

Les équations

Intégrales

Introduction aux équations intégrales linéaires Volterra et Fredholm

1) Prélinéaire " Pare linéaire "

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue (la fct cherchée) $u(x)$ apparaît (apparaît) sous les signes intégrales une équation intégrale standard en $u(x)$ est de la forme

$$u(x) = f(x) + h \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t) u(t) dt \dots (1)$$

où $g(x), h(x)$ sont les bornes d'intégration
 h : paramètre (est C.)

$K(x, t)$: fct à 2 variables (x et t)
appelé le noyau (kernel).

$u(x)$ = fct inconnue.

$f(x)$ = fct donnée.

2) Une équation intégro-différentielle ^{différentielle}

C'est une équation dans laquelle la fct inconnue $u(x)$ apparaît sous signe intégrale et contient une certaine de ses dérivées ordinaires $u^{(n)}(x)$.

$$u^{(n)}(x) = f(x) + h \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t) u(t) dt \dots (2)$$

02) Série de Taylor

Soit $f(x)$ une fct ayant des dérivées de t ont ordre de l'intervalle $I = [x_0, x_1]$ et a un point a la série de Taylor de $f(x)$ est :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \dots (1-3).$$

Exemples

(1) $f(x) = e^x$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

(2) $f(x) = \cos x$, $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

(3) $f(x) = \sin x$, $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

03) Equations diff ordinaires

1.2.1) Eq diff du 1^{er} ordre

La forme standard d'une equation du 1^{er} ordre est

$$u'(x) + p(x)u(x) = q(x) \dots (1-4)$$

$p(x), q(x)$ sont des fonctions continues sur $[x_0, x_1]$
la fct $u(x)$ à déterminer s'appelle le facteur intégrant

$$\Gamma(x) = e^{\dots} \dots (1-5).$$

la solution de l'équation (1.5) est donnée par

$$u(x) = \frac{1}{r(x)} \left[\int_1^x f(t) q(t) dt + C \right] \dots (1.5)$$

où C est une constante qui peut être déterminée par conditions initiales.

Exemple Résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} x u' + 3u = \frac{\cos x}{x} \dots (1) \\ u(\pi) = 0 \end{cases} \quad x > 0.$$

Solution:

$$\begin{cases} x u' + 3u = \frac{\cos x}{x} \dots (1) \\ u(\pi) = 0 \end{cases} \dots (2)$$

$$x u' + 3u = \frac{\cos x}{x} \Leftrightarrow u'(x) + \frac{3}{x} u(x) = \frac{\cos x}{x^2}$$

Avec $p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = \frac{\cos x}{x^2}$.

a/ déterminons le problème facteur intégrant.

$$u(x) = e^{\int_0^x p(t) dt}$$

$$= e^{\int_0^x \frac{3}{t} dt}$$

$$= e^{3[\ln t]^x}$$

$$u(x) = e^{3 \ln x}$$

$$= e^{3 \ln x}$$

$$= e^{3 \ln x}$$

$$x > 0.$$

done $u(x) = \frac{1}{x^3} \left[\int_0^x t^3 \cdot \frac{\cos t}{t^2} dt + C \right]$

$$= \frac{1}{x^3} \left[\int_0^x t \cos t dt + C \right]$$

$$\int_0^x t \cos t dt = t \sin t \Big|_0^x - \int_0^x \sin t dt$$

$$= x \sin x - \left[-\cos t \right]_0^x = x \sin x + \cos x + C$$

$$u(x) = \frac{1}{x^3} \left[x \sin x + \cos x + C \right]$$

des terminons C ;

On a: $u(\pi) = 0 \Rightarrow u(\pi) = \frac{1}{\pi^3} \left[\pi \sin \pi + \cos \pi + C \right] = 0$

par conséquent: $-1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$

$$u(x) = \frac{1}{x^3} \left[x \sin x + \cos x + 1 \right]$$

1,2,2) Equation différentielle ordinaire d'ordre deux
(Second order linear diff. equation.)

1) Eq homogène (homogeneous) à coefficients constants.
la forme standard d'une telle équation est.

$$a u''(x) + b u'(x) + c u(x) = 0. \quad (1-8)$$

La solution de cette équation est supposée de la forme
 $u(x) = e^{rx}$ $(1-9)$ $r = \text{cste.}$

Après substitution de $u(x)$ dans l'équation (1-8)
on obtient $ar^2 + br + c = 0. \quad (1-10)$

qu'on appelle équation caractéristique (1-8)
La résolution de (1-10) conduit aux cas suivants.

1) Si r_1 et r_2 sont des solutions réelles $r_1 \neq r_2$ ($\Delta > 0$)
Alors la solution de l'éq (1-8) est donnée par:

$$u(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} \quad (1-11)$$

2) Si r_1 et r_2 sont réelles et $r_1 = r_2 = r$ ($\Delta = 0$)
Alors la solution est

$$u(x) = A e^{rx} + x B e^{rx} \quad (1-12)$$
$$= e^{rx} (A + Bx).$$

3) Si r_1 et r_2 sont complexes: $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$
Alors la solution est.

$$u(x) = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (1-13).$$

N.B: A, B sont la constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

Exercices

Vérifier que $C(x)$ est solution de l'équation d'intégrale.

$$1) C(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad C(x) = \frac{3x + 2x^3}{3(1+x^2)^2} - \int_0^x \frac{3x + 2x^3}{(1+x^2)^2} dx$$

$$2) C(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad C(x) = x - \int_0^x \sinh(x-t) C(t) dt$$

$$3) C(x) = \frac{1}{2}, \quad \int_0^x \frac{C(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \sqrt{x}$$

2) Equation diff du 2^{ème} ordre non homogène à coefficients constants:

Une equ diff du 2^{ème} ordre non homogène à coefficients constants est de la forme ($a \neq 0$)

$$a u'' + b u' + c u = g(x) \quad (1, 9)$$

Comme le sait la solution de (1, 9) est donnée par:

(1, 10) $u(x) = u_c(x) + u_p(x)$

on $u_c(x)$ est dite solution complémentaire $u_p(x)$ est dite la solution particulière

On rappelle que:

1) Si $g(x)$ est un polynôme donné par:

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Alors la solution particulière est:

$$u_p(x) = x^r (b_0 x^n + \dots + b_n) \quad r=0, 1, 2, \dots$$

2) Si $g(x) = a_0 e^{\alpha x}$ Alors $u_p(x) = b_0 x^r e^{\alpha x}$, $r=0, 1, 2, \dots$

3) Si $g(x) = a_0 \cos(\alpha x) + b_0 \sin(\beta x)$, Alors:

$$u_p(x) = x^r (A_0 \cos \alpha x + B_0 \sin \beta x) \quad r=0, 1, 2, \dots$$

A_0, B_0 sont des csts.

Exercice 5

$$2 \begin{cases} y'' - y = -2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} y'' - 2y' + 3y = 6x + 9 \end{cases}$$

$$y'' - 2y' + 3y = 6x + 9 \quad \dots (1)$$

- L'équation homogène associée à (1) est :

$$y'' - 2y' + 3y = 0 \quad \dots (1)'$$

L'équation caractéristique de (1)'

$$r^2 - 2r + 3 = 0.$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 = 8i^2$$

Les solutions sont : $r_1 = 1 + i\sqrt{2}$,

$$r_2 = 1 - i\sqrt{2}.$$

donc la solution de (1)' est $u_c(x) = e^x (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x)$

Cherchons la solution particulière $u_p(x)$,

Comme $g(x) = 6x + 9$.

On a $u_p = ax + b$.

Alors
$$\begin{cases} u_p'(x) = a \\ u_p''(x) = 0 \end{cases}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$-2a + 3(ax + b) = 6x + 9.$$

$$-2a + 3ax + 3b = 6x + 9.$$

donc
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{13}{3} \end{cases}$$

Alors
$$u_p(x) = 2x + \frac{13}{3},$$

par suite

$$u(x) = u_p(x) + u_c(x).$$

$$u(x) = e^x (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x) + 2x + \frac{13}{3}$$

3) Règle de différentiation de Leibniz:

Cette règle est l'une des méthodes pour la résolution d'une équation intégrale en la réduisant à une équation différentielle.

Théorème:

Soit $f(t, x)$ une fonction continue dans le domaine

$$D = \left\{ (t, x) \mid a \leq t \leq b, a \leq x \leq b \right\} \text{ du plan et on suppose que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \text{ continue}$$

$$S_1 \quad F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t, x) dt \quad \dots (1)$$

$h(x), g(x)$ sont des fcts dérivables

Alors: 1) $F(x)$ est différentiable en x et de plus la fct dérivée est donnée par

$$F'(x) = h'(x) f(t, h(x)) - g'(x) f(t, g(x))$$

$$+ \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt \quad \dots (2)$$

Exemple: Calculer $F(x)$.

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{t+t^2} dt$$

Exercice Calculer F' , F'' , F''' si

$$F(x) = \int_0^x (x-t) u(t) dt.$$

Cas particuliers:

Si $g(x) = a$ et

$h(x) = b$.

donc $F'(x) = \int_0^x \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) dt.$

$\frac{dF(x)}{dx}$

1.4) Réduction d'une intégrale multiple à une intégrale simple.

On va réduire une intégrale simple en utilisant la formule

$$\int_0^x \int_0^{x_1} F(t) dt_1 dx_1 = \int_0^x (x-t) F(t) dt.$$

Posons $G(x) = \int_0^x (x-t) F(t) dt.$

observons que $G(0) = 0$.

D'après la règle de Leibnitz, on obtient.

$$G'(x) = \int_0^x F(t) dt.$$

Intégr. on Intègre de 0 à x, on obtient.

$$G(x) = \int_0^x G'(x_1) dx_1 = \int_0^x \int_0^{x_1} F(t) dt dx_1.$$

pour chaque terme à terme $\rightarrow$ la CV simple

lemme

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} u(x_n) dx_{n-1} \dots dx_1}_{n \text{ Intégrale}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt \dots$$

est très utilisé pour résoudre un problème à valeurs initiales d'une équation intégrale

Corollaire

$$\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x (x-t) u(t) dt \dots dt = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n u(t) dt$$

Méthode (Solution dans forme de séries):

Pour les équations diff ordinaires à coefficients constants on variables, on peut utiliser la méthode dite (Solution sous forme de séries).

Cette méthode suppose que la solution est donnée sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1.)$$

Exemples Soit l'équation diff $u'' + u = 0$ (2.)
 cherchons la solution sous la forme (1.)

$$u(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$u'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$u''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1)x^{n-2}$$

$$u''(x) + u(x) = (a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + \dots + (a_{n-2} + n(n-1)a_n)x^{n-2} = 0.$$

Par identification on obtient

$$\begin{cases} a_0 + 2a_2 = 0 & (1) \\ a_1 + 6a_3 = 0 & (2) \\ a_2 + 12a_4 = 0 \\ \vdots \\ a_{n-2} + n(n-1)a_n = 0. \end{cases} \quad n \geq 2$$

En résolvant ces équations.

$$a_2 = -\frac{1}{2!} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} a_1 = -\frac{1}{3!} a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{12} a_2 =$$

$$\frac{1}{4!} a_0$$

$$a_5 = -\frac{1}{20} a_3 = \frac{1}{5!} a_1$$

$$\int dx = \int f(x) dx$$

Finalement la solution est:

$$u(x) = a_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots \right)$$

ou bien

$$u(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x.$$

Exercice 1: Soit l'équation diff.

$$u'' - x u' + u = -x \cos x.$$

Indications: utiliser le développement de Taylor de

la fct $x \mapsto \cos x$.

5) Transformation (Transformé) de LAPLACE

(La Place Transformé)

le transformé de LAPLACE

est un outil très puissant utilisé dans résolution des eq. diff. et des eq. Intégrales ed.p

Définition 0.1: le transformé de LAPLACE d'une fonction f définie pour $x \geq 0$ et défini par (noté L)

$$F(s) = L(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (1.5)$$

Intégrale Impropre

$$f \xrightarrow{L} F = L(f).$$

Proposition:

1) La linéarité:

$$\mathcal{L}(af + bg)(x) = a\mathcal{L}(f)(x) + b\mathcal{L}(g)(x),$$

a, b des constantes, f, g des fcts.

2) $\mathcal{L}(x f(x)) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(f(x)).$

2.5) transformé de LAPLACE de certaines fonctions élémentaires:

$f(x)$	$F(s)$
1) c	$\frac{c}{s}, s > 0$
2) x	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
3) x^n	$\frac{n!}{s^{n+2}}, s > 0$
4) e^{ax}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
5) $\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
6) $\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
7) $x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$

3.5/ Transformé de LAPLACE et dérivées :

$$F(s) = \mathcal{L}(f'(x)) = S(\mathcal{L}f)(x) - f(0).$$

$$(\mathcal{L}f''(x)) = S^2 \mathcal{L}(f)(x) - S f(0) - f'(0).$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x)) = S^n (\mathcal{L}f)(x) - S^{n-1} f(0) - \dots - S f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

4.5/ le transformé inverse :

Si $F(s) = \mathcal{L}(f(x))$, on dit que $f(x)$ est l'inverse de $F(s)$ et nous écrivons

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

Exemple : utiliser le transformé de LAPLACE pour résoudre l'éq déff.

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(0) = 1 & (3) \end{cases}$$

Soit $y(s) = \mathcal{L}(y(x)).$

$$y(s) = \int_0^{+\infty} y(x) e^{-sx} dx.$$

$\mathcal{L}$: l'opérateur de Laplace.

Alors

on a :

$$\mathcal{L} y''(x) + \mathcal{L} y(x) = 0. \dots (2)$$

on fait le chngm de vrbt $\int f(x+t) g(t) dt = \int f(t) g(y-t) dt.$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} y''(x) &= s^2 \mathcal{L} y(0) - s y'(0) - y'(0) \\ &= s^2 y(s) - s - 1. \end{aligned}$$

$$(2) \Leftrightarrow s^2 y(s) - s - 1 + y(s) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 1) y(s) = s + 1.$$

$$\Leftrightarrow y(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$$

donc
$$y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$y(s) = \cos(x) + \sin(x).$$

1.6 - La convolution de deux fcts.

Le théorème de convolution qui suit

Le théorème qui suit est très importante, il permet de résoudre des équations intégrales dont le noyau $K(x,t)$ est une fonction de $(x-t)$.

Exemples $K(x,t) = e^{x-t}$.

Considérons deux fcts : $f_1(x)$ et $f_2(x)$ satisfaisant les conditions d'existence du transformé de Laplace pour chacune des fonctions i.e.

$$F_1(s) = (\mathcal{L} f_1)(x), \quad F_2(s) = (\mathcal{L} f_2)(x)$$

le produit de convolution de f_1 et f_2 noté $f_1 * f_2$ est défini par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int f_1(x-t) f_2(t) dt.$$

- On démontre que l'opération de convolution est commutative et associative.

Théorème :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_1 * f_2)(x) &= F_1(s) \times F_2(s) \\ &= (\mathcal{L}f_1)(x) \times (\mathcal{L}f_2)(x) \end{aligned}$$

Chapitre II : Equ - Integ de Volterra.

1) Classification :

une equ - integ de Volterra est caractérisée par le fait qu'une borne d'intégration est variable.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t) u(t) dt.$$

$$(g(x) = a, \quad h(x) = x) \quad (1.1)$$

On a deux types :

1) Equation intégrale de 1^{ère} espèce et de la forme.

$$f(x) = \int_a^x K(x,t) u(t) dt. \quad (2.1)$$

2) Eq -int de 2^{ème} espce est de la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt \quad (3-1)$$

2/ Conversion d'un Probleme à valeur initial à une équation intégrale de Volterra.

On va illustrer cette technique sur un exemple.
Soit le Pb à valeurs initiales (PVI).

$$\text{Pb(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + P(x)y' + q(x)y = g(x) \dots (4-1) \\ y(0) = \alpha \quad (5-1), \\ y'(0) = \beta \quad (5-2). \end{array} \right.$$

$P(x), q(x), g(x)$ suffisamment régulières.