# Programme :

## Chapitre I :

1. Rappels de quelque résultats d'intégration
2. Définition et propriété élémentaires des espaces $L^p$
3. Réflexibilité, Séparabilité dual de $L^p$.
4. Convolution et régularisation, Théorème de densité

## Chapitre II :

1. transformation de fourier pour les fcts Intégrable
2. propriétés de la transformation de fourier
3. transformation de fourier inverse.
4. transformation de fourier pour les fcts carré

## Chapitre III :

1. déf et propriétés de la transformation de laplace.
2. quelque transformations usuelles.
3. Inversion de la transformation de laplace.
4. Application à la résolution des équations diff.

## I - Rappels :

### 1 - déf d'une fonction mesurable :

- Soient X et Y deux ensembles quelconque et soient $\delta_X$ . $\delta_Y$ (tribu) deux familles de parties de X et Y respectivement.
- La fonction abstraite $y = f(x)$ définie sur X et a valeur dans Y.
- on appelle $(\delta_X, \delta_Y)$ mesurable si :

$$\forall A \in \delta_Y \Rightarrow f^{-1}(A) \in \delta_X$$

### 2 - Propriétés :

- la composée de deux fcts mesurable est une fonction mesurable.
- la somme, différence et le produit de deux fcts mesurables sont mesurable
- Le rapport de 2 fcts mesurables si le dénominateur ne s'annule pas est une fct mesurable.

### 3 - Déf d'une application 1 - étapée :

on dit qu'une application $f : X \to F$ est 1- étapée s'il $\exists$ $E \in X$ et $y \in F$.

$$\forall x \in X \Rightarrow \begin{cases} f(x) = y & \text{si } x \in E \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = y \, \mathbb{1}_E$$

Scanned by CamScanner

## Remarque :

- $\mathcal{E}_1(X, F)$ l'ensemble des app 1-étagées
- toute app 1-étagée est mesurable.

## 4 - déf de l'intégrale de Lesbegue :

on dit que une application 1-étagée $f : x \rightarrow f(x)$ tq : $f(x) = y \, \mathbb{1}_E$ est lesbegue intégrale ssi :

$\mu(E) < +\infty$ (fini).

et on appelle l'intégrale de lesbegue de $f$ d'élément de $F$ noté $\int f$ tq :

$$\int_A f = \int_X y \, \mathbb{1}_E \, d\mu = \int_{X \cap E} y \, d\mu = y \int_E d\mu = y \, \mu(E)$$

## Notation :

- $\mathcal{E}_{1,\mu}(X, F)$ l'ensemble des applications lesbegue intégrale

## Déf :

- on appelle application étagée de $X$ dans $F$ toute combinaison linéaire fini d'app 1-étagée c-à-d

$$f = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \mathbb{1}_{E_i}$$

$$f = y_1 \mathbb{1}_{E_1} + \dots y_n \mathbb{1}_{E_n}$$

**Notation :**

- $\mathcal{E}(X,F)$ l'ensemble des applications étagées.

**Prop :**

- $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{E_i}$ est $\eta$-étagée ssi $\eta(E_i) < +\infty$.

**Proposition :**

- Soit $f$ une fct sur un espace mesurable $(X, A)$ alors les conditions suivant sont équivalent :

① $f$ est mesurable
② $\forall a \in \mathbb{R} : \{ f(x) > a \} \in A$
③ $\forall a \in \mathbb{R} : \{ f(x) < a \} \in A$.
④ $\forall a \in \mathbb{R} : \{ f(x) \geq a \} \in A$.
⑤ $\forall a \in \mathbb{R} : \{ f(x) \leq a \} \in A$.

## II – Les espaces $L^p$ :

**Déf :** L'espace $\mathcal{L}^1_\eta(X,F)$

ou $X$ espace vectoriel normé et $F$ espace de Banach

on dit que $f \in \mathcal{L}^1_\eta(X,F) \Leftrightarrow \exists (f_n)_n \in \mathcal{E}_\eta(X,F)$

tq $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy par rapport a la norme qui converge vers $f$ $\eta pp$.

$\mathcal{E}_\eta(X,F) \{ f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{E_i}$ / $\lambda_i$ 2 à 2 distincts, $E_i$ 2 à 2 disjoints $\}$

$f \in \mathcal{L}^1_n(X, F) \Rightarrow \int |f| < +\infty$

$f \in \mathcal{L}^2_n(X, F) \Rightarrow \left(\int |f|^2\right)^{1/2} < +\infty$

$f \in \mathcal{L}^p_n(X, F) \Rightarrow \left(\int |f|^p\right)^{1/p} < +\infty$

- On définit sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ la relation d'équivalence (Symétrique, Reflexive, Transitive)

$$f \sim g \leftrightarrow f = g \text{ pp sur } \Omega$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ on note $[f]$ la classe d'équivalence de $f$.

$$[f] = \{ h \in \mathcal{L}^p(\Omega) \,/\, f = h, \text{ pp sur } \Omega \}$$

Déf d'un espace de lesbegue $L^p$ :

- L'espace de lesbegue $L^p(\Omega)$ est définie par : $L^p(\Omega) = \{ [f],\ f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \}$

Remarque :

- quand on écrit $g = f$ dans $L^p$, cela signifie que $f = g$ pp sur $\Omega$.

Proposition :

- L'espace $L^p$ muni de la norme $\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ est un ev

**Rappel** : $L^p$ et un ev ssi $L^p$ est un sev qui contient un sev.

**démonstration** :

Soient $f$ et $g \in L^p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

par déf de $L^p(\Omega)$ il existe deux suite de Cauchy $f_n$ et $g_n$ tel que :

$$f_n \xrightarrow[cvs]{pp} f \quad , \quad g_n \xrightarrow[cvs]{pp} g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_n + g_n \xrightarrow[cvs]{pp} f+g \\ \text{et} \quad \lambda f_n \xrightarrow[cvs]{pp} \lambda f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f+g \in L^p \\ \text{et } \lambda f \in L^p \end{cases}$$

Alors $L^p$ est un sev.

de plus $\mathcal{E}_\eta(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, et on écrit que $\mathcal{E}_\eta(\Omega)$ et un sev

$\Rightarrow$ $L^p(\Omega)$ est un ev.

**Théorème de cvg dominée** :

Soit $(f_n)$ une suite de fct $L^1$, on sup que :

ⓐ $f_n(x) \xrightarrow{s} f$ pp sur $\Omega$

ⓑ $\exists\, g \in L^1(\Omega)$ / $|f_n| < g(x)$ pp sur $\Omega$

**Preuve** :

puisque $|f_n| \leq g$ avec $g$ intégrable les $f_n$ sont aussi intégrable et comme en passant à la limite.

$|f| \leq g(x)$ , $f$ et aussi intégrable.
On a : $|f_n - f| \leq |f| + |f| \leq 2g$
Les fcts : $h_n = 2g - |f_n - f|$ sont positive.

car $(2g \geq |f_n - f|)$

$\Rightarrow \int 2g \, d\eta = \int \left( \lim (2g - |f_n - f|) \right) d\eta \quad \ldots (1)$

car $\lim |f_n - f| = 0$

et on peut donc leur appliquer le lemme de Fatou

Lemme de Fatou :

Si $f_n$ et mesurable de plus $f_n \xrightarrow{cvs} f$
si $f \in L^1(\mu) \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \inf \int f_n \leq \int \lim\limits_{+\infty} \inf f_n = \int f$

$(1) \Rightarrow \int 2g \, d\eta \leq \lim\limits_{+\infty} \inf \int 2g - |f_n - f| \, d\eta$
d'après lemme de fatou

$= \lim\limits_{+\infty} \inf \left( \int 2g \, d\eta - \int |f_n - f| \, d\eta \right)$

$\inf(-x) = -\sup x$

$= \int 2g \, d\eta - \lim \sup \int |f_n - f| \, d\eta$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \sup \int |f_n - f| \, d\eta \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{+\infty} \sup \int |f_n - f| \, d\eta \leq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \sup \int |f_n - f| \, d\eta = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \int |f_n - f| \, d\eta = 0$ d'où le résultat.

# Théorème de cvg monotone.

Soit $(f_n)$ une suite monotone d'élément de $\mathcal{L}^1_\eta(\mathbb{R})$. soit $f : X \to \mathbb{R}$ sa lim simple pour qu'il existe une app $g$ intégrable.

($g \in L^1(\Omega)$ tq $f = g$ pp sur $\Omega$)

en résumé si :

1. - $(f_n)$ est une suite croissante
2. - $\forall n$, $f_n \in \mathcal{L}^1_\eta(X, \mathbb{R})$
3. - $\lim f_n = f$

Alors

$f \in \mathcal{L}^1_\eta(X, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \eta > 0, \; |\int f_n| < \eta$

## Définition

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\exists$ constante $c$ tq $|f(x)| < c$ pp sur $\Omega \}$

on note $\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ c \,/\, |f(x)| < c \}$ pp sur $\Omega$

## Remarque.

Si $f \in L^\infty$, on a : $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ pp sur $\Omega$.

## Notation.

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ on désigne par $p'$ l'exposant conjugué de $p$ ie : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

## Théorème d'intégalité de Hölder :

- Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$

Alors : $fg \in L^1$ et $\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$

$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$

- La Conclusion est évidente pour $p = 1$ ou $p = \infty$ Supp donc que $1 < p < \infty$.

## L'intégration de young :

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

### Preuve :

Soient $a, b > 0$ et soit $p, p' \in (1, +\infty)$ tq $1/p + 1/p' = 1$, on Considère une fct $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définit par :

$\theta(a) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} - ab$ dérivable

$\theta'(a) = a^{p-1} - b$

$\theta'(a) = 0 \Rightarrow a^{p-1} = b \Rightarrow a = b^{\frac{1}{p-1}}$

| $a$ | $0$ | | $b^{\frac{1}{p-1}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\theta(a)$ | | $\searrow$ | $\theta(b^{\frac{1}{p-1}})$ | $\nearrow$ | |

$$\theta\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{1}{p}\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) + \frac{1}{p'} b' - \left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) b$$

$$= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p'} b' - b^{\frac{p}{p-1}}$$

$\left(\frac{p}{p-1} = p'\right)$

$$= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) b^{p'} - b^{p'} = 0$$

$$\Rightarrow \theta(a) \geq 0.$$

d'ou : $\left(a.b \leq \frac{1}{p} a^{p} + \frac{1}{p'} b^{p'}\right)$

## La Preuve : "Inégalité de Hölder" :

On a deja monther l'Inégalité de young :

$a.b \leq \frac{1}{p} a^{p} + \frac{1}{p'} b^{p'}$ ... ①

en remplace $a$ par $|f|$ et $b$ par $|g|$

① $\Rightarrow |f|.|g| \leq \frac{1}{p}|f|^{p} + \frac{1}{p'}|g|^{p'}$

$\Rightarrow |f.g| \leq \frac{1}{p}|f|^{p} + \frac{1}{p'}|g|^{p'}$

$\Rightarrow \int |f.g| \, d\eta \leq \int \left(\frac{1}{p}|f|^{p} + \frac{1}{p'}|g|^{p'}\right) d\eta$

$\Rightarrow \int |f.g| \, d\eta \leq \frac{1}{p}\int |f|^{p} \, d\eta + \frac{1}{p'}\int |g|^{p'} \, d\eta$

Rappel : $\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \Rightarrow \left(\|f\|_{L^p}\right)^p = \int |f|^p \, d\eta$

$\Rightarrow \int |f.g| \, d\eta \leq \frac{1}{p}\|f\|^{p}_{L^p} + \frac{1}{p'}\|g\|^{p'}_{L^{p'}}$

puis en remplace $f$ par $\lambda f$ tq : $(\lambda > 0)$

$\Rightarrow \int |\lambda f.g| \, d\eta \leq \frac{1}{p}\|\lambda f\|^{p}_{L^p} + \frac{1}{p'}\|g\|^{p'}_{L^{p'}}$

$\Rightarrow \lambda \int |f.g| \, d\eta \leq \frac{\lambda^p}{p}\|f\|^{p}_{L^p} + \frac{1}{p'}\|g\|^{p'}_{L^{p'}}$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow \int |f \cdot g| \, d\eta \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|^{p}_{L^p} + \frac{1}{p' \cdot \lambda} \|g\|^{p'}_{L^{p'}}$

- en choisissant : $\lambda = \|f\|^{-1}_{L^p} \cdot \|g\|^{p'/p}_{L^{p'}} \geq 0.$

$\Rightarrow \int |f \cdot g| \, d\eta \leq \frac{\left(\|f\|^{-1}_{L^p} \cdot \|g\|^{p'/p}_{L^{p'}}\right)}{p} \|f\|^{p}_{L^p} +$

$\frac{1}{p' \, \|f\|^{-1}_{L^p} \, \|g\|^{p'/p}_{L^{p'}}} \cdot \|g\|^{p'}_{L^{p'}}$

$\left(-\frac{p'}{p} = 1 - p'\right)$

$\Rightarrow \int |f \cdot g| \, d\eta \leq \frac{1}{p} \left(\|f\|^{1-p}_{L^p} \cdot \|g\|^{\frac{p'(p-1)}{p'}}_{L^{p'}}\right) \cdot \|f\|^{p}_{L^p}$

$+ \frac{1}{p'} \left(\|f\|_{L^p} \cdot \|g\|^{-p'/p}_{L^{p'}}\right) \cdot \|g\|^{p'}_{L^{p'}}$

$\Rightarrow \int |f \cdot g| \, d\eta \leq \frac{1}{p} \left(\|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}\right) +$

$\frac{1}{p'} \left(\|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}\right).$

$\Rightarrow \int |f \cdot g| \, d\eta \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$

$\Rightarrow \|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}$

**Remarque :**

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Holder, soient $f_1 \dots f_K$ des fcts tq :

$f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq K$ avec

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots \frac{1}{p_n} \leq 1.$

alors le produit : $f = f_1 \cdots f_n \in L^p(\Omega)$ et
$\|f\|_{L^p} = \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_n\|_{L^{p_n}}$

<u>en particulier</u> :
Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq p' \leq \infty$
alors $f \in L^r(\Omega)$, pour tout $p \leq r \leq p'$ on
$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \, \|f\|_{L^{p'}}^{1-\alpha}$ avec $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p'}$

<u>Preuve</u> :
si on pose : $g = |f|^{\alpha r}$ et $h = |f|^{(1-\alpha) r}$
on sait que : $\|f\|_{L^r}^r = \int |f|^r \, d\eta = \int (g \cdot h) \, d\eta$
et on a : $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p'} \Rightarrow 1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha) r}{p'}$
$\Rightarrow 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$ avec $\frac{1}{q} = \frac{\alpha r}{p}$ et $\frac{1}{q'} = \frac{r(1-\alpha)}{p'}$

d'après l'inégalité de Holder on a :

$$\int (g \cdot h) \, d\eta \leq \|g\|_{L^q} \cdot \|h\|_{L^{q'}} = \left(\int |g|^q\right)^{1/q} \left(\int |h|^{q'}\right)^{1/q'}$$

$$\|f\|_{L^r}^r \leq \left(\int |g|^{\frac{p}{\alpha r}}\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int |h|^{\frac{p'}{(1-\alpha) r}}\right)^{\frac{r(1-\alpha)}{p'}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^r}^r \leq \left(\int |f|^{\alpha r \frac{p}{\alpha r}}\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int |f|^{r(1-\alpha)\frac{p'}{r(1-\alpha)}}\right)^{\frac{r(1-\alpha)}{p'}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^r}^r \leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int |f|^{p'}\right)^{\frac{r(1-\alpha)}{p'}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^r}^r \leq \left(\left(\int |f|^p \, d\eta\right)^{1/p}\right)^{\alpha r} \left(\left(\int |f|^{p'} \, d\eta\right)^{1/p'}\right)^{r(1-\alpha)}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \|f\|_{L^r}^r \leqslant \left(\|f\|_{L^p}\right)^{\alpha r} \left(\|f\|_{L^{p'}}\right)^{r(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \left(\|f\|_{L^r}^r\right)^{1/r} \leqslant \left[\|f\|_{L^p}^{\alpha r} \cdot \|f\|_{L^{p'}}^{r(1-\alpha)}\right]^{1/r}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\alpha} \cdot \|f\|_{L^{p'}}^{1-\alpha}$$

**Théorème "Fisher-Riesz"** :

$L^p$ est un espace de Banach.

**Dém** :

Il s'agit de démontrer la complétude

① Supp que $1 \leqslant p < \infty$ Soit $(f_n)_n$ une suite de cauchy dans $L^{p'}$.

Pour conclure il suffit de mq' une sous suite extraite converge dans $L^p$ on extraite une sous suite $(f_{nK})$ tel que :

$$\|f_{n_{K+1}} - f_{n_K}\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^K}, \forall K \geqslant 1$$

On va montrer que $f_{nK}$ converge dans $L^p$ pour simplifier les notations on écrit $f_K$ au lieu de $f_{nK}$. donc : $\|f_{K+1} - f_K\| \leqslant \frac{1}{2K}$.

posant : $g_n(x) = \sum_{K=1}^{n} |f_{K+1}(x) - f_K(x)|$

il vient : $\|g_n(x)\|_{L^p} \leqslant 1$.

Cas :

$$\|g_n(x)\|_{L^p} = \left\| \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k| \right\|_{L^p}$$
$$< \sum_{k=1}^{n} \|f_{k+1} - f_k\|_{L^p}$$
$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$
$$\Rightarrow \|g_n(x)\|_{L^p} < 1.$$

On aura $g_n \in L^p$ et $\|g_n(x)\|_{L^p} < 1$

de plus la suite $(g_n)_n$ est $\nearrow$.

Car $g_{n+1} - g_n = \sum_{k=1}^{n+1} |f_{k+1} - f_k| - \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k|$

$= |f_{n+1} - f_n| > 0$

On pourra $\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = g(x)$.

- d'après théorème de convergence monotone $g \in L^p$.

Th de cv monotone :

$g_n \in L^p$ et $\lim g_n = g$ et $(g_n) \nearrow$ donc on :

$g \in L^p \leftrightarrow \|g_n\|_{L^p} < \Pi$

C'est à dire : $g_n \xrightarrow{PP} g$

càd la serie $\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k|$ Converge PP

donc $f_{nk}$ Converge PP nait vers $f$.

mq : $f \in L^p$ ?

On a : $|f(x) - f_{n_1}(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| = g(x)$

$\Rightarrow |f(x) - f_{n_1}(x)| < |f(x)| + |f_{n_1}(x)|$

$\Rightarrow |f(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + g(x)$.

$\Rightarrow f \in L^p$.

* mq maintenant que $f_n \to f$ dans $L^p$ ?

la suite $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy
si on fixe $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ tq $\forall m, n > N_\varepsilon$

$$\|f_m - f_n\|_{L^p} < \varepsilon \Rightarrow \left(\int |f_m - f_n|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \int |f_m - f_n|^p < \varepsilon^p$$

- Choisissons $n > N_\varepsilon$ et $k$ assez grand pour que $n_k > N_\varepsilon$
- Alors : $\int |f_m - f_{n_k}|^p < \varepsilon^p$

On pose :

(devoir) $\varepsilon_k(x) = |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^p \in L^p$

de plus $\varepsilon_k(x) \geq 0$, on pourra donc appliquer le lemme Fatou

$$\int \lim_{+\infty} \inf \varepsilon_k(x)\, d\eta \leq \lim_{+\infty} \inf \int \varepsilon_k(x)\, d\eta$$

- mais comme $\varepsilon_k(x) \longrightarrow |f_m - f(x)|^p$ pp

on aura enfait

$$|f_n(x) - f(x)|^p\, d\eta \leq \lim \inf \int \varepsilon_k(x)\, d\eta < \varepsilon^p$$

$$\Rightarrow \|f_m(x) - f(x)\|_{L^p} = 0.$$

## Espace Uniformément Convexe :

**Déf** : un ev normé $X$ est dite uniformément Convexe si on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall (x,y) \in X^2$

$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

**Théorème** :

tout espace uniformément Convexe est un espace réflexive.

## Inégalité de Clarkson :

- Soit $2 \leq p < \infty$ On a :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} \left( \|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right)$$

- Si $1 < p < 2$ On a :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q + \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^q \leq \left( \frac{1}{2} \left( \|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right) \right)^{\frac{1}{p-2}}$$

tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

**Preuve** :

**Lemme** : Si $p \in [2, +\infty[$ On a :

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2^{p-2} \left( |a|^p + |b|^p \right)$$

On Considère la fct :

$f(x) = (1 + x^{1/p})^p + (1 - x^{1/p})^p , x \in ]0,1[$

$f'(x) = [p(1+x^{p})^{p-1} \cdot \frac{1}{p} x^{1/p - 1}]$
$+ p(1 - x^{1/p})^{p-1} (-\frac{1}{p}) x^{1/p - 1}$

$f'(x) = [(1+x^{1/p})^{p-1} x^{\frac{1-p}{p}}] - [(1 - x^{1/p})^{p-1} x^{\frac{1-p}{p}}]$

$= [(1+x^{1/p})^{p-1} (x^{-1/p})^{p-1}] - [(1-x^{1/p})^{p-1} (x^{-1/p})^{p-1}]$

$= [(1+x^{1/p}) x^{-1/p}]^{p-1} - [(1-x^{1/p}) x^{-1/p}]^{p-1}$

$= (1+x^{-1/p})^{p-1} - (x^{-1/p} - 1)^{p-1}$

de mm façon :

(devoir) $f''(x) = \frac{x^{-1-\frac{1}{p}}}{p} [(x^{-1/p}+1)^{p-2} - (x^{-1/p}-1)^{p-2}] \leq 0$

Lemme :

Pour $p \in [2, +\infty[$ On a :

$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p)$

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | |
| $f'$ | $\searrow$ | $f'(1)$ |

$f'(1) = 2^{p-1}$.

donc $\forall x \in ]0,1]$ On a $f'(x) \geq 2^{p-1}$

Comme : $\int_x^1 f'(t) = [f(t)]_x^1 = f(1) - f(x)$

On a : $f(x) \leq 2^{p-1}(1+x)$

Car : $f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(t)\,dt$.

$\Rightarrow f(1) - f(x) \geq \int_x^1 2^{p-1}\,dt$

$\Rightarrow f(1) - f(x) \geq 2^{p-1}\int_x^1 dt$

$\Rightarrow f(1) - f(x) \geq 2^{p-1}(1-x)$ .... ①

On a : $f(x) = (1+x^{1/p})^p + (1-x^{1/p})^p$

$\Rightarrow f(1) = 2^p$

① $\Leftrightarrow 2^p - f(x) \geq 2^{p-1}(1-x)$

$\Rightarrow f(x) \leq 2^p - 2^{p-1}(1-x)$.

$\Rightarrow f(x) \leq 2^p - 2^{p-1} + 2^{p-1}x$

$\leq 2^p(1-2^{-1}) + 2^{p-1}x$

$\Rightarrow f(x) \leq 2^{p-1} + 2^{p-1}x$

$\Rightarrow f(x) \leq 2^{p-1}(1+x)$ .... (I)

On a $f(x) = (1+x^{1/p})^p + (1-x^{1/p})^p$

posant : $x = \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^p$

$\Rightarrow f(x) = \left(1+\frac{|b|}{|a|}\right)^p + \left(1-\frac{|b|}{|a|}\right)^p$

$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{|a|+|b|}{|a|}\right)^p + \left(\frac{|a|-|b|}{|a|}\right)^p$

$\Rightarrow |a|^p f(x) = (|a|+|b|)^p + (|a|-|b|)^p$ .... (II)

d'après (I) et (II) On a :

Scanned by CamScanner

$$\leqslant |a|^p\, 2^{p-1}\,(1+x).$$

$$\Rightarrow (|a|+|b|)^p + (|a|-|b|)^p \leqslant |a|^p\, 2^{p-1}\left(1+\left(\frac{|b|}{|a|}\right)^p\right)$$

$$\Rightarrow (|a|+|b|)^p + (|a|-|b|)^p \leqslant |a|^p\, 2^{p-1}\left(\frac{|a|^p+|b|^p}{|a|^p}\right)$$

$$\Rightarrow (|a|+|b|)^p + (|a|-|b|^p) \leqslant 2^{p-1}\left(|a|^p+|b|^p\right)$$

Comme : $|a+b|^p + |a-b|^p \leqslant (|a|+|b|)^p + (|a|-|b|)^p$

On obtient :

$$\Rightarrow |a+b|^p + |a-b|^p \leqslant 2^{p-1}\left(|a|^p+|b|^p\right)$$

## Preuve : 1<sup></sup>

## Preuve : $1^{er}$ Inégalité de Clarkson :

$$? \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2}\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right)$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p = \int \left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \int \left|\frac{f-g}{2}\right|^p$$

$$= \frac{1}{2^p}\int |f+g|^p + |f-g|^p$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2^p}\int 2^{p-1}\left(|f|^p+|g|^p\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\int |f|^p + \int |g|^p\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right)$$

## Théorème :

$L^p$ est uniformément convexe et donc réflexive.

# Démonstration :

$L^p$ est uniformément Convexe ssi :

$\forall \varepsilon > 0 . \exists \delta(\varepsilon) > 0 .$

$\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} = 1$ et $\|f-g\|_{L^p} \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ ?

1 Cas : $p \in [2, +\infty[$

On a : $\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} \left( \|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right)$

$\leq \frac{1}{2} \cdot 2$

$\leq 1 .$

$\rightarrow \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq 1 - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \ldots \mathrm{I}$

On a : $\|f-g\|_{L^p} \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p} \geq \varepsilon/2 .$

$\Rightarrow -\left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq -\left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p .$

$\mathrm{I} \Leftrightarrow \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p$

$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} \leq \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} .$

$\leq 1 - 1 + \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p}$

$\leq 1 - \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} \right]$

$\exists \ \delta(\varepsilon) = 1 - \left( \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p}$ tq

$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} \leq 1 - \delta(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $L^p$ est uniformément Convexe

$\Rightarrow$ $L^p$ est reflexive pour $p \in [2, +\infty[$

Scanned by CamScanner

2 Cas : $1 < p < 2$

mq l'espace $L^p$ est reflexive

càd : $L^p$ est un espace uniformément Convexe.

càd : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} = 1$

et $\|f-g\|_{L^p} > \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} < 1 - \delta(\varepsilon)$

en utilisant la deuxième inégalité de clarkson

(I) $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^q \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|^p + \|g\|^p\right)^{1/p-1}$

On a : $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} = 1$

et $\|f-g\|_{L^p} > \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p} \geq \varepsilon/2$

$\Rightarrow \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^q \geq (\varepsilon/2)^q$

(II) $\Rightarrow -\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^q \leq -(\varepsilon/2)^q$

(I) $\Leftrightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^q < 1 - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^q$

$\Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^q \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q$ d'après (II)

$\Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{1/q}$

$\Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} \leq 1 - 1 + \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{1/q}$

avec $1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q > 0$.

$$\Rightarrow \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} \leq 1-\left(1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^q\right)$$

donc $\exists\ \delta(\varepsilon) = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{1/q}$

$$\Rightarrow \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} \leq 1-\delta(\varepsilon)$$

## Remarque.

L'espace $L^1$ n'est pas reflexive.
L'espace $L^\infty$ n'est pas reflexive.

## Preuve.

### Rappel :

① Soit $E$ un espace de Banach et soit $J$ l'injection canonique de $E$ dans $E''$.
on dit que $E$ est un espace Reflexif ssi : $J(E) = E''$.

ou bien :

② Soit $E$ un espace de Banach on dit que $E$ est Reflexif ssi :
$\exists\ B_E = \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$.
et compact pour la Topologie $\sigma(E, E')$

dual de $L^1$ : $(L^1)' = L^\infty$

## Preuve : "$L^1$ n'est pas Reflexif"

Considérons la suite $f_n = \alpha_n \mathbb{1}_{B(0,1/n)}$
avec n assez grand pour que :

$B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ et

$\alpha_n = |B(0, 1/n)|^{-1}$ de sorte que $\|f_n\|_{L^1} = 1$

Si $L^1$ est reflexif $\exists$ une sous suite $(f_{n_K})$ et une fct $f \in L^1$ tq $f_n \xrightarrow[\text{cvs}]{} f$

pour la Topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$

donc : $\int f_{n_K} \varepsilon \longrightarrow \int f \varepsilon \quad , \forall \varepsilon \in L^\infty$

lorsque $\varepsilon \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$

**Rappel :**

$C_c(\Omega \setminus \{0\}) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C}$
fct continue à Support Compact

**Rappel : "les fcts support Compact"**

- On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ a Support Compact si $\exists$ un compact $K \subset \Omega$ tq $f$ vaut zéro sur $\Omega \setminus K$.

Scanned by CamScanner

- On sait que $\int f_{nK} \varepsilon = 0$, pour K assez grand car $\varepsilon \in C_c[\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
- Il résulte de ① que : $\int f \varepsilon = 0$ $\forall \varepsilon \in C_c[\mathbb{R} \setminus \{0\})$, on obtient :

$f = 0$ pp sur $C_c(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

- par ailleurs Si l'on prend $\varepsilon = 1$ dans ① il vient $\int f = 1$ ce qui absurd

$\Rightarrow$ l'espace $L^1$ n'est pas Reflexif.

## Remarque :

On a $L^1$ n'est pas reflexif et $(L^1)' = L^\infty$

$\Rightarrow$ $L^\infty$ n'est pas reflexif.

## Rappel :

Si E n'est pas reflexif $\Rightarrow$ E' n'est pas reflexif

## "Dualité" :

## Théorème :

Soit $1 < p < +\infty$, et soit $\varepsilon \in (L^p)'$. alors il existe $U \in L^q$ unique tel que :

$$\langle \varepsilon, f \rangle = \int U f \quad \forall f \in L^p$$

de plus on a :

$$\| U \|_{L^q} = \| \varepsilon \|_{(L^p)'}$$

Scanned by CamScanner

$(L^p)' = L^{p'}$ ou $L^q$

tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $1 < p < \infty$

**Démonstration :**

$U \in L^{p'} \Rightarrow \|U\|_{L^{p'}} = \int (|U|^{p'})^{1/p'}$

On définit l'opérateur $T : L^q \longrightarrow (L^p)'$

par :

$\langle TU, f \rangle = \int Uf \quad , \forall f \in L^p.$

On a :

d'après l'inégalité de Hölder :

$|\langle TU, f \rangle| = \int |Uf| \leq \|U\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$

Car $U \in L^q$ et $f \in L^p$.

par suite :

(1) $\|TU\|_{(L^p)'} \leq \|U\|_{L^q}$ avec $\|f\|_{L^p} \leq 1$

d'autre part

posons : $f_0(x) = |U(x)|^{q-2} \cdot U(x)$

avec $f_0 = 0$ si $U(x) = 0$.

On a $f_0 \in L^p$ , $\|f_0\|_{L^p} = \|U\|_{L^q}^{q-1}$

et $\langle TU, f_0 \rangle = \|U\|_{L^q}^{q}$

Scanned by CamScanner

- $\langle TU, f\rangle = \int Uf = \int Uf$

$\langle TU, f_0\rangle = \int U f_0$

$= \int \bar{U} \times |U|^{q-2} \cdot U$

$\|U\|^q_{L^q} = \int |U|^2 \cdot |U|^{p-2} = \int |U|^q$

$\|TU\|_{(L^p)'} = |\langle TU, f_0\rangle| = |\|TU\|_{(L^p)'} \|f_0\| \cos(TU, f_0)|$

$\leq \|TU\|_{(L^p)'} \cdot \|f_0\|$

car $|\cos| \leq 1$

$\Rightarrow \|TU\|_{(L^p)'} \overset{②}{\geq} \dfrac{|\langle TU, f\rangle|}{\|f_0\|} = \dfrac{\|U\|^q_{L^q}}{\|U\|^{p-1}} = \|U\|_{L^q}$

d'aprés ① et ② on a l'égalité

cād $\|TU\|_{(L^p)'} = \|U\|_{L^q}$

cād $(L^p)' = L^{p'} = L^q$

**Remarque**

① $(L^1)' = L^\infty$

② $(L^\infty)'$ contient $L^1$

cād: $(L^\infty)'$ existe mais nous reconnaissons dans les année à venir.

## Séparabilité :

**exposé :**

étudier la séparabilité de l'espace $L^p$ mais $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

## Rappel :

On dit que un espace $E$ est séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense ($E$ esp métrique)

càd : une suite de point $(x_n) \in E$.

tq : $\forall x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x) < \varepsilon$.

$|x_n - x| < \varepsilon$.

## Conclusion :

| | Reflexif | Séparable | espace de dual |
|---|---|---|---|
| $L^p$ $1<p<\infty$ | oui | oui | $L^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ |
| $L^1$ | non | oui | $L^\infty$ |
| $L^\infty$ | non | non | contient $L^1$ |

Scanned by CamScanner

Chapitre 2 -

## Convolution et régularisation : on prend $\Omega = \mathbb{R}^N$

**Théorème :**

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ la fct $y \to f(x-y)\, g(y)$ est Intégrable sur $\mathbb{R}^N$ on pose :

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Alors : $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f * g\| \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$

**La preuve :**

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = |f(x-y)|^{1/p} * |g(y)| \cdot |f(x-y)|^{1/q}$$

car : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

d'après Inégalité de Hölder

(I) $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left[ |f(x-y)|^{1/p}\, |g(y)|\, |f(x-y)|^{1/q} \right] dy$

Comme $|f(x-y)|^{1/q} \in L^q$

et $|f(x-y)|^{1/p}\, |g(y)| \in L^p$

(I) $\Rightarrow \int |f(x-y)|\,|g(y)|\, dy \leq \left\| |f(x-y)|^{1/p} \cdot |g(y)| \right\|_{L^p} \cdot \left\| |f(x-y)|^{1/q} \right\|_{L^q}$

Scanned by CamScanner

$$\int |f(x-y)||g(y)|\,dy \leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(x-y)|^{1/p} \cdot |g(y)|\right)^p dy\right]^{1/p} \times \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|f(x-y)|^{1/q}\right)^q dy\right]^{1/q}$$

$$\int |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \leqslant \left[\int |f(x-y)||g(y)|^r dy\right]^{1/p} \left[\int |f(x-y)|\,dy\right]^{1/q}$$

$$|f * g| \leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|^r\right]^{1/p} \cdot \|f\|_{L^1}^{1/q}$$

$$|f * g|^r \leqslant \int |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy \cdot \|f\|_{L^1}^{p/q}$$

$$\Longrightarrow |f * g|^r \leqslant (|f| * |g|^r)\,\|f\|_{L^1}^{p/q}$$

$$\|f * g\|_{L^p} < \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}\ ?$$

$$\int |f * g|^p \leqslant \int (|f| \cdot |g|^r)\,\|f\|_{L^1}^{p/q}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^1}^{p/q} \int |f| * |g|^p$$

On a : $\int f * g = \int f \cdot \int g$

$$\int |f * g|^p < \|f\|_{L^1}^{p/q} \int |f| \int |g|^q$$

$$\left(\|f * g\|_{L^p}^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\|f\|_{L^1}^{p/q} \cdot \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}\right)^{1/p}$$

Scanned by CamScanner

$$\Longrightarrow \|f*g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1}^{1/q} \, \|f\|_{L^1}^{1/p} \cdot \|g\|_{L^p}$$

$$\Longrightarrow \|f*g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$$

d'où le résultat.

**Lemme:**

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Alors: $(f*g)_n = (g*f)_n$

**Support dans la Convolution:**

**Rappel:**

la notion de support d'une fct continue est connue c'est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $f$ est nulle càd. l'adhérence d'ensemble $\{x \mid f(x) \neq 0\}$

support $f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$.

l'adhérence de $X$ est le plus petit fermé contenant $X$ càd $X \subset \overline{X}$

**Proposition:** Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Alors: $\operatorname{Supp}(f*g) \subseteq \overline{\operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g}$

Preuve :

Si $t \in Supp\, f$ et $(x-t) \in Supp\, g$.
alors $x \in (Supp\, f + Supp\, g)$.
on pose un complimentaire on obtient

$t \in Supp\, f$ et $(x-t) \in Supp\, g \Rightarrow x \in Supp\, f + Supp\, g$

$x \notin Supp\, f + Supp\, g \Rightarrow t \notin Supp\, f$ et $(x-t) \notin Supp\, g$.
alors :

$f(t) = 0$ ou $g(x-t) = 0$

On a :

$(f*g)_x = (g*f)_x = \int f(t).g(x-t)\ dt = 0$

càd : $x \in \mathbb{R}^n \setminus Supp\, f + Supp\, g \rightarrow x \in (f*g)^{-1}\{0\}$
en pose un complimentaire.

$\{x \setminus (f*g)_x \neq 0\} \subset Supp\, f + Supp\, g$.

et on prend l'adhérence.

$\overline{\{x \setminus (f*g) \neq 0\}} \subset \overline{\{Supp\, f + Supp\, g\}}$

d'ou le résultat :

$Supp\,(f*g) \subset \overline{Supp\, f + Supp\, g}$

Scanned by CamScanner

## Proposition :

Soient $f \in C_c^K(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (K entier) alors :

$$f * g \in C^K(\mathbb{R}^n)$$

et :

$$D^\alpha (f * g) = D^\alpha f * g$$

telque :

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} + \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} f$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots \alpha_n \leq K$

## Démonstration :

Pour $K = 1$

montrons que $f * g$ est différentielle et que $\nabla (f * g) = \nabla f * g$

tq $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

soit $h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| < 1 \rightarrow h \in B(0,1)$

($h$ destiné à Tend vers 0)

$$| f(x+h-y) - f(x-y) - h \nabla f(x-y) |$$

$$\left| \int_0^1 h \nabla f(x+sh-y)\, ds - h \nabla f(x-y) \right| \quad \text{I}$$

Car $= \int_0^1 h \nabla f(x+sh-y)\,ds$ $\quad - \int f'(g' \circ f)$

$\int (f \circ v') = \int (f' \circ x)\, v'$

$\left| f(x+sh-y) \right|_0^1 = f(x-sh-y) - f(x-y)$

$\text{I} = \left| h \int_0^1 \nabla f(x+sh-y)\,ds - h \nabla f(x-y) \right|$

$= \left| h \left( \int_0^1 \nabla f(x+sh-y)\,ds - \nabla f(x-y) \right) \right|$

$= |h| \int_0^1 \left( \nabla f(x+sh-y) - \nabla f(x-y) \right) ds$

$\left| f(x+h-y) - f(x-y) - h \nabla f(x-y) \right| \leq |h| \, \varepsilon(|h|)$

car $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$

càd $\nabla f$ est uniformément continue avec $\varepsilon \to 0$ si $|h| \to 0$

Soit $K$ un compact fixé assez grand pour $x + B(0,1) - \operatorname{Supp} f \subset K$

$x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \operatorname{Supp} f$, $h \in B(0,1)$.

On a $= f(x+sh-y) - f(x-y) - h \nabla f(x-y) = 0$

Car $h \to 0$, $\forall y \notin K$, $\forall h \in B(0,1)$.

• On a déjà montrer que :

$$\left| f(x+h-y) - f(x-y) - h \nabla f(x-y) \right| \leq |h| \cdot \varepsilon(|h|).$$

• et que :

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h \nabla f(x-y) = 0 \ , \forall \ h \in B(0,1)$$

• tq :

$$x + B(0,1) - \operatorname{Supp} f \subset K \qquad (K \text{ Compact fixé})$$

- On a déjà démontrer que

$$|f(x+h-y)-f(x-y)-h\nabla f(x-y)| \leq |h|\,\varepsilon(|h|)$$

et que

$$f(x+h-y)-f(x-y)-h\nabla f(x-y)=0 \quad \forall y \notin K$$
$$\forall h \in B(0,1)$$

tq $x+B(0,1)-\mathrm{Supp}\, f \subset K$

$$y \notin K \Rightarrow y \notin \mathrm{Supp}\, f$$

Par Conséquent

$$\Rightarrow |f(x+h-y)-f(x-y)-h\nabla f(x-y)| \leq |h|\cdot\varepsilon(|h|)\,\mathbb{1}_K$$

$$\Rightarrow |g(y)|\,|f(x+h-y)-f(x-y)-h\nabla f(x-y)| \leq |h|\,\varepsilon(|h|)\,|g(y)|\,\mathbb{1}_K$$

$$\Rightarrow |f(x+h-y)g(y)-f(x-y)g(y)-h\,g(y)\nabla f(x-y)| \leq |h|\,\varepsilon(|h|)\,g(y)\,\mathbb{1}_K$$

$\forall y \in B(0,1)$

$$\Rightarrow \left|\int f(x+h-y)g(y)\,dy-\int f(x-y)g(y)\,dy-h\int g(y)\nabla f(x-y)\,dy\right| \leq |h|\cdot\varepsilon(|h|)\int_K g(y)\,dy$$

$$|(f*g)_{(x+h)}-(f*g)_{(x)}-h(\nabla f*g)_{(x)}| \leq |h|\,\varepsilon(|h|)\int_K g(y)\,dy$$

Scanned by CamScanner

Si $|h| \to 0 \to \varepsilon(|h|) \to 0$

$$\lim_{h \to 0} (f*g)_{(x+h)} - (f*g)_{(x)} - h(\nabla f * g)_{(x)} = 0$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f*g)_{(x+h)} - (f*g)_{(x)}}{h} = (\nabla f * g)_{(x)}$$

Ainsi $\nabla(f*g)_{(x)} = \nabla f * g$

d'où le résultat.

## Suites régularisantes :

**Déf :** On appelle suite régularisante toute suite $(f)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fct tq :

$f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{Supp} f_n \subset B(0, 1/n)$,

$\int f_n = 1$, $f_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$.

**Proposition :**

Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$ alors : $f_n * f \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$

**Preuve :**

Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^N$ fixé pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in K$
$\forall y \in B(0, \delta)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $|x - y - x| < \delta \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$

$|y| < \delta \Rightarrow y \in B(0, \delta)$

On a :

$$(f_n * f)(x) - f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, f_n(y)\, dy\right) - f(x)$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, f_n(y)\, dy\right] - \int \underbrace{f(x)\, f_n(y)\, dy}_{f(x)}$$

(Car $\int f_n(y)\, dy = 1$).

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\, f_n(y)\, dy$$

$$= \int_{B(0, 1/n)} (f(x-y) - f(x))\, f_n(y)\, dy$$

$$|f_n * f(x) - f(x)| = \left| \int_{B(0, 1/n)} (f(x-y) - f(x))\, f_n(y)\, dy \right|$$

$$\leqslant \int |f(x-y) - f(x)|\, |f_n(y)|\, dy$$

$$\leqslant \int \varepsilon\, |f_n(y)|\, dy$$

Car $f$ est continue

$$|f_n * f - f| \leqslant \varepsilon \int \underbrace{|f_n(y)|\, dy}_{=1} = \underbrace{\int f_n(y)\, dy}_{=1}$$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow | f_n * f - f | = 0$

$\Rightarrow f_n * f \xrightarrow[\text{uniformément}]{} f$ .

# Transformation de Fourier =

## I1 - Transformation de Fourier dans $L^1$ =

### A - Théorème de Rieman lebesgue =

**Def** = dans ce suit, f désigne une fonction à valeur complexe de la valeur $x \in \mathbb{R}^n$

càd : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de la fct f' et on note ( $\hat{f}$ ) ou bien $F(f)$

la fonction à valeurs complexes tq

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

plus généralement pour $n \geq 1$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on appelle la transforme de Fourier de la fct f et on note $\hat{f}$ définie par =

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Exemple :

- Soit la fct $f$ définie par :
$$f(x) = e^{-|x|} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

- Calculer la Transformée de Fourier de $f$.

On a :
$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \, e^{-ix\xi} \, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot e^{-ix\xi} \, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \, e^{-ix\xi} \, dx \right]$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x} \, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\xi)x} \, dx \right]$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{(1-i\xi)x}}{1-i\xi} \right]_{-\infty}^{0} - \left[ -\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{1+i\xi} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \right]$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1+i\xi) + (1-i\xi)}{(1+i\xi)(1-i\xi)}$$

donc
$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \, (1+\xi)^2}$$

## 2- Transformée inverse de Fourier :

**Déf :**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi .$$

**Expl :**

Soit $f(x) = e^{-|x|}$ , $x \in \mathbb{R}$

① Calculer la Transformée de Fourier de $f$.

② En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$

**Solution :**

① $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,(1+\xi^2)}$

② $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = ?$

d'après la Transformée l'inverse de Fourier on a :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,(1+\xi^2)}\, e^{ix\xi}\, d\xi .$$

$$\Rightarrow e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)}\, e^{ix\xi}\, d\xi .$$

$$\Rightarrow e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x\xi) + i\sin(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi$$

$$\Rightarrow e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2} + i\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi\right]$$

Par Identification On a :

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = e^{-|x|} \quad \dots \text{(I)}$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = 0$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = \pi \cdot e^{-|x|}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = \pi\, e^{-|x|}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2e}$$

Remarque :

dans le cas particulier d'une fct à variables séparées :

$$f(x) = f_1(x)\dots\dots f_n(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)$$

Alors.

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi)\dots\dots\hat{f}_n(\xi) = \prod_{i=1}^{n} \hat{f}_i(\xi)$$

Scanned by CamScanner

## Théorème :

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ est une fct continue de $\xi \in \mathbb{R}^n$ et tend vers 0 à l'infini

càd : $\lim_{\xi \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

## Démonstration :

montrons que $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

Pour $\xi \neq 0$. On considère un changement de variable $y = x + \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}$

Comme : $e^{-i \frac{\pi}{|\xi|^2} \xi \xi} = -1 \dashrightarrow \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1$

On a : $\hat{f}(\xi) = \frac{-1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\left(x + \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right)} f(x)\, dx$

$= \frac{-1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y} f\left(y - \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right) dy$

$= \frac{-1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f\left(x - \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right) dx$

(à refair) $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} \left( f(x) - f\left(x - \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right)\right) dx$

$2\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi) = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f\left(x - \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right) dx$

$\Rightarrow 2\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int -e^{-ix\xi} f\left(x - \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right) dx + \hat{f}(\xi)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int -e^{-ix\xi} f\left(x - \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right) dx +$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \left[ f(x) - f\left(x - \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}\right) \right] dx \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\pi \xi}{|\xi|^2}\right) \right| dx .$$

$$\leqslant \frac{1}{2(2\pi)^{n/2}} . \quad \varepsilon$$ car $f$ est Continue.

$$\Rightarrow \lim_{\xi \mapsto +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Quelque propriétés de la Transformation de Fourier :

① - linéarité :

Soient $f$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Alors : $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$

$$F(\alpha f + \beta g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\alpha f + \beta g)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\alpha f e^{-ix\xi} + \beta g e^{-ix\xi})\, dx$$

$$= \alpha \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f e^{-ix\xi} dx \right] + \beta \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g e^{-ix\xi}\, dx \right]$$

$$= \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} .$$

Scanned by CamScanner

② Produit de Convolution et Transformation de Fourier -

Proposition : le produit de convolution est Commutatif et on a : $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$F(f*g) = \sqrt{2\pi}\, F(f)\cdot F(g)$$

$$\widehat{f*g} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}\cdot\hat{g}$$

Démonstration :

$$F(f*g)_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (f*g)_{(x)}\, e^{-ixz}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy\right] e^{-ixz}\, dx$$

(Car : $f*g = g*f$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\, f(y)\, dy\right] e^{-ixz}\, dx$$

(d'après Fubini)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\, e^{-ixz}\, dx\right) dy$$

On pose : $x - y = Z \Rightarrow x = Z + y$.

$$F(f*g)_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} g(Z)\, e^{-i(Z+y)z}\, dZ\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(Z)\, e^{-iZz}\, e^{-iyz}\, dZ\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy\xi} dy \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-iz\xi} dz \right]$$

$$= \sqrt{2\pi} \left[ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(y) e^{-iy\xi} dy}_{\hat{f}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-iz\xi} dz}_{\hat{g}} \right]$$

$$\Longrightarrow F(f * g)_{(\xi)} = \sqrt{2\pi}\ \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi).$$

- en général si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\Longrightarrow F(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$$

## La dérivée de la Transformée de Fourier :

Prop :

$$\frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi} = F(-ix f(x))$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -ix f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Preuve :

On a : $\dfrac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h}$

$$\frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix(\xi+h)} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \right].$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi} \cdot e^{-ixh}\, dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\left[\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right] dx.$$

$$\frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\left[\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right] dx.$$

On a : $\left| f(x)\, e^{-ix\xi}\left[\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right]\right| = |f(x)| \left|\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right|$

Rappel :

$e^{x}-1 \leq x$

$\Rightarrow e^{-ixh}-1 \leq -ixh.$

$\Rightarrow \left|\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right| \leq |-ix|.$

donc : $\left|f(x)\, e^{-ix\xi}\left[\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right]\right| \leq |f(x)| \left|\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right| \leq g(x)$

2ème méthode :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\hat{f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(f(x)\, e^{-ix\xi}\right) dx.$$

avec : $\left|\frac{\partial}{\partial \xi} f(x)\, e^{-ix\xi}\right| = \left|-ix\, f(x)\, e^{-ix\xi}\right|$

$$= |x|\,|f(x)|$$

tel que : $\left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(x) e^{-ix\xi} \right| \leq g(x)$

ainsi $\frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -ix \, f(x) e^{-ix\xi} \, dx$

$= F(-ix \, f(x))$

**Lemme :**

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x} e^{-ix\xi} \, dx$$

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = i\xi F(f) = \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \, dx$$

Scanned by CamScanner