

T D

Transformation de
l'espace L^p

Exercice 1 =

Soient f, g deux fct mesurables =

Rappel =

Si f est mesurable les conditions suivantes sont équivalent =

- ① f est mesurable
- ② $\forall a \in \mathbb{R} : \{ f(x) > a \} \in \mathcal{A}$
- ③ $\forall a \in \mathbb{R} : \{ f(x) < a \} \in \mathcal{A}$
- ④ $\forall a \in \mathbb{R} : \{ f(x) \geq a \} \in \mathcal{A}$
- ⑤ $\forall a \in \mathbb{R} : \{ f(x) \leq a \} \in \mathcal{A}$

① montrons que αf est mesurable

1 cas : $\alpha > 0$

$$\{ (\alpha f)(x) > a \} = \{ f(x) > \frac{a}{\alpha} \} \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow \alpha f$ est mesurable.

2 cas : $\alpha < 0$

$$\{ (\alpha f)(x) > a \} = \{ f(x) < \frac{a}{\alpha} \} \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow \alpha f$ est mesurable.

3 cas : $\alpha = 0$

$$\Rightarrow (\alpha f) = \text{ct}$$

$\Rightarrow \alpha f$ est mesurable.

② montrons que $f + \alpha$ est mesurable :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{ f(n) + \alpha > a \} = \{ f(n) > a - \alpha \} \in \mathcal{A} \\ \Rightarrow f + \alpha \text{ est mesurable.}$$

③ montrons que $f + g$ est mesurable

$$\forall a \in \mathbb{R} : \{ (f+g)(n) > a \} = \{ f(n) > a - g(n) \} \in \mathcal{A} \\ \Rightarrow f + g \text{ est mesurable.}$$

④ montrons que f^2 est mesurable

$$\forall a \in \mathbb{R}_+ : \{ f^2(n) < a \} = \{ |f| < \sqrt{a} \} \\ = \{ -\sqrt{a} < f < \sqrt{a} \} \\ = \{ f > -\sqrt{a} \} \cap \{ f < \sqrt{a} \} \\ \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A} \\ \Rightarrow f^2 \text{ est mesurable car la union est stable par l'intersection.}$$

⑤ montrons que $f - g$ est mesurable

$$f - g = \frac{1}{4} [(f+g)^2 + (f-g)^2] \\ \Rightarrow f - g \text{ est mesurable}$$

Exercice 2 =

Soit :

$$f_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{1}_{[k, k+1]}$$

• montrons que $f_n \notin L^1 =$

il s'agit de démontrer que (f_n) n'est pas une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned} (f_n \text{ de Cauchy}) &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall p, q > N_\varepsilon \Rightarrow |f_p - f_q| < \varepsilon) \\ (f_n \text{ n'est pas de Cauchy}) &\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0, \forall N_\varepsilon > 0, \exists p, q > N_\varepsilon \Rightarrow |f_p - f_q| > \varepsilon) \end{aligned}$$

Pour $p = 2n$, $q = n$.

$$\begin{aligned} |f_{2n} - f_n| &= \left| \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$1 < k < n$$

$$\Rightarrow 1+n < k+n < 2n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{k+n} < \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1}$$

$$|f_{2n} - f_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow |f_{2n} - f_n| > \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n 1.$$

$$\Rightarrow |f_{2n} - f_n| > \frac{1}{2}$$

donc $(f_n)_n$ n'est pas de Cauchy

$$\Rightarrow (f_n) \notin L^1.$$

2 méthode.

$$f_n \in L^1 \Rightarrow \|f_n\|_{L^1} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \|f_n\|_{L^1} = +\infty \Rightarrow f_n \notin L^1.$$

$$\|f_n\|_{L^1} = \int |f_n| d\eta$$

$$f_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{1}_{[k, k+1]}$$

$$\int f_n d\eta = \int \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{1}_{[k, k+1]} d\eta = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \int_k^{k+1} d\eta = 1.$$

$$\int f_n d\eta = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

• est une suite harmonique toujours divergente

Exercice 3.

- ① Soit t un réel, calculer primitive de
 $x \rightarrow \exp(-xt) \sin x$.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-xt} e^{ix} = e^{-xt} \cos x + i e^{-xt} \sin x$$

$$e^{x(i-t)} = e^{-xt} \cos x + i e^{-xt} \sin x$$

$$e^{-xt} \sin x = \operatorname{Im} e^{x(i-t)}$$

$$\Rightarrow \int e^{-xt} \sin x \, dx = \int \operatorname{Im} e^{x(i-t)} \, dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-xt} \sin x \, dx = \operatorname{Im} \int e^{x(i-t)} \, dx \\ = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{i-t} e^{x(i-t)} \right]$$

$$\frac{1}{i-t} e^{x(i-t)} = \frac{e^{-xt} \cos x + i e^{-xt} \sin x \cdot (-i-t)}{(i-t)(-i-t)}$$

$$= \frac{-i e^{-xt} \cos x - t e^{-xt} \cos x + e^{-xt} \sin x - i t e^{-xt} \sin x}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{-t e^{-xt} \cos x + e^{-xt} \sin x}{t^2 + 1} + i \frac{-e^{-xt} \cos x - t e^{-xt} \sin x}{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \int e^{-xt} \sin x \, dx = \frac{-e^{-xt} \cos x - t e^{-xt} \sin x}{t^2 + 1}$$

② on pose : $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, dt$

en utilisant le Théorème de Fubini
donner l'expression de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
 \Rightarrow \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \right) \sin x dx \\
 &= \int_0^A \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dt dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^A e^{-xt} \sin x dx \right) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-xt} (\cos x + t \sin x)}{t^2 + 1} \right]_0^A dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-At} (\cos A + t \sin A) + 1}{t^2 + 1} dt \\
 &= \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx
 \end{aligned}$$

③ en utilisant le Théorème de cvg dominée

mq $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Rappel Th de cvp dominée

$$① \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$② \exists p \in L^1, |f_n(x)| \leq p(x) \\ \lim \int f_n(x) dx = \int \lim f_n(x) dx = \int p(x) dx$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx \\ = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \left(\frac{e^{-At} (\cos A + t \sin A)}{t^2 + 1} + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt$$

Où :

$$① \lim_{A \rightarrow +\infty} f_A(t) = \frac{1}{t^2 + 1} = f(t)$$

$$② \left| \frac{e^{-At} (\cos A + t \sin A)}{t^2 + 1} + \frac{1}{t^2 + 1} \right| \\ \leq \left| \frac{e^{-At} (\cos A + t \sin A)}{t^2 + 1} \right| + \frac{1}{t^2 + 1} \\ = \frac{|e^{-At}| |\cos A + t \sin A|}{t^2 + 1} + \frac{1}{t^2 + 1}$$

Si on pose $A > 1 \Rightarrow -tA < -t$
 $\Rightarrow e^{tA} < e^t$

$$\leq \frac{e^{-t} (1+t)}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} = p(t) \in L^1$$

car $p(t)$ est (continue) donc (Intégrable) d'où $\in L^1$
 et $(|\cos A| < 1$ et $|\sin A| < 1)$

d'après Th de cvg dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^A \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^A f_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= [\text{Arc tg } t]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \text{Arc tg } \infty - \text{Arc tg } 0 \end{aligned}$$

① $\text{Arc tg } (+\infty) = x$
 $\text{tg } x = +\infty$
 $\frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \Rightarrow \cos x = 0$
 $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + K\pi, K \in \mathbb{Z}$

② $\text{Arc tg } 0 = y$
 $\text{tg } y = 0$
 $\frac{\sin y}{\cos y} = 0 \Rightarrow \sin y = 0$
 $\Rightarrow y = K\pi, K \in \mathbb{Z}$

donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} + K\pi - K\pi = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4 :

① Soit :

$$f_n(x) = x(1-x)^n \mathbb{1}_{[0,1]}$$

mq :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

$$f_n(x) = \begin{cases} x(1-x)^n & , x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} x e^{n \ln(1-x)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

car : $\rightarrow 0 < x < 1$
 $< 1-x < 1$

$$\ln(1-x) < 0$$

③ $\forall x \in [0,1] \Rightarrow (1-x) < 1$
 $\Rightarrow (1-x)^n < 1$
 $\Rightarrow x(1-x)^n < x \in L^1$

$\exists g \in L^1$, tq $|f_n(x)| \leq g(x)$
 d'après Th de cvg dominée =

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$$

2^{ème} méthode =

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1-x)^n dx$$

On pose : $(1-x) = y \Rightarrow x = 1-y$

$\rightarrow dx = -dy$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1-x)^n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^0 (1-y) \cdot y^n (-dy)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-y) y^n dy$$

$$U(y) = 1-y \Rightarrow U'(y) = -1$$

$$V'(y) = y^n \Rightarrow V(y) = \frac{y^{n+1}}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(1-y) \frac{y^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{y^{n+1}}{n+1} dy$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 0$$

② Soit $f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^n$, $n \geq 1$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f_n(x) e^{-x/2} dx$.

on considère : $h_n(x) = f_n(x) e^{-x/2}$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) e^{-x/2} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^n e^{-x/2} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(1+x/n)}{n(1+2x/n)}\right]^n \cdot e^{-x/2} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x/n)^n}{(1+2x/n)^n} \cdot e^{-x/2} \\&= \frac{e^x}{e^{2x}} e^{-x/2} \\&= e^{-x/2}\end{aligned}$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = e^{-x/2}$$

Rappel :

$$\begin{aligned}1+x &\leq e^x \\1+x/n &\leq e^{x/n} \\&\Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x\end{aligned}$$

$$|h_n(x)| = |f_n(x)| e^{-x/2}$$

$$|h_n(x)| = \left| \left(\frac{n+x}{n+2n} \right)^n \right| e^{-x/2}$$

$$= \left| \frac{(1+x/n)^n}{(1+2/n)^n} \right| e^{-\frac{x}{2}} \leq \frac{e^x}{e^{2n}} e^{-x/2} = e^{-\frac{3x}{2}}$$

• $\exists g(x) = e^{-\frac{3x}{2}} \in L^1$ avec $|h_n(x)| \leq g(x)$

d'après th de cup dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n h_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{3x}{2}} dx$$

$$= -\frac{2}{3} \left[e^{-\frac{3x}{2}} \right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

③ Calculons $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n e^{-2x} dx$

posons $h_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n e^{-2x}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n e^{-2x} = e^x \cdot e^{-2x}$$

$$= e^{-x} = h(x)$$

$$|h_n(x)| = \left| \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| e^{-2x}$$

$$< e^x = g(x)$$

$$g(x) \in L^2(w)$$

donc d'après th de cor dominee

$$\lim \int_0^{\eta} h_n(x) dx = \int_0^{\eta} \lim h_n(x) dx$$

$$= \int_0^{\eta} e^{-x} dx = 1$$

Exercice 5 : Cauchy Schwartz

Soient $f \in L^2(X)$, $g \in L^2(X)$

$$\text{mq.} \quad \left(\int f \cdot g d\eta \right)^2 \leq \int f^2 d\eta \cdot \int g^2 d\eta$$

Rappel - inegalite de Hölder

$f \in L^p(w)$, $g \in L^{p'}(w)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}$$

Si on prend $p=2$ et $p'=2$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \int |f \cdot g| \leq \left(\int |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left(\int |f \cdot g| \right)^2 \leq \left[\left(\int |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 \right)^{1/2} \right]^2$$

$$\Rightarrow \left(\int f \cdot g \right)^2 \leq \int f^2 \cdot \int g^2$$

2^{ème} méthode =

$$\int (\lambda f + g)^2 d\eta \geq 0$$

$$\int (\lambda f)^2 + g^2 + 2\lambda f g d\eta \geq 0$$

$$\int \lambda^2 f^2 + \int g^2 + \int 2\lambda f g \geq 0$$

$$\lambda^2 \int f^2 + \lambda \int 2f g + \int g^2 \geq 0$$

• On considère : $P(\lambda) = \lambda^2 \int f^2 + 2\lambda \int f g + \int g^2 \geq 0$
un polynôme de degré 2

$$\Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$\Rightarrow 4(\int f g)^2 - 4 \int f^2 \int g^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (\int f g)^2 - \int f^2 \int g^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (\int f g)^2 \leq \int f^2 \int g^2$$

exercice = Examen TD

On donne la valeur de l'intégrale
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

① mq $z \in \mathbb{C}$ l'intégrale $I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 + zt} dt$
existe

② Calculer $I(z)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

Indication = On pose $U = t - \frac{z}{2}$
 Calculer la dérivée de la fonction

$$J(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+iz)^2} dt$$

Indication = $\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}$
 on note $A = \max(|a|, |b|)$.

- ③ on montre que $J'(x) = 0$
- ④ en déduire une expression de la fct $J(x)$.

Exercice =

Soit f une fct continue bornée sur $\mathbb{R}$.

$$I(n) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- ① - Montrer que $I(n)$ existe.
- ② - mg $\lim I(n) = \sqrt{2\pi} \cdot f(0)$.

Solution =

- ① puisque $t \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2} + zt}$ continue donc intégrable d'où $I(z)$ existe.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad U = t - \frac{z}{2} &\Rightarrow t = U + \frac{z}{2} \Rightarrow t^2 = \left(U + \frac{z}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow t^2 = U^2 + \frac{z^2}{4} + \frac{2Uz}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -t^2 &= -u^2 - \frac{z^2}{4} - uz \\
 -t^2 + zt &= -u^2 - \frac{z^2}{4} - uz + z(u + \frac{z}{2}) \\
 -t^2 + zt &= -u^2 + \frac{z^2}{4}
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 I(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t^2 + zt} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 + \frac{z^2}{4}} du \\
 &= e^{\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\
 &= \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{z^2}{4}}
 \end{aligned}$$

• calculer la dérivée de $\gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix)^2} dt$

Théorème =

$$\frac{\partial}{\partial x} \int f(x, t) dt = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

$$\text{ssi} = \exists g \in L^1 \text{ tq } \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| < g(t).$$

mq d'abord l'existence de $g =$

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= e^{-(t+ix)^2} \\
 \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) &= -2i(t+ix) e^{-(t+ix)^2} \\
 &= (2x - 2it) e^{-(t+ix)^2}
 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| = | (2x - 2it) e^{-(t+ix)^2} |$$

$$= |2x - 2it| \cdot |e^{-(t+ix)^2}|$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{On a :} \\ |e^{-(t+ix)^2}| = |e^{-(t^2 + 2itx - x^2)}| = e^{-t^2 + x^2} \\ \text{car } e^{ix} = e^{-2itx} = 1 \\ |2x - 2it| = \sqrt{4x^2 + 4t^2} \end{array} \right.$$

donc $\Rightarrow \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| = \sqrt{4x^2 + 4t^2} e^{-t^2 + x^2}$

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}, A = \max(|a|, |b|)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| \leq \sqrt{4A^2 + 4t^2} e^{-t^2 + A^2}$$

$$\exists g(t) = \sqrt{4A^2 + 4t^2} \cdot e^{-t^2 + A^2} \in L^1$$

car g est continue alors on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int f(x, t) dt = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

$$\frac{\partial}{\partial x} J(x) = \int_{\mathbb{R}} (2x - 2it) e^{-(t+ix)^2} dt.$$

③ mentionnons que $J'(x) = 0$.

$$J'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(2x - 2it)}_{h'} \underbrace{e^{-(t+ix)^2}}_{e^h} dt$$

$$= \left[e^{-(t+ix)^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\Rightarrow J'(x) = 0$$

④ déduire l'expression de $J(x)$ =
 puisque $J'(x) = 0$ donc la fonction
 $J(x)$ est une fct constante avec

$$J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\text{donc } J(x) = \sqrt{\pi}, \forall x$$

Solution 2 =

$$I(n) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{n}} dt$$

① montrons que $I(n)$ existe.

On a f une fct continue et de plus
 la fct exponentielle est une fct continue.
 ainsi $f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{n}}$ intégrable alors
 $I(n)$ existe.

② mentionnons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) = \sqrt{2\pi} f(0)$.

on pose $h_n(t) = f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} = f(0) e^{-\frac{t^2}{2}} = h$

et :

$$|h_n(t)| = \left| f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \quad \exists M > 0, \left| f\left(\frac{t}{n}\right) \right| < M$$

donc : $\left| f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right| < M e^{-\frac{t^2}{2}} = g(t) \in L^1$

• d'après th de cvg dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int f(0) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= f(0) \int e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

on pose $z = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{2}} dt$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) = f(0) \int e^{-z^2} \sqrt{2} dz$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) = f(0) \sqrt{2\pi}$$

Exercice 1 =

Soient f et g deux fcts définies sur $\mathbb{R}$,
Continues, T périodiques pour $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$(f * g)(x) = \int_0^T f(x-y) g(y) dy.$$

- 1 - mq $f * g$ est définie T périodique
- 2 - mq $(f * g) = g * f$

Solution -

1 - On a f et g deux fcts continues

car $y \rightarrow f(x-y) \cdot g(y)$ est intégrable
 $\Rightarrow (f * g)(x)$ est bien définie

$$\bullet \text{mq } (f * g)(x+T) = (f * g)(x)$$

$$(f * g)(x+T) = \int_0^T f(x+T-y) g(y) dy$$

$$= \int_0^T f(x-y) \cdot g(y) dy \text{ car } (f(x+T) = f(x))$$

$$= (f * g)$$

car f est T périodique.

$$\boxed{2} - \text{On a : } (f+g)(x) = \int_0^T f(x-y) g(y) dy$$

$$\text{on pose : } x-y = u \Rightarrow y = x-u \\ \Rightarrow dy = -du$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } (f+g)(x) &= \int_x^{x-T} -f(u) g(x-u) du \\ &= \int_x^x g(x-u) \cdot f(u) du \\ &= \int_{x-T+T}^{x-T} g(x-u) f(u) du \end{aligned}$$

(car $f+g$ est T périodique)

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \int_x^{x+T} g(x-u) f(u) du \\ &= \int_0^T g(x-u) f(u) du. \end{aligned}$$

$$\left(\int_{x+a}^{x+b} f = \int_a^b f \right)$$

$$(f+g)(x) = (g+f)(x)$$

Exercice 2 =

Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ définies par =

$$f(x) = e^{-a \frac{|x|^2}{2}}, \quad g(x) = e^{-b \frac{|x|^2}{2}}$$

Rappel =

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cos(\angle(x, y))$$

1 - montrer que =

$$(f+g)(x) = (g+f)(x) = e^{-\frac{a+b}{2} \frac{|x|^2}{2}} \cdot \left(\frac{2\pi}{a+b} \right)^{\frac{n}{2}}$$