

$C([a,b]) = \{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est continue sur } [a,b]\}$

$$\|f\|_{C([a,b])} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Espace métrique : un ensemble muni d'une distance.

Chapre Préliminaires :

1) Espace métrique :

Déf :

un espace métrique est un ensemble muni d'une distance notée d et l'espace est noté (E, d) où

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) \text{ qui satisfait}$$

$$\forall x, y, z \in E$$

$$d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

2) Suite de Cauchy :

Déf :

Soit (E, d) un esp métrique et (x_n) une suite de points de E , (x_n) est dite de Cauchy si $d(x_p, x_q) \rightarrow 0$ $p, q \rightarrow \infty$ de manière équivalente si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall p, q \geq N(\varepsilon) :$$

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Propriétés :

1) toute suite convergente est de Cauchy

2) toute suite de Cauchy est bornée (EX)

3) si (x_n) est de Cauchy, et possède une sous suite (x_{n_k}) qui converge vers x alors la suite (x_n) converge vers x

4) ~~caractéristique~~ si une sous suite possède une sous suite cv alors (x_n) converge vers x (EX par le lemme)

2) Norme et espace normé

est tout ce qui suit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf :

Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ notée $\|\cdot\|_E$ qui satisfait les conditions suivantes :

$$1) \|x\|_E = 0 \Rightarrow x = 0 ; \forall x \in E$$

$$2) \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E ; \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$3) \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$$

On note par $(E, \|\cdot\|_E)$ l'espace normé

Proposition :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé alors l'application

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|_E$$

est une distance sur E .

elle est appelée distance associée à la norme

Proposition :

la norme est continue $\|\cdot\|_E: E \rightarrow \mathbb{R}$

est cont (EX)

Déf :

norme (équivalente)

Soient $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace E . on dit qu'elles sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in E$

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

Théorème sur un esp vectoriel de dimension finie tout les normes sont équivalentes.

compact $\Leftrightarrow$ fermé et borné $\dim < \infty$

Semi-norme et espace quotient

Déf

"Semi-norme" Soit E un e.v une semi norme sur E est une fct N à valeurs réelles qui satisfait

- $N_1) \forall x \in E : N(x) \geq 0$
- $N_2) \forall x \in E, \forall \alpha \in K : N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$
- $N_3) \forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Exm 9

$\bullet$ E un esp v

1) une norme sur E est une semi-norme

Espace quotient

- 1) E : un ensemble
- 2) une relation R définie sur E

$\forall x, y \in E, x R y \Leftrightarrow$ l'expression mathématique

$R \equiv$ équivalence $\Leftrightarrow$ 1) R : réflexive $x R x$
 2) R : symétrique $x R y \Rightarrow y R x$
 3) R : transitive $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

$\Rightarrow$ permet de définir un ensemble non vide appelé espace quotient noté:

E/R = l'ensemble des classes d'équivalences.

R : ordre $\Leftrightarrow$ 1) Réflexive
 2) Antisymétrique
 3) Transitive

* Soit E un e.v sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F un sous esp. v de E .
 On définit la relation " $\sim$ " par:

$\forall x, y \in E; x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F$

Exm 9

R est une relation d'équivalence

$(E, +, \cdot)$ e.v
 S.e.v $\left\{ \begin{array}{l} 1) F \subseteq E \\ 2) \text{ tout combinaison liné.} \end{array} \right.$
 $\forall \lambda, \mu + \alpha y \in F$

Sur l'esp quotient $E/R := E/F$

On définit les opérations

$[x] \doteq$ classe de $x = \{y \in E : y \sim x\}$
 $[x] + [y] \doteq [x+y]$
 $\alpha \cdot [x] \doteq [\alpha \cdot x]$

Th 9

E/F est une e.v pour les opérations algébriques (*)

$x + F = \{x + y : y \in F\} \rightarrow x$ fixé et y variable
 $A + B = \{z = a + b : a \in A, b \in B\}$
 $= \bigcup_{a \in A} a + B = \bigcup_{a \in A} A + b$

Théorème

Soit E un s.e.v de X et $P: X \rightarrow \mathbb{R}$ une semi-norme sur X
 alors la fct $P': X/E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $P'([x]) = \inf_{y \in E} P(x-y)$ est une semi-norme.

$P = \|\cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \|x\|_X$
 $P' = \|\cdot\|_{X/E} = \|\cdot\|_{X/F} : X \rightarrow \mathbb{R} \quad [x] \mapsto \inf_{y \in F} \|x-y\|_X$
 $= \inf_{y \in F} \|x-y\|_X$
 $\Rightarrow x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F \Rightarrow x \in y + F$

Remarque particulière

Si P est une norme sur X , et E est

fermé alors f est une norme sur $X/\mathcal{N}_f$

$L_1 \rightarrow$ esp de classe, $L_1 =$ esp de fct intég

$$L_1(X, \mu, \mathbb{R}), L_1(X, \mu, \mathbb{C})$$

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p.}$$

$N = \{f, f \text{ négligeable}\}$

$$\|f\| = \int_X |f| d\mu$$

$$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|} \Rightarrow \begin{cases} \|[\tilde{f}]\| = 1 \\ \|[\tilde{f}]\| = \int_X |\tilde{f}| d\mu \end{cases}$$

compact

Exo 4

f est une semi-norme (norme)

Analyse de Hil

Ex. n $\rightarrow$ Analyse de Banach

$\begin{cases} \text{norme} \\ \text{semi-norme} \\ \text{quasi-norme} \end{cases}$

Ex. Topol $\rightarrow$ Fréchet
localement convexe séparé

Espace de Banach et semi-Banach

Déf.

un esp V est dit de Banach s'il est complet pour la norme

Il est dit semi-Banach s'il est complet pour la semi-norme

$$C([a, b], \mathbb{R}) \text{ esp } V = \{f \text{ cont sur } [a, b]\}$$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \text{ est norme}$$

$$(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|) = \text{Banach, complet}$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \text{ intégral de Riemann norme}$$

Mq c'est une norme

Isométrie

Déf.

$$\text{Soient } (X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$$

deux esp normés et $T: X \rightarrow Y$ une app

Alors T est dite une isométrie si T est un isomorphisme qui conserve la norme

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \forall x \in X \quad (E, \|\cdot\|) = (E, d)$$

tout esp normé est un esp métrique $\|x-y\|_E = d(x, y)$

iso = bijection, morphisme = opération

isomorphisme $\Rightarrow$ app linéaire bijective

version (des les esp-métrique)

Déf.

Soient $(X, d), (Y, d')$ deux

esp métrique et $T: X \rightarrow Y$ une app, Alors

T est dite une isométrie si T est un

bijection qui conserve la distance

$$d(x, x') = d(y, y') \quad (EX)$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

complétion

Thé. "d'existence"

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ est un esp normé, alors

il existe un esp normé $\hat{X}$ et une transformation

$T: X \rightarrow \hat{X}$ telle que $\|Tx\|_{\hat{X}} = \|x\|_X, \forall x \in X$ et $TX \rightarrow$ image dense de $\hat{X}$

Thé. "unicité de la complétion"

Soit $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ deux complétions de X , alors elles sont isométriques

* tout esp normé de dim $< \infty$ est de Banach

* tout fermé borné est compact

Proposition

tout esp vectoriel normé de dim $< \infty$ est de Banach

Preuve Exo 6

tout ensemble fermé est compact dans un esp normé de dim $< \infty$ car tout les normes sont équivalentes

$E = C_v \cdot n$ alors $(E, \|\cdot\|) \stackrel{def}{=} \text{Banach}$
 p-défini $E \in \infty$ tout suite de Cauchy cv

Soit $(e_i)_{i=1}^p$ une base de E et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy

donc $\alpha_n = \sum_{i=1}^p \alpha_{i,n} e_i \in E \quad \|\alpha\| = \sum_{i=1}^p |\alpha_i|$

$$\|\alpha_n - \alpha_m\| \leq \sum_{i=1}^p |\alpha_{i,n} - \alpha_{i,m}| \leq \sum_{i=1}^p \|\alpha_{i,n} - \alpha_{i,m}\| \leq \sum_{i=1}^p \varepsilon = p\varepsilon$$

$(\alpha_{i,n})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \alpha_i$ car $\alpha_{i,n} \in \mathbb{R}$ donc tout suite de Cauchy ds $\mathbb{R}$ est cv

$$(\alpha_{i,n})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \alpha_i$$

$$\text{posons } \alpha = (\alpha_i)_{i=1}^p \quad \|\alpha_n - \alpha\|_E \rightarrow 0$$

$$(e_i) = (e_1, e_2, \dots)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$$

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^p \alpha_{i,1} e_i$$

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^p \alpha_{i,2} e_i$$

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^p \alpha_{i,n} e_i$$

la somme opération linéaire

$$\sum \alpha_i + \sum \gamma_i = \sum (\alpha_i + \gamma_i)$$

(α_n) suite de Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$\forall n, m > N(\varepsilon) \quad \forall i: \|\alpha_n - \alpha_m\| < \varepsilon$

Donc on a :

$$\|\alpha_n - \alpha_m\|_E = \left\| \sum_{i=1}^p \alpha_{i,n} e_i - \sum_{i=1}^p \alpha_{i,m} e_i \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^p (\alpha_{i,n} - \alpha_{i,m}) e_i \right\|_E$$

$$\leq \sum_{i=1}^p |\alpha_{i,n} - \alpha_{i,m}| \|e_i\| \rightarrow 1$$

$$= \sum_{i=1}^p |\alpha_{i,n} - \alpha_{i,m}| \leq \varepsilon$$

Donc $\forall i=1, \dots, p$ on a $|\alpha_{i,n} - \alpha_{i,m}| < \varepsilon$

alors $(\alpha_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy ds $\mathbb{K}$ donc elle

cv vers α_i

$$\text{posons } \alpha = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$$

$$\forall \varepsilon \quad \|\alpha_n - \alpha\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|\alpha_n - \alpha\| = \left\| \sum_{i=1}^p \alpha_{i,n} e_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^p |\alpha_{i,n} - \alpha_i| \|e_i\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc (α_n) est cv de E

alors E est de Banach

des espace L_1

"Espace des fcts intégrables"

Comp = $\log_2$

* Soit (X, A, m) un esp mesuré vectoriel

* $M(X; \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \stackrel{def}{=} \text{esp des fcts mesurables}$

* $M_+(X; \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \stackrel{def}{=} \text{l'ensemble des fcts mesurables positives}$

I) Intégrale d'une fonction mesurable positive

Déf "fct simple ou étagée"

c'est une fct qui prend un nombre fini de valeurs et s'écrit $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ (1)

ou (A_i) est une partition de X et

$\alpha_i = s(x)$ pour $x \in A_i$

$$1_{A_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i \\ 0 & \text{si } x \in A_i^c \end{cases}$$

Déf "intégrale d'une fct simple"

Soit s une fct simple positive

On définit l'intégrale de s par

$$\int_X s dm = \left(\int_X 1 dm \right) s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot m(A_i) \quad (2)$$

Proposition :

$S_n: f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable

Alors :

* $f = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (S_n suite de fcts simple positive)

* Si f bornée "la cvge est uniforme"

" $f = \lim$ uniforme"

sup b_n

3) Si f est positive on peut choisir b suite croissante

Déf 3.03

L'intégrale d'une fct mes positive noté $\int f d\mu$ est donné par:

$$\int_X f d\mu = \sup_{S \text{ simple}} \left\{ \int f d\mu : 0 \leq S \leq f \right\}$$

$S \equiv \text{simple}$

Déf 3.04

L'intégrale d'une fct mes. q.c.q. f

L'intégrale de f s'obtient en décomposant

la fct f en $f = f^+ - f^-$

où

$f^+ = \max(f, 0)$ "partie positive"

$f^- = -\max(-f, 0)$ "partie négative"

Proposition

Pour tout fonction mesurable f les arguments suivants sont équivalents

1) $\int f = 0$

2) $f = 0$ (p.p)

3) $\{f > 0\}$ de mesure nulle

* $\{f > 0\} = \{x \in X : f(x) > 0\}$

On note: L'esp des fcts Lebesgue intégrable par $L_1(X, T, \mu) = L_1$ ou tout simplement par $L_1(X)$ et on écrit:

$$L_1(X) = L_1(X) = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \vee \mathbb{C} ; f \text{ mes et } \int |f(x)| d\mu < \infty \right\}$$

$$\int_X |f| d\mu = \int f^+ d\mu = \int f^- d\mu$$

Thé 2 $L_1(X)$ est un esp.v semi-normé p

$$\|f\|_{L_1(X)} = \int_X |f(x)| d\mu$$

esp vectoriel $\Rightarrow$ Stabilité par l'opération

Si il n'y a pas d'ambiguïté

on note par fois: $\|f\|_{L_1(X)}$ par $\|f\|_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\|_{L_1(X)} : L_1(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \|f\|_{L_1(X)} = \int_X |f(x)| d\mu \end{array} \right.$$

est semi-norme

preuve:

On utilise les propriétés de l'intégrale de Lebesgue et on vérifie les axiomes des la semi-norme

Convergence dans $L_1(X)$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L_1(X)$ dire que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ au sens de $L_1(X)$ cela signifie que:

$$\|f_n - f\|_{L_1(X)} \rightarrow 0 \text{ ie, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

* la convergence au sens $L_1(X)$ s'appelle convergence en moyenne d'ordre 1

Banach $(F, \|\cdot\|)$

$$L_1(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \vee \mathbb{C}\}$$

$$E \equiv \text{ap v}, F = \text{s.e.v}$$

"~" tld relation d'équivalence

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in F \quad \forall a \in E, b \in F$$

L'espace $L_1(X, T, \mu)$

* Sur l'espace $L_1(X)$ on définit la relation notée " $\sim$ " par $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ p.p.

On vérifie facilement que " $\sim$ " est une relation d'équivalence sur l'espace $L_1(X)$. Ceci permet de définir l'espace quotient $L_1(X)/\sim$ qu'on désigne par $L_1(X)$.

Si $f \in L_1(X)$ pour le moment on désigne sa classe par $[f]$ ($f \in [f]$)

$$[f] = \{g \in L_1(X) : f = g \text{ p.p.}\}$$

$$[a] = \{b \in E : a - b \in F\} = a + F$$

* On munit $L_1(X)$ des opérations algébriques

$$[f] + [g] = [f + g], \quad \forall f, g \in L_1(X)$$

$$\alpha \cdot [f] = [\alpha f], \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall f \in L_1(X)$$

* Les deux opérations (addition et multiplication par scalaire) confèrent à $L_1(X)$ une structure d'espace vectoriel

* On définit sur $L_1(X)$ la fct $\|\cdot\|_1 : L_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|[f]\|_1 = \|f\|_1$

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$$

On démontre que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L_1(X)$

Théorème 02

$(L_1(X), \|\cdot\|_1)$ est un e.v.n appelé espace de Lebesgue L_1 muni d'une

* On appelle quelques résultats fondamentaux dans la Théorie d'intégration :

Théorème 03

(Th de convergence - monotone)

Soit (f_n) une suite croissante de $M_+(X)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Alors f est mesurable et de plus

$$\int_X f d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n$$

Corollaire

Si $f_n \in M_+(X)$ tq

$$\int_X f_n d\mu < \infty \text{ Alors}$$

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

$$S_1 = f_1, S_2 = f_1 + f_2, S_3 = f_1 + f_2 + f_3, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

Théorème 04

"Lemme de Fatou"

Soit $f_n \in M_+(X)$, $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

Preuve : Ex - on applique le Th de cv - monotone à $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$

Théorème 05

"Th de convergence dominée"

Soit (f_n) une suite de $L_1(X)$ tq

$$f_n \rightarrow f \text{ (p.p.) sur } X$$

$$\exists g \geq 0, g \in L_1(X) \text{ tq } |f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p.}$$

alors $f \in L_1(X)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Preuve EX 08

Complétude « complétion »

Théorème « de Riesz-Fischer »

L'espace $(L_1; \|\cdot\|_{L_1})$ est un espace de Banach (e.v.n.c)

$$L_1 \ni f, g \Rightarrow f, g \in L_1 \Rightarrow d(f, g) = \|f - g\|_{L_1(X)} = \int_X |f - g| d\mu$$

Rappel

$(E = C([a, b]); \|\cdot\|_\infty) := \text{Banach}$

Sur E on considère $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

* $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet et la complétude de $E \Rightarrow L_1$

on cherche $f_n = \dots$ de Cauchy

$(E, \|\cdot\|_1) = \text{Banach}$

L'espace $L_1, L_2, \dots, L_p$ et complétude de $C([a, b])$

$$\|x\|_1 = \sum |x_i| \rightarrow \mathbb{R}, 0$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \|x\| = \max$$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

* Avant de donner la preuve on rappelle résultat sur les esp. v.n

Sommabilité et sommabilité absolue

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n et $(v_n)_{n \geq 1}$ une

suite de E , la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$w_n = \sum_{k=1}^n v_k \quad (E \text{ vectoriel})$$

La suite (w_n) est dite sommable si

elle converge en norme i.e. $\exists w \in E$

tel que $\|w_n - w\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\sum_{n \geq 1} v_n \in E$$

Si $\sum_{n \geq 1} \|v_n\|_E < \infty$ on dit que est

(v_n) abs.-sommable

Théorème :

Un e.v.n est complet ssi toute suite absolument sommable est sommable

i.e. $(E, \|\cdot\|)$ complet $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \|v_n\|_E < \infty$

$$\Rightarrow \sum v_n \in E$$

Preuve $\Rightarrow$ condition nécessaire

Supposons $(E, \|\cdot\|)$ est complet

et soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy telle que

$$\sum_{n \geq 1} \|v_n\| < \infty$$

Il suffit de montrer $(w_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy ds E

* $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall m, n > N(\varepsilon) :$

$$\|w_m - w_n\|_E = \left\| \sum_{k=1}^m v_k - \sum_{k=1}^n v_k \right\|_E$$

$$= \left\| \sum_{k=n+1}^m v_k \right\|_E$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^m \|v_k\|_E \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|v_k\|_E < \varepsilon$$

Donc la suite (w_n) est de Cauchy ds E alors elle est cv

condition suffisante :

Soit (v_n) de Cauchy ds E tq $\sum_{n \geq 1} v_n$ est sommable et $\sum_{n \geq 1} \|v_n\| < \infty$

* Il suffit démontrer une sous suite $(v_{n_k})_{k \geq 1}$ de (v_n) cv en norme ds E

$(v_n)_n$ est de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$\forall p, q > n_0, \|v_p - v_q\| < \varepsilon$$

• pour $n = 1$

$$\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall p, q > n_0, \|v_p - v_q\| < \varepsilon$$

soit $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ $\exists n_k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $n_k > n_0$ tq

$$\|v_p - v_q\| < \frac{1}{2^k}$$

soit $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $\exists n_k > n_{k-1}$, $\forall p, q > n_k$ tq

$$\|v_p - v_q\| < \frac{1}{2^k}$$

on continue la sélection des entiers n_k
on obtient ainsi une sous-suite $(v_{n_k})_{k \geq 1}$

$$\text{tq } \|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

Définissons la suite (U_i) par:

$$\begin{cases} U_1 = v_{n_1} \\ U_i = v_{n_i} - v_{n_{i-1}}, i \geq 2 \end{cases}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^k U_i = v_{n_1} + (v_{n_2} - v_{n_1}) + \dots + (v_{n_k} - v_{n_{k-1}}) = v_{n_k}$$

$$\sum_{i=1}^k \|U_i\| = \|U_1\| + \sum_{i=2}^k \|U_i\|$$

$$= \|U_1\| + \sum_{i=2}^k \|v_{n_i} - v_{n_{i-1}}\|$$

$$\leq \|U_1\| + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i}$$

$$\leq \|U_1\| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$= \|U_1\| + 1$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$1 + \sum = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_i \in E \Rightarrow \exists U, \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k U_i - U \right\|_E \rightarrow 0$$

d'après l'hypothèse tq il existe $U \in E$

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_i \in E \Rightarrow \exists U \in E$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k U_i - U \right\|_E \rightarrow 0$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{n_k} - U\| = 0$$

ie

(v_{n_k}) cv vers U d'où la suite

(v_n) est cv de E

Plan de démonstration de Th de Riesz

1) tracer le fait que (f_n) est de Cauchy de $L_1(X)$

2) Sélectionner une sous suite $(n_k)_{k \geq 1}$ tq

$$\|b_{n_{k+1}} - b_{n_k}\|_{L_1} \leq \frac{1}{2^k}$$

3) Définir une fct $g_k = |b_{n_0}| + \sum_{i=1}^k |b_{n_i} - b_{n_{i-1}}|$

4) Dédire que $g_n \geq 0$, (g_n) et $g \in L_1(X)$

5) $\forall n$ $g(g_k)$ est cv (pp) vers une certaine

fct fct g tq $\begin{cases} g \geq 0 \\ g \in L_1(X) \end{cases}$

6) Dédire que la sous suite (b_{n_k}) cv pp vers f à définir

7) $\forall q$ $f \in L_1(X)$

travail en maison

les espaces L_p " $1 \leq p < \infty$ ")

1) l'espace L_p " $1 \leq p < \infty$ "

Déf $(X, \mathcal{T}, m)$ un esp mesuré, " $1 \leq p < \infty$ "

l'esp $L_p(X)$ est défini par

$$L_p(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \vee \mathbb{C} \mid f \text{ mes et } \int_X |f|^p dm < \infty\}$$

ie = d'esp des fcts de puissance p -intégrable

encor: $f \in L_p(X) \Leftrightarrow |f|^p \in L_1(X)$

Th 1 les esp $L_p(X)$ pour " $1 \leq p < \infty$ "

sont des esp vectoriel

preuve

Soient $f, g \in L_p(X)$, $\lambda \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

1) f, g sont mesurables donc $f+g$ et λf sont mesurables

2) on a: $\int_X |f|^p < \infty$, $\int_X |g|^p < \infty$

$\forall p$, " $1 \leq p < \infty$ " on a

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

$$\begin{cases} p \geq 1 \\ a, b \geq 0 \\ (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \end{cases}$$

donc $\int_X |f+g|^p dm \leq 2^{p-1} \left[\int_X |f|^p dm + \int_X |g|^p dm \right] < \infty$

d'où $f+g \in L_p(X)$

et $\lambda f \in L_p(X)$ trivial

On va établir maintenant quelques inégalités fondamentales pour l'étude

des esp de Lebesgue.

Nombres conjugués

Déf Soient $p, p' \in [1, \infty]$ on dit

que p et p' sont conjugués (de Hölder) si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$p = 1 \Rightarrow p' = \infty$$

$$p = \infty \Rightarrow p' = 1$$

Rmq

$$p = 2 \Rightarrow p' = 2$$

Lemme

$a, b \geq 0$, $f, f' \in [1, \infty]$ tq

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{et} \quad a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

inégalité de Young

preuve ΣX

utiliser la concavité de la

fct $x \mapsto \ln(x)$

inégalité de Hölder Discrète

$$a_i, b_i \geq 0, (p > 1, p' > 1) \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Inégalité de Hölder pour les intégrales

Th 2

Soient $p, p' \in [1, \infty]$ tq

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{et} \quad \text{soit } f, g \text{ des fcts mesurables}$$

$$\text{alors: } \int_X |f \cdot g| dm \leq \left(\int_X |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^{p'} dm \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Rmq

pour $p=2$ on obtient cas particulier à inégalité de Cauchy Schwarz pour l'intégrale

(Indication) on applique le lemme de Young.

$$a = \frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$b = \frac{|g|}{\left(\int_X |g|^{p'} dm \right)^{\frac{1}{p'}}}$$

2) Inégalité de Minkowski

1h : "conséquence de Hölder"

Soit $p \in [1, \infty]$ et f, g des fct mbls

$$\text{alors } \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve:

on appl. inégalité de Hölder

$$\text{en remarquant que : } |f+g|^p = |f+g| |f+g|^{p-1} \\ \leq (|f| + |g|) |f+g|^{p-1}$$

4) Structure Topologique des esp $L_p(X)$

On considère la fct notée $\|\cdot\|_p$ on tt

Simplement $\|\cdot\|_p$ définie sur $L_p(X)$ par

$$\|\cdot\|_p : L_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

On démontre que la fct $\|\cdot\|_p$ définie une semi-norme sur l'esp $L_p(X)$

$$1) \|f\|_p \geq 0$$

$$2) \|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ (p.p.)}$$

$$3) \|af\|_p = |a| \|f\|_p$$

$$4) \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{"inégalité de Minkowski"}$$

Théorème

L'esp $(L_p(X), \|\cdot\|_p)$ est un esp

semi-norme $(1 \leq p \leq \infty)$

5) L'espace $L_p(X)$

Sur l'esp $L_p(X)$ on définit la relation

$$(\sim) \text{ par } f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ (p.p.)}$$

On vérifie que " $\sim$ " est une relation

d'équivalence sur $L_p(X)$, ce qui permet

de considérer l'esp quotient i.e.

L'esp des classes d'équivalence $L_p(X)/\sim$

qu'on note par $L_p(X)$

* Si $f \in L_p(X)$, sa classe d'équivalence

est notée temporairement par $[f]$

$$[f] = \{g \in L_p(X) : f = g \text{ (p.p.)}\}$$

On munit l'esp $L_p(X)$ d'une structure

vectorielle, en définissant l'addition

"+" et la multiplication par un scalaire

$$1) [f] + [g] = [f+g]$$

$$2) \alpha \cdot [f] = [\alpha f]$$

La structure topologique

$(1 \leq p < \infty)$

L'app noteé $\|\cdot\|_p$ de $L_p(X)$ à $\mathbb{R}$ définie par

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur l'esp $L_p(X)$

Ex: M_q $\|[f]\|_p$ est une norme.

Théorème pour $(1 \leq p < \infty)$, l'esp $L_p(X)$

est une e.v.n

Proposition :

"Suite absolument convergente

de L_p "

* Soient $(X; T, \mu)$ un esp mesuré, $1 \leq p < \infty$

$(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $L_p(X)$ on suppose

que $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$ alors

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| < \infty \text{ (p.p.) sur } X, \text{ on pose}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \text{ p.p.}$$

$$1) \int_0^1 f(x) dx$$

$$3) \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \rightarrow f(x) \text{ (p.p.) et ds } L^2(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ v.c. m.b.b.} \mid \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$$

et de plus, il existe $F \in L^p(X)$ tq:

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| < F \quad (\text{p.p.}) \quad \text{ds } L^p \text{ domine}$$

propos 21

$$f \in L^p(X) \Rightarrow f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f: X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) = u(x) + v(x)i$$

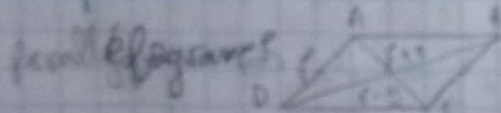
$$\Rightarrow f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow f: X \rightarrow \mathbb{C}$$

Th 1 - Riesz - Fisher pour $p=2$
L'esp $L^2(X)$ est un esp de Banach H.

Rmq 2

On peut aussi définir les esp
 $L^p((X, T, \mu); \mathbb{C})$; $L^p((X, T, \mu); \mathbb{R})$
et on obtient des esp de Banach réel
ou complexe.



$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

et ds ds $p=2$

Cas particuliers

On se demande maintenant si l'esp
 $L^p(X)$ sont des esp de Hilbert

Ceci est vrai que si $p=2$, en général
c'est faux pour $p \neq 2$, il suffit de

donner un exemple qui met en défaut
l'inégalité du parallélogramme

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Def

$$L^2(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ v.c. m.b.b.} \mid \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$$

$$L^2(X) = L^2(X)$$

la norme

$$\|f\|_{L^2(X)} = \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

Th 1

Soit (X, T, μ) un esp mes

1) L'esp $L^2(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2(X)}$
est un esp de Hilbert dont le produit
scalaire (produit intérieur = Inner product)
associé à la norme est donné par

$$\langle f, g \rangle_{L^2(X)} = \int_X f g d\mu \quad \left(\int f \bar{g} d\mu, \text{ réel complexe} \right)$$

2) Inégalité de Cauchy - Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2(X)} \cdot \|g\|_{L^2(X)}$$

$$\|f g\|_{L^2(X)} \leq \|f\|_{L^2(X)} \cdot \|g\|_{L^2(X)}$$

de convergence

la cv de l'esp $L^2(X)$
est dite cv quadratique (en moyenne
d'ordre 2)

Corollaire (X, T, μ) esp mesuré

$$f \rightarrow f \quad (L^2(X))$$

$$g \rightarrow g \quad (L^2(X)) \quad \text{alors:}$$

$$f_n g_n \rightarrow f g \quad (L^2(X))$$

Si $\mu(X) < \infty$, on a $L^2(X) \subset L^1(X)$

$$\|f\|_{L^1(X)} \leq \mu(X)^{1/2} \|f\|_{L^2(X)}$$

Fourier $\rightarrow f \mapsto \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$

$\hat{f} \mapsto f$

$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$

L'esp $L_2(X)$ "Car $p=2$ "

le sup essentiel "sup vrai" (inf ess, inf vrai)

Déf 0.1

Soit X un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, f une fct à valeurs réelles. On définit le sup-ess de f (inf vrai de f) par:

$\sup_{x \in X} \text{vrai}(f(x)) \doteq \inf_{\substack{e \subset X \\ |e|=0}} \sup_{x \in (X|e)} f(x)$

$e \subset X, x \in (X|e), |e|=0 \Rightarrow \text{mes}(e)=0$

$\sup \text{vrai } f(x) \doteq \inf_{\substack{e \subset X \\ |e|=0}} \sup_{x \in (X|e)} f(x)$

$\inf \text{vrai}(f(x)) \doteq \sup_{\substack{e \subset X \\ |e|=0}} \inf_{x \in (X|e)} f(x)$

Remarque

Il est clair que, $\inf \text{vrai}(f(x))$

$\inf_{x \in X} \text{vrai}(f(x)) \leq \sup_{x \in X} \text{vrai}(f(x)) \leq \sup_{x \in X} f(x)$

Exemple

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \infty$

Pour une fct à valeurs réelles f définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ on définit l'ensemble

$\Omega_a = \Omega_a(f) = \{x \in \Omega : f(x) > a\}$

Déf 0.2

Soit Ω sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fct mbl alors

$\sup \text{vrai}(f(x)) = \inf \{a \in \mathbb{R} : |\Omega_a| = 0\}$

$\|f\|_\infty = \inf \{c : |f(x)| \leq c\}$

$= \inf \{c = m(n) : |f(x)| > c\} = 0$

$= \inf_{|e|=0} \sup_{x \in e} |f(x)|$

Lemme 0.1

Déf 0.1 $\Leftrightarrow$ Déf 0.2

propriétés

On citera quelques propriétés

similaires à celle du sup-ordinaire

Lemme 0.2

Soit $f: \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, Ω_1, Ω_2 des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ alors

$\sup \text{vrai } f(x) = \max \left(\sup \text{vrai}_{x \in \Omega_1} f(x), \sup \text{vrai}_{x \in \Omega_2} f(x) \right)$

Preuve

Utiliser l'identité, soit $a \in \mathbb{R}$

$(\Omega_1 \cup \Omega_2)_a = (\Omega_1)_a \cup (\Omega_2)_a$

Corollaire

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $G \subset \Omega$ des ensemble mesurables, alors:

$\sup \text{vrai}_{x \in G} f(x) \leq \sup \text{vrai}_{x \in \Omega} f(x)$

Preuve

$\Omega_1 = G, \Omega_2 = \Omega \setminus G$

tq $(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \Omega$

d'après l'appliquer lemme 0.2

$\sup \text{vrai}_{x \in \Omega} f(x) = \sup \text{vrai}_{x \in G} f(x) \vee \sup \text{vrai}_{x \in \Omega \setminus G} f(x)$

Corollaire 0.2 :

Soit $g, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω ensemble mesurable tel que $f \leq g$

$$\sup_{x \in \Omega} \text{Vrai}(f(x)) \leq \sup_{x \in \Omega} \text{Vrai}(g(x))$$

Lemme 0.3 :

$$\begin{cases} A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B) \\ \inf(B) \leq \inf(A) \end{cases}$$

Soient $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

une fct mbl sur Ω et g une fct

intégrable, alors :

$$\inf_{x \in \Omega} \text{Vrai}(f(x)) \int g(x) dx \leq \int f(x) g(x) dx$$

$$\leq \sup_{x \in \Omega} \text{Vrai}(f(x)) \int g(x) dx$$

Preuve : EX :

Déf :

(l'esp L_p, L_p)

Soit (X, T, m) un esp mesuré et $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, on définit

$$L_p(X) \doteq L_p(X, T, m, \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$$

$$= \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \vee \mathbb{C} \text{ mes} / \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \}$$

$$= \{ \text{les fcts essentiellement bornées sur } X \}$$

$$\text{Si } f \in L_\infty(X) \text{ on pose } \|f\|_\infty \doteq \|f\|_{L_\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$$\text{Si } f \notin L_\infty(X) : \|f\|_\infty = +\infty$$

$$\text{Si } |\Omega| = 0 : \|f\|_\infty = 0$$

La relation " = (pp) " définie sur l'esp $L_\infty(X)$ permet de définir l'esp quotient $L_\infty(X)$ = (pp)

$$L_\infty(X) \doteq L_p(X) / \sim = (pp)$$

lemme 0.4

Soit $f \in L_p(X)$ ($L_p(X)$) on a

$$\|f\|_p \leq \|f\|_p \quad (pp) \text{ sur } X$$

Th de "Riesz-Fischer" "Complétude"

L'esp $L_p(X, T, m)$ est un esp de Banach

Preuve :

1) M_q L_p est une e.v

$$f \in L_p(X) \Leftrightarrow \begin{cases} a) f \text{ mbl} \\ b) \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty = \inf \{ c > 0 / |f(x)| \leq c \} < \infty \end{cases}$$

$$g \in L_p(X) \Leftrightarrow \begin{cases} c) g \text{ mbl} \\ d) \sup_{x \in X} |g(x)| < \infty \end{cases}$$

$$f+g \in L_p(X) \Leftrightarrow \begin{cases} a) f+g \text{ mbl (esp des fcts, e.v)} \\ b) \sup_{x \in X} |f(x)+g(x)| < \infty \end{cases}$$

$$\alpha \in K(\mathbb{R} \vee \mathbb{C}) \Rightarrow \alpha f \in L_p(X) \Leftrightarrow \begin{cases} a) \alpha f \text{ mbl} \\ b) \sup_{x \in X} |\alpha f(x)| < \infty \end{cases}$$

$$\inf \{ c > 0 / |\alpha f(x)| \leq c \} = \inf \{ c > 0 / |\alpha| |f(x)| \leq c \} = \inf \{ c > 0 / |f(x)| \leq \frac{c}{|\alpha|} \}$$

$$\| \cdot \| : L_p \rightarrow \mathbb{R} \text{ est un Semi-norme} \\ f \mapsto \|f\|_p = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$$\| \cdot \|_\infty : L_\infty \rightarrow \mathbb{R} \text{ est un norme} \\ f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$$i) L_p(X) = L_p(X, T, m) \text{ est un e.v. n part} \\ \|f\|_\infty \doteq \sup_{x \in X} |f(x)| \doteq \|f\|_p$$

$$ii) M_q (L_p(X), \| \cdot \|_p) \text{ est un esp de Banach}$$

Soit (f_n) une suite de Cauchy de l'esp $L_p(X)$ i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall m, n > N(\varepsilon) \quad \text{tq}$$

$$\|b_m - b_n\|_\infty < \varepsilon \quad (PP)$$

donc

$$|b_m(x) - b_n(x)| \leq \|b_m - b_n\|_\infty \quad (PP)$$

$\text{sur } X$

$$\text{pour } \varepsilon = \frac{1}{k}, \exists N_k, \text{ tq, } \forall m, n > N_k,$$

$$\|b_m - b_n\|_\infty < \frac{1}{k} \quad (PP), \quad \begin{matrix} b: X \rightarrow \mathbb{R} \\ n \rightarrow b(n) \end{matrix}$$

donc $\exists$ une ensemble A_k de mesure nulle. tq

$$\text{posons } F = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad m(F) = 0$$

$$\forall x \in X \setminus F, \forall k \in \mathbb{N}: |b_m(x) - b_n(x)| \leq \|b_m - b_n\|_\infty < \frac{1}{k}$$

$\forall m, n > N_k$

d'où $(b_n(x))$ est de Cauchy ds $\mathbb{R}$, $\forall x \in X \setminus F$

donc elle ext cv vers une fct $f(x)$ ~~sur $X \setminus F$~~

$$|b_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} |b_m(x) - b_n(x)|$$

$$\leq \|b_n - b\|_\infty < \frac{1}{k}$$

donc quand $\|b_n - b\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

$$\|b\|_\infty = \|b_n + (b - b_n)\|_\infty \leq \|b_n\|_\infty + \|b_n - b\|_\infty$$

$$< \infty \Rightarrow b \in L_\infty(X)$$

Ex 3/

$$1) E = [0, 1] \quad b: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$$

$$\text{Mq } b \in L_1, \quad b \notin L_p$$

$$2) E = [0, \frac{1}{2}], \quad b(x) = \left[x \ln^2\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{-1}, \quad b \in L_1(E)$$

$$3) E =]0, +\infty[, \quad b(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad b \in L_p(E)$$

$$2 < p < \infty$$