

Nom : SALEM

Prénom : Sarra

Module : Analyse Fonctionnelle
et Topologie

Choi :

Espaces de Banach.

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite norme si :

$$\left. \begin{array}{l} P_1) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ P_2) \quad \| \lambda x \| = |\lambda| \|x\| \\ \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall x, y \in E \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est dite esp. vect. normé
(En abrégé = E.e.v.n.)

Si on supprime la propriété P_1 on dit que est
une semi norme.

Notons qu'alors P_2 entraîne $\|0\| = 0$.

Remarques :

- Tout espace vectoriel normé est un espace métrique
i.e. : on obtient une distance sur E en posant

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

- La métrique provenant d'une norme est invariante
par translation et par homothétie.

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \text{ et}$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

un espace métrique n'est pas nécessairement normé.

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

$$1) x = y = 0$$

$$2) d(\lambda x, \lambda y) = \left| \frac{\lambda}{x} - \frac{\lambda}{y} \right| = \lambda$$

$$3) \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq$$

est une distance mais n'est pas normé (homothétique)

Dans un e.v.n E ; $\forall x \in E$, $r > 0$
la boule de rayon r autour de x vérifie.

$$B(x, r) = \{ y \in E \mid \|x - y\| \leq r \}$$

$$\text{Donc } B(x, r) = x + B(0, r) \\ = x + r B(0, 1)$$

avec $B(0, 1)$ la boule unité.

Déf 01:

Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E (E est un e.v.n)

$$\phi_n \rightarrow \phi \iff \left(\|\phi_n - \phi\|_E \right)_n \rightarrow 0 \\ \iff \phi_n \rightarrow \phi \text{ uniformément (e.v.n)}$$

Déf 02:

Une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E (e.v.n)
est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0$
 $\|\phi_p - \phi_q\|_E \leq \varepsilon$

Déf 03:

On dit qu'un espace normé est complet si :
toute suite de Cauchy est convergente.

On appelle : Espace de Banach : tout e. n. complet

$$x_n = \frac{1}{n} + a \quad a \in \mathbb{R} - \{a\}$$

$$\|x_p - x_q\| = \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|$$

donc n'est pas de Cauchy $\rightarrow$ n'est pas complet

Exemple =

$$E = l^\infty \left\{ \text{L'espace des suites bornées } x_n \text{ de scalaire} \right\}$$

$$\| (x_n)_n \|_\infty = \sup_n |x_n|$$

$$l_\infty = \left\{ (x_n)_n : x_n \in \mathbb{R} \mid \sup |x_n| < \infty \right\}$$

$(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un e.v.n.

$$e_1 = (1, 0, \dots)$$

$$e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$$

linéairement indepe $\rightarrow \dim(l^\infty) = \infty$
borné et fermé

E 101 = Considérons :

$$E_0 = C^0([0, 1], \mathbb{R}) = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \right\}$$

sup, inf existe et bien défini

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$$

Le sup existe car $x \in [0, 1]$ est fermé + borné
convergence uniforme.

$(E_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

(La norme de la convergence uniforme)

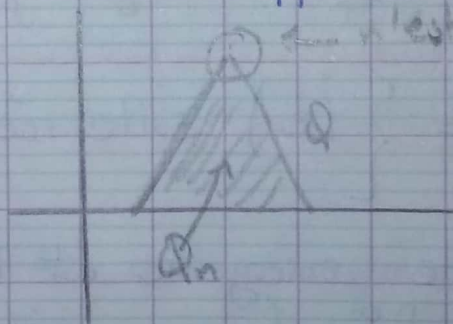
Exo 2:

(1) $E_1 = C^1([0,1], \mathbb{R}) = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1\}$
 $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$ est un e. de Banach ? Non.

• Toute suite de Cauchy (de fonctions) de classe C^1
 $\Rightarrow$ convergence vers une fct de classe C^1 ?

Car :

On sait qu'une suite de fct de classe C^∞ peut converger vers une fct non-différentiable



Th de Weierstrass

$$\|f\|_1 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

Donc : $(E_1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

* Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de Cauchy (pour la norme $\|\cdot\|_1$)
 $\|\varphi_p - \varphi_q\|_1 < \varepsilon \Rightarrow$
 pour p, q suffisamment grands

$$\begin{cases} \sup_{x \in [0,1]} |\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \varepsilon & (*) \\ \sup_{x \in [0,1]} |\varphi'_p(x) - \varphi'_q(x)| < \varepsilon & (**) \end{cases}$$

(*) $(\varphi_n)_n \Rightarrow$ est de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme.

$\exists$ donc une fct continue tq: $\varphi_n \xrightarrow{\text{unif}} \varphi$

(**) $(\varphi'_n)_n$ est de Cauchy $\Rightarrow \exists \psi$ continue tq: $\varphi'_n \rightarrow \psi$

Alors: $\varphi' = \psi$

d'où $\varphi_n \rightarrow \varphi$ donc $C'([0,1], \mathbb{R})$

$$\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \\ f'_n \rightarrow g \end{array} \right\} \Rightarrow f' = g.$$

(2) $E = C_0 = \left\{ (x_n) \text{ suite réelle, } x_n \rightarrow 0 \right\}$

Comme toute suite convergente est bornée on a:

$$C_0 \subset \ell^\infty \quad (\text{sous-esp de } \ell^\infty)$$

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

$(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un esp de Banach.

Remarque:

Un sous espace vectoriel d'un esp de Banach est un esp de Banach $\Leftrightarrow$ il est fermé.

Définition: (Les espaces L^p)

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$

on pose: $L^p(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables, et } \int_\Omega |f|^p dx < +\infty \right\}$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ t.q. } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int |f(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad \|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

L^p, L^∞ sont des EVN (Inégalité de Hölder)

Théorème de (Riesz - Fischer)

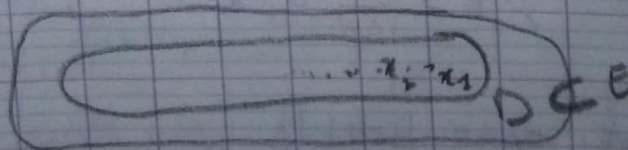
L^p est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$

Espace séparable

Définition : On dit qu'un espace métrique est séparable ; s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense

D dénom.

$\varphi \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$ bijection
in



densité
↓

Densité : $\bar{D} = E \Leftrightarrow \forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \bar{x} \in D, d(x, \bar{x}) < \epsilon$
Ce qui exprime que tout élément x de E peut être approché par un élément $\bar{x}$ de D

Exemples :

1/ $\mathbb{R}$ est séparable ($|\overline{\mathbb{Q}}| = \mathbb{R}$)

2/ $C^0([0,1]; \mathbb{R})$: l'esp. des fcts continues est séparable

Justification

• Th^m d'approximation de Weierstrass :

Pour chaque $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue :

$\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale tq :

$$\sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon$$

Donc, $\left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ \text{polynomiales} \end{array} \right\}$ est dense dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{fcts polys à coeff} \\ \text{rationnels} \end{array} \right\}$ est dense ds $\left\{ \begin{array}{l} \text{fcts} \\ \text{polynomiales} \end{array} \right\}$

$$A = \left\{ P ; P = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i, x \in [0,1] \right\}$$

A est dénombrable

3/ l^∞ l'esp des suites bornées, n'est pas séparable
(il ne contient aucune partie dénombrable et dense)

Chap 01: "Théorème de Banach - Steinhaus 1927" (Principe de la borne uniforme)

Lemme (Baire):

Soit X un espace métrique complet (non vide).

Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés tq: $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$

Alors: il existe n_0 tel que: $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

Théorème (Banach - Steinhaus)

Soient E et F deux espaces de Banach.

Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille [non nécessairement dénombrable] d'opérateurs linéaires continus de E dans F .

On suppose que:

(1) $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty ; \forall x \in E$.

Alors:

(2) $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty$

Autrement dit, il existe une constante $C > 0$ $\|T_i x\| \leq C \|x\|$
 $\forall x \in E, \forall i \in I$

Remarques:

① Banach Steinhaus: à partir d'une estimation ponctuelle on obtient une estimation uniforme.

② La réciproque du th. B-S est triviale ;

En effet $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$
 $\mathcal{L}(E, F)$

Démonstration : $T_i \in \mathcal{L}(E, F)$,

Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose :

$X_n = \left\{ x \in E, \forall i \in I, \|T_i x\| \leq n \right\}$
 de sorte que X_n est fermé $= \left\{ x \in E \mid \|T_i x\| \leq n \right\}$

• X_n : fermé (pour chaque n) résulte du fait que :
 l'application $x \mapsto T_i x \mapsto \|T_i x\|$ est continue
 si l'image réciproque d'un fermé par une application
 continue est un fermé donc X_n = fermé

$$\underbrace{\varphi^{-1}(B_F(0, n))}_{\text{Fermé}} = X_n = \left\{ x \in E, i \in I \mid \|T_i x\|_F \leq n \right\}$$

$$x \xrightarrow{\varphi} \|T_i x\| \text{ cont}$$

• Soit $x \in \overline{X_n} \Rightarrow \exists x_n \in X_n \mid x_n \rightarrow x$ donc par passage
 à la limite $\Rightarrow x \in X_n$
 donc X_n est fermé.

$$\bigcup F_n = X \quad \exists n_0, \hat{F}_{n_0} \neq \emptyset \quad \text{Baire}$$

Grâce à (1) [hypothèse] on a : $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset E$.
 $x \in E$ (estimation ponctuelle) $\Rightarrow E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$

• D'après le lemme de Baire $\hat{X}_{n_0} \neq \emptyset$
 pour un certain $n_0 > 0$.

Baire $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in E$, $\exists r > 0$ tels que :

$$B_E(x_0, r) \subset X_{n_0}$$

On considère $z \in E$, avec $\|z\| \leq 1$

$$\Rightarrow x = x_0 + rz \in B_E(x_0, r).$$

$$\text{On a : } \|T_i x\| = \|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0, \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \|T_i(x_0) + rT_i(z)\| \leq n_0, \forall i \in I$$

(*)

$$r \|T_i(z)\| - \|T_i(x_0)\| \leq (*)$$

$$\text{donc, } r \|T_i(z)\| - \|T_i(x_0)\| \leq n_0, \forall i \in I$$

$$\Rightarrow r \|T_i(z)\| \leq n_0 + \|T_i x_0\|$$

$$\Rightarrow \|T_i(z)\| \leq \frac{1}{r} (n_0 + \|T_i x_0\|) \quad \forall z \in B_E(0, 1)$$

On sait que $x_0 \in X_{n_0} \Rightarrow \|T_z x_0\| \leq n_0 \quad \forall z \in I$

Donc :

$$\|T_z(z)\| \leq \frac{2n_0}{r}, \quad \forall z \in I, \quad \forall z \in B_E(0,1)$$

$$\sup_{\|z\| \leq 1} \|T_z(z)\| \leq \frac{2n_0}{r}, \quad \forall z$$

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < \infty$$

Corollaire :

Soient E et F deux espaces de Banach, Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continus dans F , tels que $n \geq 1$ pour chaque $x \in E$:

$T_n x$ converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers une limite notée Tx

Alors : on a :

$$(a) \quad \sup \|T_n\|_{L(E,F)} < \infty$$

$$(b) \quad T \in L(E, F)$$

$$(c) \quad \|T\|_{L(E,F)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \|T_n\|_{L(E,F)}$$

Démonstration:

Toute suite (ponctuellement) convergente est majorée (ponctuellement)

Donc (a) résulte directement du Th de Banach-Steinhaus.
Il existe une constante $c > 0$, telle que :

$$\|T_n x\| \leq c \|x\|, \quad \forall n, \quad \forall x \in E$$

A la limite, on obtient :

$$\|Tx\| \leq c \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Il est clair que T est linéaire et continu.

D'où (b)

$$\bullet \text{ On a : } \|T_n x\| \leq \|T_n\|_{L(E,F)} \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

$$\|Tx\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{L(E,F)} \cdot \|x\|$$

$$\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{L(E,F)}$$

D'où (c).

Corollaire:

Soit G un espace de Banach. B un sous-ensemble de G .
On suppose que : $(G' \text{ dual } G)$

• Pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(B) = \bigcup \langle f, x \rangle$ est borné (dans $\mathbb{R}$).

Alors : B est borné

Démonstration:

On applique le th de Banach-Steinhaus avec, $E = G'$, $F = \mathbb{R}$ et $B = I$.

Pour chaque $b \in B$ on pose $T_b'(f) = \langle f, b \rangle$, $f \in G' = E$ de sorte que :

$$\sup_{b \in B} |T_b'(f)| < \infty, \forall f \in G'$$

$\exists c > 0$ telle que : $|\langle f, b \rangle| \leq c \cdot \|f\|, \forall f \in G', \forall b \in B$

Par conséquent $\|b\| \leq c, \forall b \in B$.

D'où B est borné

Remarque:

Pour vérifier qu'un ensemble est borné :

Il suffit de "regarder" à travers tous les formes linéaires continues.

Corollaire:

$B \subset E$, $(\quad)$, $f(B)$ est borné, $\forall f \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
 $\Rightarrow B$ borné

$$\begin{aligned} \bullet T_b'(f) &= \langle f, b \rangle : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\quad b \longrightarrow f(b) \end{aligned} \quad b \in B$$

- i) $E', \mathbb{R}$ sont des esp de Banach
- ii) T_b' est linéaire.

i) T_b est continue, $\forall b \in B$.

$$\|T_b(f)\| = \|f(b)\| \leq \|f\| \cdot \|b\| = C \cdot \|b\|.$$

$$\|f(b)\| \leq C_f \Rightarrow f(B) \text{ est borné.}$$

D'après Banach Steinhaus - $\sup_{b \in B} \|T_b f\| < \infty$
 $\Downarrow$ B.S

$$\sup_{b \in B} \|T(b)\| < C \quad \text{Par définition} \Rightarrow$$

$$\|T(b)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|T_b(f)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(b)| = \|b\| = C$$

$$\forall b \in B \quad \|b\| \leq C \quad B \text{ borné.}$$

Contre exemple.

Considérons l'espace $C_{00} = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R}, \exists p \geq 1, x_n = 0, \forall n \geq p\}$
 $C_{00} \subset C_0$ $\|(x)_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

$$\text{Soit } L_n : C_{00} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_k)_k \mapsto nx_n.$$

$$\text{Fixons } (x_k)_k \in C_{00} \Rightarrow L_n((x_k)_k) = nx_n = 0 \quad \forall n \geq p$$

$$\Rightarrow \{L_n((x_k)_k) : n \in \mathbb{N}\} \text{ est borné}$$

$$\xrightarrow{\text{Banach Steinhaus}} \{ \|L_n\|, n \in \mathbb{N} \} \text{ est borné.}$$

D'autre part, : $\|L_n\| = \sup_{\|(x_k)\| \leq 1} \|L_n[(x_k)]_k\|$
 $= \sup_{\|(x_k)\| \leq 1} |n x_n| \leq n$

Rq : L_n n'est pas borné
 C_{00} n'est pas complet.

Théorème de l'application ouverte

• f est dite ouverte si $f(\text{ouvert})$ ouvert :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \quad \left(f(\underbrace{]--1, 1[}_{\text{ouvert}}) = [0, 1[\right)$$

Théorème = (de l'app ouverte)

Soit E et F deux esp de Banach et soit T un opérateur linéaire continu surjectif de E sur F , Alors :
il existe une constante $c > 0$ telle que :

(*) $T[B_E(0, 1)] \supset B_F(0, c)$

Exemple :

$E: \text{Banach}, \quad T: E \rightarrow E \\ x \mapsto Tx = 0$

Soit U ouvert de E
 $T(U) = \{0\}$ fermé

$T(U) = \{0\}$ ouvert : Surjectif impossible

Remarque:

La relation (*) entraîne que :

T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F .
En effet, Soit U un ouvert de E .

montrons que : $T(U)$ est un ouvert de F ?

Soit $y_0 \in T(U)$; Par surjectivité : $y_0 = T x_0$ / $x_0 \in U$

Donc : $\exists B(x_0, r) \subset U$

ie : $x_0 + B(0, r) \subset U$.

On a alors :

$$y_0 + T(B(0, r)) \subset T(U) \quad (**)$$

Or, d'après (*)

$$B_F(0, rc) \subset T(B_E(0, 1))$$

$$(*) + (**) \Rightarrow \underbrace{y_0 + B_F(0, rc)}_{B(y_0, rc)} \subset T(U)$$

$$B(y_0, rc) = y_0 + B_F(0, rc) \subset y_0 + T(B_E(0, 1)) \subset T(U)$$

Corollaire:

Soit E et F 2-esp de Banach.

et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E dans F ; Alors : T^{-1} est continu de F dans E .

Démonstration :

La relation $(*) \Rightarrow \forall x \in E$ tel que : $\|Tx\| < c$
alors : $\|x\| < 1$

$$(*) \leftarrow T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)$$

$$(*) \leftarrow T^{-1}(B_F(0,c)) \subset B_E(0,1)$$

$$x \in \left\{ T^{-1}(y), y \in B_F(0,c) \right\} \Rightarrow y \in B_E(0,1)$$

$$x \in B(0,c) \Rightarrow x \in B(0,1).$$