_{xx} + F(x,t) - k(x)u_t - \rho(x)u_{tt} = 0. \tag{I.31}$$

Posons :

$$\frac{T}{\rho(x)} = a^2\ ;\ \frac{k(x)}{\rho(x)} = k_1\ ;\ \ \frac{F(x,t)}{\rho(x)} = f(x,t),$$

réécrivons l'équation de vibrations de la corde dans un milieu résistant :

$$u_{tt} + k_1 u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t). \tag{I.32}$$

Si, en particulier, k (x) = 0, on obtiendra l'équation d'onde dans un espace homogène E_1 pour un milieu non résistant :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{I.33}$$

avec $f(x,\ t)$ - la densité des forces externes par unité de masse de la corde, si $\rho(x) = const$, alors, $a^2 = const$.

L'équation d'onde homogène $\left(f(x,t) \equiv 0\right)$ dans E_1 :

$$u_{tt} = a^2\, u_{xx}\,. \tag{I.34}$$

décrit les vibrations libres de la corde.

Conditions aux limites

Le caractère de fixation des extrémités de la corde, c'est-à-dire les conditions aux limites, influe sur sa vibration, autrement dit, sur l'équation (1.32).

On considère, qu'un point d'une corde est fixé dans une direction ν, si ce point ne bouge pas dans la direction ν ou dans la direction inverse. Il est mou- si son déplacement est libre, et élastique- si le déplacement d'une variable μ dans cette direction produit dans le nœud de fixation une réaction :

$$R = -k_1\mu, \quad k_1 > 0.$$

Si $k_1 = \infty$, on a une fixation rigide, et si $k_1 = 0$, alors on a une fixation moue. On considère dans ce qui suit la fixation des extrémités $x = 0$, $x{=}l$ le long de l'axe ox - rigide.

Soit une partie de la corde $0 \le x \le x_1 \left(x_2 \le x \le l\right)$, contenant l'une de ses extrémités (fig.I.2). Cherchons les conditions d'ajustement des nœuds de fixation sur la vibration de la corde. La réaction dans un nœud de fixation est $R(0) = -k, u(0,t)$ (la réaction $R(l) = -k, u(l,t)$). La tension dans l'autre extrémité est T. La projection des forces agissant sur la partie $[0,x_1]$(sur la partie $[x_2,l]$) sera aux alentours du point x = 0 :

$$-k_1\,u(0,t)+T(x_1)\cos\left(T(x_1)\ \widehat{,}\ Ou\right)+\int_0^{x_1}F\,dx+\int_0^{x_1}-k\,u_t\,dx+\int_0^{x_1}-\rho\,u_{tt}\ =0\,;$$

Aux alentours du point $x = l$, elle sera :

$$-k_1u(l,t)+T(x_2)\cos\left(T(x_2)\ \widehat{,}\ Ou\right)+\int_{x_2}^{l}F\,dx+\int_{x_2}^{l}-k\,ut\,dx+\int_{x_2}^{l}-\rho\,u_{tt}\,dx=0.$$

Mais

$$(T(x_1)\ \widehat{,}\ Ou)=\frac{\pi}{2}-\alpha(x_1)\Rightarrow\cos\left(T(x_1)\ \widehat{,}\ Ou\right)=\sin\alpha(x_1)\approx u_x(x_1,t).$$

$$(T(x_2)\ \widehat{,}\ Ou)=\frac{\pi}{2}+\alpha(x_2)\Rightarrow\cos\left(T(x_2)\ \widehat{,}\ Ou\right)=-\sin\,\alpha(x_2)\approx -u_x(x_2,t).$$

En remplaçant dans cette égalité les cosinus et en passant à la limite $x_1\to 0$ pour $(x_2\to l)$, on obtient la condition aux limites au point $x = 0$ (au point $x = l$).

$$-k_1\,u\,(0,t)+T\,u_x\,(0,t)=0\,;$$

$$-k_1\,u\,(l,t)-T\,u_x\,(l,t)=0.$$

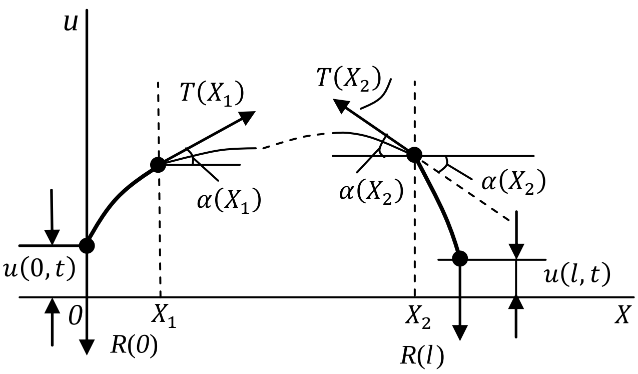

Fig.I.2

Conditions aux limites de premier type.

Posons $k_1=\infty$, on obtient les conditions de fixation rigide des extrémités :

$$u(0,t)=0\,;\quad u(l,t)=0. \tag{I.35}$$

Si les extrémités se déplacent suivant les lois de μ_1 (t), μ_2 (t), alors, les conditions aux limites seront :

$$u(0,t)=\mu_1(t);\qquad\qquad u(l,t)=\mu_2\,(t).$$

Conditions aux frontières de deuxième type

Posons $k_1 = 0$, nous trouvons les conditions d'une fixation moue (les extrémités sont libres suivant *ox*) :

$$u_x\,(0, t) = 0\,; \qquad u_x\,(l, t) = 0, \tag{I.36}$$

cela signifie géométriquement, que l'angle d'inclinaison de la corde par rapport à *ox* aux points de fixation est nul.

<u>Condition aux frontières de troisième type</u>

Les extrémités sont fixées élastiquement ($k_1 \neq 0$, $k_1 \neq \infty$). Désignons par : $\frac{k_1}{T} = h_1$, -pour l'extrémité gauche de la corde et $\frac{k_1}{T} = h_2$ -pour son extrémité droite. Alors, les conditions aux limites pour une fixation élastique sont :

$$u_x(0,t) - h_1\, u(0,t) = 0;\ u_x(l,t) + h_2\, u(l,t) = 0. \tag{I.37}$$

Ces trois conditions aux limites peuvent être écrites sous la forme :

$$\gamma_1\, u_x(o,t) + \delta_1 u(0,t) = \mu_1(t);\ \ \gamma_2\, u_x(l,t) + \delta_2\, u(l,t) = \mu_2\,(t),$$

où
$$\gamma_1,\ldots,\delta_2 = \text{const};\ \gamma_1^2 + \delta_1^2 \neq 0;\ \gamma_2^2 + \delta_2^2 \neq 0.$$

Vibrations d'une tige

L'équation d'onde dans E_1 :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t); \qquad a^2 = \frac{E}{\rho}.$$

décrit aussi des petites vibrations longitudinales d'une tige élastique. Ici nous avons $\rho -$ est la densité volumique de la tige, E – le module d'élasticité du matériau, $f(x, t)$ – la densité des forces exterieures, $u(x, t)$ – le déplacement suivant *ox*. Alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}$$

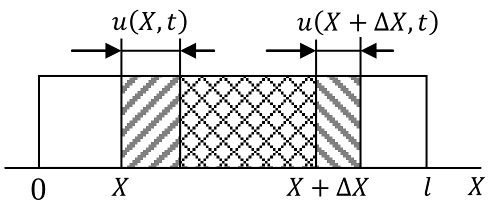

Fig.I.3

est le déplacement relatif au point x. Selon la loi de Hooke, la contrainte au point x est $\mathrm{T} = \mathrm{ES}\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}$, où E est le module d'Young, S - la section. Les conditions aux limites pour la tige de longueur l sont :

Pour les extrémités $x = 0$, $x = l$ fixées rigidement :

$$u(0,t) = 0; \qquad u(l,t) = 0,$$

Pour les extrémités libres :

$$u_x(0,t) = 0; \qquad u_x(l,t) = 0.$$

Si les extrémités $x = 0$, $x = l$ sont libres, alors les contraintes aux sections $x = 0$, $x = l$ sont nulles suivant la loi de Hooke. Pour les extrémités fixées élastiquement, on a :

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0; \;\; u_x(l,t) + h_2(l,t) = 0$$

Vibrations d'une membrane

Soit une membrane dans un état de contraintes nulles située dans un plan ox_1x_2, et soit $u(x_1, x_2, t)$ l'inclinaison du point (x_1, x_2) de la membrane de sa position d'équilibre. Les vibrations traversales faibles de la membrane sont décrites par l'équation d'onde non homogène dans E_2 (à deux variables géométriques) :

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + f(x_1, x_2, t); \; a^2 = \frac{T}{\rho}$$

où ρ – la densité superficielle de la membrane, T- la tension calculée par unité de longueur, $f(x_1, x_2, t)$ - la densité des forces externes agissant perpendiculairement par rapport à la position d'équilibre et calculée par unité de masse.

Vibrations d'un milieu tridimensionnel

L'équation d'onde non homogène dans E_3 est :

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) + f(x_1, x_2, x_3, t)$$

Elle décrit les petites vibrations élastiques des corps solides, les vibrations de gaz, du son, et les oscillations électromagnétiques.

Equation de la chaleur

Soit un corps de densité $\rho(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, de perméabilité thermique $c(x)$ et de conductibilité thermique interieure $k(x)$. On considère que le corps est isotrope. Soit $u(x,t)$ - la température au point x à l'instant t. Selon le principe de conservation de l'énergie et la loi de Fourier, la quantité de chaleur dQ passant pendant dt à travers la surface $d\sigma$ suivant le vecteur de la normale v est :

$$dQ = -k(x)\frac{\partial u}{\partial v}\, d\sigma\, dt, \quad k(x) \geq 0.$$

La quantité de chaleur passant suivant la direction *v* sera négative (ou positive) si la température $u(x,t)$ diminue (ou augmente) suivant cette direction, c'est-à-dire que $\frac{\partial u}{\partial v} \leq 0 (\frac{\partial u}{\partial v} \geq 0)$. En présence d'une source de chaleur de densité *F(x, t)* calculée par unité de volume dans un volume D limitée par la surface σ, nous supposons une quantité de chaleur Q_1 dégagée par cette source pendant l'intervalle de temps t_2-t_1, Q_2 - la chaleur servant à augmenter la température du corps et Q_3- la chaleur passant par la surface σ suivant la normale extérieure *v* pendant t_2- t_1, alors :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

La source dégage pendant dt dans l'élément du corps de volume $dx = dx_1\, dx_2\, dx_3$ la chaleur $dQ = F(x,t)dx\ dt$. Alors, l'intégrale suivant le volume D de t_1 à t_2 donne :

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D F(x,t)dx.$$

Selon la loi de Fourier, la quantité de chaleur Q_2 passant à travers la surface σ suivant la normale extérieure *v* sera :

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\sigma - k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial v} d\sigma.$$

La quantité de chaleur dQ_3 servant à augmenter la température de l'élément dx de $u(x,t_1)$ à $u(x,t_2)$ est :

$$dQ_3 = (\rho(x)dx).c(x).\left[(u(x,t_2) - u(x,t_1))\right] = c(x)\rho(x)dx \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt;$$

L'intégrale suivant tout le volume est :

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c(x)\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx.$$

Remplaçons Q_1, Q_2, Q_3 dans l'égalité $Q_1 = Q_2 + Q_3$,

alors, on trouve ;

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D F(x,t)dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\sigma -k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial v} d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c(x)\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx.$$

Ainsi, l'intégrale par rapport à σ donne :

$$\int_{\sigma} k \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\sigma} k \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\widehat{\nu, x_j}) d\sigma$$

Si l'on pose dans la formule de Gauss-Ostrogradsky :

$$\int_{\sigma} k \sum_{j=1}^{3} A_j \cos(\nu, x_j) d\sigma = \int_{D} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} dx$$

la relation :

$$A_j = k \frac{\partial u}{\partial x_j} \qquad , \qquad j = 1, 2, 3,$$

alors,

$$\int_{\sigma} k \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{D} \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} (k \frac{\partial u}{\partial x_j}) dx \tag{I.38}$$

En remplaçant l'intégrale suivant σ par son expression dans (I.38), on obtient l'équation intégrale $u(x,t)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{D} F(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (k \frac{\partial u}{\partial x_j}) - c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx = 0$$

En considérant l'expression sous intégrale continue en fonction de *(x, t)*, et en utilisant le théorème de la moyenne des intégrales, alors :

$$F(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (k \frac{\partial u}{\partial x_j}) - c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t})\Big|_{\substack{x=x_{cp} \\ t=t_{cp}}} .(t_2 - t_1)|D| = 0$$

En simplifiant par $(t_2 - t_1)|D|$, où $|D|$ est le volume de *D*, en passant à la limite pour $t_1, t_2 \to t$, et en concentrant le corps *D* au point $x = (x_1, x_2, x_3)$, alors on obtient l'équation différentielle de la chaleur pour la fonction $u(x,t)$:

$$F(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (k \frac{\partial u}{\partial x_j}) - c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Si la densité $\rho(x)$, la perméabilité c(x) et la conductibilité thermiques $k(x)$ sont constantes et si l'on pose :

$$\frac{k}{c\rho} = a^2 \qquad ; \qquad \frac{F(x,t)}{c\rho} = f(x,t),$$

l'équation de la chaleur s'écrira :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + f(x_1, x_2, x_3, t), \tag{I.39}$$

Elle est parabolique.

Si la température $u(x_1, x_2, x_3, t)$ ne dépend pas de x_3, on aura :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f(x_1, x_2, t), \tag{I.40}$$

Si la température $u(x_1, x_2, x_3, t)$ ne dépend pas de x_2 *et* x_3, alors ;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1, t), \tag{I.41}$$

L'équation (I.39) peut exprimer le processus de diffusion en cas où :

$$a^2 = \frac{k}{c}; \qquad\qquad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c}$$

où k est le coefficient de diffusion, c- le coefficient de porosité, F(x, t) –la densité des sources de la substance de diffusion.

<u>Conditions aux limites de premier type</u>

La température sur la surface σ d'un corps *D* est :

$$u(x,t)\big|_{\sigma} = \mu(x,t); \qquad x \in \sigma$$

<u>Conditions aux limites de deuxième ordre</u>

La quantité de chaleur passant par la surface unitaire σ et par unité de temps (flux thermique) est :

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}\right|_{\sigma} = \mu(x,t), \qquad x \in \sigma$$

avec v – la normale extérieure à la surface σ. Si le corps est isolé thermiquement, alors :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\sigma} = 0$$

<u>Conditions aux limites de troisième type</u>

Le milieu dans lequel se trouve le corps *D* a une température $\theta(x,t)$; l'échange de chaleur entre le corps et le milieu environnant se réalise par la loi de Newton : le flux de chaleur Q à travers la surface σ suivant la normale extérieure v est proportionnel à la différence de température :

$$Q=\alpha(u(x,t)-\theta(x,t)), \quad x\in\sigma, \quad (\alpha>0),$$

où α - le coefficient d'échange thermique.

Ou encore selon la loi de Fourier $Q=-k\dfrac{\partial u}{\partial v}$, on a la condition aux limites :

$$\begin{aligned} &-k\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}\bigg|_\sigma = \alpha(u(x,t)-Q(x,t))\big|_\sigma \Rightarrow \\ &\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}+(hu(x,t))_\sigma = \mu(x,t), \ \ x\in\sigma, \quad (h>0) \end{aligned} \tag{I.42}$$

Processus stationnaires

Il s'agit ici d'équations de type elliptique.

1. Si le processus de vibrations décrit par l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3{}^2}\right)+f_1(x_1,x_2,x_3)$$

s'arrête et ne dépend plus du temps, alors $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ et l'équation d'onde se transformera en équation de Poisson :

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3{}^2} = f_1(x_1,x_2,x_3),$$

Si $f_1(x_1,x_2,x_3)\equiv 0$, c'est-à-dire en absence de perturbations externes, alors l'équation de Laplace sera :

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3{}^2} = 0$$

2. Si la distribution de température est invariable par rapport au temps c'est-à-dire que $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$, et l'équation (I.39) se transforme en équation de Poisson $\Delta u(x_1,x_2,x_3)= f_1(x_1,x_2,x_3)$ et par conséquent, on n'a pas de source de chaleur et $f_1(x_1,x_2,x_3)\equiv 0$, on obtiendra l'équation de Laplace :

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3) = 0$$

3. La tendance stationnaire est parfaite, c'est-à-dire un liquide incompressible et non visqueux se caractérise par la vitesses $\bar{\upsilon}$:

$$\bar{\upsilon}(x_1,x_2,x_3) = -grad\ \ u(x_1,x_2,x_3).$$

où u est le potentiel – en cas d'absence de sources, alors : $div\ \bar{\upsilon}(x_1, x_2, x_3) = 0$ et l'équation de Laplace est :

$$div\, grad\ u = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad \Delta u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

4. Dans un milieu homogène et conducteur en absence de sources, on a :

$$\Delta u = 0.$$

I.4 Position des problèmes de la physique mathématique

Considérons un domaine D, délimité par une surface σ dans un espace à n- dimensions. Soit une fonction $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, définie dans ce domaine. On comprend par la limite de :

$$f(x)\big|_{x\in\sigma} \equiv f(x)\big|_{\sigma} = \alpha(x)$$

comme étant la limite :

$$\lim_{\substack{\overset{1}{x} \to x \in \sigma \\ \overset{1}{x} \in D}} f(\overset{1}{x}) = \alpha(x) \qquad \forall x \in \sigma.$$

On dit que $f(x)$ est continue dans le domaine D jusqu'à sa frontière, si

1) $f(x)$ - est continue dans D
2) il existe la limite continue :

$$\lim_{\substack{\overset{1}{x} \to x \in \sigma \\ \overset{1}{x} \in D}} f(\overset{1}{x}) = \alpha(x) \qquad \forall x \in \sigma.$$

et la fonction $F(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in D \\ \alpha(x) & \forall x \in \sigma \end{cases}$ est continue dans $D \cup \sigma = \overline{D}$

Alors, on écrit dans ce cas, que $f(x) \in C(\overline{D})$.

Si $f(x)$ est continue et différentiable S fois dans le domaine D, et elle a sur la frontière du domaine des dérivées jusqu'à l'ordre $\mathrm{k} < \mathrm{S}$, alors on pourra écrire $f(x) \in C^S(D) \cap C^R(\overline{D})$.

En particulier, si $f(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, donc, on aura une fonction continue dans le domaine D jusqu'à sa frontière et elle sera doublement différentiable.

La surface σ est dite lisse ou appartenant à la classe C_0^1, si aux alentours de chaque point $\overset{0}{x} \in \sigma$, elle est représentée par une équation $\omega(x) = 0$, et la fonction $\omega(x)$ - est continue, différentiable et grad $\omega(x) \neq 0$. Alors, lorsque la fonction $\omega(x)$ est continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $S \geq 0$, on dit que la surface appartient à la classe C^S et on écrit $\sigma \in C^S$.

Si la surface est composée d'un nombre limité de surfaces lisses, on l'appelle surface lisse par morceau.

On va considérer ci-après, que la surface σ est fermée et l'espace E_n est partagé en deux domaines : D^+- fini et contenu dans la sphère $|x| < R$, où R- est fini, et D^- - infini, contenant un point infiniment éloigné.

Si la surface est considérée comme la frontière du domaine *D*, alors le vecteur de la normale extérieure ν_y à la surface σ au point $y \in \sigma$, est un vecteur issu de ce domaine *D*.

L'ensemble des points (x,t) de sorte que $x \in D,\ 0 < t \leq T$, est un cylindre $C = D \times [0,T]$.

La frontière du cylindre est formée par la base inférieure $D \times \{0\}$, la base supérieure $D \times \{T\}$ et la surface latérale $\sigma \times [0,T]$. Ainsi, si $n = 2$, le domaine $D = (a,b)$ est un intervalle (a,b), le cylindre $C-$est un rectangle dans le plan $O \times t$. Si $n = 1$, le domaine $D-$est la surface dans le plan Ox_1x_2, le cylindre C- est le domaine dans l'espace trimensionnel Ox_1x_2t limité par les domaine D dans le plan $t = 0,\ t = T$, les axes parallèles Ot et la direction σ (fig.I.4)

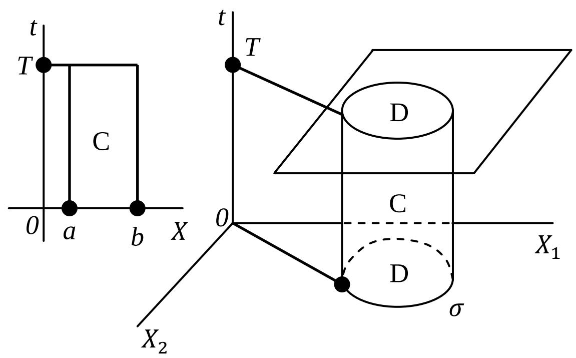

Fig.I.4

Les équations différentielles ont un nombre indéterminé de solutions. Afin de dégager, de l'ensemble, la solution la plus correcte qui décrit un processus donné, on pose des conditions complémentaires qui dépendent du type d'équation.

Les conditions complémentaires seront établies dans ce paragraphe pour :

Les équations de vibrations (hyperboliques) :

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(P(x)grad\ u) - q(x)u + F(x,t); \qquad \text{(I.43)}$$

L'équation de la chaleur (parabolique) :

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(P(x)grad\, u) - q(x)u + F(x,t); \tag{I.44}$$

L'équation stationnaire (elliptique) :

$$\operatorname{div}(\rho(x)grad\, u) - q(x)u - F(x) = 0; \tag{I.45}$$

ici

$$\operatorname{div}(\rho(x)grad\, u) \equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}), \qquad n = 1,2,3.$$

Les coefficients de l'équation suivant leur sens physique seront :

$$\rho(x) > 0,\quad P(x) > 0,\quad q(x) \geq 0,\quad \rho(x),$$
$$q(x) \in C(\overline{D}), P(x) \in C^1(\overline{D})$$

où D- est le domaine de variation des variables géométriques dans les équations (I.44-I.45), c'est-à-dire le domaine où se déroule le processus.

I.5 Problèmes pour les équations hyperboliques

On va formuler le problème d'abord pour un espace E_1 (à une variable géométrique), et par la suite, l'étaler sur l'espace *n*.

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(P(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - q(x)u + F(x,t), \tag{I.46}$$

Problème mixte. Dans un rectangle $C = (0,l)\times(0,T)$, il faut trouver la solution régulière de l'équation continue, différentiable jusqu'à la frontière, satisfaisant la condition aux limites :

$$\gamma_1\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_1 u)_{x=0} = \mu_1(t);\ (\gamma_2\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2 u)_{x=l} = \mu_2(t) \tag{I.47}$$

et la condition initiale :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x);\qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{I.48}$$

Pour que la position du problème ne soit pas contradictoire, on doit satisfaire les conditions de lissage :

$$F(x,t) \in C(u);\quad \varphi(x) \in C^1([a,B]);$$
$$\psi(x) \in C([a,b]);\ \mu_1(t),\ \mu_2(t) \in C([0,T])$$

et les conditions complémentaires :

$$\gamma_1\varphi'(0)+\sigma_1\varphi(0)=u_1(0),\gamma_2\varphi'(l)+\delta_2\varphi(l)=u_2(l).$$

Les conditions aux limites déterminent le comportement de la fonction sur la frontière du domaine quelque soit t. Les conditions initiales donnent la fonction cherchée et la vitesse de sa variation à $x\in(0,l)$ au moment initial.

Le problème (I.46), (I.47), (I.48) sera homogène, si $\mathrm{F(x,t)},\ \mathrm{u_1(t)},\ \mathrm{u_2(t)}\equiv 0$, et il sera non homogène lorsque au moins l'une de ces fonctions est différente de zéro.

En relation avec les conditions de lissage, on dit que le problème mixte est de :

premier type, si :

$$\gamma_k=0,\ \delta_k=1:\ u(0,t)=\mu_1(t);\quad u(l,t)=\mu_2(t);$$

deuxième espèce, si :

$$\gamma_k=1,\qquad \delta_k=0:$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\mu_1(t);\qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\mu_2(t);$$

troisième espèce, si :

$$\gamma_k=1,\ \delta_1=-h_1,\ \delta_2=h_2,\ h_k\geq 0:\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-h_1u(0,t)=\mu_1(t);\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+h_2u(l,t)=\mu_2(t).$$

On formule le problème mixte, pour l'équation (I.43), comme suit :

Dans un cylindre $\mathrm{C}=\mathrm{D}\times[0,\mathrm{T}]$, il faut trouver la solution de l'équation (I.43), continue, différentiable jusqu'à la frontière, et satisfaisant la condition aux limites :

$$(\gamma\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}+\partial u(x,t))_{x\in\sigma}=\mu(x,t)$$

et la condition initiale :

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x);\qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).$$

Alors, on doit satisfaire les conditions d'une surface lisse et de concordance :

$$F(x,t)\in C(D);\qquad\qquad \varphi(x)\in C^1(\overline{D});$$

$$\psi(x)\in C(\overline{D}).\qquad u(x,t)\in C(\sigma\times[0,T]);$$

$$\gamma\frac{\partial\varphi(x)}{\partial v}+\delta\varphi(x)\forall\in\sigma=u(x,t)\big|_{t=0}\qquad \forall\, x\in\sigma$$

Problème de Cauchy. A la différence du problème mixte, on propose ici, que l'équation (I.43) décrit le processus dans tout l'espace des variables géométriques $E_n(D=E_n)$ à $t>0,$ c'est pourquoi nous n'avons pas de conditions aux limites suivant ces variables.

Le problème de Cauchy est formulé comme suit.

Dans un demi espace $t>0$ de variables $(x_1,...,x_n,t),$ on cherche la fonction, $u(x,t)\in C^2(t>0)\cap C_1(t\geq 0)$ satisfaisant l'équation (I.43) et les conditions initiales :

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x); \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x);$$

(I.49)

supposons pour cela les conditions de lissage suivantes :

$$F(x,t)\in C(t>0); \quad \varphi(x)\in C^1(E_n); \;\; \psi(x)\in C(E_n).$$

Le problème de Cauchy admet une solution généralisée dans ce cas, lorsque les conditions initiales ne sont pas données pour $t=0,$ alors pour la surface lisse, on a :

$$\sigma : t=\omega(x); \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}\right|_{\sigma}=\psi;$$
$$u(x,t)\big|_{\sigma}=\varphi;$$

on établi ici la solution dans une partie de l'espace appartenant à la surface σ .

Problème de Goursat. Il existe d'autres conditions complémentaires pour l'équation hyperbolique. Pour le cas du problème de Goursat, on donne des conditions complémentaires sur les caractéristiques. Formulons le problème de Goursat pour l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu=F(x,t), \tag{I.50}$$

Il faut trouver dans un rectangle $C=(0,l)\times(0,T)$ (fig.I.5) la fonction $u(x,t)$ continue jusqu'à la frontière et qui est une solution régulière de l'équation (I.50) et satisfaisant les conditions complémentaires :

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leq x\leq l;$$
$$u(0,t)=\psi(t),0 \quad 0\leq t\leq T$$

sur les caractéristique $x=0,\ t=0$

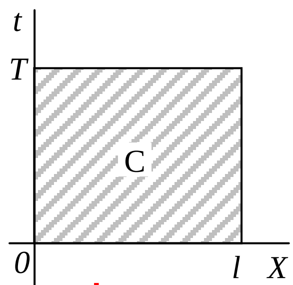

Fig.I.5

I.6 Problèmes pour les équations paraboliques

Le problème mixte et le problème de Cauchy pour l'équation parabolique

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}) - q(x)u + F(x,t)$$

diffèrent du problème pour l'équation hyperbolique par le fait d'avoir une seule condition initiale (y-compris la dérivée première par rapport à t) :

$$|u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x).$$

De plus, il faut le limiter à l'infini, pour l'unicité de la solution :

$$|y(x,t)| < A \qquad \forall x \in E_n$$

I.7 Problèmes pour les équations elliptiques

Dans l'équation elliptique :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(p(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}) - q(x)u(x) = -F(x) \tag{I.51}$$

le temps t n'est pas inclu et le domaine D de variation des variables géométriques $x = (x_1,...,x_n)$ est un domaine de l'équation donnée. Supposons, qu'une surface fermée σ et lisse par morceau divise son domaine E_n en domaine fini D^+ et infini D^-. On considère suivant D^+ ou D^- et les condition aux limites les paramètres :

<u>Problème intérieur aux limites</u>. On cherche dans D^+ une solution régulière de l'équation (I.51), continue, différentiable jusqu'à la frontière et satisfaisant la condition aux limites :

$$(\gamma\frac{\partial u(x)}{\partial v} + \delta u(x))_{x\in\sigma} = \mu(x), \qquad \gamma^2 + \delta^2 \neq 0; \tag{I.52}$$

on suppose pour cela la condition $F(x) \in C(D^+)$; $\mu(x) \in C(\sigma)$.

<u>Problème extérieur aux limites</u>. Dans le domaine D, il faut chercher la fonction $u(x) \in C^2(D^-) \cap C^1(D^-)$, régulière à l'infini $(|\mathrm{u(x)}| < \frac{\mathrm{A}}{|\mathrm{x}|^{\mathrm{n-2}}}$ pour $(|x| \to \infty : n = 2,3)$, satisfaisant l'équation (I.51) et la condition aux limites (I.52).

La fonction $u(x)$ doit être régulière à l'infini pour l'unicité de la solution.

On considère suivant les valeurs des cœfficients : γ, δ :

Les conditions aux limites de première espèce $(\gamma = 0, \quad \delta = 1)$ **:**

$$\mu(x)\big|_{x\in\sigma} = \mu(x)$$

et le problème correspondant s'appelle ***le premier problème aux limites.***

En particulier, lorsque l'équation (I.51) est une équation de Poisson :

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = -F(x).$$

le problème aux limites dans D^+ (problème dans D^-) avec les conditions aux limites de première espèce s'appelle le *problème intérieur de Dirichlet* et s'écrit : le problème D^+ (le problème exterieur de Dirichlet s'écrit: problème D^-)

Conditions aux limites de deuxième espèce $(\gamma = 1, \quad \delta = 0)$ **:**

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial v}\right|_{x\in\sigma} = \mu(x)$$

et le problème correspondant s'appelle ***le deuxième problème aux limites***

Pour l'équation de Poisson, on appelle problème aux limites dans D^+ (problème D^-) avec conditions aux limites de deuxième espèce *le problème intérieur (extérieur) de Newmann* et s'écrit : *problème* N^+ *(problème* N^-*).*

Conditions aux limites de troisième espèce $(\gamma \neq 0, \quad \delta \neq 0)$ **:**

$$(\gamma \frac{\partial u(x)}{\partial v} + \delta u(x))_{x\in\sigma} = \mu(x)$$

et le problème correspondant s'appelle *le troisième problème aux limites*.

Notons, que pour résoudre le problème de Newmann dans D^+, il faut une condition complémentaire $\int_\sigma \mu(y)d\sigma = 0.$

I.8 Convenance du problème

On dit qu'un problème est posé correctement, si la solution : 1- existe, 2- est singulière, 3- est stable.

Exemple : Montrons, que le problème de Cauchy n'est pas correct pour l'équation elliptique. Soit la fonction $u(x, y)$ dans un demi espèce $y > 0$ qui est une solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et satisfaisant les conditions de Cauchy

$$u(x,y)\big|_{y=0} = \varphi(x); \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x).$$

La fonction $\upsilon(x, y) = u(x, y) + \frac{\sin nxshny}{n^2}$ sera ainsi une solution de l'équation de Laplace,
donc :

$$\upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} \equiv (u_{xx} - \sin nxshny) + (u_{yy} + \sin n \times shny) \equiv 0.$$

Par ailleurs, la fonction $\upsilon(x,y)$ satisfait les conditions :

$$\upsilon(x, y)\big|_{y=0} = (u(x, y) + \frac{\sin nxshny}{n^2})_{y=0} = \varphi(x);$$
$$\left.\frac{\partial \upsilon(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = (\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\sin nxchny}{n})_{y=0} = \psi(x) + \frac{\sin nx}{n}$$

Evaluons la différence des conditions initiales $u(x,y), \upsilon(x,y)$:

$$\left|\upsilon(x,y) - u(x,y)\right|_{y=0} = 0, \quad \left|\frac{\partial \upsilon(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, les conditions initiales pour résoudre $u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$ sont proches et la différence des solutions sera:

$$\left|\upsilon(x,y) - u(x,y)\right| = \left|\frac{\sin nxshny}{n^2}\right|$$

pour $x \neq 0, \ y > 0$ et par conséquent :

$$\frac{shny}{n^2} = \frac{e^{Ay} - e^{-ny}}{2n^2} \to \infty \qquad \text{pour} \qquad n \to \infty.$$

Donc, la solution n'est pas stable et le problème de Cauchy n'est pas correct pour l'équation de Laplace.

I.9 Problèmes non homogènes

En physique mathématique, on ramène les problèmes complexes à des problèmes plus simples pour pouvoir les résoudre. Alors, il est utile d'examiner dans cette partie le principe de superposition pour le cas de problèmes mixtes de l'équation hyperbolique.

Principe 1. Si $u_k(x, y)$ – est la solution d'un problème mixte :

$$Lu \equiv \rho(x)u_{tt} - (p(x)u_x)'_x + q(x)u = F_k(x, t); \tag{I.43}$$

$$\Gamma_1 u \equiv \gamma_1 u_x(0,t) + \delta_1 u(0,t) = 0 ; \ \Gamma_2 u \equiv \gamma_2 u_x(lt) + \delta_2 u(l,t) = 0; \tag{I.44}$$

$$u(x,0) = \varphi_k(k); \ u_t \ (x,0) = \psi_k(x), \tag{I.45}$$

alors, la fonction :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} A_k(x,t), \qquad A_k = const \tag{I.46}$$

sera la solution du problème :

$$Lu = \sum_{k=1}^{m} A_k F_k(x,t), \qquad \Gamma_1 u = 0, \qquad \Gamma_2 u = 0 ;$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{m} A_k \varphi_k(x), \qquad u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{m} A_k \ \psi_k(x).$$

Démonstration.

En substituant la solution proposée (I.46) dans (I.43)-(I.45) et en utilisant la linéarité des opérateurs différentiels $L, \Gamma_1 \ et \ \Gamma_2$, on obtient :

$$Lu \equiv L\sum_{1}^{m} A_k u_k \equiv \sum_{1}^{m} A_k L u_k \equiv \sum_{1}^{m} A_k F_k (x, t);$$

$$\Gamma_j u \equiv \Gamma_j \sum_{1}^{m} A_k u_k \equiv \sum_{1}^{m} A_k \Gamma_j \ u_k \equiv 0, \qquad j = 1, 2;$$

$$u(x,0) \equiv \sum_{1}^{m} A_k u_k (x,0) \equiv \sum_{1}^{m} A_k \ \varphi_k(x);$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \equiv \sum_{1}^{m} A_k \frac{\partial u_k(x,0)}{\partial t} \equiv \sum_{1}^{m} A_k \ \psi_k(x),$$

Principe 2. Si $u_k(x,t)$ (k = 1, 2, 3…, m)- est la solution de l'équation homogène $L\,u$ = 0, satisfaisant les conditions homogènes aux limites $\Gamma_1 u = 0, \Gamma_2 u = 0$, la combinaison linéaire des solutions $u(x,t) = \sum_{1}^{m} A_k u_k(x,t)$ sera de nouveau la solution du problème $Lu = 0, \ \Gamma_1 u = 0, \ \Gamma_2 u = 0.$

Démonstration.

En substituant la solution proposée dans l'équation, ainsi que dans les conditions aux limites, on obtient :

$$Lu \equiv L\sum_{k=1}^{m}\alpha_k u_k \equiv \sum_{k=1}^{m} A_k\, Lu_k \equiv 0\,;$$

$$\Gamma_j \sum_{k=1}^{m} A_k u_k \equiv \sum_{k=1}^{m} A_k\, \Gamma_j\, u_k \equiv 0, \qquad j = 1,2.$$

Principe 3 (généralisé). Si $u_k(x,t),(k=1,2,3,\ldots)$est la solution de l'équation $L\ u$ = 0 satisfaisant les conditions aux limites $\Gamma_1 u = 0,\ \Gamma_2 u = 0$, alors la série $u(x,t) = \sum_{1}^{m} A_k u_k(x,t)$ converge, admet une application des opérateurs L, Γ_1, Γ_2 et elle sera de nouveau la solution du problème $\mathrm{Lu} = 0,\ \Gamma_1 \mathrm{u} = 0, \Gamma_2\ \mathrm{u} = 0.$

Démonstration.

En substituant la solution proposée dans l'équation, les conditions aux limites, en utilisant les opérateurs $L,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2$ et la somme $\sum_{1}^{\infty}$, on obtient :

$$Lu \equiv L\sum_{1}^{\infty} A_k\, u_k \equiv \sum_{1}^{\infty} A_k\, u_k \equiv 0\,;$$

$$\Gamma_j u \equiv \Gamma_j \sum_{1}^{\infty} A_k\, u_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} A_k\ \Gamma_j\quad u_k \equiv 0, \qquad j = 1,2.$$

Principe 4 (généralisé). Si la fonction $u\ (x,\ t, \lambda\ )$ dépendant du paramètre $\lambda \in \Omega$:

1/ est la solution du problème $Lu = 0,\ \ \Gamma_1 u = 0,\ \ \ \Gamma_2 u = 0$;

2/ l'intégrale $\int_{\Omega} K(\lambda)u(x,t,\lambda)\, d\lambda$ converge uniformément ;

3/ les opérateurs $\mathrm{L}, \Gamma_1\,\Gamma_2$ peuvent être mis sous intégrale ;

$$L\int_{\Omega} K(\lambda(\lambda)u(t,\lambda)d\lambda = \int_{\Omega} K(\lambda(\lambda\ u(x,t\ \lambda)d\lambda\,;$$

$$\Gamma_j \int_{\Omega} K(\lambda)u(x,t,\lambda)d\lambda = \int_{\Omega} K(\lambda(\lambda\ {}_j u(x,t,\lambda)d\lambda, \quad j = 1,2,$$

alors, la fonction :

$$\upsilon(x,t) = \int_{\Omega} K(\lambda(\lambda)u(t,\lambda)d\lambda$$

sera encore une solution.

Démonstration.

La convergence uniforme de l'intégrale conduit à la continuité de la fonction $\upsilon(x,t)$ et la possibilité de mettre sous intégrale les opérateurs $\mathrm{L},\Gamma_1,\Gamma_2$ permettent à $\upsilon(x,t)$ de devenir différentiable.

En appliquant les opérateurs $\mathrm{L},\Gamma_1,\Gamma_2$ à l'égalité

$$\upsilon(x,t)=\int_{\Omega}\mathrm{K}(\lambda)u(x,t,\lambda)\,d\lambda\,.$$

et en tenant compte que $u\ (x,\ t)$ est la solution de $Lu=0,\ \Gamma_1 u=0,\ \Gamma_2 u=0$, on arrive ainsi à la démonstration demandée.

I.10 Fonction delta de Dirac

L'étude des processus physiques de répartition des masses, des forces et des sources de chaleur, se réalise par la considération de leur caractère ponctuel.

Soit, par exemple, une masse unitaire distribuée sur l'intervalle $[x_0,\ x_0+\varepsilon]$ de densité linéaire $\delta_\varepsilon(x,\ x_0)$, alors sa répartition unitaire est exprimée par :

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\delta_\varepsilon(x,x_0)dx=1.$$

La fonction $\delta_\varepsilon(x,\ x_0)$ étant nulle à l'extérieur de l'intervalle $[x_0,\ x_0+\varepsilon]$, alors :

$$\delta_\varepsilon(x,x_0)=0 \qquad \forall x\overline{\in}\ [x_0,\ x_0+\varepsilon];$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x,x_0)dx=\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\delta_\varepsilon(x,x_0)dx=1.$$

Si la masse unitaire se concentre au point x_0, alors le processus de transition limite est obtenu pour la densité de la masse ponctuelle unitaire comme suit :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x,x_0)=\begin{Bmatrix}0 & \forall x\neq x_0\\ \infty & x=x_0\end{Bmatrix}\equiv\delta(x-x_0).$$

La masse reste inchangée durant le processus de cette concentration :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x,x_0)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\delta_\varepsilon(x,x_0)dx=1=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx.$$

Rappelons qu'une fonction $u\ (x)$ sur l'intervalle $[\mathrm{a},\ \mathrm{b}]$ est une limite faible des fonctions intégrables $u_\varepsilon(x)$ pour $\varepsilon\to 0$, si quelque soit $f(x)\in \mathrm{c}([a,b])$, il existe la limite :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b u_\varepsilon(x)f(x)dx = \int_a^b u(x)f(x)dx. \qquad (I.47)$$

Alors, si $f(x)$ est continue sur l'axe ox, donc pour $\delta_\varepsilon(x, x_0) \geq 0$,on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \delta_\varepsilon(x,x_0)f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to\infty} f(x_{cp})\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\delta_\varepsilon(x,x_0)dx = f(x_0).$$

Donc, la limite faible $\delta(x-x_0)$ existe et peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_\varepsilon)f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0) \qquad \forall\varepsilon > 0,$$

Si l'on pose : $f(x) \equiv 1$, alors,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx = \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)dx = 1 \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

La fonction généralisée $\delta(x-x_0)$ satisfaisant les conditions :

1/ $$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0, \\ \infty & x = x_0; \end{cases}$$

2/ $$\int_a^b \delta(x-x_0)f(x)dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in [a,b], \\ 0\ , & x_0 \in [a,b] \end{cases}$$

quelque soit $f(x)$ continue aux alentours du point x_0, s'appelle la fonction δ de Dirac ou la fonction d'impulsion.

La fonction $\delta_\varepsilon(x, x_0)$, en respectant les conditions (1) et (2), peut être établie comme :

$$\delta(x,x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon},\ x \in [x_0,\ x_0+\varepsilon], \\ 0,\ x \,\overline{\in}\, [x_0, x_0+\in] \end{cases}$$

Série de Fourier pour la fonction δ. Démontrons, que la fonction :

$$\delta_n(x,\ x_0) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}x_0.$$

forme une fonction δ sur l'intervalle $[0,\ l]$.

Soit $f(x)$- une fonction arbitraire se développant en série de Fourier, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l \delta_n(x,x_0)f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx\right)\sin\frac{k\pi}{l}x_0.$$

Si $f(x)$ est continue au point x_0, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l \delta_n(x,x_0)f(x)dx = f(x_0),$$

Ainsi, on obtient pour la fonction de Dirac δ la représentation sous forme d'une série de Fourier :

$$\delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}x_0. \tag{I.48}$$

Sur l'intervalle $[-l, l]$, la série de Fourier pour la fonction δ sera :

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}x_0+\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}x_0.$$