

I) - Naissance du calcul non entier (

L'idée pour la généralisation de la dérivée pour un ordre arbitraire est déconverte dans le courrier échangé entre le mathématicien de L'hôpital a écrit à Leibnitz le 30/09/1695.

"L'hôpital a écrit à Leibnitz à fin de l'intégrer au sujet de la notation particulière qu'il avait utilisé dans ses publications $(\frac{d^n}{dx^n})$ pour la n^{ème} dérivée. L'hôpital pose alors la question sur le résultat de cette dérivée pour l'ordre $\frac{1}{2}$.

II) Fonction pour le calcul fractionnaire:

II-1) Fonction Gamma: la fonction gamma dite aussi fonction d'Euler est à la base du calcul fractionnaire, elle généralise la fonction factorielle.

Représentation intégrale: on définit la fonction gamma par $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ (1) qui converge pour $\text{Re}(z) > 0$.

II-2) Propriétés de la fonction gamma =

P₁) $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

P₂) $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ (d'après la définition).

P₃) $\forall z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ les nombres $z=0, -1, -2, \dots$ sont des pôles simples.

Preuve P₃): Comme : $e^{-t} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!}$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = I_1 + I_2$$

$$I_2 = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \phi(z) \text{ fonction entière.}$$

$$I_1 = \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} dt = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1} dt$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt$$

$$\left. \frac{t^{z+n}}{z+n} \right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{z+n}$$

à sens si $z+n \neq 0$ i.e. $z \neq -n, n \in \mathbb{N}$.

$$P_4) \Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1) \Gamma(z) \cdot z > 0.$$

$$P_5) \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad (\text{formule d'Euler})$$

2) la fonction Beta :

Définition : la fonction Beta est définie par :

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad a, b > 0. \quad (*)$$

Propriétés :

$$P_1) \quad B(a, b) = B(b, a).$$

Preuve : un changement de variable $t \mapsto 1-t$.

$$P_2) \quad a B(a, b+1) = b B(a+1, b).$$

$$\text{Preuve : } a B(a, b+1) = a \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^b dt.$$

P3) si on pose $n = b+1$ dans P_2 :

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a} B(a+1, n-1) \quad (**)$$

$$\text{calculons : } B(a, 1) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^0 dt = \int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{1}{a}.$$

$$B(a, 2) = \frac{1}{a} B(a+1, 1) = \frac{1}{a(a+1)}$$

$$B(a, 3) = \frac{2}{a} B(a+1, 2) = \frac{1 \cdot 2}{a(a+1)(a+2)}$$

$$B(a, n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)}$$

si: $a=m$ (mentionné), on obtient:

$$B(m, n) = \frac{(m-1)! (n-1)!}{(m+n-1)!} \quad (***)$$

P4) $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a+b)$. $a, b > 0$.

Preuve:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t} dt \quad \text{d}x.$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} x^{b-1} e^{-x} dt dx.$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{a-1} x^{b-1} e^{-(t+x)} dt dx.$$

on pose: $x = u - t$.

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty (u-t)^{b-1} e^{-u} dt du \quad 0 < t < u.$$

$$= \int_0^\infty \int_0^u t^{a-1} (u-t)^{b-1} e^{-u} dt du.$$

$$t = ux$$

$$\int_0^u t \rightarrow \int_0^1 dx$$

$$\begin{cases} t=0 \rightarrow x=0 \\ t=u \rightarrow x=1 \\ dt = u dx \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^1 x^{a-1} u^{a-1} (1-x)^{b-1} u^{b-1} e^{-u} u dx du \\ = \int_0^{\infty} u^{a+b-1} e^{-u} du \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \\ = \Gamma(a+b) B(a, b).$$

on peut avoir d'autre expression à l'aide d'un changement de variable.

posant :
$$\begin{cases} t = \sin^2 \theta \\ 1-t = \cos^2 \theta \\ dt = 2 \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad \begin{aligned} t=0 &\rightarrow \theta=0 \\ t=1 &\rightarrow \theta=\pi/2 \end{aligned}$$

$$B(a, b) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2(a-1)} \theta \cos^{2(b-1)} \theta \sin \theta \cos \theta d\theta \\ = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} \cos^{2b-1} \theta d\theta.$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi. \text{ donc } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Exercice : montrer que :

$$1) B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^{\pi/2} (\sin 2\theta)^{2a-1} d\theta$$

$$2) B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(a, \frac{1}{2}\right).$$

$$3) B(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx.$$

3) fonction de Mittag-Leffler:

Définition: Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler est définie par:

$$E_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (1.3).$$

et la fonction généralisée de Mittag-Leffler est:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Les fonctions ont été introduites en 1903.

pour $\alpha = 1$, $E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

pour $\alpha = 0$, $E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.

$\alpha = 2$, $E_2(z^2) = \text{ch}(z) = E_{2,1}(z^2)$.

pour $\alpha = 2$, $E_2(-z^2) = E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$.

* la fonction de Mittag-Leffler est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Chapitre 02 = Quelques espaces fonctionnels.

1) Espace des fonctions intégrables (P-intégrables):

Définition: soit $\Omega = (a, b)$ ($-\infty < a < b < +\infty$)
et $p \in [1, +\infty]$

1) pour $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions P-intégrables est défini comme suit:

$$L_p(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \vee \mathbb{C} \mid f \text{ est mesurable} \right. \\ \left. \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

2) pour $p = \infty$, l'espace des fonctions (des classes) mesurables bornées p.p ou essentiellement bornées est défini par:

$$L_{\infty}(\Omega) = \left\{ f = \text{mes} \mid \sup_{\Omega} \text{ess} |f(x)| < \infty \right\}$$

$$\text{où: } \sup_{\Omega} \text{ess} |f(x)| = \inf \left\{ M = |f(x)| \leq M \text{ p.p.} \right\}.$$

on note aussi le sup ess par le sup naïf.

Théorème 1-1: pour $1 \leq p < \infty$ l'espace $L_p(\Omega)$ est un espace vectoriel normé et complet i.e. un espace de Banach dont la norme est donnée par:

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1)$$

2) pour $p = \infty$, l'espace $L_\infty(\Omega)$ est un espace vectoriel normé complet pour la norme :

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|. \quad (2)$$

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \inf_{g \in \mathcal{L}} \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

2) Espace des fonctions continues :

1) $C^n([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \vee \mathbb{C} / f^n \text{ existe et est continue sur } [a, b]\}.$

cas particulier : si $n = 0$.

$C^0([a, b]) = C([a, b])$ l'espace des fonctions continues et puisque $[a, b]$ est un fermé compact alors $C([a, b])$ l'espace des fonctions uniformément continues.

* si $n = \infty$ $C^\infty([a, b]) = \bigcap_{n \geq 0} C^n([a, b])$

Théorème 1-2 :

l'espace $C^n([a, b])$ est un espace vectoriel normé par :

$$\|f\|_{C^n([a, b])} = \sum_{k=0}^n \max |f^{(k)}(x)|. \quad (3)$$

Théorème 2-2 : $(C^n([a, b]), \|\cdot\|_{C^n})$ est de Banach.

3) espace des fonctions absolument continue =

1) Définition: une fonction f à valeurs réelles définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[a, b]$ si: Pour toute partition $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ d'intervalles ouverts:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta \text{ alors } \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Notation: on désigne l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ par $AC([a, b])$.

Remarque: une fonction abs-continue elle est uniformément continue ($n=1$).

2) l'inverse n'est pas possible.

3) si f est lipschitzienne alors f est absolument continue.

4) l'inverse s'est faux par exemple: $f(x) = \sqrt{x}$ est abs-continue non lipschitzienne.

Proposition 3.2: si f et g sont abs-continues, alors:

1) $f+g, \alpha f, f-g, f \cdot g$ sont abs-continues (utiliser la définition). ($\alpha \in \mathbb{R}$).

2) si en addition, il existe $C > 0$ tq. $|g(x)| > C$ sur $[a, b]$ alors f/g est abs-continue.

3) si f est intégrable sur $[a, b]$ alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ $a \leq x \leq b$ est abs-continue.

Théorème 3.3: si f est abs-continue sur $[a, b]$ alors:

f admet une dérivée p-p sur $[a, b]$.

Preuve = voir Kolmogorov (élément d'analyse fonct).

caractérisation:

$$AC([a, b]) = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / \exists \varphi \in L_1([a, b]) \right. \\ \left. f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \right\}$$

de la même manière on définit l'espace $AC^n([a, b])$.

Définition 3.4: Pour $n = 1, 2, \dots$ on désigne par $AC^n([a, b])$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ continues telles que f^{n-1} est absolument-continue.

Théorème 3.5: l'espace $AC([a, b])$ munit de la norme: $\|f\|_{AC} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{L_1}$ est un espace de Banach.

Espace de Holder

Définition: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ V. une fonction et $\lambda \in [0, 1]$.

on dit que f est holdérienne (de Holder) d'ordre λ si:

$$\forall x, y \in \Omega: |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\lambda \text{ ou } A \text{ est constante.}$$

Notation: on note l'espace la classe des fonctions de Holder par $H^\lambda(\Omega)$. $H^1 = W_2^1 \subset \dots \subset L_2(\Omega)$.

$$H^\lambda(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\lambda \}.$$

Remarque:

- 1) si $\lambda = 1$, on obtient la classe de Lipschitz.
- 2) toute fonction $f \in H^\lambda(\Omega)$ est uniformément continue.

Chapitre III): Différentes approches de l'intégration et la dérivation fractionnaire.

1) Idée de base. (Basic idea): on rappelle un résultat fondamental du calcul différentiel et intégrale.

Théorème 1: soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

alors, la fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \dots (1).$$

est différentiable. $F'(x) = f(x)$.

Notation:

a) on note par D ou $\frac{d}{dx}$ l'opérateur de dérivation.

$$D := \frac{d}{dx} : f \mapsto \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad \dots (2).$$

b) par I_a l'opérateur d'intégration par:

$$(I_a f)(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \dots (3).$$

pour tout $a \leq x \leq b$.

c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on utilise les symboles $D^n \left(\frac{d^n}{dx^n} \right)$, I_a^n pour

les opérateurs itérés de D et I_a i.e.: on pose =

$$D^n := D D^{n-1}$$

$$D^2 = D$$

$$I_a^n := I_a I_a^{n-1}$$

$$I_a^2 = I_a$$

pour $n \geq 2$.

$$I_a^1 = I_a \quad \dots$$

Question: comment on peut étendre le concept I_a à tout $n = \alpha$
 $\alpha \notin \mathbb{N}$?

de (1), (2), (3) on note que $D(I_a f) = f$ -----

et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $D^n I_a^n f = f$ ----- (4).

- pour n entier D^n est l'inverse à gauche de I_a^n dans un espace de fonctions approprié.

Lemme: soit f une fonction Riemann Intégrable sur $[a, b]$.

Alors pour tout $a \leq x \leq b$ et $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$(I_a^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \text{ --- (5).}$$