

Programme:

- Chapitre 01: Rappel sur les espaces de Banach
opérateur linéaire borné -
opérateur compact
- Chapitre 02: Théorème de Banach Stein Hausse
- Chapitre 03: Théorème de l'application ouverte
- Chapitre 04: Théorème de graphe fermé
- Chapitre 05: Théorème de Hahn Banach

Références:

- H. Brezis Analyse fonctionnelle édition Dunod.
- W. Rudin Analyse réels et complexe.
- W. Rudin Analyse fonctionnelle.
- T. Yosida functional Analysis, Springer
- Analyse fonctionnelle et Théorème des opérateurs
Exercices corrigées. J. Charles
édition Dunod.

Chapitre 01: Espace de Banach

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une application $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite norme si :

- 1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

le couple $(E, \|\cdot\|)$ est dite **espace vectoriel normé**.

- si on supprime la propriété (1) on dit que $\|\cdot\|$ est une **semi-norme**.

- Notons qu'alors (2) entraîne $\|0\| = 0$.

Remarque:

1) - toute espace vectoriel normé est un espace métrique ie on obtient une distance sur E en posant :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

2) - la métrique provenant d'une norme est invariante par translation et homothétie.

$$d(x+z, y+z) = d(x, y). \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

3) - un espace métrique n'est pas nécessairement normé

4) - pour un espace vectoriel normé E , $\forall x \in E$ et $r > 0$ la boule de rayon r autour de x vérifie :

$$B(x, r) = \{y \in E : \|x - y\| < r\}$$

$$\text{donc } B(x, r) = x + B(0, r) = x + r B(0, 1).$$

Exemple d'un espace métrique mais n'est pas un espace normé
 $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ est un espace métrique mais n'est pas un espace normé par homothétie.

Définition: soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E evn.

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow[E]{} x \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n - x\|_E \rightarrow 0 \\ &\iff x_n \rightarrow x \text{ conv. unif. } \end{aligned}$$

Définition: une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E (evn) est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q > n_0, \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition: on dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente.
 on appelle espace de Banach toute espace normé complet.

Exemple:

1) $E = \ell^\infty = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'espace des suites bornées } (x_n) \text{ de scalaires } + q \\ \|x\| = \sup_n |x_n| \end{array} \right\}.$

$$\ell^\infty = \left\{ (x_n)_n = x_n \in \mathbb{R} \mid \sup_n |x_n| < \infty \right\}.$$

$(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

$e_1 = (1, 0, \dots), e_2 = (0, 1, \dots), e_n = (0, \dots, 1, \dots)$ n-ème
 linéairement indépendant $\Rightarrow \dim(\ell^\infty) = \infty.$

2) Considérons:

$$E_0 = C^0([0, 1], \mathbb{R}) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}.$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

puisque l'espace est fermé et borné et la fonction est continue dans f atteignent les bornes dans l'espace $(E_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. (la norme de la convergence uniforme)

3) $E_1 = C^1([0, 1], \mathbb{R}) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ est de classe } C^1\}$

$(E_1, \|\cdot\|_\infty)$ est-il un espace de Banach? Non.

Toute suite de Cauchy (de fonction) de classe $C^1 \Rightarrow$
convergente vers la fonction de classe C^1 ?

on sait qu'une suite de fonction de classe C^∞ peut converger vers une fonction non différentiable

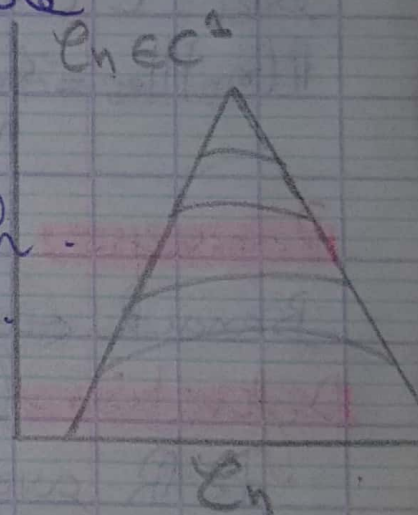
$$\|f\|_1 = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$$

Donc $(E_1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

$C^1([0, 1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$$

* soit $(E_n)_n$ une suite de Cauchy (pour la norme $\|\cdot\|_1$).



$$\| \mathcal{C}_p - \mathcal{C}_q \| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \sup_{x \in [0,1]} |\mathcal{C}_p(x) - \mathcal{C}_q(x)| < \varepsilon \quad \text{---} (*) \\ \text{pour } p, q \text{ suffisamment grandes} \\ \sup |\mathcal{C}_p'(x) - \mathcal{C}_q'(x)| < \varepsilon \quad \text{---} (**) \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow (\mathcal{C}_n)$ est de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme.

$\exists$ donc une fonction continue $\varphi = \mathcal{C}_n \xrightarrow{\text{unif}} \varphi$.

$(**) \Rightarrow (\mathcal{C}_n)_n$ est de Cauchy.

$\exists \psi$ continue $\varphi = \mathcal{C}_n \xrightarrow{\text{unif}} \psi$. alors $\varphi = \psi$.

D'où $\mathcal{C}_n \rightarrow \varphi$ dans $C^1([0,1], \mathbb{R})$.

4) $E = C_0 = \{ (x_n) \text{ suite réel, } x_n \rightarrow 0 \}$.

comme toute suite convergente est bornée.

$C_0 \subset C^0 \subset l^\infty$ (sous espace de l^∞).

$\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|$. $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Remarque : un sous espace vectoriel d'un espace de Banach $\iff$ Il ~~existe~~ est fermé.

Définition : (les espaces L^p) soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. on pose :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int |f|^p dx < \infty \right\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ tq} = \right.$$

dense dans fonctions poly.

$$A = \left\{ P, P = \sum_{i=1}^n a_i x^{i_i} \mid x \in [0,1] \right\}$$

A est dénombrable.

- 3) l^∞ l'espace des suites bornées n'est pas séparable (il ne contient aucune partie dénombrable et dense).

$$|f(x)| \leq C \text{ pp sur } \Omega$$

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int |f(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad \|f\|_{L^\infty} = \inf \{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ pp sur } \Omega\}$$

L^p, L^∞ sont des evn. {Inégalité de Holder}

Théorème de (Riesz - Fisher)

L^p est un espace de Banach pour $1 \leq p < +\infty$.

Espace séparable:

Définition: on dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous espace $D \subset E$ dénombrable et dense ($\bar{D} = E$)

$$\bar{D} = E \iff \forall x \in E, (\forall \epsilon > 0, \exists \bar{x} \in D, d(x, \bar{x}) < \epsilon)$$

ce qui exprime que tout élément x de E peut être approché par un élément $\bar{x}$ de D .

Exemple: 1) $\mathbb{R}$ est séparable ($\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

2) $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues est séparable.

Justification:

Théorème d'approximation de Weierstrass = Pour chaque $\mathcal{C} = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue - $\forall \epsilon > 0$ il existe une fonction polynômiale p q: $\sup_{x \in [0, 1]} |\mathcal{C}(x) - p(x)| < \epsilon$

donc = fonction polynômiale est dense dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$
 $A =$ fonctions polynômiales à coefficients rationnels est

Chapitre 02 : Théorème de Banach-Steinhaus 1927

(Principe de la borne uniforme)

Lemme de Baire : soit X un espace métrique complet (non vide). soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite des fermés tq

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = X$$

alors = il existe $x_0 \in F_n \neq \emptyset$

Théorème de Banach-Steinhaus :

Soient E et F deux espaces de Banach soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille [non nécessairement dénombrable] d'opérateurs linéaires continues de E dans F .

on suppose que = 1) $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E$

$$\text{alors} = \sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty$$

autrement dit, il existe une constante

$$C > 0 \quad \|T_i x\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in E, \forall i \in I$$

Remarque (1) Banach-Steinhaus :

à partir d'une estimation ponctuelle on obtient une estimation uniforme.

(2) la réciproque du théorème de B-S est triviale.

$$\text{en effet} : \|T_i x\| \leq \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|x\|$$

grâce à (1) hypothèse on a: $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E$
 $x \in E$ (estimation fonctionnelle) $\Rightarrow E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$
 D'après le lemme de Baire: $X_{n_0} \neq \emptyset$ pour un certain $n_0 > 0$.

Baire $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in E$, $\exists r > 0$ tels que $B_E(x_0, r) \subset X_{n_0}$
 $\Rightarrow$

on considère $z \in E$, avec $\|z\| \leq 1 \Rightarrow$

$$x = x_0 + rz \in B_E(x_0, r).$$

$$\text{on a: } \|T_i(x)\| = \|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \quad \forall i \in I, \forall z \in B_E(0, 1)$$

$$\Rightarrow \|T_i(x_0) + rT_i(z)\|_E \leq n_0, \quad \forall i \in I.$$

$$r\|T_i(z)\| - \|T_i(x_0)\| \leq (*)$$

$$\text{donc: } r\|T_i(z)\| - \|T_i(x_0)\| \leq n_0, \quad \forall i \in I.$$

$$\Rightarrow r\|T_i(z)\| \leq n_0 + \|T_i(x_0)\|$$

$$\Rightarrow \|T_i(z)\| \leq \frac{1}{r} (n_0 + \|T_i(x_0)\|), \quad \forall z \in B_E(0, 1)$$

$$\text{on sait que } x_0 \in X_{n_0} \Rightarrow \|T_i(x_0)\| \leq n_0 \quad \forall i \in I.$$

Donc:

$$\|T_i(z)\| \leq \frac{2n_0}{r}, \quad \forall i \in I, \forall z \in B_E(0, 1).$$

$$\sup_{\|z\| \leq 1} \|T_i(z)\| \leq \frac{2n_0}{r}, \quad \forall i$$

$$\sup_i \|T_i\|_{L(E, F)} < \infty$$

Démonstration: Pour chaque entier $T_i \in L(E, F)$

$n \geq 1$ on pose:

$X_n = \{x \in E, \forall i \in I, \|T_i x\| \leq n\}$ de sorte que X_n est fermé.

X_n fermé (pour chaque n résulte du fait que l'application $x \rightarrow T_i x \rightarrow \|T_i x\|$ est continue.

* l'image réciproque d'un fermé est un fermé donc X_n fermé.

$$\mathcal{L}^{-1}(B_F(0, n)) = X_n = \{x \in E, i \in I \text{ tq } \|T_i x\| \leq n\}$$

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}([0, n])}_{\text{fermé}} = \mathcal{L}^{-1}(B_F(0, n)).$$

* soit $x \in \overline{X_n} \Rightarrow \exists x_n \in X_n / x_n \rightarrow x$ donc par passage à la limite $\Rightarrow x \in X_n$ donc X_n est un fermé.

* grâce à (1) (hypothèse) on a: $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E$.

$$T_i = E \rightarrow F, i \in I.$$

$$\sup \|T_i\| = C < \infty.$$

$\Downarrow$

$$\sup \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} = C < \infty.$$

Corollaire : Soient E et F deux espaces de Banach, soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite d'opérateurs linéaires continues de E dans F tels que : pour chaque $x \in E$ $T_n x$ converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers une limite notée Tx .

Alors : on a : a) $\sup_n \|T_n\|_{L(E,F)} < \infty$.

b) $T \in L(E, F)$.

c) $\|T\|_{L(E,F)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\|_{L(E,F)}$

Démonstration :

Toute suite (ponctuellement) convergente est majorée (ponctuellement).

Donc (a) résulte directement du théorème de Banach-Steinhaus.

il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|T_n x\| \leq C \|x\| \quad \forall n, \forall x \in E.$$

à la limite on obtient : $\|Tx\| \leq C \|x\|, \forall x \in E$

Il est clair que T est linéaire et continue d'où (b).

$$\text{on a : } \|T_n x\| \leq \|T_n\|_{L(E,F)} \|x\|. \quad \forall x \in E.$$

$$\text{D'où (c). } \left(\|T_n x\| \leq \inf_{L(E,F)} \|T_n\|_{L(E,F)} \|x\| \Rightarrow \|T\|_{L(E,F)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\|_{L(E,F)} \right).$$

Corollaire. Soit G un espace de Banach, B un sous-ensemble de G , on suppose que :

Pour tout $f \in G'$ l'ensemble $\{ \langle f, x \rangle \mid x \in B \}$ est borné. ($G' = \text{dual } G \text{ dans } \mathbb{R}$)

$$f(B) = \{ \langle f, x \rangle \mid x \in B \} \text{ est borné. } G' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

Alors B est borné.

Démonstration. on applique le théorème de Banach-Steinhaus avec : $E = G'$, $F = \mathbb{R}$ et $B = I$.

Pour chaque $b \in B$, on pose $T_b(f) = \langle f, b \rangle$.
 $f \in G' = E$.

de sorte que : $\sup_{b \in B} |T_b f| < \infty, \forall f \in G'$.

$\exists c > 0$, telle que : $|\langle f, b \rangle| \leq c \|f\|, \forall f \in G', \forall b \in B$

Par conséquent : $\|b\| \leq c, \forall b \in B$.

D'où B est borné.

Remarque : Pour vérifier qu'un ensemble est borné
Il suffit de regarder à travers toutes les formes
linéaires continues.

Corollaire. $B \subset E$ (Banach). $f(B)$ est borné $\forall f \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
 $\Rightarrow B$ est borné.

$$T_b(f) = \langle f, b \rangle = E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b \longrightarrow f(b) \quad b \in B.$$

i) $E', \mathbb{R}$ sont des espaces de Banach.

ii) T_b est linéaire.

iii) T_b est continue, $\forall b \in B$.

$$\|T_b(f)\| = \|f(b)\| \leq \|f\| \|b\| = C \|f\| \|b\|$$

$$\|f(b)\| \leq C_f \Rightarrow f(B) \text{ est borné.}$$

D'après Banach-steinhaus: $\sup_{b \in B} \|T_b(f)\| < \infty$
 $\Downarrow$ B-S

$\Rightarrow$
 $\sup \|T(b)\| < C$ par définition:

$$\|T(b)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|T_b(f)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(b)| = \|b\| \leq C$$

$$\forall b \in B. \quad \|b\| \leq C.$$

B est borné.

Contre exemple: considérons l'espace ~~$\mathbb{R}$~~
 (l'espace des suites stationnaires au 0).

$$\ell_\infty = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \exists p \geq 1. a_n = 0 \quad \forall n \geq p\}.$$

$$\ell^\infty \subset \ell^\infty. \quad \| (a_n) \| = \sup_n |a_n|.$$

$$\text{soit: } L_n = \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_k)_k \longrightarrow n a_n.$$

$$\text{fixons: } (a_k)_k \in \ell^\infty \Rightarrow L_n((a_k)_k) = n a_n = 0. \quad \forall n \geq p.$$

$$\Rightarrow \{ L_n((a_k)_k) : n \in \mathbb{N} \} \text{ est borné.}$$

(suite convergente est bornée).

$$\text{par Banach steinhaus: } \{ \|L_n\|, n \in \mathbb{N} \} \text{ est borné.}$$

D'autre part:

$$\|L_n\| = \sup_{\|(a_k)\| \leq 1} \|L_n((a_k)_k)\| = \sup_{\|(a_k)\| \leq 1} \|n a_n\| \leq n.$$

L_n n'est pas borné.

Remarque: ℓ^∞ n'est pas complet.

Théorème de l'application ouverte:

f est dite ouverte si $f(\text{ouvert})$ ouvert

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x^2. \quad f([-1, 1[) = [0, 1[.$$

ouvert

Théorème de l'application ouverte:

soient E et F deux espaces de Banach et T est un opérateur linéaire continue surjectif de E sur F ,

Alors: il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$(*) \quad T[B_E(0, 1)] \supset B_F(0, c).$$

Démonstration: la relation $(*) \Rightarrow \forall x \in E$, tel que: $\|Tx\| < C$ alors $\|x\| < 1$.

$$*) \leftarrow T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,C)$$

$$\rightarrow T^{-1}(B_F(0,C)) \subset B_E(0,1)$$

$$x \in \{T^{-1}(y) : y \in B_F(0,C)\} \Rightarrow x \in B_E(0,1)$$

$$y \in B_F(0,C) \Rightarrow x \in B_E(0,1)$$

$$y \in B_F(0,C) \Rightarrow T^{-1}(y) \in B_E(0,1)$$



$$\|y\| < C \Rightarrow \|T^{-1}(y)\| < 1$$

par conséquent, par homogénéité:

$$\|y\| < 1 \Rightarrow \|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C}$$

Exercice: Soit E un espace vectoriel normé que l'on va munir de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, on suppose que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont complets et qu'il existe $C > 0$ tel que: $\forall x \in E, \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$.

montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Démonstration (théorème de l'application ouverte):

la preuve se fait en 2-étapes:

1) on démontre tout d'abord qu'il existe $C > 0$ tel que:

$$B(0, 2C) \subset T(B(0,1))$$

2) on déduit (de la 1ère étape) que:

Exemple = $E = \text{Banach}$ (séparé) $T: E \rightarrow E$
 $x \mapsto Tx = 0$.

Soit U ouvert de E . (n'est pas surjectif)
 $T(U) = \{0\}$ fermé.

Remarque = la relation (*) entraîne que T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F .

En effet = soit U un ouvert de E , montrons que $T(U)$ est un ouvert de F ?

soit $y_0 \in T(U)$ par surjectivité: $y_0 = Tx_0$ avec $x_0 \in U$.
 Donc $\exists B(x_0, r) \subset U$.

$$\underline{U} = x_0 + B(0, r) \subset U.$$

on a alors: $y_0 + T(B(0, r)) \subset T(U)$ (**)

or, d'après (*):

$$(*) \Rightarrow B_F(0, rc) \subset r T[B_E(0, 1)]$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow \underbrace{y_0 + B_F(0, rc)}_{B_F(y_0, rc)} \subset T(U)$$

Corollaire = Soient E et F 2 espaces de Banach.

et soit T un opérateur linéaire continue et bijectif de E dans F . Alors T^{-1} est continue de F dans E .

$$B(0, c) \subset T(B(0, 1)).$$

on utilise les ensembles : $F_n = nT(B(0, 1))$,

alors F_n est fermé et $F = \bigcup F_n$ (car T est surjective par le lemme de Baire : on sait qu'il existe :

$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \widehat{F_{n_0}} \neq \emptyset \iff \overline{T(B(0, 1))} \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 / y_0 \in F, B(y_0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))}.$$

$$\text{si } y_0 \in T(B(0, 1)) \Rightarrow -y_0 \in \overline{T(B(0, 1))}$$

symétrie

$$\text{et } B(y_0, r) = y_0 + B(0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))}$$

$$\text{donc : } B(0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))} + \overline{T(B(0, 1))}$$

$$\text{D'où : } B(0, r/2) \subset \overline{T(B(0, 1))}$$

2^{ème} étape :

$$T(B(0, 1)) \supset B(0, c).$$

pour cela : fixons $y \in F$ avec $\|y\| < c$.

on cherche $x \in E / \|x\| < 1$ et $Tx = y$.

$$Tq = \begin{cases} x_n \rightarrow x & \text{dans } E \\ T(x_n) \rightarrow y & \text{dans } F \end{cases}$$

et il s'agit de vérifier que = 1) $x \in D(T)$.
2) $y = Tx$.

Exercice = Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. on définit $\|\cdot\|_1 : E \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $(x, y) \rightarrow \| (x, y) \|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$.

- 1) vérifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme dans $E \times F$.
- 2) Démontrer que l'espace produit $E \times F$ est un espace de Banach.

Théorème de graphe fermé = T continue $\iff G(T)$ est fermé.

Démonstration = supposons que T est continue.

$$\begin{aligned} G(T) &= \{ (x, y) \in E \times F, y = Tx \} \\ &= \{ (x, y) \in E \times F, \|y - Tx\| = 0 \} = \phi^{-1}(0). \end{aligned}$$

fermé.

Comme T continue, l'application $\phi : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow \|y - Tx\|$
 est continue.

Remarque = Toute application continue (linéaire ou non) est fermé.

Chapitre 3 = Théorème de graphe fermé

Théorème : Soient E et F deux espaces de Banach.

T un opérateur linéaire de E dans F .

On suppose que le graphe (noté $G(T)$) est fermé dans $E \times F$, alors : T est continue.

Définition : l'opérateur linéaire T est dit fermé si son graphe est fermé.

$G(T) = \{ (x, y) : x \in E, y = Tx \}$ est fermé dans $E \times F$

* $E \times F$ muni des :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

$E \times F$ est un espace vectoriel.

$G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

* L'espace produit $E \times F$ muni des normes :

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max \{ \|x\|_E, \|y\|_F \}$$

* la norme de graphe $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F$

Remarque : pour démontrer qu'un opérateur T est fermé on procède en général de la manière suivante : on prend une suite (x_n) dans $D(T)$ (Domaine de T).

π^{-1} est continue.

$$\pi^{-1} : E \longrightarrow G(T).$$

$$x \longrightarrow (x, Tx).$$

$$\text{donc} : \exists C > 0, \|\pi^{-1}(x)\|_{\text{EXF}} \leq C \|x\|_E.$$

$$\|Tx\|_F \leq \|\pi^{-1}(x)\|_{\text{EXF}} \leq C \|x\|_E.$$

$$\exists C > 0, \|Tx\|_F \leq C \|x\|_E.$$

donc T est continue.

Démonstration du théorème de l'application ouverte :

$$\text{Etape 02} : B(0, 2C) \subset \overline{T(B(0, 1))} \quad (\#)$$

Soit T un opérateur linéaire continue de E dans F qui vérifie $(\#)$.

$$\text{Alors} : B(0, C) \subset T(B(0, 1))$$

fixons $y \in F$ avec $\|y\| < C$. on cherche $x \in E$ / $\|x\| < 1$ et $Tx = y$.

D'après $(\#)$ on sait que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in E \text{ avec } \|z\| < 1/2 \text{ et } \|y - Tz\| < \varepsilon.$$

on choisit $\varepsilon = \frac{C}{4}$, on obtient donc :

$$z_1 \in E \text{ avec } \|z_1\| < \frac{1}{2} \text{ et } \|y - Tz_1\| < \frac{C}{4}.$$

Appliquant le même procédé avec $(y - Tz_1)$ au lieu de y .

$$\text{avec } \varepsilon = C/4.$$

Démonstration:

Supposons que $G(T)$ est un sous espace fermé.

$\Rightarrow G(T)$ est un espace de Banach (car est un s.e. fermé).

considérons l'application projection par rapport à la 1^{ère} composante (projection canonique).

$$\begin{aligned}\pi: G(T) &\longrightarrow E \\ (x, Tx) &\longrightarrow x\end{aligned}$$

π est linéaire?

$$\pi((x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2)) = x_1 + x_2 = \pi(x_1, Tx_1) + \pi(x_2, Tx_2).$$

$$\pi(\alpha(x, Tx)) = \pi((\alpha x, \alpha Tx)) = \alpha x = \alpha \pi(x, Tx).$$

π est continue?

$$\begin{aligned}\text{en effet: } \|\pi(x, Tx)\|_E &= \|x\|_E \leq \|x\|_E + \|Tx\|_F \\ &= \|(x, Tx)\|_{E \times F} \quad (\text{dans le graphe}).\end{aligned}$$

$$\text{donc: } \|\pi\| \leq 1.$$

π est bijective?

* surjective par construction

* π est injective?

$$\pi(x_1, Tx_1) = \pi(x_2, Tx_2) \quad x_1 = x_2$$

d'où π est une application linéaire, continue et bijective
d'après le théorème de l'application ouverte = (théorème d'isomorphisme de Banach).

$$\|z_2\| = \left\langle \frac{1}{4} \right\rangle \text{ et } \| (y - Tz_1 - Tz_2) \| < \frac{c}{4}$$

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \cdot \|y - T(z_1 + z_2 + \dots + z_n)\| < \frac{c}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc : la suite $z_n = z_1 + \dots + z_n$ est de Cauchy.

E étant un espace de Banach, $z_n \rightarrow z$.
 or $\|a\| < 1$ et $y = Ta$ (puisque T est continue).

Théorème de Hain-Banach :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème Hain-Banach - forme analytique :

Soit $P: E \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$P(\lambda x) = \lambda P(x) \quad \forall x \in E, \lambda > 0$$

$$P(x+y) \leq P(x) + P(y) \quad \forall x, y \in E$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et

Soit : $g = G \rightarrow \mathbb{R}$ est application linéaire tq :

$$g(x) \leq P(x) \quad \forall x \in G. \text{ Alors :}$$

Il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g .

C'est-à-dire : $g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$ et tq :

$$f(x) \leq P(x) \quad \forall x \in E$$

Corollaire 01 :

Soit G un sous-espace de E et soit $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ une

application linéaire et continue de norme: $\|g\|_G = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)|$

Alors: il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tq:

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_G$$

preuve: appliquons le théorème précédent, avec:

$$p(x) = \|g\|_G \|x\|$$

$$P: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G' = \text{dual } G = \mathcal{L}(G, \mathbb{R})$$

$$x \longmapsto \|g\|_G \|x\|$$

$$|g(x)| \leq \|g\|_G \|x\| \quad \forall x \in E$$

par le théorème de Hahn Banach $\Rightarrow \exists f: E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\text{prolongement de } g) \quad |f(x)| \leq p(x) = \|g\|_G \|x\|$$

$$\text{donc: } \|f\|_{E'} \leq \|g\|_G$$

$$\text{d'autre part: } f|_G = g$$

$$\|f\|_{E'} \geq \|g\|_G$$

$$\text{d'où: } \|f\|_{E'} = \|g\|_G$$

Corollaire 02: pour $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tq:
 $\|f_0\| = \|x_0\|$ et $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$

Démonstration: Appliquons le ~~lemme~~ lemme précédent.

avec: $G = \mathbb{R}x_0$ de sorte que $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$.

$G = \mathbb{R}x_0 = \{tx_0, t \in \mathbb{R}\}$ est engendré par x_0 .

on définit: $g: G = \mathbb{R}x_0 \rightarrow \mathbb{R}$
 $tx_0 \rightarrow g(tx_0) = |t| \|x_0\|^2$.

g est linéaire continue.

$$\|g\|_{G'} = \sup_{t \neq 0} \frac{|g(tx_0)|}{\|tx_0\|} = \frac{|t| \|x_0\|^2}{|t| \|x_0\|} = \|x_0\|.$$

d'après le lemme précédent: $\exists f_0: E \rightarrow \mathbb{R}$.

avec: $\|f_0\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x_0\|$.

$$\langle f_0, x_0 \rangle = f_0(x_0) = \|x_0\|^2.$$

Lemme 03: pour tout $x \in E$, on a:

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

Démonstration: supposons que $x \neq 0$.

$$\text{on a: } |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|.$$

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|.$$

d'autre part: (le lemme précédent), on sait qu'il $\exists f_0 \in E'$ tq: $\|f_0\| = \|x\|$.

$$\langle f_0, x \rangle = \|x\|^2. \quad \text{posons: } f_1 = \|x\|^{-1} f_0.$$

Espace de Holder

Définition: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v. $\mathbb{C}$ une fonction et $\lambda \in [0, 1]$.

on dit que f est holdérienne (de Holder) d'ordre λ si:

$$\forall x, y \in \Omega: |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\lambda \text{ ou } A \text{ est constante.}$$

Notation: on note l'espace la classe des fonctions de Holder par: $H^\lambda(\Omega)$. $H^2 = W_2^2 \dots L_2(\Omega)$.

$$H^\lambda(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\lambda \}.$$

Remarque:

- 1) si $\lambda = 1$, on obtient la classe de Lipschitz.
- 2) toute fonction $f \in H^\lambda(\Omega)$ est uniformément continue.