EXAMEN AVEC SOLUTION DISTRIBUTION

****

LADGHEM OMAR

Université Ibn-Khaldoun de Tiaret
Département de Mathmatiques
Module: Distributions.

Examen final.

Durée:1h:30

Exercice 1. *On considère l'application T de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}$ définie par.*

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x^2)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

1. *Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, en deduire l'ordre de T.*
2. *Montrer que $suppT = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ En déduir que T n'est pas continue.*
3. *Calculer au sens des distributions $(\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y})T$.*

Exercice 2. *On considère l'application T de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par,*

$$\langle T, \phi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\phi(0)}{\epsilon}\right], \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que T est une distribution sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer la distribution xT.*
3. *Montrer que $\frac{d}{dx}(xT) = -T$.*

Exercice 02 :

1) on va montrer que T est une distribution sur $\mathbb{R}$:

on a : 3) on va montrer la continuité

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\phi(0)}{\varepsilon} \right], \forall \phi \in D(\mathbb{R})$$

Soit un compact K dans $\mathbb{R}$: $K = [-A, A]$

Soit $\phi \in D(\mathbb{R})$:

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - \frac{2\phi(0)}{\varepsilon} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{A > |x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)\,dx}{x^2} - 2\frac{\phi(0)}{\varepsilon} \right]$$

d'après le developpement de Taylor avec reste intégrale :

$$\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(0) + x^2\Psi(x) \quad \text{avec : } \Psi(x) = \int_0^1 (1-t)\,\phi''(tx)\,dt$$

Alors :
$$\int_{A>|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx = \int_{A>|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(0) + x\phi'(0) + x^2\Psi(x)}{x^2} = \int_{A>|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(0)}{x^2} dx + \int_{A>|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi'(0)}{x} dx + \int_{A>|x|\geq\varepsilon} \Psi(x)$$

$$\int_{A>|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi'(0)}{x} dx = \phi'(0) \int_{A>|x|\geq\varepsilon} \frac{1}{x} dx = \left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{x} dx \right) \phi'(0) = 0$$

(intégrale d'une fonction impair sur un intervalle symétrique) donc : $\langle xT, \phi \rangle = \langle T, x\phi \rangle = \langle Vp(\frac{1}{x}), \phi \rangle \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R})$.

3) on montre que $\frac{d}{dx}(xT) = -T$:

on a :

$$\left\langle \frac{d}{dx}(xT), \phi \right\rangle = -\langle xT, \phi' \rangle = \langle T, x\phi' \rangle$$

et : $\langle xT, \phi \rangle = \langle Vp(\frac{1}{x}), \phi \rangle \Longrightarrow \left\langle \frac{d(xT)}{dx}, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dx} Vp(\frac{1}{x}), \phi \right\rangle$

$$= -\langle Vp(\frac{1}{x}), \phi' \rangle$$

donc : $\langle T, x\phi' \rangle = -\langle Vp(\frac{1}{x}), \phi' \rangle$

on a : $\left\langle \frac{d}{dx}(xT), \phi \right\rangle = ~~\lim~~ \langle xT, \phi' \rangle = \langle T, x\phi' \rangle$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[+ \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi'(x)}{x} dx \right]$$

par intégration par partie on a :

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi'(x)}{x} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi'(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi'(x)}{x} dx$$

$$= \left[\frac{\phi(x)}{x} \right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} \phi(x) dx + \left[\frac{\phi(x)}{x} \right]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \phi(x) dx$$

$$= \frac{\phi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx$$

d'autre part : $\phi(-\varepsilon) = \phi(0) - \varepsilon \phi'(0)$ (d'après le développement de Taylor)

$\phi(\varepsilon) = \phi(0) + \varepsilon \phi'(0)$

$$-\frac{\phi(-\varepsilon) + \phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{-2\phi(0)}{\varepsilon}$$

donc : $\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2\phi(0)}{\varepsilon} - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx \right] = -\langle T, \phi \rangle$

car :

$$-\lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{2\phi(0)}{\varepsilon} + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{2\phi(0)}{\varepsilon} - \int \frac{\phi(x)}{x^2} dx \right]$$

$$= -\langle T, \phi \rangle$$

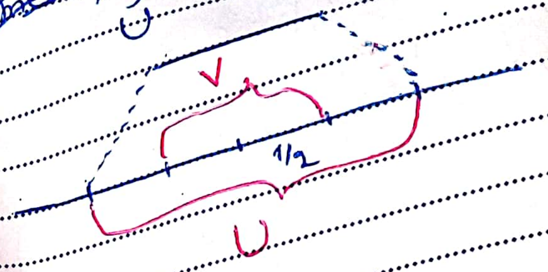
Scanned by CamScanner

Fatima Distribu...

on prend : $V = \{x \in \mathbb{R},\ (x, x^2) \in B((x_0,y_0), \frac{1}{2})\}$

donc :

$$\int_V \phi(x,x^2)\,dx \geq \int_U \phi(x,x^2)\,dx \geq \cancel{(mes\,U)} \int_U dx = mes(U) \neq 0$$



donc : $B \subset supp\,T$

alors : $B = supp\,T$

3) on calcule :

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}\right)T, \phi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x}\phi + 2x\frac{\partial}{\partial y}\phi \right\rangle$$

on a : $H(x) = \phi(x,x^2) \Rightarrow H'(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2x\frac{\partial \phi}{\partial y}$

Alors :

$$-\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}\phi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H'(x)\,dx$$

$$= -\left[H(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

parce que $\phi \in D(\mathbb{R}^2)$ à support compact dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 02 : (la suite)

1) 1) la linéarité de distribution :

Soit $\phi_1, \phi_2 \in D(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\langle T, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{|x|>\varepsilon} \frac{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(x)}{x^2}\,dx - \frac{2(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(0)}{\varepsilon}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\alpha\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\alpha\phi_1(0) - 2\beta\phi_2(0)}{\varepsilon}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\alpha\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi_1(x)}{x^2}\,dx + \beta\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi_2(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\alpha\phi_1(0)}{\varepsilon} - \frac{2\beta\phi_2(0)}{\varepsilon}\right]$$

$$= \alpha \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi_1(x)}{x^2} dx - \frac{2\phi_1(0)}{\varepsilon} \right] + \beta \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi_2(x)}{x^2} dx - \frac{2\phi_2(0)}{\varepsilon} \right]$$

$$= \alpha \langle T, \phi_1 \rangle + \beta \langle T, \phi_2 \rangle$$

d'où T est linéaire.

2) T est bien définie car :

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq \underbrace{M \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq 2}} P_\alpha(\phi)}_{< \infty}$$

donc : T est quantité finie.

donc : T est une distribution.

01

(~~par intégration par partie~~)

$$\int_{A>|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(0)}{x^2}\,dx = \phi(0)\int_{A>|x|\geq\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx = \phi(0)\left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{x^2}\,dx\right)$$

$$= \phi(0)\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{A}\right)$$

$$= \phi(0)\times\left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{A} - \frac{1}{A} + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \phi(0)\times\left(\frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{A}\right)$$

* d'après Lebesgue : $\lim_{\varepsilon\to 0} \left|\int_{\mathbb{R}} \Psi(x)\, 1\!\!1_{\{A>|x|\geq\varepsilon\}}\,dx\right| \leq \lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_{A>|x|\geq\varepsilon} \Psi(x)\,dx\right| = \left|\int_{A>|x|\geq 0} \Psi(x)\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \Psi(x)\,dx\right|$.

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \Psi(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)|\,dx \leq \sup_K |\phi''(x)| \int_0^1 |(1-t)|\,dt = \sup_K |\phi''(x)| \times M$$

avec : $M = \int_0^1 |(1-t)|\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt = \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 t\,dt = [t]_0^1 - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$$= 1 - \frac{1}{2} = +\frac{1}{2}$$

donc :

$$\cancel{\lim_{\varepsilon\to0}\int_{A>|x|\geq\varepsilon}\left[\frac{2\phi(0)}{\varepsilon} - \frac{2\phi(0)}{A} + \int \Psi(x)\,dx\right]}$$

$$|\langle T, \phi\rangle| = \left|\lim_{\varepsilon\to0}\left[-\frac{2\phi(0)}{A} + \int_{A>|x|\geq\varepsilon} \Psi(x)\,dx\right]\right| = \left|\frac{2\phi(0)}{A} + \int_{\mathbb{R}} \Psi(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{2\phi(0)}{A} + M\sup_K |\phi''(x)|$$

$$\leq \frac{2}{A}\sup_K |\phi(x)| + M\sup_K|\phi''(x)| \leq C \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|\leq 2}} \sup \phi^{(\alpha)}(x) = C\sum_{\substack{\alpha\in\\ |\alpha}}$$

avec : $C = \max\left(\frac{2}{A}, M\right)$ d'où la continuité (la suite d

2) on détermine la distribution xT :

$$\langle xT, \phi\rangle = \langle T, x\phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx - \frac{2\phi(0)}{\varepsilon}\right],\ \forall\phi\in D(\mathbb{R}$$

1) montre que $T \in D'(\mathbb{R}$
la linéarité :
soit $\phi_1, \phi_2 \in D(\mathbb{R}^2)$, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\langle T, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left[\alpha\phi_1(x,x^2) + \beta\phi_2(x,x^2)\right] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \alpha\phi_1(x,x^2)\,dx + \int_{\mathbb{R}} \beta\phi_2(x,x^2)\,dx$$

$$= \alpha\int_{\mathbb{R}} \phi_1(x,x^2)\,dx + \beta\int_{\mathbb{R}} \phi_2(x,x^2)\,dx$$

$$= \alpha\langle T, \phi_1\rangle + \beta\langle T, \phi_2\rangle$$

donc T est linéaire.

la continuité :
soit K un compact de $\mathbb{R}^2$, soit $\phi \in D(\mathbb{R}^2)$: $A = \{x \in \mathbb{R},\ (x,x^2) \in K\}$

$$|\langle T, \phi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} \phi(x,x^2)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi(x,x^2)|\,dx = \int_A |\phi(x,x^2)|\,dx$$

$$\leq \sup |\phi(x,x^2)| \int_A dx = \sup_K |\phi(x,x^2)|\,\mathrm{mes}(A)$$

$$\leq \mathrm{mes}(A) \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} P_\alpha(\phi)$$

T est bien définie car $|\langle T,\phi\rangle| < \infty$ car : $k \leq 0$
(A) $\sup_K |\phi(x,x^2)| < \infty$

: T est une distribution et d'ordre 0

montre que $\mathrm{supp}\, T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} = B$

$\subset B \iff B^C \subset (\mathrm{supp}\, T)^C$

$\in B^C$: $\int_B \phi(x,x^2)\,dx = 0$ donc : $\langle T, \phi\rangle = 0$

: $\phi \in (\mathrm{supp}\, T)^C$