

Chapitre 1 : Espaces de Lebesgue

Définitions et propriétés

I) Définitions :

Def 1 : Soient $x \in \mathbb{R}^n$, x mesurable et $0 < p < \infty$

$f: x \rightarrow \mathbb{C}$, On dit que $f \in L_p(x)$

(ou $L_p(x)$) désigne l'espace de Lebesgue

si 1) f est mesurable

$$2) \|f\|_{L_p(x)} = \left(\int_x |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Rappels :

Lemme de Fatou : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables non négatives, alors $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ est mesurable et de plus

$$\int f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$$

Théorème : (Convergence monotone)

Soit (f_n) une suite ~~croissante~~ croissante de fonctions mesurables qui converge vers $f(x)$ alors f est mesurable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_x f_n(x) dx = \int_x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Théorème : (Convergence dominée)

Soit (f_n) une suite de fonction mesurable qui converge presque partout vers f .
- s'il existe une fonction g intégrable et non négative. tq $|f_n| \leq g$ pour tout n alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

Théorème : (Fubini)

Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ ($E \subset \mathbb{R}^n$) et $F \subset \mathbb{R}^m$ (un ensemble mesurable) et la fonction $f(x,y)$ intégrable sur $E \times F$. Alors pour presque partout les $x \in E$ et les $y \in F$ $f(x,y)$ est intégrable sur E et

$$\int_{E \times F} f(x,y) dx dy = \int_E \left(\int_F f(x,y) dy \right) dx$$
$$(1) = \int_F \left(\int_E f(x,y) dx \right) dy$$

Conséquence : 1 = si $f(x,y)$ est mesurable sur $E \times F$ est finie l'une des intégrales

$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)| dy \right) dx, \quad \int_F \left(\int_E |f(x,y)| dx \right) dy$$

alors toutes les intégrales de (1) existent et de

plus (1) est vérifiée

Conséquence 2° si la fonction f est à valeurs réelles et mesurable sur $E \times F$ et au moins l'une des fonctions f_x ou f_y est intégrable sur $E \times F$, (en particulier la fonction f est mesurable et non négative sur $E \times F$) Alors est vérifiée (1) (ces intégrales peuvent être infinies)

Remarque : si f n'est pas intégrable sur $E \times F$, alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différents.

Def 2° Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$1/ \sup_{x \in \Omega} \inf_{\substack{e \in \Omega \\ \text{mes } e = 0}} f(x) = \inf_{\substack{e \in \Omega \\ \text{mes } e = 0}} \sup_{x \in \Omega} f(x)$$

$$2/ \inf_{x \in \Omega} \sup_{\substack{e \in \Omega \\ \text{mes } e = 0}} f(x) = \sup_{\substack{e \in \Omega \\ \text{mes } e = 0}} \inf_{x \in \Omega} f(x)$$

Def 2' : Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sup_{x \in \Omega} \inf_{\substack{e \in \Omega \\ \text{mes } e = 0}} f(x) = \inf \{ M \in \mathbb{R} : \text{mes} \{ x \in \Omega, f(x) > M \} = 0 \}$$

On montre que **Def 2** $\Leftrightarrow$ **Def 2'**

comme Exo 5

$$\{ f \in L_{\infty}(\Omega) \text{ si } \sup_{x \in \Omega} \inf_{\substack{e \in \Omega \\ \text{mes } e = 0}} |f(x)| < \infty \}$$

espace fonction $\ell = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \}$

$C(\mathbb{R}) \rightarrow C([a, b])$

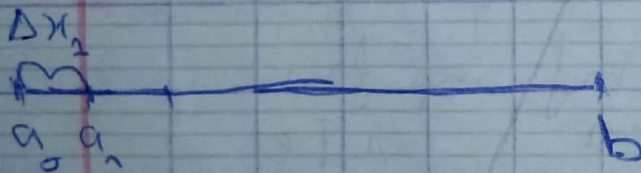
$\|\cdot\|: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

$f \rightarrow \|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

$C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

$f \rightarrow \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \geq 0$

II) Rappels sur l'intégrale de Lebesgue



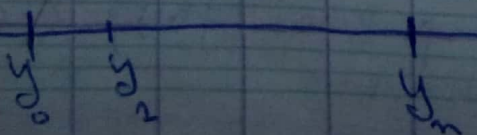
$\sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ (la somme de Riemann)

$\int_a^b f(x) dx$

$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta x_k = I$

$\mathcal{A}$ ensemble mesurable

f bornée



$$a \leq f(x) \leq b, x \in \Omega$$

$$A = y_0 < y_1 < \dots < y_n = B$$

$$S = \sum_{k=1}^n y_k m e_k, \quad S = \sum_{k=1}^n y_{k+1} m e_k$$

$$\text{on: } e_k = \{x \in \Omega, y_k < f(x) < y_{k+1}\}$$

Def.: On dit que f est lebesgue intégrable sur Ω mesurable si $S = I = U$

a) f mesurable bornée :

Théorème: Quelle que soit f mesurable et bornée sur Ω (mesurable), elle est lebesgue intégrable.

b) f non bornée non négative :

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \leq N \\ N, & \text{si } f(x) > N \end{cases}$$

$$I = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_N(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } I \text{ existe et est finie} \\ \text{on dit que } f \text{ est intégrable} \\ \text{au sens de lebesgue} \end{array} \right.$$

c) f non bornée et de signe quelconque

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

$\propto |f(x)| = ?$ Exo?

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_+(x) dx - \int_a^b f_-(x) dx \quad \left(\text{on m'assure l'un des deux est fini pour que l'intégrale existe} \right)$$

Pour que $\int_a^b f(x) dx$ existe (elle peut être infinie)

(il faut que au moins l'une des 2 intégrales soit finie)

2/ Propriétés de l'intégrale de Lebesgue :

1/ Soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, les fonctions f_1 et f_2 sommables sur E , alors

$$f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$$

$$\int_E f(n) d\mu = c_1 \int_E f_1(n) d\mu + c_2 \int_E f_2(n) d\mu.$$

2/a) si $\mu(E) = 0$ alors $\int_E f(n) d\mu = 0$

* 2 fcts f et g équivalentes (l.f.n. = g(n) presque partout)

b) si $f \sim g$ alors $\int_E f(n) d\mu = \int_E g(n) d\mu$

$$E = E_1 \cup W, \quad E_1 \cap W = \emptyset$$

$$\int_E f(n) d\mu = \int_{E_1 \cup W} f(n) d\mu = \int_{E_1} f(n) d\mu + \int_W f(n) d\mu$$

$$= \int_{E_1} f(n) d\mu =$$

Comme $\int_{E_1} f(n) d\mu = \int_{E_1} g(n) d\mu \Leftrightarrow$

$$\int_E f(n) d\mu = \int_E g(n) d\mu.$$

Exercice 1: f une fct mesurable sur E_1 (mes)
 si $E_2 \subset E_1$, tq mes $(E_1/E_2) = 0$, mg

$$\int_{E_1} f(x) dx = \int_{E_2} f(x) dx$$

3) si f est mesurable sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \in \mathbb{R}^n$)
 $\mathbb{R}$ mesurable, alors:

f intégrable $\Leftrightarrow |f|$ intégrable

• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$

Exo 2: Esq ce resultat est valable au
 sens de Riemann.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \text{ irrationnel} \end{cases}$$

4) Intégrale impropres

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \downarrow \text{Cr} \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \rightarrow \text{Semi-cr.}$$

↑
absolument
Cr.

pour l'intégrale de Lebesgue n'est pas en
mais au sens de Riemann est intégrable.
semi-converge.

$$f \text{ integ} \iff |f| \text{ integ} \quad \text{Lebesgue}$$

$$* E_1 \subset E_2 \Rightarrow \int_{E_1} f(x) dx \leq \int_{E_2} f(x) dx$$

5/35 Soit la fct f est intégrable sur un ensemble
mesurable E_1 , alors elle est intégrable sur E_2
 $\forall E_2 \subset E_1$ (E_2 soit mesurable). De plus si
la fct f est non négative à valeur réel:
alors : $\int_{E_2} f(x) dx \leq \int_{E_1} f(x) dx$ (1)

* Conséquence : (Th de la moyenne)

soit f une fct à valeurs réelles

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

si f est intégrable sur Ω (mes), mes $\Omega < \infty$

$$\text{tq: } a, b \in \mathbb{R}$$

$$a \leq f(x) \leq b \quad \text{p.p}$$

$$(*) (*) \quad a \cdot \text{mes } \Omega \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq b \cdot \text{mes } \Omega$$

A prouver à titre d'exercice.

par (*) la conséquence de (1)

5/6 Soient 2 fcts f et g des fcts
intégrables sur Ω (mes.) tq $f(x) \leq g(x)$

$$\text{alors : } \int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx$$

Lemme de Fatou :

soit (f_n) une suite de fonction non négative
mesurable sur Ω

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pp}$$

$$\text{alors : } \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Preuve :

soit (g_p) une suite de fct avec $p \geq 1$

$$(g_p)(x) = \inf_{p \leq n} f_n(x)$$

$$g_1(x) = \inf_{1 \leq n} f_n(x)$$

$$\text{et } g_2(x) = \inf_{2 \leq n} f_n(x)$$

on $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \dots \leq g_p$

donc $(g_p)_{p \geq 1}$ croissante.

On applique le TH de la convergence monotone à la suite $(g_p)_{p \geq 1}$

$$\int_a^b \lim_{p \rightarrow \infty} g_p(x) dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g_p(x) dx \quad (1)$$

on $g_p(x) = \inf_{p \leq n} f_n(x) \quad (2)$

d'où $g_p \leq f_n(x)$

donc $\int_a^b g_p(x) dx \leq \int_a^b f_n(x) dx$

d'où $\int_a^b g_p(x) dx \leq \inf_{n \geq p} \int_a^b f_n(x) dx \quad (*)$

et par passage à la limite dans $(*)$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g_p(x) dx \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{n \geq p} \int_a^b f_n(x) dx \quad (n \geq p)$$

D'après (1) et (2) on a :

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) dx \quad (n \geq p)$$

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$$

Théorème de CV dominée :

soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$

soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonction mesurable

On suppose :

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ existe $\forall x \in E$.

2) il existe une fonction $g(x)$ intégrable et non négative.

tg $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E$.

Alors ! f est intégrable et on a :

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

Preuve :

des hypothèses on a : i) f est intégrable

$(f \in L^1(E)) (f \leq g)$

$$\text{On a : } |f - f_n| \leq 2g - \text{car } |f| - |f_n| \leq |f - f_n|$$

$$\Rightarrow 2g - |f - f_n| \geq 0$$

donc on peut appliquer le Théorème de Fatou pour la suite $2g - |f - f_n| \geq 0$.

$$\int 2g \, d\mu = \int \liminf (2g - |f - f_n|) \, d\mu$$

$$\leq \liminf \int 2g - |f - f_n| \, d\mu$$

$$\leq \int 2g \, d\mu - \liminf \int |f - f_n| \, d\mu$$

$$\int 2g \, d\mu - \limsup \int |f - f_n| \, d\mu$$

donc $\limsup \int |f_n - f| \, d\mu \leq 0$
 donc $\limsup \int |f_n - f| \, d\mu = 0$

6) Pour une fct $f(x)$ mesurable sur un ensemble E mesurable. soit intégrable sur $E \Leftrightarrow |f(x)|$ intégrable sur E .

si f est intégrable, alors $\left| \int_E f(x) \, d\mu \right| \leq \int_E |f(x)| \, d\mu$.

III Définition des espaces L_p (suite) :

1) $0 < p < \infty$. $f \in L_p$ si 1) f mesurable
 2) $\|f\| = \left(\int_E |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty$

Exemple :

$$a) |x|^\gamma \in L_p(B_n) ? \Leftrightarrow \gamma > -\frac{n}{p} \text{ (preuve TD)}$$

$$0 < p < \infty \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

$$b) |x|^\gamma \in L_p(\mathbb{C}B_n) \Leftrightarrow \gamma < -\frac{n}{p} \text{ (preuve en TD)}$$

Déf 2.2 (p = ∞)

soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{x \in E | \varepsilon} f(x) \quad \text{mes } E = 0$$

$$\inf_{x \in E} \text{vrai } f(x) = \sup_{\varepsilon} \inf_{x \in E | \varepsilon} f(x)$$

Exemple : soit $E = \mathbb{R}^n$ $e \subset \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) > 0, & \forall x \in e \\ 0 & \forall x \in (\mathbb{C}e) \quad (\mathbb{R}^n / e) \end{cases}$$

$$0 \leq \sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) \leq \sup_{x \in E | \varepsilon} f(x) = 0$$

$$\text{donc } \sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) = 0$$

livre Brezis Analyse fonctionnelle et app

Def 2: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} M(x) dx : M \in \mathcal{M}^+, \text{mes} \{x \in E : f(x) > M(x)\} = 0 \right\}$

lemme 1: Les définitions (1) et (2) sont équivalentes.

Def 3: ($p = \infty$)

soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E mesurable. et $f: E \rightarrow \mathbb{C}$
($\text{mes } E > 0$)

On dit $f \in L_{\infty}(E)$ si:

a) f est mesurable.

b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$

Def 3': $L_{\infty}(E) = \left\{ f: E \rightarrow \mathbb{R}, \text{mes } E > 0, f \text{ mesurable} \right.$
 $\left. \text{et } \exists c > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } E \right\}$

Exercice:

montré que:

$\|f\|_{L_{\infty}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$ est une norme.

* si $f \in L_{\infty}$, on a $|f(x)| \leq \|f\|_{L_{\infty}}$ (pourquoi?)

* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, p' est l'exposant conjugué.

Lemme 2 : Soient $0 < p < \infty$, mes $E > 0$

$$\|f\|_{L^p(E)} = 0 \iff f \sim 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mais} \\ \int f d\mu = 0 \nRightarrow f = 0 \\ \Rightarrow f = 0 \end{array} \right.$$

Lemme 3 :

si f est continue sur $E \subset \mathbb{R}^n$, alors :

$$\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) = \sup f(x)$$

Preuve : On pose $M = \sup_{x \in E} f(x)$ ($M < \infty$)

doit $M = \sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) \leq \sup f(x)$ et $\sup f(x) \leq \sup_{x \in E} \text{vrai } f(x)$

* D'après la def du $\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x)$ On a :

$$\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) \leq \sup f(x) \quad (1)$$

$$a) \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in E, f(x_0) > M - \varepsilon$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in E \text{ tq } f(x_k) > M - \frac{1}{k}$$

Comme $f(x) \in C(E)$, alors :

$$\exists \delta_k \text{ tq}$$

$$B(x_k, \delta_k) \subset E \text{ et } \forall x \in B(x_k, \delta_k)$$

On a : $f(x) > M - \frac{1}{k}$

$$\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) > \sup_{x \in E} (M - \frac{1}{k})$$

En faisant tendre $k \rightarrow \infty$, On obtient

$$\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) \nearrow M \quad (2)$$

D'après (1) et (2), On obtient :

$$\sup_{x \in E} \text{vrai } f(x) = \sup_{x \in E} f(x)$$

* A titre d'exercice prouver l'égalité pour $M = \infty$?

Lemme 4.8 $f \sim g$ si $f = g/(p-p)$

soit $0 < p < \infty$, $E \subset \mathbb{R}^n$, alors si $f \sim g$ alors :

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|g\|_{L^p(E)}$$

Preuve :

$$\int_E f(x) dx = \int_{(E|e)} f(x) dx \quad \text{mes}(e) = 0.$$

$$f \sim g \quad \begin{aligned} f &= g \text{ sur } E|e \\ \|f\|^p &= \|g\|^p \text{ sur } E|e \end{aligned}$$

$$\left(\int_{E \setminus e} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{E \setminus e} |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

$$\left(\int_{E \setminus e} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_E |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

$$\left(\int_{E \setminus e} |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_E |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3)$$

A partir de (1) (2) On obtient

$$\left(\int_E |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_E |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lemme 5: Soient $E \subset \mathbb{R}^n$

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: E \rightarrow \mathbb{R}$$

de plus g est non négative, alors :

$$\inf_{x \in E} f(x) \int_E g \leq \int_E f g \leq \sup_{x \in E} f(x) \int_E g$$

$$\inf_{x \in E} f(x) \int_E g dx \leq \int_E f g dx \leq \sup_{x \in E} f(x) \int_E g dx$$

On fait g non négative car l'intégrale existe
mais elle peut être infinie

Preuve:

$$\forall e \in E, \text{ mes } e = 0$$

$$\text{On a: } \int_E f g dx = \int_{E \setminus e} f g dx \leq \sup_{x \in E} f(x) \int_E g dx$$

$$\text{donc } \int_E f g \, d\mu \leq \inf_{e \in E} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_e f g \, d\mu$$

$$= \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_E f g \, d\mu.$$

d'une manière analogue, on prouve (II)

Conséquence 1° Soit $E \in \mathcal{R}^n$

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g: E \rightarrow \mathbb{C}$$

f et g deux fct mesurable

alors: $\left| \int_E f \cdot g \, d\mu \right| \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$

$$\left| \int_E f \cdot g \, d\mu \right| \leq \int_E |f \cdot g| \, d\mu$$

$$\leq \sup_{x \in E} |f(x)| \int_E |g| \, d\mu$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty(E)} \|g\|_{L^1(E)}$$

Conséquence 2° Soient $0 < p < \infty$, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, alors

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq (\text{mes } E)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(E)} &= \left(\int_E |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sup_{x \in E} |f(x)|^p \int_E dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x \in E} |f(x)| \left(\int_E dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^\infty(E)} (\text{mes } E)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Th de Riesz : soit f une fct mesurable sur E $\text{mes } E > 0$.

alors :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Preuve :

On pose $M = \|f\|_{L^\infty(E)}$

$\forall M = 0$

$$M = \sup_{x \in E} |f(x)| = \inf_{\epsilon} \sup_{x \in E} |f(x)| = 0$$

$$\Rightarrow f = 0$$

$\forall M > 0$

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{E \cap \{|f| \leq M\}} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sup_{x \in E \cap \{|f| \leq M\}} |f(x)|^p \int_{E \cap \{|f| \leq M\}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x \in E \cap \{|f| \leq M\}} |f(x)| (\text{mes } E)^{\frac{1}{p}}$$

On a obtenu :

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq \sup_{x \in E \cap \{|f| \leq M\}} |f(x)| (\text{mes } E)^{\frac{1}{p}}$$

on:

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \inf_E \sup_{x \in E} |f(x)| (\text{mes } E)^{1/p}$$

(1)

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_\infty(E)} (\text{mes } E)^{1/p}$$

Dans (1) On passe à la limite supérieure, d'où

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L_p(E)} \leq M \lim_{p \rightarrow +\infty} (\text{mes } E)^{1/p} = M$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ limite sup} \\ (1) \text{ " " inf} \end{array} \right\}$$

Donc on a montré que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L_p(E)} \leq M$$

On considère l'ensemble

$$\forall \varepsilon, E_\varepsilon = \{x \in E : |f(x)| > M - \varepsilon\}$$

On montre par l'absurde que $\text{mes } E_\varepsilon > 0$

On suppose qu'il existe ε_0 tq :

$$\text{mes } E_{\varepsilon_0} = 0$$

$$\text{et } E_{\varepsilon_0}^c = \{x \in E : |f(x)| \leq M - \varepsilon_0\}$$

$$M = \inf_{\text{mes } E > 0} \sup_{x \in E} |f(x)| \leq \sup_{x \in E} |f(x)| \leq M - \varepsilon_0$$

Contradiction donc $\inf E_\varepsilon > 0$

$M \leq \liminf \leq \lim$
?

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} > \left(\int_{E_\varepsilon} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(M - \varepsilon) (\inf E_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

d'où: $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L_p(E)} > (M - \varepsilon) \quad \text{--- (2)}$

dans (2) On fait tendre vers zéro
Alors:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L_p(E)} > M \quad \text{--- (3)}$$

Finalement On a obtenu:

$$M \leq \liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L_p(E)} \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f(p)\|_{L_p(E)} \leq M \quad (*)$$

A partir de (*) On a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f(p)\|_{L_p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L_p} = M$$

Donc la limite existe et elle est égale à M

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L_p(E)} = M$$

3) $M = \infty$ A titre d'exercice)

Rq: si $\inf E = +\infty$ le th n'est plus valable

$$f = 1 \text{ donc } \|f\|_{L_1(E)} = 1$$

$$\forall p > 1 \quad \|f\|_{L_p(E)} = (\text{mes } E)^{\frac{1}{p}} = \infty$$

Th 8 L'espace $L_p(E)$ est un espace vectoriel.
(linéaire)

Preuve :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ et $f \in L_p(E)$ $0 < p < \infty$

$$1) a) 0 < p < \infty \quad \|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\alpha f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |\alpha f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

donc $\alpha f \in L_p(E)$

b) $p = \infty$

$$\|\alpha f\|_{L_\infty(E)} = \sup_{x \in E} |\alpha f(x)| = |\alpha| \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty$$

2) soit $f_1, f_2 \in L_p(E)$ $f_1 + f_2 \in L_p(E)$?

a) $0 < p < \infty$

f_1 et f_2 étai^t mesurable, donc $f_1 + f_2$ est aussi

mesurable

$$\forall a, b \geq 0, (a+b)^p \leq 2^p (a^p + b^p)$$

$a \geq b$

$$(a+b)^p \leq (2a)^p = 2^p a^p \leq 2^p a^p + 2^p b^p = 2^p (a^p + b^p)$$

$b \geq a$

$$(a+b)^p \leq (2b)^p = 2^p b^p \leq 2^p b^p + 2^p a^p = 2^p (a^p + b^p)$$

$$(|f_1 + f_2|)^p \leq (|f_1| + |f_2|)^p \leq 2^p (|f_1|^p + |f_2|^p)$$

$$|f_1 + f_2|^p \leq 2^p (|f_1|^p + |f_2|^p) \quad (1)$$

On intègre (1) alors on obtient :

$$\begin{aligned} \int_E (|f_1 + f_2|)^p dx &\leq 2^p \int_E (|f_1|^p + |f_2|^p) dx \\ &= 2^p \left[\int_E |f_1|^p dx + \int_E |f_2|^p dx \right] < \infty \end{aligned}$$

$$\text{b) } p = +\infty \quad \|f_1 + f_2\|_{L^\infty(E)} < \infty$$

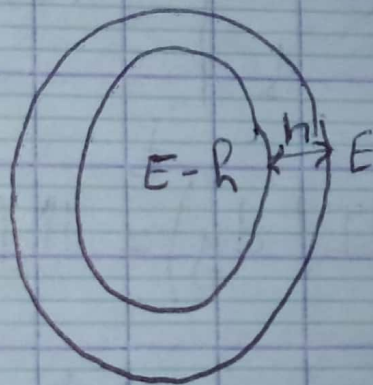
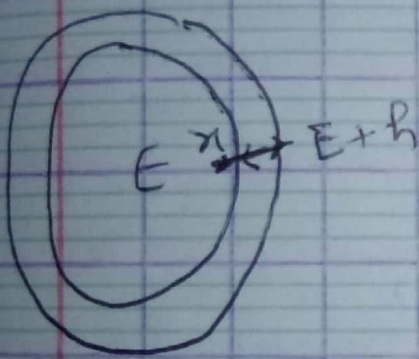
A titre d'exercice.

Rmq : $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$

$(1/N)^{1/p} (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p} \leq \max(1, N^{1/p-1}) (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p}$

Exp : $(a_1 + a_2)^p \leq 2^{p-1} (a_1^p + a_2^p)$

Th : Soient $f \in L_p(E)$, $0 < p < \infty$, $(E \subset \mathbb{R}^n)$
 $h \in \mathbb{R}^n$, alors : $f(x+h) \in L_p(E-h)$
 et $\|f(x+h)\|_{L_p(E-h)} = \|f(x)\|_{L_p(E)}$



Preuve : 1) $0 < p < \infty$

$f(x+h)$ est mesurable.

$\int_{E-h} |f(x+h)|^p dx$, on effectue le changement

de variable.

$$y = x + h$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + h_1 \\ y_2 &= x_2 + h_2 \\ &\vdots \\ y_n &= x_n + h_n \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, |I| = 1$$

$$\left(\int_E |f(y)|^p |I| dy \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(E)}$$

b) cas $p = \infty$, Attribue d'ex

Riesz (Riesz)

L'espace L_p est un esp de Banach (semi Banach)

-voir. preuve Buzis Analyse fonctionnelle et application.

Riesz son le theoreme de l'invariance des normes dans L_p par rapport a la translation

$$\|f(x+h)\|_{L_p(E-h)} = \|f(x)\|_{L_p(E)} \quad (2)$$

cas particulier. (très important.)

si $E = \mathbb{R}^n$ (2) devient $\|f(x+h)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$

Chapitre 3 : L'inégalité de Holder et ses variants.

I) L'inégalité de Young :

soient $0 < p < \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

a) si $p \geq 1$ on a $a, b \geq 0$

$$\forall a, b \geq 0, \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \geq ab$$

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= a \\ \|g\|_{p'}^p &= b \end{aligned}$$

b) si $0 < p < 1$

$$\forall a, b \geq 0, \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \leq ab$$

$$\left(\|f\|_p \leq a \quad \text{quasi-norme} \right)$$

$$0 = \|f\|_p \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{norme.}$$

$$\|f\|_p = 0 \nRightarrow f = 0, \Rightarrow f \neq 0 \quad \text{semi-norme}$$

Preuve :

a) On utilise le fait que la fonction est concave.

b) A titre d'exercice.

8) Inégalité de Hölder Soient $E \subset \mathbb{R}^n$
 E un ensemble mesurable $0 < p < \infty$,
 $f \in L_p(E)$ et $g \in L_p(E)$ alors:

1) $1 \leq p \leq \infty$ $\int_E |f \cdot g| dx \leq \|f\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_p(E)}$ (1)

2) si $0 < p < 1$ $\int_E |f \cdot g| dx \geq \|f\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_p(E)}$ (2)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$f \in L_p(\Omega)$

(1) f mes

(2) $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $p = \infty$

(1)

(2) $\|f\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

Preuve: 1) on pose $a = \frac{|f|}{\|f\|_{L_p(E)}}$ et $b = \frac{|g|}{\|g\|_{L_p(E)}}$
 en remplaçant dans (2) a et b on obtient

$$\frac{|f| \cdot |g|}{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_p(E)}} \leq \frac{|f|^p}{p \|f\|_{L_p(E)}^p} + \frac{|g|^p}{p' \|g\|_{L_p(E)}^{p'}}$$

on integre (1) d'où

$$\int_E |f \cdot g| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \int_E |f|^p \, d\mu + \frac{1}{p'} \int_E |g|^{p'} \, d\mu$$

$$\in \frac{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}}{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}}$$

alors

$$\frac{\int_E |f \cdot g| \, d\mu}{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}} \leq \frac{\int_E |f|^p \, d\mu}{p \|f\|_{L_p(E)}^p} + \frac{1}{p'} \frac{\int_E |g|^{p'} \, d\mu}{\|g\|_{L_{p'}(E)}^{p'}}$$

$$\left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(E)}^p \Leftrightarrow \int_E |f|^p \, d\mu = \|f\|_{L_p(E)}^p$$

donc on obtient

$$\frac{\int_E |f \cdot g| \, d\mu}{\|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

par conséquent :

$$\int_E |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}$$

2) $0 < p < 1$

D'une manière analogue en utilisant l'inégalité (**) on obtient (2)

soit p_1, p_2, p des normes réelles
 points. tg: $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ et f, g

alors: $\|fg\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_{p_1}(E)} \cdot \|g\|_{L_{p_2}(E)}$

$$\|fg\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$$

$$\int_E |fg| dx \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}$$

Preuve:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} \iff \frac{p}{p_1} + \frac{p}{p_2} = 1$$

on $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ On applique l'inégalité de Hölder.

$$\int_E |f|^p |g|^p dx \leq \left(\int_E |f|^{\frac{p p_1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p_1}} \left(\int_E |g|^{\frac{p p_2}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p_2}}$$

Conséquence 1: $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p}$

$$\|f \cdot g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_{p_1}} \|g\|_{L_{p_2}}$$

$$\|f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n\|_{L_p} \leq \|f_1\|_{L_{p_1}} \cdot \dots \cdot \|f_n\|_{L_{p_n}}$$

$$\left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{L_P} \leq \left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{L_{P_k}} \quad (4)$$

Preuve:

par récurrence. $K=2$ (Th précédent)

On suppose que (4) est vrai pour $K=n-1$

C-a-d:

$$\left\| \prod_{k=1}^{n-1} f_k \right\|_{L_P} \leq \left\| \prod_{k=1}^{n-1} f_k \right\|_{L_{P_k}} \quad (4)'$$

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{k=1}^{n-1} f_k \cdot f_n \right\|_{L_P} &\leq \left\| \prod_{k=1}^{n-1} f_k \right\|_{L_{P_k}} \cdot \left\| f_n \right\|_{L_{P_n}} \\ &= \left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{L_{P_k}} \end{aligned}$$

Conséquence 2°

$P=1$

$$\frac{1}{P_1} + \dots + \frac{1}{P_n} = \frac{1}{1} = 1$$

si dans (4) on remplace P par 1 on obtient

$$\left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{L_1} \leq \left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{L_{P_k}}$$

$$\int \left| \prod_{k=1}^n f_k \right| dx \leq \int \left| \prod_{k=1}^n f_k \right| dx \leq \left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{L_{P_1}} \cdot \left\| \prod_{k=2}^n f_k \right\|_{L_{P_2}} \dots \left\| f_n \right\|_{L_{P_n}} \quad (5)$$

$$\int |f_1 f_2| dx \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

Remarque: L'inégalité (5) obtenue - est une généralisation de l'inégalité usuelle de Holder.

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

Conséquence 3 (Inégalité de Holder pour les Sommes)

$$(a_k) \quad a_k \in \mathbb{C} \quad k=1, 2, \dots$$

$$(b_k) \quad b_k \in \mathbb{C}$$

$$\text{alors:} \quad \sum_{k=1}^m |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve:

$$n=1, E=(0, m), n \in \mathbb{N} \quad m=+\infty$$

$$\text{On pose: } f(n) = a_k, g(n) = b_k$$

$$\begin{aligned} \int_E f g \, dn &= \int_0^m |f| |g| \, dn = \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k |a_k| |b_k| \, dn \\ &= \sum_{k=1}^m |a_k \cdot b_k| \int_{k-1}^k dn = \sum_{k=1}^m |a_k b_k| \end{aligned}$$

$$\int_E |fg| dx \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

de la même manière on a

$$\|f\|_p \|g\|_{p'} = \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(X, \mathcal{F}, m) = \text{e. mes}$$

$$X = \mathbb{N}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}), m = \text{c.é.} = \text{card}$$

$$\ell_p(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1}, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

Rappels :

$$1) \int_E |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$2) \|fg\|_{\frac{p}{p-1}} \leq \|f\|_p \|g\|_p \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

Conséquence : Soient $m \text{és } E < \infty$

$1 < p < q < \infty$, alors :

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \left(\text{mes}(E) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_p$$

$$\text{et } L_q(E) \subset L_p(E)$$

Preuves On pose $g(x) = 1$ et $p_1 = q > p$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$$

Donc On obtient :

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_q(E)} \|1\|_{L_{p_2}(E)}$$

$$\|1\|_{L_{p_2}(E)} = \left(\int_E dx \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$(\text{mes } E)^{\frac{1}{p}} = (\text{mes } E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

d'où : $\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_q(E)} (\text{mes } E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} < \infty$

i. $\|f\|_{L_q(E)} < \infty \Rightarrow \|f\|_{L_p(E)} < \infty$

ii. $f \in L_q(E) \Rightarrow f \in L_p(E)$

Remarque :
si $\text{mes}(E) = +\infty$
 $L_q(E) \not\subset L_p(E)$

Conséquence (Inégalité multiplicative)

Soient $(E \subset \mathbb{R}^n)$, E un ensemble mesurable.

$0 < p_1 < p < p_2 < \infty$ $f \in L_{p_1}(E)$ et $f \in L_{p_2}(E)$

alors : $f \in L_p(E)$

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_{p_1}(E)}^\alpha \|f\|_{L_{p_2}(E)}^{1-\alpha}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$$

Preuve 2

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(E)} &= \| |f|^\alpha |f|^{1-\alpha} \|_{L_p(E)} \leq \| |f|^\alpha \|_{L_{\frac{p_1}{\alpha}}(E)} \cdot \| |f|^{1-\alpha} \|_{L_{\frac{p_2}{1-\alpha}}(E)} \\ &= \left(\int_E (|f|^\alpha)^{\frac{p_1}{\alpha}} dx \right)^{\frac{\alpha}{p_1}} \left(\int_E |f|^{(1-\alpha)\frac{p_2}{1-\alpha}} dx \right)^{\frac{1-\alpha}{p_2}} \\ &= \left[\int_E |f|^{p_1} dx \right]^{\frac{1}{p_1} \alpha} \left[\int_E |f|^{p_2} dx \right]^{\frac{1}{p_2} (1-\alpha)} \end{aligned}$$

* Prop 2

$$a_k \in \mathbb{R} \quad b_k \in \mathbb{C}$$

$$\sum_{k=1}^m |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \quad (*)$$

L'inégalité discret de Hölder.

Dans (*) on fait tendre $m \rightarrow +\infty$, alors on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \quad (**)$$

on a:

$$\int_E |fg| dx \leq \|f\|_{L_{p_1}(E)} \|g\|_{L_{p_2}(E)}$$

$$\text{si } E = (0, \infty)$$

$$\int_0^\infty |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(0,\infty)} \|g\|_{L^q(0,\infty)} (*)$$

exo 2: à partir de l'inégalité discrète de Hölder, déduire l'inégalité intégrale.

III) Inégalité de Jensen

soit $0 < p < \infty$ mes $E < \infty$.

alors: $\|a\|_{l_q} \leq \|a\|_{l_p}$ et $l_p \subset l_q$

$$\text{on: } \|a\|_{l_q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|a\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve:

$$\|a\|_{l_p} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^m |a_k|^p = 1 \Rightarrow |a_k| = 1$$

$$\Rightarrow |a_k|^q \leq |a_k|^p \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^m |a_k|^q \leq \sum_{k=1}^m |a_k|^p = 1$$

$$\text{alors: } \sum_{k=1}^m |a_k|^q \leq 1 \text{ on } \|a\|_{l_q} \leq 1 = \|a\|_{l_p}$$

$$2) 0 \leq \|a\|_p < \infty$$

On pose: $b_k = \frac{a_k}{\|a\|_p}$ - $\|b_k\|_p = \frac{1}{\|a\|_p} \left(\sum_{k=0}^m |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|a\|_p} \|a\|_p = 1$

$$\Rightarrow \|b\|_q \leq \|b_k\|_p \leq 1$$

$$\|b\|_q \leq 1$$

donc $\frac{\|a\|_q}{\|a\|_p} \leq 1 \Rightarrow \|a\|_q \leq \|a\|_p$ Exo ?

Th (Hölder, Minkowski)

com