Inégalité de convexité :

Exercice 1 : Soient α, β deux nombres tq $\alpha + \beta = 1$, $u, v \in \overline{\mathbb{R}}_+$

mq : $u^\alpha v^\beta \leqslant \alpha u + \beta v$ ... (1)

Exercice 2 : Inégalité de Yong

soient $a, b \geqslant 0$. et $p, p' > 1$. conjugués

i.e $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

montre que : $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ (2)

Solution d'Exercice 1 :

Comme la fonction $\ln(x)$ est concave. d'une part : $\ln(\alpha u + \beta v) \geqslant \alpha \ln(u) + \beta \ln(v)$

d'autre part : on a

$\ln(u^\alpha + v^\beta) = \alpha \ln u + \beta \ln v \leqslant \ln(\alpha u + \beta v)$

d'où $u^\alpha \cdot v^\beta \leqslant \alpha u + \beta v$.

Solution d'Exo 2 :

D'aprés l'exo 1 On prend $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{p'}$

$u = a^p$, $v = b^{p'}$

On : $u^{\frac{1}{p}} \cdot v^{\frac{1}{p'}} \leqslant \frac{1}{p} u + \frac{1}{p'} v$

d'où $ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$

Exercice 3 : Inégalité de Holder

Soient f, g deux fcts mesurables positives sur E et p, p' deux nombres conjuguées. $p, p' \in [1, \infty]$ alors

$$\int_E fg\,dx \leq \left(\int_E f^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Exercice 4 : Inégalité de Minkowski

$1 < p < \infty$ Soient f, g deux fct mesurable positive sur E (mes) et $1 < p < \infty$

Alors :

$$\left(\int_E (f+g)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Exercice :

Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonction mesurable un ensemble mesurable (E, Γ, dm) et g une fonction integrable tq : $f_n \geq g$

mq $\int_E \liminf f_n\,dm \leq \liminf \int_E f_n\,dm$

Solution :

posons : $h_n = f_n - g \geq 0$

a) (h_n) est mesurable et non négative en.

Scanned by CamScanner

applique le lemme de Fatou où la suite $(h_n)_{n\geq 1}$

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E h_n \, dm \quad - \circledast$$

$$\circledast \iff \int_E \liminf (f_n - g) \, dm \leq \liminf \int_E (f_n - g) \, dm$$

$$\iff \int_E \liminf f_n \, dm - \int_E g \, dm \leq \liminf \int_E f_n \, dm - \int_E g \, dm$$

$$\iff \int_E \liminf f_n \, dm \leq \liminf \int_E f_n \, dm$$

Exercice 2 : soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonction mesurable, un ensemble (E, T, dm) et g une fonction integrable tq : $f_n \leq g$.

mq :

$$\int_E \limsup f_n \, dm \geq \limsup \int_E f_n \, dm$$

Solution :

On a : $\liminf_{n\to\infty} (-f_n) = -\limsup_{n\to\infty} f_n$

$$\liminf (f_n) = \sup_{n\geq 1} \left(\inf_{n\geq K} f_K \right)$$

1er méthode :

On suppose que $K_n = g - f_n \geq 0$.

$(K_n)_{n\geq 1}$ est mesurable et non negative en applique le lemme de Fatou à la suite $(K_n)_{n\geq 1}$

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} K_n \, dm \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E K_n \, dm \quad \text{--- } (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \int_E \liminf (g - f_n) \, dm \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n) \, dm$$

$$\Leftrightarrow \int_E g \, dm + \int_E \liminf (-f_n) \, dm \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E g \, dm + \liminf_{n\to\infty} \int_E (-f_n) \, dm$$

$$\Leftrightarrow \int_E g \, dm + \int_E \liminf (-f_n) \, dm \leqslant \int_E g \, dm + \liminf \int_E (-f_n) \, dm$$

$$\Leftrightarrow \int_E - \limsup f_n \, dm \leqslant - \limsup \int_E f_n \, dm$$

$$\Leftrightarrow - \int_E \limsup f_n \, dm \leqslant - \limsup \int_E f_n \, dm$$

$$\Leftrightarrow \int_E \limsup f_n \, dm \geqslant \limsup \int_E f_n \, dm$$

2ème méthode :

On utilisons le resultat de l'exercice 01

tq : $-g \leqslant -f_n$

Exercice : soit (E, T, m) un espace mesuré et (f_n) une suite de fonction mesurable ~~positive~~ non négativ tq : $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ et on suppose qu'il existe $c > 0$

tq: $\int_E f_n \, dm \leq C$

1/ mq : $\int_E f \, dm \leq C$

Solution :
$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim\inf f_n = \lim f_n$$

$$\int_E f \, dm = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, dm$$

$$= \int_E \lim\inf_{n\to\infty} f_n \, dm$$

$$\leq \lim\inf \int_E f_n \, dm$$

$$\leq C$$

Holder : p, p' des nbr de Holder (exposant conjug

$f \in L_p(E)$

$g \in L_{p'}(E)$ $\qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Alors On a : $\|f \cdot g\| \leq \|f\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_{p'}(E)}$

$$\int |f \cdot g| \, dm \leq \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$\forall f \in L_p$

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

$|f+g|^p = |f|\left(|f+g|^{p-1}\right) + |g|\left(|f+g|^{p-1}\right)$

$\|f+g\|_p = \int_E |f+g|^p dm = \int_E |f||f+g|^{p-1} dm + \int_E |g||f+g|^{p-1} dm$

Exercice 8 (Corollaire de T.C.M)

$(f_n)_{n\geq 1} \subset E$, $f_n \geq 0$ alors:

$$\int_E \sum_{n\geq 1} f_n \, dm = \sum_{n\geq 1} \int_E f_n \, dm.$$

Exercice 9 Calculer les limites quand $n \to \infty$

1) $\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$ $\qquad \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx$

3) $\int_0^n \ln x \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$

Solution 8:

Soit $S_n = \sum_{p=1}^{n} f_p$, $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonction mes et non négative. et croissante, On applique le th de la convergence monotone.

$$\int_E \lim_{n\to\infty} S_n \, dm = \lim \int_E S_n \, dm$$

$$\int_E \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n \, dm = \int_E \lim_{n\to\infty} \sum_{p\geq 1}^{n} f_p \, dm$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{p\geq 1}^{n} f_p \, dm$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{p\geq 1}^{n} \int_E f_p \, dm$$

$$= \sum^{\infty} \int_E f_m \, dm$$

Solᵒ 1

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} \, dx = \int_0^1 \lim \frac{1+nx}{(1+x)^n}$$

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n} > 0 \,, \quad \forall x \in [0,1]$$

$\forall n$, $f_n(x)$ sont definies et Continues, donc Des fonctions $f_n(x)$ sont integrables.

* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n} =$

* $\forall x \in [0.1] \quad f_n(x) \leq g(x) \quad g \in L_1([0.1])$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n} = \lim_{n\to+\infty} (1+nx)\, e^{-n\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (1+nx)\, e^{-nx}$$

$$(a+b)^n = \sum_{s=0} \binom{n}{s} a^s b^{n-s}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1+nx}{e^{nx}} = 0$$

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \dots + x^n \binom{n}{s}$$

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n} = \frac{1+nx}{1+nx+\binom{n}{2}x^2+\dots x^n\binom{n}{s}} \leq 1$$

la fct $g(x) = 1$ est integrable sur $[0,1]$

On applique le Th de la CVD et on a

$$= \int_0^1 0 \, dx = 0$$

$$\frac{\overbrace{1+nx}^{a}}{\underbrace{1+nx}_{a}+\underbrace{\binom{n}{2}x^2+\dots x^n\binom{n}{s}}_{b}} = \frac{a+b}{a+b} \leq 1$$

$$C_n^s = \frac{n!}{s!(n-1)!} =$$

si $s=1$ $\quad \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

2) Exemple : soit $B_r := B(0,r)$ mq

a) $|x|^{\gamma} \in L_p(B_r) \iff \gamma > -\frac{n}{p}$ $\quad 0 < p < \infty$

$\gamma \in \mathbb{R}$.

b) $|x|^{\gamma} \in L_p({}^cB_r) \iff \gamma < \frac{n}{p}$

Sol :

$f : x \longrightarrow f(x) = |x|^{\gamma}$ $\quad \gamma \in \mathbb{R}$.

$$f \in L_p(B_r) \overset{def}{\iff} \begin{cases} 1) & f \text{ mesurable.} \\ 2) & \int_{B_r} |f(x)|^p dx < \infty \end{cases}$$

On sait que :

$$\int_{B_r} |f(x)|^p dx = \int_{B_r} (|x|^{\gamma})^p dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^r \varphi^{n-1} \varphi^{\gamma p} d\varphi \, d\xi =$$

$$\int_{S^{n-1}} d\xi \int_0^r \varphi^{n+\gamma p - 1} d\varphi = |S_{n-1}| \int_0^r \varphi^{n+\gamma p-1} d\varphi$$

$$= |S_{n-1}| \int_0^r \frac{1}{\varphi^{-n-\gamma p+1}} d\varphi < \infty$$

$$\iff -n - \gamma p + 1 < 1$$

$$\iff -n - \gamma p < 0$$

$$\iff \gamma p > -n.$$

$$\iff \gamma > -\frac{n}{p}$$

Exercice : Soient $a,b>0$ et $0<p<\infty$ alors :

$$\min(2^{p-1},1)(a^p+b^p) \leq (a+b)^p \leq \max(2^{p-1},1)(a^p+b^p)$$

démontrée :

Exo :

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-ce que $1_{\mathbb{Q}} \in L_p(\mathbb{R})$ $1 \leq p \leq \infty$.

Exo :

Soient (f_n) (resp g_n) qui CV vers f (resp g) au sens de L_1

1) Est ce que f_n+g_n Converge vers $f+g$ au sens de

2) même qst pour l'esp L_2.

3) (f_n) (resp g_n) Converge vers $f(x)$ (res g)

- au sens de L_2 alors $f_n g_n \to f g$
- au sens de L_1

Sol: $1_{\mathbb{Q}}$ est mesurable.

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}}\, dx = \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} 0\, dx = 0$$

donc $1_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$

II) $\int_{\mathbb{R}} |1_{\mathbb{Q}}|^p dx = \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} 0\, dx = 0$

donc: $1_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R})$

III) $\sup_{x \in \mathbb{R}} \text{vrai}\, |1_{\mathbb{Q}}(x)| = 0$

$\Rightarrow 1_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$

2) $\frac{1}{n}$ qst.

$f_2(x) = x\, 1_{[0,1]}(x)$

$f_3(x) = \frac{1}{x}\, 1_{]0,1]}(x)$

$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1(I)} f \Leftrightarrow \int |f_n - f|\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

$g_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1(I)} g \Leftrightarrow \int |g_n - g|\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Hypothèse :

1) $f_n \xrightarrow{L_2} f \iff \| f_n - f \| \to 0$

$g_n \to g \iff \| g_n - g \| \to 0$

1) $\| f_n + g_n - (f+g) \|_{L_2} = \| f_n - f + g_n - g \|_{L_2} \leq \| f_n - f \|_{L_2} + \| g_n - g \|_{L_2}$ (propriété de la norme)

quand $n \to \infty$ $\| f_n + g_n - (f+g) \|_{L_2} = 0$

$\lim \int_I |f_n - f + g_n - g|^2 dx \leq \lim_{n \to +\infty} \left(\int_I |f_n - f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_I |g_n - g|^2 dx$

$= \lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f|^2 dx + \lim \int |g_n - g|^2 dx = 0$

$= 0$

Donc

$f_n + g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L_2} f + g$

$$f_n \xrightarrow{L_2} f \iff \|f_n - f\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$g_n \xrightarrow{L_2} g \iff \|g_n - g\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$f_n g_n \xrightarrow{L_1} f g$$

$$\int_I |f_n - f|^2 dx < \infty \qquad \int_I |g_n - g|^2 dx < \infty$$

$$\int |f_n g_n - f g| \, dx < \infty$$

?

$$|f_n g_n - f g| = |g_n (f_n - f) + f (g_n - g)|$$

$$\leq \int_I | g_n (f_n - f) + \int_I | f_n (g_n - g) \, dx$$

d'aprè l'inégalité de Holder

$$\int_I |f_n g_n - f g| \, dx \leq \int_I | g_n (f_n - f)| dx + \int_I |f_n (g_n - g)|$$

$$\int_I |f_n g_n - f g| \, dx \leq \left(\int |g_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f_n - f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int |f_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g_n - g|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

En passant à la limite qd $n \to \infty$. On obtient

$$\int_I |f_n g_n - f g| \, dx \to 0$$

Exo!

$p \in [1, \infty]$

$$f(x) = x \mathbb{1}_{[0,1]} = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est mesurable $\mathbb{R}$

$$\|f\|_{L_\infty[0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} \text{vrai} |f(x)|$$

$$= \sup_{0 \leq x \leq 1} \text{vrai} |x| = 1$$

donc $f \in L_\infty(\mathbb{R})$

soit $p \geq 1$.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{[0,1]} x^p dx := \int_0^1 x^p dx < \infty$$

donc: $f \in L_p(\mathbb{R})$

* $$f_3(x) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\|f_3\|_{L_p(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f_3(x)|^p dx = \int_{]0,1]} \left|\frac{1}{x}\right|^p dx < \infty \Leftrightarrow p < 1$$

donc $f_3 \notin L_p(\mathbb{R})$

Scanned by CamScanner

$$\|f_3\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \sup_{}\text{vrai} \, |f_3(x)| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \text{vrai} \, \left|\frac{1}{x^{1/2}}\right| = \infty$$

donc $f_3 \notin L_\infty(\mathbb{R})$

* $a, b > 0$. $\quad p \in (0, \infty)$

$$\min(2^{p-1}, 1)(a^p + b^p) \leq (a+b)^p \leq \max(2^{p-1}, 1)(a^p + b^p) \quad (*)$$

Supposons : $1 \leq p \leq \infty$

$(*)$ s'écrit

$$a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

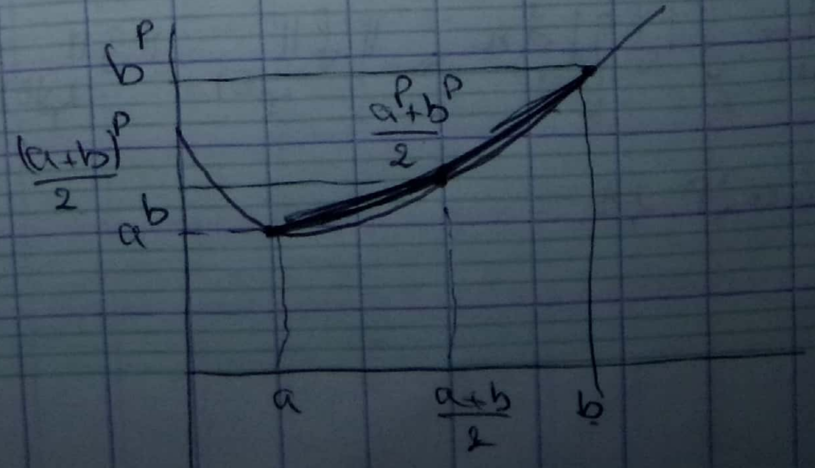
mq : $\quad (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$

utilisant le fait que la fct

$\varphi : t \to t^p$ est convexe.

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)^p = \frac{(a+b)^p}{2^p} \leq \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2}$$

$$(a+b)^p \leq 2^p \cdot 2^{-1}(a^p + b^p) = 2^{p-1}(a^p + b^p)$$



Généralisation :

$$* \ \min(m^{p-1}, 1)\sum_{i=1}^{m} a_i^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^p \leqslant \max(m^{p-1}, 1)\sum_{i=1}^{m} a_i^p$$

Exercice : $1 \leqslant p < \infty$, $f, g \in M_+(E)$

Inégalité de Minkasky $1 \leqslant p < \infty$ $f, g \in M_+(E)$

$$\left(\int_E |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$p^{-1} + p'^{-1} = 1$ $p, p' \in [0, \infty]$

$f \in L_p(E)$

$g \in L_{p'}(E)$

1) si $1 \leqslant p < \infty$

$$\|f \cdot g\|_{L_1(E)} = \int_E |fg| \, dx \leqslant \|f\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_{p'}(E)}$$

2) si $0 < p < 1$

$1 \leq p < \infty$ On a :

$$(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = F.G$$

$$= \underbrace{f}_{F_2}\underbrace{(f+g)^{p-1}}_{G_2} + \underbrace{g}_{F_1}\underbrace{(f+g)^{p-1}}_{G_1}$$

$$I = \int_E (f+g)^p dx = I_1 + I_2$$

(utilise Holder)

$$I_1 = \int_E f(f+g)^{p-1} dx \leq \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E ((f+g)^{p-1})^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E ((f+g)^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$p' = \frac{p}{p-1}$

de manière analogue :

$$I_2 = \int_E g(f+g)^{p-1} dx \leq \left(\int_E |g|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E ((f+g)^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_E |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E (f+g)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\int_E (f+g)^p dx \leq \left(\int_E (f+g)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

Complétude :

Th de Riesz :

Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L_p(E)$ est un esp normé complet.

ie : est espace de Banach.

Lemme : (Critère)

$(E, \|\cdot\|_E)$ est complet (de Banach) $\Longleftrightarrow$ toute suite abs-somm est sommable.

$\Rightarrow$ évident

$\Leftarrow$ on construire une sous suite

E = esp vect normé par $\|\cdot\|_E$

a) suite absolument sommable $(x_n)_{n \geq 1} \subset E$ (suite de E)

est dite abs-som si $\sum_{n \geq 1} \|x_n\|_E < \infty$

b) suite sommable :

$(x_n)_{n \geq 1}$ est dite sommable si $\sum_{n \geq 1} x_n \in E$

Problème : (complétude de l'espace $L_p(\cdot)$)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans l'espace $L_p(\cdot)$

1) mq: il existe une sous suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$

$$g_1 = f_{n_1}, \quad g_2 = f_{n_2} \quad \cdots \quad g_k = f_{n_k}$$

$$n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \leq \cdots$$

tq: $\sum_{n\geq 1} \| g_{n+1} - g_n \|_{L_p} < \infty$

2) On pose $g(x) = |g_1(x)| + \sum_{n\geq 1} | g_{n+1}(x) - g_n(x) |$

- mq $g \in L_p(E)$
- mq l'ensemble $E = \{ x : g(x) = \infty \}$ est de mesure nulle, Déduire que sur l'ensemble X / E la série $\sum_{n\geq 1} | g_{n+1}(x) - g_n(x) |$ converge.

de même pour la série $\sum_{n\geq 1} g_{n+1}(x) - g_n(x)$

On pose :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E \\ g_1(x) + \sum_{n\geq 1} g_{n+1}(x) - g_n(x) & \text{si } x \in X / E \end{cases}$$

mq: $|f(x)| \leq g(x)$

Déduire que: $f \in L_p(X)$ et $\| f_n - f \|_{L_p(X)} \longrightarrow 0$

(E) est complet :

$(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_\infty(E)$

$$\sum_{n\geq 1} \| f_n(x) \|_{\mathcal{L}_\infty} < \infty$$

Soit g_n la fonction définie par $g_n = \sum_{k=1}^{n} | f_k(x) |$

On a $0 \leq g_n(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k \|_{\mathcal{L}_\infty(E)}$ $\left(|g(x)| \leq \| g(x) \|_{\mathcal{L}_\infty(E)} \right)$

$$g_n(x) \leq \sum_{k\geq 1}^{\infty} \| f_k \|_{\mathcal{L}_\infty(E)} \quad (p\text{-}p)$$

Donc $\sum_{k\geq 1} f_k$ est absolument convergente presque partout

et $f(x) = \sum_{k\geq 1} f_k(x)$ $(p\text{-}p)$

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k\geq n+1}^{\infty} \| f_k \|_{\mathcal{L}_\infty(E)} \quad p\text{-}p$$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right\|_{\mathcal{L}_\infty(E)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k(x) \|_{\mathcal{L}_\infty(E)}$$

par passage à la limite qd $n \to +\infty$ on obtient

$\sum f_k$ est convergente dans $\mathcal{L}_\infty(E)$

Complétude, densité, séparabilité, réflexivité (L^p)

1) $(E, \|.\|)$ e.v.n si $\mathbb{C}$ est normé

2) $(E', \|.\|_{E'}) = \mathcal{L}(E, \mathbb{C} / \mathbb{R})$ duale est un esp de Banach

3) $(E'', \|.\|_{E''}) = \mathcal{L}(E', \mathbb{C})$ biduale aussi un esp de Banach

Approximation : (Densité)

1°)

Notation :

$M(E) :=$ espaces des fcts mesurable

$M_+(E) :=$ " " " mesurable positive

$\mathcal{E}(E) :=$ fct étagées (simple)

$\mathcal{E}_+(E) :=$ " " positive

Th : toute fct mesurable positive f est limite d'une suite de fct étagées positive.

~~La densité~~ ~~fct~~ ~~L^p~~ peut être

La densité des fct étagées positive L_p $1 \leq p < \infty$

Th : pour tout $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$, $\forall \varepsilon > 0$ il existe $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite de fct simple (étagée)

tq : $\|f - \varphi_n\|_{L^p} < \varepsilon$

La densité des fct Continues :

Th 2 :

Pour tt $f \in L_p$ $(1 \leq p < \infty)$ $\forall \varepsilon > 0$

il existe (φ) une fct continue

tq :

$$\|f - \varphi\|_{L_p} < \varepsilon$$

Th 3 : La densité de fct $C_0^\infty(\Omega)$ Ω

l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L_p(\Omega)$ $1 \leq p < \infty$

i.e : $\forall \varepsilon > 0$ $\forall f \in L_p(\Omega)$, $\exists g \in C_0^\infty(\Omega)$ $\|f - g\|_{L_p} < \varepsilon$

Séparabilité :

il existe une part dénombrable qui dense dans

Def : Une espace métrique (E, d) est dite séparable s'il admet une partie dénombrable dense dans E

Exemple :

$\mathbb{R}$ est séparable $(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est dénombrable

Th : Pour tout $1 \leq p < \infty$ l'espace $L_p(\cdot)$ est séparable mais $L_\infty(\cdot)$ ne l'est pas

Travail : M q L_∞ n'est pas séparable.

Reflexivité :

Thé : Pour tout $1 < p < \infty$ l'espace $L_p(\cdot)$ est reflexif, mais $L_1(\cdot)$ et $L_\infty(\cdot)$ ne sont pas reflexif

$$J : (E, \|\cdot\|) \to E''$$

$$x \longrightarrow J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$f \longrightarrow J_x(f) = f(x)$$

si J est bijective, E est dit reflexif.