Examen Dégre topologique
2018-2019

****

التمرين الأول الحل موجود في كتاب جبالي اسماعيل (التمرين 5صفحة 31)
التمرين الثاني الحل موجود في كتاب جبالي اسماعيل (التمرين 4صفحة 55)
التمرين الثالث هو التمرين 10صفحة 38في جبالي اسماعيل
ملاحظة جميع التمارين الموجودة في كتاب جبالي اسماعيل تطرح كل عام في الآختبارات

ladghem omar

Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Année universitaire : 2018-2019
Faculté des Mathématiques et Informatique,
Departement des Mathématiques.

$2^{ère}$ année Master L.M.D.(Maths)

Le 06-02-2019

Examen
Dégre topologique

Durée 1H 30 mn

$f^{-1}(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x}$

Exercice 1 :($6points$)
soit $\Omega =]-\alpha, \alpha[$, $(\alpha > 0)$ et $f(x) = ax^n$, $a \in R^*$ $, n \in N$ Montrer que

$$deg(f, \Omega, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si n est pair} \\ sgn(a), & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

Discuter attentivement les cas selon que le point est singulier, régulier et la parié de l'entier n.

Exercice 2 : ($6points$)
Soit C un fermé, borné d'un espace de Banach X et $f : C \to X$ une application compacte tel

compact

que :

$$\exists x_0 \in C_0,\ \forall \lambda > 1,\ \forall x \in \partial C,\ \boxed{f(x) - x_0 \neq \lambda(x - x_0)}$$

Montrer que f admet un point fixe dans C.
C_0 etant l'intérieur de C.
Indication : considerer la deformation $f_t(x) = (x - x_0) - t(f(x) - f(x_0))$

Exercice 3 :$(3 + 3 + 2)points$
Soit $\Omega = B(0, 1)$ la boule unité ouverte dans R^n et $f : \overline{\Omega} \to R^n$ une application continue.

(1) Montrer que l'on a l'alternative suivante :
(a) f admet au moins un point fixe
(b) $\exists x \in \partial\Omega\ \exists \lambda \in]0, 1[,\ x = \lambda f(x)$
(2) Supposons que f vérifie l'hypothèse suivante :

$$\langle x, f(x) \rangle > \|x\|^2,\ \forall x \in \Omega$$

ou $\langle . \rangle$ designe le produit scalaire dans R^n.
Montrer que f admet un point fixe.

$\|x\| = 1$

Exercice 5

Soit $\Omega =]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ et $f(x) = ax^n$ $(a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N})$. Montrer que

$$deg(f, \Omega, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ sgn(a), & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Corrigé

- $n = 0$: $f(x) = a \Rightarrow deg(f, \Omega, 0) = 0$ car $a \neq 0$
- $n = 1$: $f(x) = ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f'(x) = a \Rightarrow deg(f, \Omega, 0) = sgn(a)$
- $n \geq 2$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \partial\Omega$ car $\alpha \neq 0$. De plus,

$f'(x) = nax^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$; donc 0 est une valeur singulière.

Considérons alors deux sous-cas :

(a) n **pair :** $f(\partial\Omega) = a\alpha^n$; on introduit la fonction constante g définie par $g(x) = a\alpha^n$; alors $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$ et donc $deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = 0$ car $g_{|\partial\Omega} = f_{|\partial\Omega}$.

(b) n **impair :** On perturbe f par une fonction g de même monotonie que f, s'annulant en zéro et telle que $g'(0) \neq 0$; alors

$$deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = sgn(a).$$

Remarque 1.11 *L'exercice 5 peut aussi se déduire de l'exercice 4.*

Exercice 6

Soit $\Omega = B(0, 1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C(\overline{\Omega})$ une fonction telle que $0 \notin f(\overline{\Omega})$. Montrer qu'il existe

$$(x, y) \in (\partial\Omega)^2 \text{ et } \lambda > 0,\ \mu < 0 \text{ vérifiant } f(x) = \lambda x \text{ et } f(y) = \mu y.$$

Corrigé

Dans le cas contraire, on a l'assertion suivante :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, f(x) \neq \lambda x.$$

Considérons la déformation convexe $F_t(x) = tf(x) + (1 - t)x$; alors $F_t(x) \neq 0$, $\forall x \in \partial\Omega$ et $\forall t \in [0, 1]$ et donc $deg(f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1$; l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution dans Ω, ce qui est impossible.

$$\|x - Kx\|^2 \geq \|Kx\|^2 - \|x\|^2, \ \forall x \in \partial B.$$

Montrer que K admet un point fixe dans $\overline{B}$.

Corrigé

Par l'absurde, supposons l'existence d'un couple $(t, x) \in]0, 1] \times \partial B$ tel que $x = tK(x)$; on peut supposer $t \neq 1$ car autrement le résultat est prouvé. On a alors

$$x - K(x) = (t-1)K(x) \text{ et } \|Kx\|^2 - \|x\|^2 = (1-t^2)\|Kx\|^2.$$

La condition d'Altmann donne alors $(1-t)^2 \geq 1 - t^2 \Leftrightarrow t \geq 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\forall t \in [0, 1]$ et $\forall x \in \partial B$, $tK(x) \neq x$; le degré $deg(I - tK, B, 0)$ est bien défini et vaut par homotopie 1 ; l'équation $(I - K)(x) = 0$ admet donc au moins une solution dans B, sinon sur la frontière ∂B, d'où le résultat.

Remarque 2.7 **(1)** *L'une des conditions suivantes implique la condition d'Altmann :*

$$(a)\ \|Kx\| \leq \|x\|, \forall x \in \partial\Omega. \quad (b)\ \|Kx\| \leq \|x - Kx\|, \forall x \in \partial\Omega.$$

(2) *La condition d'Altmann équivaut à $\|x\|^2 \geq \langle x, Kx\rangle$ si X est un espace de Hilbert.*

Exercice 4

Soit C un fermé, borné d'un espace de Banach X et $f : C \to X$ une application compacte tel que : $\exists x_0 \in \mathring{C}, \forall \lambda > 1, \forall x \in \partial C, \ f(x) - x_0 \neq \lambda(x - x_0)$.
Montrer que f admet un point fixe dans C.

Exercice 10 (Autre forme du théorème de Böhl)

Soit $\Omega = B(0,1)$ la boule unité ouverte dans $\mathbb{R}^n$ et $f: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue.

(1) Montrer que l'on a l'alternative suivante :

(a) f admet au moins un point fixe.

(b) $\exists x \in \partial\Omega,\ \exists \lambda \in]0,1[,\ x = \lambda f(x)$.

(2) Supposons que f vérifie l'hypothèse suivante :

$$\langle x, f(x)\rangle > \|x\|^2,\ \forall x \in \Omega.$$

Montrer que f admet un point fixe.

1.10 Problème résolu sur les formes équivalentes du théorème de Brouwer

1- Non rétraction de la boule unité

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'existe pas d'application continue transformant la boule unité fermée sur sa frontière tout en conservant point par point cette frontière.

(a) Démonstration directe

Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction continue f de $\bar{B}_1(0)$ sur $\partial B_1(0)$ telle que $f(x) = x,\ \forall x \in \partial B_1(0)$. En appliquant le théorème de Brouwer à la fonction $g = -f$, on obtient l'existence d'au moins un point $x_0 \in \bar{B}_1(0)$ tel que $g(x_0) = x_0$, i.e. $f(x_0) = -x_0$. Or, $f(\bar{B}_1(0)) \subset \partial B_1(0)$, donc $-x_0 \in \partial B_1(0)$ et $\|x_0\| = 1$. Comme f conserve la frontière $f(x_0) = x_0$ et donc $x_0 = -x_0$; d'où $x_0 = 0$, ce qui est absurde.

(b) Démonstration de la réciproque

Supposons que le théorème de Brouwer soit faux ; Il existe alors une fonction $f: B_1(0) \to B_1(0)$ continue et n'ayant aucun point fixe. Considérons l'application continue $g: B_1(0) \to B_1(0)$ telle que $g(x)$ soit le point d'intersection de la demi-droite joignant $f(x)$ à x