

L'espace de Lebesgue;

CHAPITRE 01;

Espace de Lebesgue:

Définition et proposition;

I/- Définition:

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, Ω mesurable et $0 < p < \infty$.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on dit que:

$f \in L^p(\Omega)$ (ou $L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Lebesgue) si:

$$\begin{cases} - f \text{ est mesurable} \\ - \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty \end{cases}$$

Ex: $f(x) = |x|^a$, $f(x) \in L^p(\Omega)$?

Rappel:

Lemme de Fatou:

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables non négatives.

Alors: $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ est mesurable.

et de plus:

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

Théorème: (convergence monotone)

Soit $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions mesurables qui converge vers $f(x)$ alors f est mesurable.

et:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Théorème: "convergence dominée";

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers $f(x)$, s'il existe une fonction $G(x)$ intégrable et non négative telle que:

$$|f_n(x)| \leq G(x)$$

pour tout n , alors:

$$|f(x)| \leq G(x) \text{ et ;}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) dx \end{aligned}$$

Théorème de Fubini:

Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ ($E \subset \mathbb{R}^n$) et $(F \in \mathbb{R}^n)$ un ensemble mesurable et soit $f(x,y)$ intégrable sur $E \times F$, alors pour presque tout $x \in E$, $f(x,y)$ est intégrable sur F pour presque tous les $y \in F$.

$f(x,y)$ est intégrable sur $E \times F$

$$\begin{aligned} \iint_{E \times F} f(x,y) dx dy &= \int_{E \times F} f(x,y) dx dy \quad \Rightarrow \text{intégrale double} \\ &= \int_E \left(\int_F f(x,y) dy \right) dx \quad \Rightarrow \text{intégrale itérée} \\ &= \int_F \left(\int_E f(x,y) dx \right) dy \quad (1) \end{aligned}$$

Conséquence 01:

Si $f(x,y)$ est mesurable sur $E \times F$ est finie et l'une des intégrales :

$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)| dy \right) dx,$$

$$\int_F \left(\int_E |f(x,y)| dx \right) dy, \text{ Alors}$$

toutes les intégrales de (1) existent et de plus (1) est vérifiée.

Conséquence 02:

Si la fct f est à valeurs réelles et mble sur $E \times F$ et au moins l'une des fts f_+ et f_- est intégrable sur $E \times F$ (en particulier la fct f est mble et non négative sur $E \times F$).

Alors est vérifiée (1)

(Les intégrales peuvent être finies)

Remarque:

Si f n'est pas intégrable sur $E \times F$ Alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différentes

Déf 02:

Soient $\Omega \in \mathcal{A}^n, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$1/- \sup_{x \in \Omega} \text{Vrai } f(x) = \inf_{e \in \mathcal{E}, \Omega/e} \sup_{x \in e} f(x)$$

$$2/- \inf_{\text{mes } e = 0} \text{Vrai } f(x) = \sup_{e \in \mathcal{E}, \Omega/e} \inf_{x \in e} f(x)$$

Déf 03:

Soient $\Omega \in \mathcal{A}^n, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sup_{x \in \Omega} \text{Vrai } f(x) =$$

$$= \inf \{ M \in \mathbb{R}, \text{mes} \{ x \in \Omega, f(x) > M \} = 0 \}$$

on montre que :

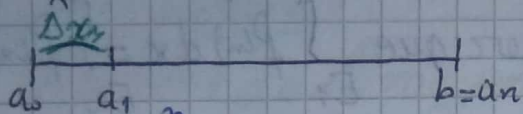
$$\text{Déf 02} \Leftrightarrow \text{Déf 03}$$

$$f \in L^\infty(\Omega) \text{ si } \sup_{x \in \Omega} \text{Vrai } f(x) < +\infty$$

I) - Rappel sur l'intégrale de Lebesgue

Somme de Riemann $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$

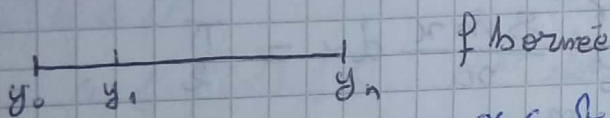
$$\xi_k \in \Delta x_k$$



$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = I$$

(Si cette limite existe alors f est intégrable au sens de Riemann).

Ω ensemble mesurable



$$a \leq f(x) \leq b$$

$$A = y_0 < y_1 < \dots < y_n = B$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^n m e_k$$

$$S = \sum_{k=1}^n y_{k+1} m e_k$$

où :

$$e_k = \{x \in \Omega, y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}$$

Def :

on dit que f est Lebesgue intégrable sur Ω mesurable

$$S^+ = S^- = \mu$$

μ : l'intégrale de f

a) - f mesurable bornée

Th :

quelle que soit f une fct mble et bornée sur Ω (me elle est Lebesgue intégrable)

b) - f non bornée non négative

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq N \\ N & \text{si } f(x) > N \end{cases}$$

$$I = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int f_N(x)$$

(Si I existe et est finie on dit que f est intégrable au sens de Lebesgue)

c) - f non bornée et de signe quelconque

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = ?$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f_+(x) dx - \int_{\Omega} f_-(x) dx$$

pour que $\int_{\Omega} f(x) dx$ existe

(elle peut être infinie) il faut que ou moins l'une des 2 intégrales soit finie

II) - Propriétés de l'intégrale de Lebesgue :

1/- Soient $C_1, C_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

Les fcts f_1 et f_2 sommables sur E alors si :

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

ona :

$$\int_{\Omega} f(x) dx = C_1 \int_{\Omega} f_1(x) dx + C_2 \int_{\Omega} f_2(x) dx$$

2/- a/- Si $m(\Omega) = 0$

$$\text{alors } \int f(x) dx = 0$$

2 fcts f^w et g équivalentes

($f(x) = g(x)$ presque partout)

b/- Si $f \sim g$ alors :

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} g(x) dx$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup W, \quad \Omega_1 \cap W = \emptyset$$

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega_1 \cup W} f(x) dx$$

$$= \int_{\Omega_1} f(x) dx + \int_W f(x) dx$$

$$= \int_{\Omega_1} f(x) dx$$

Comme :

$$\int_{\Omega_1} f(x) dx = \int_{\Omega_1} g(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} g(x) dx$$

Exercice :

Soit f une fcts mble sur E

Si $E_2 \subset E_1$ tel que

$$m(E_1 \setminus E_2) = 0$$

* montrer que $\int_{E_1} f(x) dx = \int_{E_2} f(x) dx$

3/- Si f est mesurable sur Ω

($\Omega \in \mathbb{R}^n$) Ω mble alors :

f intégrable $\Leftrightarrow |f|$ intégrable

4/- Les intégrales impropres :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$$

Semi convergence

Cette fcts est Riemann et pas Lebesgue intégrable

5/- a/- Si la fct f est intégrable sur ensemble mesurable E_1

alors elle est intégrable sur E_2 (E_2 mble). de plus $\forall E_2 \subset E_1$

Si la fct f est non négative à valeurs réelles alors

$$\int_{E_2} f dx \leq \int_{E_1} f dx \quad (+)$$

b/- Soient 2 fcts f et g des fonctions intégrables sur Ω

telque : $f(x) \leq g(x)$

alors :

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx$$

Conséquence :

"Théorème de la moyenne"

Soit f un fct à valeurs réelles :

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Si f est intégrable sur Ω

(mes) mes $\Omega < \infty$ telque

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a \leq f(x) \leq b \quad \text{p.p. alors}$$

$$a \text{ mes } \Omega \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq b \text{ mes } \Omega \quad (**)$$

Preuve : atitre d'exercice

b/- pour qu'une $f(x)$ mesurable sur un ensemble

$$E \text{ (mes)} \rightarrow f(x)$$

Soit intégrable sur $E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |f(x)|$ soit intégrable sur E

* Si f est intégrable alors

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx$$

III - Définition de l'espace L_p
(suite) :

Déf 01 : $0 < p < \infty : f \in L_p$

Si a/- f mesurable.

$$b/- \int_E |f|^p dx < \infty$$

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

Exemple :

a/- $|x|^\delta \in L_p(B_r)$?

$$\delta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \delta > \frac{-n}{p} \text{ (en TD)}$$

b/- $|x|^\delta \in L_p(B_r)$

$$\Leftrightarrow \delta < \frac{-n}{p} \text{ (en TD)}$$

$${}^c B_r = \mathbb{R}^n - \{B_r\}$$

Déf 02 :

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$. $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) = \inf_{x \in E} \sup_{x \in E \setminus e} f(x)}$$

$$\text{ou } \text{mes } e = 0$$

$$\boxed{\inf_{x \in E} \text{vrai } f(x) = \sup_{x \in E} \inf_{x \in E \setminus e} f(x)}$$

$$\text{ou } \text{mes } e = 0$$

Exemple :

Soit $E = \mathbb{R}^n$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in e \\ 0 & \forall x \in e^c (\mathbb{R}^n \setminus e) \end{cases}$$

$$0 \leq \sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) \leq \sup_{x \in E \setminus e} f(x) = 0$$

donc $\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) = 0$

Déf 02:

$$\text{Sup Vrai } f(x) = \inf \{ M \in \mathbb{R}^+, \text{mes} \{ x \in E, f(x) > M \} = 0 \}$$

Lemme 01:

Les définitions (2) et (2')
sont équivalentes

Déf 03: ($p = \infty$)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable
et $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ ($\text{mes } E > 0$)
on dit que $f \in L_\infty(E)$ si:
a) - f mesurable

b) - $\text{Sup Vrai } |f(x)| < \infty$
 $x \in E$

Déf 03':

$$L_\infty(E) = \left\{ \begin{array}{l} f: E \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{mes } E > \infty \end{array} \right.$$

f mesurable

et $\exists c > 0$ tq $|f(x)| < c$ (pp)
sur E .

*

Exercice:

Montrer que:

$$\|f\|_{L_\infty} = \text{Sup Vrai } |f(x)|$$

est une norme.

Si $f \in L_\infty$ on a:

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L_\infty} \text{ (Pourquoi?)}$$

Lemme 02:

Soit $0 < p < \infty$ $\text{mes } E > 0$
alors $\|f\|_{L_p(E)} = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$

Lemme 03: $0 < p < \infty$

si f est continue sur $E \subset \mathbb{R}^n$
alors:

$$\text{Sup Vrai } f(x) = \text{Sup } f(x)$$

Preuve:

on pose: $M = \text{Sup}_{x \in E} f(x)$

1) - $\text{Sup Vrai } f(x) \leq \text{Sup } f(x)$

et

2) - $\text{Sup } f(x) \leq \text{Sup Vrai } f(x)$

$$\Leftrightarrow M \leq \text{Sup Vrai } f(x)$$

1) - D'après la définition
de $\text{Sup Vrai } f(x)$ on a:

$$\text{Sup Vrai } f(x) \leq M \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E:$$

$$f(x_0) > M - \varepsilon$$

$$\forall k > 0, \exists x_k \in E:$$

$$f(x_k) > M - \frac{1}{k}$$

Comme $f(x) \in \mathbb{C}(E)$ alors

$\exists \delta_k$ tel que:

$$B(x_k, \delta_k) \subset E \text{ et } \forall x \in B(x_k, \delta_k)$$

on a:

$$f(x) > M - \frac{1}{k}$$

$$\text{Sup Vrai } f(x) > \text{Sup Vrai } (M - \frac{1}{k})$$

$x \in E$ $x \in B$

E n faisant tendre $K \rightarrow \infty$ - Lemme 03

On obtient :

$$\sup \text{vrai } f(x) \gg M \quad (2)$$

d'après (1) et (2)

on obtient :

$$\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) = \sup_{x \in E} f(x)$$

A titre d'exercice prouver l'égalité pour $M = \infty$

Lemme 04 :

Soient $0 < p < \infty$, $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f \sim g$ alors

$$\|f\|_{L_p(E)} = \|g\|_{L_p(E)}$$

Preuve

$$\int_E f \, dx = \int_{E|e} f \, dx, \text{ mes } e = 0$$

$$f \sim g \Rightarrow f = g \text{ sur } E|e$$

$$\Rightarrow |f|^p = |g|^p \text{ sur } E|e$$

$$\left(\int_{E|e} |f|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_{E|e} |g|^p \, dx \right)^{1/p} \quad (1)$$

$$\left(\int_{E|e} |f|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_E |f|^p \, dx \right)^{1/p} \quad (2)$$

$$\left(\int_{E|e} |g|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_E |f|^p \, dx \right)^{1/p} \quad (3)$$

A partir de (1) et (2) et (3)

on obtient :

$$\left(\int_E |f|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_E |g|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Lemme 03 :

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$g: E \rightarrow \mathbb{R}$$

de plus g non négative

$(g \gg 0)$ Alors :

$$\begin{aligned} \inf \text{vrai } f(x) \int_E g(x) \, dx &\leq \\ &\leq \int_E f \cdot g \, dx \leq \\ &\leq \sup \text{vrai } f(x) \int_E g(x) \, dx \end{aligned}$$

Preuve : $\forall e \in E$, $\text{mes } e = 0$, on a : (II)

$$\begin{aligned} \int_E f \cdot g \, dx &= \int_{E|e} f \cdot g \, dx \leq \\ &= \int_{E|e} f \cdot g \, dx \leq \sup_{E|e} f(x) \int_{E|e} g(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \int_E f \cdot g \, dx \leq \inf_{e \in E} \sup_{E|e} f(x) \int_{E|e} g(x) \, dx$$

D'une manière analogue

on prouve (II)

Conséquence 01 :

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g: E \rightarrow \mathbb{C}$$

f et g deux fts mesurables alors

$$\left| \int_E f \cdot g \, dx \right| \leq \|f\|_{L_\infty} \cdot \|g\|_{L_\infty}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \cdot g \, dx \right| &\leq \int_E |f \cdot g| \, dx \\ &\leq \sup_{x \in E} |f| \int_E |g| \, dx \\ &= \|f\|_{L^\infty(E)} \cdot \|g\|_{L^1(E)} \end{aligned}$$

Conséquence 02:

Soient $0 < p < \infty$

$f: E \rightarrow \mathbb{C}$

f mesurable alors:

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq (\text{mes } E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(E)}^p &= \left(\int_E |f|^p \, dx \right) \leq \left(\sup_{x \in E} |f|^p \int_E dx \right) \\ &= \sup_{x \in E} |f|^p \left(\int_E dx \right) \\ &= \|f\|_{L^\infty(E)}^p (\text{mes } E) \\ (\text{mes } E > 0) \end{aligned}$$

Théorème de Riesz:

Soient f une fct mesurable sur E , $\text{mes } E > 0$.

alors:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Preuve:

On pose $M = \|f\|_{L^\infty(E)}$

1) - $M = 0$

$$\begin{aligned} M &= \sup_{x \in E} |f(x)| \\ &= \inf_e \sup_{x \in E} |f(x)| = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \sim 0$$

2) - $0 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(E)} &= \left(\int_E |f|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_E |f|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in E} |f(x)| \left(\int_E dx \right)^{1/p} \\ &= \sup_{x \in E} |f(x)| (\text{mes } E)^{1/p} \\ \text{mes } E / e &= \text{mes } E \end{aligned}$$

On a obtenu:

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq \sup_{x \in E} |f(x)| (\text{mes } E)^{1/p}$$

ou:

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq \left(\inf_e \sup_{x \in E} |f(x)| \right) (\text{mes } E)^{1/p}$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty(E)} (\text{mes } E)^{1/p}$$

Dans (1) On pose à la limite supérieure D'où:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} &\leq M \lim_{p \rightarrow +\infty} (\text{mes } E)^{1/p} \\ &= M \end{aligned}$$

donc on a montrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)} \leq M$$

on montre par l'absurde
que : mes $E_\varepsilon > 0$

On suppose qu'il existe

ε_0 tq : (mes $E_{\varepsilon_0} = 0$).

et : $E_{\varepsilon_0} = \{x \in E : |f(x)| \leq M - \varepsilon_0\}$

$$\text{mes } E_{\varepsilon_0} = 0 \text{ et } \varepsilon_0$$

$$M = \inf_{\text{mes } E > 0} \sup_{E \in E} |f(x)| \leq \sup_E |f(x)|$$

$$\leq M - \varepsilon_0$$

Contradiction donc

mes $E_\varepsilon > 0$. $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)} \leq M$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(E)}^p &= \int_E |f|^p dx \geq \int_{E_\varepsilon} |f|^p dx \\ &\geq (M - \varepsilon)^p \text{mes } E_\varepsilon \end{aligned}$$

$$E_\varepsilon \subset E$$

d'où $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)} \geq M - \varepsilon$ (2)

dans (2) on fait tendre
vers zéro alors :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)} \geq M \quad (3)$$

Finalement on a obtenu

$$M \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)} \leq \overline{\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)}} \leq M$$

(*)

A partir de (*) on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)} = \overline{\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)}} = M$$

Donc la limite $\exists$ et elle
est égale à M

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)} = M$$

3/- $M = \infty$ Autre d'exercice

Remarque :

Si $\text{mes } E = +\infty$.

le Théorème n'est plus
valable

$p=1$ donc $\|f\|_{L_1(E)} = 1$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_{L_1(E)} = 1$$

$\forall p > 1$:

$$\|f\|_{L_p(E)}^p = (\text{mes } E)^{1/p} = \infty$$

le 04-12-2016 :

Théorème :

L'espace $L_p(E)$ est un espace
vectoriel (linéaire).

Preuve :

1/- Soit $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ et $f \in L_p(E)$

$$0 < p \leq \infty$$

a/- $0 < p < \infty$:

$$\|f\|_{L_p(E)}^p = \left(\int_E |f|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\| \alpha f \|_{L^p(E)} = \left(\int_E |\alpha f|^p dx \right)^{1/p} \\ = |\alpha| \left(\int_E |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

$$\text{d'où : } \alpha f \in L^p(E)$$

$$b) - p = \infty$$

$$\| \alpha f \|_{L^\infty(E)} = \sup_{x \in E} \text{vrai } |\alpha f(x)| \\ = |\alpha| \sup_{x \in E} \text{vrai } |f(x)| < \infty$$

$$2) - \text{Soit } f_1 \text{ et } f_2 \in L^p(E) \\ f_1 + f_2 \in L^p(E) ?$$

$$a) - 0 < p < \infty ;$$

$$\| f_1 + f_2 \|_{L^p(E)} < \infty ?$$

f_1 et f_2 étant mesurable donc $f_1 + f_2$ aussi mesurable.

$$* \forall a, b \geq 0 :$$

$$(a+b)^p \leq 2^p (a^p + b^p) \\ \leq 2^{p+1} (a^p + b^p) \\ \leq 2^{p+2} (a^p + b^p)$$

$$* \underline{a \geq b} :$$

$$(a+b)^p \leq (2a)^p \leq 2^p a^p + 2^p b^p \\ = 2^p (a^p + b^p)$$

$$* \underline{b \geq a} :$$

$$(a+b)^p \leq (2b)^p = 2^p b^p \\ \leq 2^p a^p + 2^p b^p \\ = 2^p (a^p + b^p)$$

$$|f_1 + f_2|^p \leq 2^p (|f_1|^p + |f_2|^p) \quad (1)$$

On intègre (1) alors on obtient :

$$\left(\int_E |f_1 + f_2|^p dx \right) \leq 2^p \int_E (|f_1|^p + |f_2|^p) dx \\ = 2^p \left[\int_E |f_1|^p dx + \int_E |f_2|^p dx \right] \\ < \infty$$

$$\left(\int_E |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_E |f|^p dx < \infty$$

$$b) - p = \infty$$

$$\| f_1 + f_2 \|_{L^\infty(E)} < \infty$$

(A titre d'exercice) :

Remarque :

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ \min(1, n^{p-1}) (a_1^p + \dots + a_n^p) \leq \\ \leq (a_1 + \dots + a_n)^p \leq \max(1, n^{p-1}) \\ (a_1^p + \dots + a_n^p)$$

Théorème :

Soient $f \in L^p(E)$

$$0 < p \leq \infty \quad E \subset \mathbb{R}^n$$

$$h \in \mathbb{R}^n, \text{ Alors :}$$

$$f(x+h) \in L^p(E-h)$$

et :

$$\| f(x+h) \|_{L^p(E-h)} = \| f(x) \|_{L^p(E)}$$

Preuve:

1/- $0 < p < \infty$:

$f(x+h)$ est mesurable

$(\int_{E-h} |f(x+h)|^p)^{1/p}$ on effectue

Le changement de variable.

$$y = x+h, \quad y_1 = x_1 + h_1$$

$$y_2 = x_2 + h_2$$

$$y_n = x_n + h_n$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} |I| = 1$$

$$\left(\int_E |f(y)|^p |I| dy \right)^{1/p} = \|f\|_{L_p(E)}$$

2/- $p = \infty$ (A titre d'exercice).

Théorème: (Fischer - Riesz)

L'espace L_p est un espace de Banach (semi Banach).

(voir preuve Bourz Analyse fonctionnelle application).

- Remarque:

(sur le théorème de l'invariance des normes dans L_p par rapport à la translation).

$$\|f(x+h)\|_{L_p(E-h)} = \|f(x)\|_{L_p(E)} \quad (2)$$

Les particulières:

(très important).

$x \in \mathbb{R}^n$.

2) d'exercice:

$$\|f(x+h)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

CHAPITRE 03:

L'inégalité de Hölder et ses variantes

I/- Inégalité de Young:

Soient $0 < p < \infty$.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

a/- Si $p > 1$, on a:

$$\forall a, b \geq 0, \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \geq ab \quad (*)$$

b/- Si $0 < p < 1$

$\forall a, b \geq 0$,

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \leq a.b \quad (**)$$

Preuve:

a/- on utilise le fait que $\ln(x)$ concave

b/- A titre d'exercice.

II - Inégalité de Hölder :

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$. E un ensemble mesurable.

$$0 < p \leq \infty :$$

$f \in L_p(E)$ et $g \in L_{p'}(E)$

Alors :

1/- Si $1 \leq p \leq \infty$:

$$\int_E |f \cdot g| dx \leq \|f\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_{p'}(E)} \quad (1)$$

2/- Si $0 < p < 1$:

$$\int_E |f \cdot g| dx \geq \|f\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_{p'}(E)} \quad (2)$$

- Preuve :

1/- On pose :

$$a = \frac{|f|}{\|f\|_{L_p(E)}} \text{ et } b = \frac{|g|}{\|g\|_{L_{p'}(E)}}$$

On remplace dans (*)

a et b on obtient :

$$\frac{|f| |g|}{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}} \leq \frac{1}{p} \times \frac{|f|^p}{\|f\|_{L_p(E)}^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{L_{p'}(E)}^{p'}} \quad (1')$$

on intègre (1') d'où :

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|f| \cdot |g|}{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}} &\leq \\ &\leq \frac{1}{p} \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_{L_p(E)}^p} dx + \frac{1}{p'} \int_E \frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{L_{p'}(E)}^{p'}} dx \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{\int_E |f \cdot g| dx}{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}} \leq \frac{\int_E |f|^p dx}{p \|f\|_{L_p(E)}^p} + \frac{\int_E |g|^{p'} dx}{p' \|g\|_{L_{p'}(E)}^{p'}}$$

$$\left(\int_E |f|^p dx \right)^{1/p} = \|f\|_{L_p(E)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_E |f|^p dx = \|f\|_{L_p(E)}^p$$

donc on obtient :

$$\frac{\int_E |f \cdot g| dx}{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Par conséquent :

$$\int_E |f \cdot g| dx \leq \|f\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_{p'}(E)}$$

2/- $0 < p < 1$:

$$a \cdot b \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

D'une manière analogue en utilisant l'inégalité (**)

- Preuve : on obtient (2)

(a/-

- Théorème :

Soient p_1, p_2, p des nombres réels positifs tel que :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$$

et f et g 2 fcts telle que
 $f \in L_{p_1}$ et $g \in L_{p_2}$ Alors

$$\|f \cdot g\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_{p_1}(E)} \cdot \|g\|_{L_{p_2}(E)} \quad \text{pour } K = n-1$$

Preuve:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{p_1} + \frac{p}{p_2} = 1$$

$$\text{ou } \frac{1}{p_1/p} + \frac{1}{p_2/p} = 1$$

on applique l'inégalité de Hölder.

$$\int_E |f|^p |g|^p dx \leq \left(\int_E |f|^p \frac{p}{p_1} dx \right)^{p/p_1} \times \left(\int_E |g|^p \frac{p}{p_2} dx \right)^{p/p_2}$$

Conséquence 01:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p}$$

$$\|f \cdot g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_{p_1}} \cdot \|g\|_{L_{p_2}}$$

$$\|f_1 \cdot f_2 \dots f_n\|_{L_p} \leq \|f_1\|_{L_{p_1}} \dots \|f_n\|_{L_{p_n}}$$

$$\left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{L_p} \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{L_{p_k}} \quad (4)$$

Preuve: Par récurrence
 $K=2$ (Théorème précédent)
 on suppose que (4) est vrai

pour $K = n-1$

$$\left\| \prod_{k=1}^{n-1} f_k \right\|_{L_p} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \|f_k\|_{L_{p_k}} \quad (4')$$

$$\begin{aligned} \left\| \left(\prod_{k=1}^{n-1} f_k \right) f_n \right\|_{L_p} &\leq \left\| \prod_{k=1}^{n-1} f_k \right\|_{L_{p_k}} \|f_n\|_{L_{p_n}} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \|f_k\|_{L_{p_k}} \cdot \|f_n\|_{L_{p_n}} \end{aligned}$$

Conséquence 02:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$$

Si dans (4) on remplace p par 1 on obtient

$$\|f_1 \cdot f_2 \dots f_n\|_{L_1} \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{L_{p_k}}$$

ou :

$$\begin{aligned} \int_E |f_1 \cdot f_2 \dots f_n| dx &\leq \\ &\leq \|f_1\|_{L_{p_1}} \cdot \|f_2\|_{L_{p_2}} \dots \|f_n\|_{L_{p_n}} \quad (5) \end{aligned}$$

Remarque:
 L'inégalité (5) obtenue
 est une généralisation
 de l'inégalité usuelle
 de Hölder

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$$

conséquence 05 = 0 ? Si $0 < p < 1$
exercice.

- Conséquence 03 :
(Inégalité de Hölder pour les sommes).

(a_k) : $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$

(b_k) : $b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$

Alors :

$$\sum_{k=1}^m |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^q \right)^{1/q}$$

avec : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Preuve :

$n = 1$, $E = (0, m)$, $m \in \mathbb{N}$
 $m \neq \infty$.

on pose $f(x) = a_k$, $g(x) = b_k$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_E \int |f \cdot g| dx &= \int_0^m |f| \cdot |g| dx \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k |a_k| |b_k| dx \end{aligned}$$

T D L'espace de Lebesgue

Le 15/11/2016

espace fonctionnel :

$$\mathbb{R} : \{ f : m \mapsto \mathbb{R} \}$$

$$C(\mathbb{R}) \sim C[a, b]$$

$$\| \cdot \| : C[a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \| f \| < \infty$$

$$\sup |f(x)| \text{ compact}$$
$$a \leq t \leq \infty$$

$$C[a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \| f \| = \int_a^b |f(t)| dt \gg 0$$

Inegalites

Exercice 01

Soit α, B deux nbres

telque : $\alpha + B = 1, u, v \in \mathbb{R}$

Montrer que :

$$u^\alpha v^B \leq \alpha u + Bv \quad (1)$$

$$\text{Si } \alpha + B = 1; \varphi(\alpha x + B y) \leq$$

Converge :

$$\leq \alpha \varphi(x) + B \varphi(y)$$

Exercice 02

Inegalite de Young

Soient $a, b \gg 0$ et $p, p' > 1$

conjugues :

$$\text{ie, } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right) = 1$$

Montrer que :

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \quad (2)$$

Solution Ex 01

Comme la fct $\ln(x)$ est
concave d'un cote

$$\ln(\alpha u + Bv) \geq \alpha \ln u + B \ln v$$

d'autre cote on a :

$$\ln(u^\alpha \cdot v^B) = \alpha \ln u + B \ln v$$
$$\leq \ln(\alpha u + Bv)$$

d'où :

$$u^\alpha \cdot v^B \leq \alpha u + Bv$$

Solution Ex 02

d'apres Ex 01 prendre :

$$\alpha = \frac{1}{p}, B = \frac{1}{p'}$$

$$u = a^p, v = b^{p'}$$

on a :

$$u^{1/p} \cdot v^{1/p'} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{p'} v$$

d'où :

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

Exercice 03 : Minkowski

(Inegalite de ~~Minkowski~~ Holder) :

Soit f, g deux fct
mesurables positive sur

$E(\text{mes})$ et $p \in [1, \infty[$

alors :

$$\left(\int_E |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq$$
$$\leq \left(\int_E f^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_E g^p d\mu \right)^{1/p}$$

- Exercice 3 (Holder) a la suite $(g_p)_{p \geq 1}$
 (Inégalité de ~~Minkowski~~) on a

Soit f, g deux fcts
 mesurables positive sur E

et p, p' deux nombres
 conjugués, $p, p' \in [1, \infty]$
 alors,

$$\int_E fg dx \leq \left(\int_E f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_E g^{p'} dx \right)^{1/p'} \text{ d'où } g_p(x) \leq f_n(x) \text{ alors,}$$

Lemme de Fatou:

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de
 fcts non négatives mesurables
 sur E et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ p.p.}$$

alors,

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

- Preuve: soit $(g_p)_{p \geq 1}$
 une suite de fcts avec
 $g_p(x) = \inf_{p \leq n} f_n(x)$

$$\text{Donc : } g_1(x) = \inf_{1 \leq n} f_n(x)$$

$$\text{et } g_2(x) = \inf_{2 \leq n} f_n(x)$$

on a : $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \dots \leq g_p$
 donc $(g_p)_{p \geq 1}$ croissante
 on applique le TH de
 la convergence monotone

$$\int_E \lim_{p \rightarrow \infty} g_p(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_E g_p(x) dx \quad (1)$$

on a :

$$g_p(x) = \inf_{p \leq n} f_n(x)$$

$$\text{d'où } g_p(x) \leq f_n(x)$$

$$\int_E g_p(x) dx \leq \int_E f_n(x) dx$$

d'où :

$$\int_E g_p(x) dx \leq \inf_n \int_E f_n(x) dx \quad (*)$$

et par passage à la limite
 de $(*)$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_E g_p(x) dx \leq$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

d'après (1) on a :

$$\int_E \lim_{p \rightarrow \infty} g_p(x) dx \leq$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

Th de convergence dominée:

Soit (E, F, μ)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fct mes sur E .

on pose :

1/- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ existe $\forall x \in E$

2/- il existe une fct $g(x)$ intégrable et non négative tq: $|f_n(x)| \leq g(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E$

alors f intégrable et on a :

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

Preuve:

1/- des hypothèses on :

f est intégrable $f \in L^1(E)$

$$f \leq g$$

$$\text{on a } |f - f_n| \leq 2g$$

$$\Rightarrow 2g - |f - f_n| \geq 0$$

donc on peut appliquer le

Th de Fatou pour la

suite $2g - |f - f_n| \geq 0$

$$\int 2g d\mu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (2g - |f - f_n|) d\mu$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2g - |f - f_n|) d\mu$$

$$= \int 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (-|f - f_n|) d\mu$$

$$= \int 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int (|f - f_n|) d\mu$$

donc :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu \leq 0$$

Le 15/11/2016

Exercice:

Soient $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fct mesurables

sur un ensemble mes E :

et g une fct intégrable

$$\text{tq } f_n \geq g \quad (E, F, dx)$$

1/- Montrer que :

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

Posons $h_n = f_n - g \geq 0$

$(h_n)_{n \geq 1}$ est une suite mesurable positive.

on applique Th de Fatou

à la suite $(h_n)_{n \geq 1}$:

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} (h_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu$$

$$\Leftrightarrow \int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n - g) d\mu \leq$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n - g d\mu$$

g est une constante

Exercice :

Soit $B_r = B(0, r)$

montrer que :

a) $|x|^\delta \in L_p(B_r) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \delta > -\frac{n}{p} \quad \begin{cases} 0 < p < \infty \\ \delta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) $|x|^\delta \in L_p(L^1(B_r)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \delta < -\frac{n}{p}$$

Solution :

$f: x \mapsto f(x) = |x|^\delta, \delta \in \mathbb{R}$

$f \in L_p(B_r) \stackrel{df}{\Leftrightarrow}$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/ f \text{ mesurable} \\ 2/ \int_{B_r} |f| dx < \infty \end{cases}$$

$$\int_{B_r} f(|x|) dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^r e^{n-1} f(\xi) d\xi d\xi$$

$$x = \xi, \xi$$

Ex m : $\iint x y^2 dx dy =$

$$= \int y^2 dy \int x dy$$

(un produit)

$$x = \xi, \xi$$

$$|x| = \xi$$

on voit que

$$\int_{B_r} f(|x|) dx =$$

$$\int_{B_r} |f(x)|^p dx =$$

$$= \int_{B_r} (|x|^\delta)^p dx$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_0^r e^{n-1} e^{\delta p} d\xi d\xi$$

$$= \int_{S^{n-1}} d\xi \int_0^r e^{n-1} e^{\delta p} d\xi$$

$$= |S_{n-1}| \int_0^r e^{n-1} e^{\delta p} d\xi$$

$$= |S_{n-1}| \int_0^r e^{-n-\delta p} d\xi < \infty$$

$$\Leftrightarrow -n-\delta p < 1$$

$$\Leftrightarrow -n-\delta p < 0$$

$$\Leftrightarrow \delta p > -n$$

$$\Leftrightarrow \delta > -\frac{n}{p}$$

Le 29/11/2016

Solution Ex02:

$$1/- \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n} \quad \forall x \in$$

$f_n(x)$ sont définies et continues donc les fonctions $f_n(x)$ sont intégrables

① continue, définie sur fermé borné $\Rightarrow$ intgbl

* fct intgbl?? $\rightarrow$

$\rightarrow$ fct $\leq$ c et une fct intgbl.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n} = 0$$

$\forall x \in [0, 1]$. : on pose :

$$\Rightarrow f_n(x) \leq g(x) =$$

$$\Rightarrow g \in L_1([0, 1])$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n} =$$

$$(1+x)^n = e^{n \ln(1+x)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1+nx) e^{-n \ln(1+x)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x) \sim x$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+nx) e^{-nx}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+nx)}{e^{nx}} = 0$$

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n} =$$

$$= \frac{1+nx}{1+nx + \binom{n}{2} x^2 + \dots + x^n} \quad \text{§ 1.1}$$

La fct $g(x) = 1$ est intégrable sur $[0, 1]$. on applique

le T.C. D et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

$$(a+b)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} a^{n-s} b^s$$

$$= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} x^s$$

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s! (n-s)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

de 13/12/2016

Hypothèse :

$$1) x \quad f_n \xrightarrow{L^2} f \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$2) - g_n \xrightarrow{\text{diff}(L^2)} g \quad \Leftrightarrow$$

$$\|g_n - g\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

dans

$$3) - f_n + g_n \xrightarrow{L^2} f + g ?$$

$$\|f_n + g_n - (f + g)\|_{L^2} =$$

$$= \|f_n - f + g_n - g\|_{L^2}$$

$$\leq \|f_n - f\|_{L^2} + \|g_n - g\|_{L^2}$$

(proposition de norme).

quand $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\|f_n + g_n - (f + g)\|_{L^2} = 0$$

#

$(X, F, m) = \text{mes}$.

$(X = \mathbb{N}, F = \mathcal{P}(\mathbb{N}), m = \text{card})$

$$l_p(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1}, x_n \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{n \geq 1} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

$(L_p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{L_p}) = \text{e. norme}$

$$\|x\|_{L_p} = \left(\sum_{n \geq 1} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

$$II) - f_n + g_n \xrightarrow{L^2} f + g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f_n g_n - f g| dx < +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|^2 dx < +\infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n - g|^2 dx < +\infty.$$

$$|f_n g_n - f g| =$$

$$= |g_n(f_n - f) + f(g_n - g)|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |g_n(f_n - f)| dx + \int_{\mathbb{R}} |f(g_n - g)| dx$$

donc : d'après l'ineq de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_n g_n - f g| dx &\leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |g_n(f_n - f)| dx + \int_{\mathbb{R}} |f(g_n - g)| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |g_n|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_n - g|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

En passant à la limite

q d $n \rightarrow +\infty$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n g_n - f g| dx \rightarrow 0.$$

Soit $p \in [1, +\infty]$.

$$f(x) = x \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est mes sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\infty}([0,1])} &= \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \\ &= \sup_{0 \leq x \leq 1} x = 1 \end{aligned}$$

donc $f \in L_\infty(\mathbb{R})$

Soit $p \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{[0,1]} x^p dx$$

$$= \int_0^1 x^p dx \Leftrightarrow p < 1$$

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

donc $f \in L_p(\mathbb{R})$ finie

2/ Soit $p \in [1, \infty]$

$$f(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{(0,1]}(x) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{(0,1]} \frac{1}{x^p} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx < \infty \Leftrightarrow p < 1$$

donc $f \notin L_p(\mathbb{R})$

- a, b > 0. $p \in (0, \infty)$

min (

$E = \text{exp rect}$

1) - suite absolument sommable

$(x_n)_{n \geq 1} \subset E$

P_b (Complétude de l'espace $L_p(\cdot)$)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ suite de coudy dans l'espace $L_p(\cdot)$.

1) - Montrer que il existe une sous-suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de $(f_n)_{n \geq 1}$

$$g_1 = f_{n_1}, g_2 = f_{n_2} \dots$$

$$\dots \text{ et } g_n = f_{n_k}$$

$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ telle que :

$$\sum_{n \geq 1} \|g_{n+1} - g_n\|_{L_p} < \infty$$

Solution ;

$L_\infty(E)$ est complet ;

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ suite de coudy dans $L_\infty(E)$

$$\text{tp : } \sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{L_\infty(E)} < \infty$$

Soit g_n la fonction définie par :

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|$$

on a

$$0 \leq g_n(x) \leq \sum_{k=1}^n |f_k(x)|$$

$$\forall x \quad |f(x)| \leq \|f\|_{L_\infty(E)}$$

$$\|g(x)\| \leq \|g(x)\|_{L^\infty(E)}$$

$$\leq \sum_{k \geq 1} \|f_k\|_{L^\infty(E)} \quad (p-p)$$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ est absolument convergente presque partout

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (p-p)$$

$$|f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{L^\infty(E)} \rightarrow 0 \quad (p-p)$$

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^\infty(E)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{L^\infty(E)}$$

par passage à la limite
qd $n \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ est convergente}$$

dans $L^\infty(E)$

$$\sum x_n \text{ cv i.e. : } \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$$

absolument convergente ?

Le 15/01/2016.

Rappels :

$$1) - \int_E |fg| \leq \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1)$$

$$2) - \|f \cdot g\|_{L^p(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^p(E)}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \quad (2)$$

convergente :

Soient $\text{mes } E < \infty$.

$$1 \leq p < q \leq \infty$$

alors :

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq (\text{mes } E)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(E)} \quad (3)$$

$$\text{et } L^p(E) \subset L^q(E).$$

Preuves :

$$\text{on pose } g(x) = 1.$$

$$\text{et } p_1 = q > p. \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} \quad (*)$$

Donc on obtient :

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq \|f\|_{L^q(E)} \|1\|_{L^{p_2}(E)} \quad (2')$$

$$\|1\|_{L^{p_2}(E)} = \left(\int_E dx \right)^{1/p_2} \quad p \leq q$$