

Les cours : Distributions :

Chapitre I : Introduction

I/- Ensemble ponctuels dans $\mathbb{R}^n$:

$$x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$\mathbb{R}^n$ est un espace Euclidien

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ (distance entre les points } x \text{ et } y)$$

Déf 01 : L'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant l'inégalité

$$\|x - x_0\| < R \text{ est appelé boule ouverte de rayon } R$$

et centre x_0

Déf 02 : La suite des points $x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)})$ est dite convergente au point $x \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\|x_i^{(i)} - x\| \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty$$

Déf 03 : un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dite bornée dans $\mathbb{R}^n$ si il existe une boule contenant Ω .

Déf 04 : on appelle fct indicatrice (caractéristique) de l'ensemble A :

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Notation : $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Déf 05 : un multi-indice $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ est une vecteur.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N}$$

2 La longueur d'un multi-indice α est

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$$

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

II/- support d'une fonction:

$$\text{Supp } f = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$$

Déf 01: Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ continue on (dite) définir le support de f par la fonction dans Ω de l'ensemble $\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}$

$$\text{Notation: } \text{supp } f = \{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}$$

Remarque: cette définition peut être généralisée aux fcts mesurables.

Déf 02: Soit f une fct mesurable telle que:

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ soit } \theta_i, i \in \mathbb{I} \text{ la famille des ouverts}$$

dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \mathbb{I}$ on a $f = 0$ p.p.

on pose $\Theta = \bigcup \theta_i$ et on appelle support de f $\text{supp } f$

$$\text{Définie par } \text{supp } f = \mathbb{R} \setminus \Theta$$

Le 31/10/2016

Complément sur l'intégration.

Th de convergence dominée: Soient $(X, \mathcal{F}, m)$ une espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fct mesurable sur X , $f_i: X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

$$f_n \rightarrow f \text{ (p.p.) et } \exists g \in L_1(X) \text{ telle que:}$$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ (p.p.)}$$

Alors: 1/- $f_n \in L_1(X)$ intégrable, $f \in L_1(X)$

$$2/- f_n \rightarrow f \text{ (} L_1 \text{)}$$

Remq: $(\|\cdot\|_1)$ est une norme. $f_n \rightarrow f \text{ (} L_1 \text{)}$

$$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

$$3/- \int f_n \rightarrow \int f$$

$$1/, 2/, 3/ \text{ donne } \lim \int_X f_n(x) dx = \int_X \lim f_n(x) dx$$

Complémentaire sur l'intégration ;
L'intégrale dépendant d'un paramètre ;

Soient $(X, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré (E, d) un espace métrique et $\begin{cases} f: E \times X \rightarrow K \ (K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \\ (t, x) \mapsto f(t, x) \end{cases}$

On s'intéresse à la fonction :

$$F: E \rightarrow K$$

$$t \mapsto F(t) = \int f(t, x) \, d m(x)$$

Lors qu'elle est définie il s'agit de la continuité et
définie il s'agit de la continuité et la dérivabilité
de la fonction F

Théorème : (Continuité sous le signe intégrale).

Soient $(X, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré (E, d) un
espace métrique et $t_0 \in E$ Si :

1/- Pour tout $t \in E$ l'application $x \mapsto (f(t, \cdot))(x) = f(t, x)$
est mesurable.

2/- L'application $t \mapsto f(\cdot, x)$ est continue en t_0 pour presque
tout $x \in X$

3/- $\exists g$ intégrable telle que $|f(t, x)| \leq g(x)$
pour presque tout $x \in X$ alors F est continue en t_0
 $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\int_X f(t, x) \, dx \right) = \int_X f(t_0, x) \, dx = \int_X \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) \, dx$$

Idée de preuve :

1/- L'assertion que F est bien définie

2/- Soit $(t_n)_{n \geq 1} \in E$ $t_n \rightarrow t_0$ et posons
 $f_n = f(t_n, \cdot)$ et $f_0 = f(t_0, \cdot)$

3/- On applique le Th de convergence dominée

Preuve : Exercice

Remarque: 1/- L'item 2) du Th a un caractère local
Le Th exprime le résultat suivant.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(t, x) dm(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(t, x) dm(x)$$

Th: (Derivabilité sous le signe intégrable)

Soient $(X, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{C}$).

1/- Pour tout $t \in I$ l'application:

$$x \mapsto (f(t, \cdot))(x) = f(t, x) \text{ est intégrable.}$$

2/- Pour presque tout $x \in X$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot)$ existe sur I

3/- $\exists g$ intégrable telle que:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \leq g(x).$$

Pour presque tout $x \in X$ Alors la fct $F(x) = \int_X f(t, x) dm(x)$ est dérivable sur I et de plus:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} F(x) = \frac{d}{dt} \int_X f(t, x) dm(x) \\ &= \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dm(x). \end{aligned}$$

Idee de preuve:

2/- Soit $(t_n)_{n \geq 1} \in I$ telle que $t_n \rightarrow t_0$ et posons

$$\frac{P_n}{t_n - t} = \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t}$$

3/- on applique le Th de conv-dominée

Le 07/11/2016

Chapitre II : Les Distributions Définition et quelques propriétés

I/ - Fonctions de base :

Définition : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et une fct $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. La fct φ est dite fct de base

si : 1/ - $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

2/ - Le support de φ est un compact

$$\text{Supp } \varphi = \{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}$$

Notation : $\mathcal{D}, C^\infty_c(\Omega)$: les espaces de base

Définition 02 : (convergence dans $\mathcal{D}$)

Soit la suite $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$

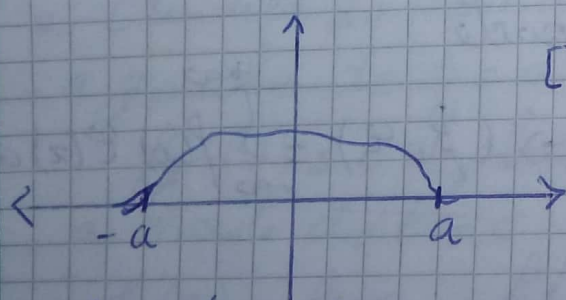
on dit que la suite (φ_n) converge vers $\varphi \in \mathcal{D}$ si :

1/ - $\exists$ une boule B_2 de rayon finie tel que tous les supports de φ_n ($n=1, 2, \dots$) soient contenus de cette boule : $\exists B(x, r) / \text{supp}(\varphi_n) \subset B(x, r)$

2/ - $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$\partial^\alpha \varphi_n(x) \Rightarrow \partial^\alpha \varphi \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \varphi_n &\rightarrow \varphi \\ \varphi'_n &\rightarrow \varphi' \end{aligned}$$



$[-a, a] = \text{support}$

1/ - $C^\infty([-a, a])$

2/ - $[-a, a]$ compact (borne + borné)

$$\text{La fct de base } \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - |x|}} & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\begin{aligned} |x| < a & \\ |x| > a & \\ |x| < a & \end{aligned} \quad \begin{cases} f \in L^1_+(\mathbb{R}) \\ \begin{aligned} 1/ - f \text{ mble} \\ 2/ - \int |f| dx < \infty \end{aligned} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \Omega_n, \lim \Omega_n = x, \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

Proposition : $D(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \exists \varphi_k \in D(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f - \varphi_k\| = 0 \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty$$

II) - Définitions des distributions :

Déf: $f: \varphi \rightarrow (f, \varphi)$

1/- $(f, \varphi): D \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$

2/- (f, φ) est linéaire : $\forall \varphi(x), \forall \psi(x) \in D, \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
On a :

$$(f, \lambda \varphi(x) + \mu \psi(x)) = \lambda (f, \varphi(x)) + \mu (f, \psi(x))$$

3/- (f, φ) est continue sur D si la suite des fonctions de base $\varphi_1, \varphi_2, \dots \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ (*)

Alors la suite $(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \dots, (f, \varphi_n) \rightarrow 0$
quand $n \rightarrow +\infty$ (**)

$$(\varphi_n) \rightarrow 0 \Rightarrow (f, \varphi_n) \rightarrow 0 \text{ q.b. } n \rightarrow +\infty$$

Notation : L'espace des distributions est désigné par D'

$f \in L(\mathbb{R}), \forall K \subset \mathbb{R} \int_K |f| dx < \infty$
Localement intégrable
intégrable sur un compact

Distribution régulière $\Leftrightarrow (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$

Le 21/11/2016

Exercice : (Lemme) :

Pour cela on va aborder les questions suivantes :

$$\text{Soit } \begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

1/- Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

2) - Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2) - Soit la fonction $\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \varphi(x) = f(1 - |x|^2)$$

- Montrer que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$.

- Trouver $\text{supp}(\varphi)$

3) - Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$
 tel que $0 < \varepsilon_0 < \text{dist}(\Omega, x)$ et soit la
 fonction $\varphi_{x_0, \varepsilon_0}$ la fonction définie sur Ω
 a valeurs dans $\mathbb{R}$ par:

$$\varphi_{x_0, \varepsilon_0}(x) = \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon_0}\right)$$

- Montrer que $\varphi_{x_0, \varepsilon_0} \in C^\infty(\Omega)$.

Solution:

Pour $t \neq 0$. La fonction que $f(t)$ est de class C^∞
 car:

- pour $t < 0$ $f(t) = 0$ (f est) (constant)
 de $f(t) \in C^\infty$

- Pour $t > 0$, $f(t) = e^{-1/t}$ ($f(t) \in C^\infty$) composée de

* Etudier la dérivabilité de f en $t = 0$.

- a gauche de $t = 0$ on a:

$$f'_g(0) = 0 \text{ et plus } f^{(k)}_g(0) = 0 \forall k.$$

- a droite de $t = 0$

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

on deduit que,

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{t^2} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et

$$f''(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \left(\frac{-2t + 1}{t^4}\right) e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

de la même façon on montre que f est de classe C^2 .

on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ P_k(1/t) e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et par suite $f \in C^k$, $\forall k$

par conséquent $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2) - La fct ℓ est composée de deux fonctions de classe C^∞ .

$$\text{supp}(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^n, \ell(x) \neq 0\}$$

$$\ell(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

donc, $\text{supp}(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\} = \overline{B}(0, 1)$

Exercice 2: Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Établir à la suite de fonction:

$$\begin{aligned} * \varphi_k(x) &= k \cdot \varphi(x), & * \varphi_k(x) &= \frac{1}{k} \varphi(x/k) \\ * \varphi_k(x) &= \frac{1}{k} \varphi(x/k). \end{aligned}$$

sont convergents dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Le 23/11/2016

Rappels:

$$(f, \varphi) \in \mathcal{D}'$$

$$1) - \varphi \in \mathcal{D}(f, \varphi) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

$$2) - \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D} : \text{ona:}$$

$$(f, \lambda \varphi(x) + \mu \psi(x)) = \lambda (f, \varphi(x)) + \mu (f, \psi(x))$$

$$3) - \begin{aligned} &(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, & (f, \varphi_n) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Exemple de distributions régulières

1) - $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\forall B \in \mathbb{R}^n$

$$\int_B |f| dx < \infty, \forall B \in \mathcal{D}.$$

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

1) (f, φ) est fonctionnelle.

2) - La linéarité:

$$\begin{aligned} (f, \lambda \varphi + \mu \psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\lambda \varphi + \mu \psi] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(x) \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu f(x) \psi(x) dx \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi(x) dx \\ &= \lambda (f, \varphi) + \mu (f, \psi). \end{aligned}$$

3) - La continuité:

$\varphi_i \in \mathcal{D}$, $\{f \text{ est a supp compact, indifféremment } \}$
 $x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \neq 0 \}$

Soit $(\varphi_i) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$ $\{x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \neq 0\} \cdot \varphi_i \in \mathcal{D}$

$$0 \leq |(f, \varphi_i)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_i(x) dx \right|, [a, b].$$

$$= \left| \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| |\varphi_i(x)| dx$$

$$\leq \sup |\varphi_i(x)| \int_a^b |f(x)| dx, \text{ donc on obtient}$$

$$0 \leq |(f, \varphi_i)| \leq \sup |\varphi_i(x)| \int_a^b |f(x)| dx \quad (1)$$

Donc (1) on fait tendre $i \rightarrow +\infty$.

d'où $0 \leq |(f, \varphi_i)| \leq 0$ alors on déduit que
 que $(f, \varphi_i) \rightarrow 0$ qd: $i \rightarrow +\infty$.

X Exemple de fct non régulière (ENTD)

II) - Propriétés des distributions :

1) - L'espace $\mathcal{D}'$ est un espace vectoriel
déf :

$$2) - (\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)$$

où $f, g \in \mathcal{D}'$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

Il faut prouver que : $(\lambda f + \mu g) \in \mathcal{D}'$

2) - Complétude :

- Lemme : Soit la suite $(f_k) \in \mathcal{D}'$ telle que pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$ la suite numérique (f_k, φ) converge quand $k \rightarrow +\infty$ alors la fonctionnelle (f, φ) sur $\mathcal{D}$ est définie par l'égalité :
$$(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Définition de la convergence dans $\mathcal{D}'$:

La suite $(f_k) \in \mathcal{D}'$ de distribution est dite cvg te vers $f \in \mathcal{D}'$ si :

$$\text{Si : } \forall \varphi \in \mathcal{D}, (f_k, \varphi) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} (f, \varphi).$$

- Théorème : Soient la suite $(f_k) \in \mathcal{D}'$ tq, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$, la suite (f_k, φ) cvgt quand $k \rightarrow +\infty$ alors fonctionnelle (f, φ) sur $\mathcal{D}$ définie par l'égalité :

$$(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

est linéaire et continue sur $\mathcal{D}$,

$$(f, \varphi) \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

Le 05/12/2016.

$$\varphi \in C_0^\infty \mathbb{R} \quad [-1B, 1B]$$

$$(f', \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f' \varphi dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \left[f \varphi \Big|_{-1B}^{1B} - \int_{-1B}^{1B} f \varphi' dx \right] \\ = \lim_{B \rightarrow \infty} \left[f \varphi \Big|_{-1B}^{1B} \right] - \int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx < \infty.$$

$$(f_k) \in \mathcal{D}' \quad (f_k, \varphi) \in \mathbb{R} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Preuve: Soient 1) linéarité:

$$\text{Soient } \varphi, \psi \in \mathcal{D},$$

$$(f, \alpha \varphi + \beta \psi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, \alpha \varphi + \beta \psi)$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} [\alpha (f_k, \varphi) + \beta (f_k, \psi)].$$

$$= \alpha \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, \varphi) + \beta \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, \psi)$$

2) La continuité: Il faut montrer que $(f, \varphi_j) \rightarrow 0$.

Pd $j \rightarrow +\infty$ on suppose que $(f, \varphi_j) \rightarrow 0$ qd $j \rightarrow +\infty$

C.à-d: $|f, \varphi_j| \geq a, \quad a > 0$

comme $(f, \varphi_j) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, \varphi_j)$ donc on a fait trouver
trouver un numéros k_j pour chaque $j = 1, 2, \dots$

telque $|(f_{k_j}, \varphi_j)| \geq a$ ce que contredit lemme

Alors $(f, \varphi_j) \rightarrow 0$ qd $j \rightarrow +\infty$.

La distribution est définie sur un voisinage
ou intervalle (n'est pas un point).

III) Support d'une distribution

des distributions engendrées n'ont pas de valeur en un pt Par exemple On ne peut dire que $\langle f, \phi \rangle$

Con Le 02/01/2017

Conclusion :

Afin d'obtenir une tout $\mathbb{R}$ à partir de $\frac{1}{x}$,

on a considéré la v.p. $\frac{1}{x}$

$$\left(v.p. \frac{1}{x} \right) = \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{dx}{x}$$

5/- Multiplication :

a/- " " par

$$a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$$

$$(a f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (a f) \varphi dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f (a \varphi) dx = (f, a \varphi)$$

Définition :

$$(a(x) f(x), \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (f(x), a(x) \varphi(x)) \quad (\varphi(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$$

où : $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

f est distribution

Théorème :

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ Alors :

$$a(x) \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

b/- Montrer que :

$$\textcircled{1} a(x) \delta(x) = a(0) \delta(x)$$

$$a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\textcircled{2} - x \delta(x) = 0$$

$$\textcircled{3} - x \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x} = 1$$

on
(TD)

Remarque :

Schwartz a montré qu'on peut définir un produit de distributions et être associatif et commutatif.

Voir contre-exemple en TD.

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$$

Chapitre IV : Dérivations et primitives des distributions

I/ Généralités :

La propriété essentielle des dist. est qu'elles sont indéfiniment dérivables et que toutes les dérivées successives sont encore des distributions.

soit f une fct. qui possède une dérivée f' continue (ou sens herbertie).

On définit la fonctionnelle suivante :

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx$$

En intégrant par parties on obtient :

$$= f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx$$

$$= - (f(x), \varphi'(x))$$

donc

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi')$$

$$(D^\alpha (f), \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Il faut montrer que $D^\alpha f \in \mathcal{D}'$

a/- linéarité :

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \lambda f + \mu \varphi) &= \\ &= \lambda (D^\alpha f, \varphi) + \mu (D^\alpha f, \varphi) \end{aligned}$$

où $\varphi, \varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \lambda f + \mu \varphi) &= \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha (\lambda f + \mu \varphi)) \\ &= \lambda (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) + \\ &\quad + \mu (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) \end{aligned}$$

$$= \lambda (D^\alpha f, \varphi) + \mu (D^\alpha f, \varphi)$$

b/- continuité : $(\varphi_k) \rightarrow 0$
 $(f, \varphi_k) \rightarrow 0 \quad \varphi_k \in \mathcal{D}$

$$\text{Soit } (D^\alpha f, \varphi_k) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi_k)$$

on sait que car $\varphi_k \rightarrow 0$

$$D^\alpha \varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

Alors si $\varphi_k \rightarrow 0$

$$\text{ona } (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi_k) \rightarrow 0$$

Exemple :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

fct de Heaviside

$\theta(x)$ est localement intégrable

$$\begin{aligned}
 (\theta(x), \varphi(x)) &= \\
 &= -(\theta(x), \varphi'(x)) \\
 &= -\int_0^{+\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx \\
 &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx \quad (\theta(x)=1) \\
 &= -\varphi(x) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0) \\
 &= (\delta(x), \varphi(0))
 \end{aligned}$$

$$e(x) = L_0(x)$$

Donc on a l'équation

$$\begin{aligned}
 (D^\alpha(\lambda f + \mu g), \varphi) &= \\
 &= \lambda (D^\alpha f, \varphi) + \mu (D^\alpha g, \varphi)
 \end{aligned}$$

$$D^\alpha f \in D'$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \varphi\right) \in D'$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) \in D'$$

$$D^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

II/- Propriétés :

1/- Linéarité (de D en D')

Soient f et $g \in D$
et $\varphi \in D$

$$\begin{aligned}
 [D^\alpha(\lambda f + \mu g), \varphi] &= \\
 &= (-1)^{|\alpha|} (\lambda f + \mu g, D^\alpha \varphi)
 \end{aligned}$$

Comme D est un espace vectoriel on a :

$$\begin{aligned}
 &= \lambda (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) + \\
 &\quad + \mu (-1)^{|\alpha|} (g, D^\alpha \varphi) \\
 (D^\alpha f, \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda f_1 + \mu f_2)' &= \lambda f_1' + \mu f_2' \\
 &= \lambda (D^\alpha f_1, \varphi) + \mu (D^\alpha f_2, \varphi)
 \end{aligned}$$

3/- Continuité :

$$\begin{aligned}
 f_k &\mapsto f \\
 f_k' &\mapsto f' \Rightarrow g \stackrel{?}{=} f'
 \end{aligned}$$

Propriété

$$(f_k, \varphi) \mapsto (f, \varphi) \text{ qd } k \mapsto +\infty$$

$$(D^\alpha f_k, \varphi) \xrightarrow{\text{def}} (D^\alpha f, \varphi)$$

qd $k \mapsto +\infty$

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = f(\lim_{x_n \rightarrow x} x_n)$$

$$(D^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f_k, D^\alpha \varphi)$$

$$(f_k, \varphi) \mapsto (f, D^\alpha \varphi) \text{ qd } k \mapsto +\infty$$

$$\frac{\partial^\alpha (\partial^\beta f)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^\beta (\partial^\alpha f)}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$$

4/- Propriété :

$$(\mathcal{D}^a(\mathcal{D}^b f), \varphi) = (\mathcal{D}^b(\mathcal{D}^a f), \varphi) \\ = (\mathcal{D}^{a+b} f, \varphi).$$

$$= (-1)^{|A|} (\mathcal{D}^b f, \mathcal{D}^a \varphi)$$

$$= (-1)^{|A|+|B|} (f, \mathcal{D}^b(\mathcal{D}^a \varphi))$$

$$|A| = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$|B| = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$|A+B| = (a_1+b_1) + \dots + (a_n+b_n)$$

$$= |A+B|$$

$$= (-1)^{|A+B|} (f, \mathcal{D}^{a+b} \varphi)$$

$$= (\mathcal{D}^{a+b} f, \varphi).$$

$$a=c$$

$$b=c \} \Rightarrow a=b.$$

D'une manière analogue on montre que :

$$(\mathcal{D}^b(\mathcal{D}^a f), \varphi) = (\mathcal{D}^{a+b} f, \varphi).$$

Conclusion :

Le résultat de la dérivation dépend pas de l'ordre de dérivation.

5/- Formule de Leibnitz

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{classique}$$

$$(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Si $f \in \mathcal{D}'$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors est valable la formule de Leibnitz

Exemple : (Exercice)

$$(\frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha f), \varphi) =$$

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha \varphi).$$

Remarque : (Exercice)

Preuve qu'une dérivée au sens distribution

coincide avec la dérivée classique il faut que cette dérivée existe et soit continue (Pourquoi?)

Claude Zilly Problèmes de distributions avec solutions détaillées.

Chapitre V:

Notions de primitive Pour les distributions

I/- Définition: $n=1$

$\forall f(x)$ continue elle admet une primitive

$$f^{-1}(x)$$

$$f^{n+1}(x) = \int_n^x f(\xi) d\xi + C$$

$$\text{or ec: } (f^{-1}(x))' = f(x)$$

$$\int_a^x f(\xi) d\xi + C = \left(\int_a^x f(\xi) d\xi \right)' = f(x)$$

- Définition:

La dist $f^{-1}(x) \in D'(\mathbb{R})$ est dite primitive de la distribution

$f \in D(\mathbb{R})$ si:

$$(f^{-1}(x), \varphi) = (f, \varphi), \forall \varphi \in D$$

Le 16/01/2016

Exercice:

Soient $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

$E \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in D(\mathbb{R})$

- Montrer que:

$a(x), \varphi(x) \in D(\mathbb{R})$

$h \in D(\mathbb{R})$ 1- $h \in C^\infty(\mathbb{R})$

2- h est à support compact

Solution Exo:

1/- $a(x), \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

car $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}), \varphi(x) \in D(\mathbb{R})$

2/- Il faut montrer que

Le support $(a(x) \varphi(x))$ est compact.

$$\text{Supp}(a(x) \varphi(x)) =$$

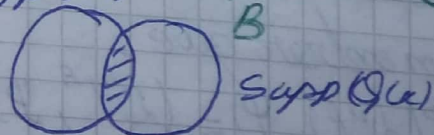
$$= \{x \in \mathbb{R}, a(x) \varphi(x) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}, a(x) \neq 0 \text{ et } \varphi(x) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}, a(x) \neq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \neq 0\}$$

$$= \text{Supp}(a(x)) \cap \text{Supp}(\varphi(x))$$

$$\Rightarrow \text{Supp}(a(x) \varphi(x)) \subset \text{Supp}(\varphi(x))$$



A compact

$B \subset A$

B fermé $\Rightarrow B$ est compact

D'après cette propriété

$\text{Supp}(a(x) \varphi(x))$ est compact

Exercice 02:

$$(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \mathcal{D}^\alpha \varphi)$$

Montrer que:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \varphi \right)$$

Solution:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi \right) &= - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \\ &= \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \end{aligned}$$

comme $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

donc:

$$\begin{aligned} &= \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \varphi \right) \end{aligned}$$

Exercice 03:

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Est-ce que l'un des énoncés suivants implique l'autre?

a/- $(T, \varphi) = 0$

b/- $\varphi T = 0$

ou $a \Rightarrow b$?
 $b \Rightarrow a$?

- Solution Ex03:

$$b \Rightarrow a$$

on a

$$\varphi T = 0 \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) :$$

$$: (\varphi T, \psi) = 0$$

$$(\varphi T, \psi) = (T, \varphi \psi) = 0$$

$\varphi(x) = 1$ sur le supporte

de φ donc:

$$(\varphi T, \psi) = (T, \psi) = 0$$

$$a(x) \in C^\infty$$

$$(a(x)T, \varphi) = (a(x), \varphi(x))$$

donc $b \Rightarrow a$

mais $a \not\Rightarrow b$

$$T = \delta'(x) ??$$

$$T = \delta$$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$$

$$0 = (T, \varphi) = (\delta', \varphi) = -\varphi'(0)$$

$$(\varphi T, \psi) = (T, (\varphi \psi)(x))$$

$$= - (T, (\varphi \psi)'(x)) =$$

$$= (\delta, -\varphi'(0) \varphi(0)) \leftarrow$$

il suffit de prendre

$$\varphi'(0) \neq 0$$

$$= [(\delta, \varphi' \varphi + \varphi' \varphi)]$$

$$= -(\delta, \varphi'(0) \varphi(0) + \varphi'(0) \varphi(0))$$

$$= (\delta, -[\varphi'(0) \varphi(0) + \varphi'(0) \varphi(0)])$$

Exercice:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

h est localement intégrable.

$$h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

donc $T_h := h$ (notation).

(T'_h) existe

et on a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \langle T'_h, \varphi \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} -\langle T_h, \varphi' \rangle \\ &= -\langle h, \varphi' \rangle \end{aligned}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi'(x) dx$$

$$= -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx$$

$$= -\{\varphi\}_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

donc :

$$\langle T'_h, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

d'où :

$$T'_h = \delta \quad (h' = \delta)$$

TD Distribution :

Les intégrales impropres :

supposons f continue par morceaux sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow b} \int_a^b f(t) dt$$

(Les autres cas sont similaires)

Critère de comparaison :

sur $[a, b]$

$$a \leq f \leq g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f dt \leq \int_a^b g dt$$

$$* \text{ Si } \int_a^b g(t) dt \text{ conv} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ conv}$$

$$* \text{ Si } \int_a^b f(t) dt \text{ div} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(t) dt \text{ div}$$

fts équivalentes :

$$1/ f \sim g(t) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

$$2/ f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$$

$$3/ f = O(g) \Leftrightarrow \sup \frac{|f(t)|}{g(t)} < \infty$$

Exercices :

Déterminer si les intégrales sont convergentes et le cas échéant calculer la valeur :

$$1/ - I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} dt \text{ conv}$$

$$2/ - I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \text{ conv}$$

$$3/ - I_3 = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \text{ conv}$$

$$4/ - I_4 = \int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt \text{ conv}$$

$$5/ - I_5 = \int_0^{\infty} dt \text{ div}$$

$$6/ - I_6 = \int_2^{\infty} \frac{1}{3t} dt \text{ conv}$$

$$7/ - I_7 = \int_0^{\infty} t e^{-t} dt \text{ conv}$$

$$8/ - I_8 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \text{ conv}$$

Solution :

La fct $t \rightarrow f(t) = e^{-t}$ est définie et continue sur $[0, \infty)$. La fct f est non bornée en $t = \infty$

Soit $b > 0$ alors

$$\int_0^b e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^b = -e^{-b} + 1$$

$$I_1 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} dt$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

I_1 est convergente

- Exercice 02:

$$I_9 = \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+1}} dt \quad \text{et} \quad \int_b^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$I_{10} = \int_0^{\infty} \frac{t-5}{t^2+4t+4} dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+t^2} \right]_1^b$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t^2+1)} dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$I_{12} = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \quad I_3 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{4}$$

2/- La fct $t \rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$

est définie et continue sur $[0, 1]$. La fct f est non bornée en $t=1$

Soit $b > 0$. alors:

$$\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -[2\sqrt{1-t}]_0^b$$

$$= -2\sqrt{1-b} + 2$$

$$I_2 = \lim_{b \rightarrow 1} (-2\sqrt{1-b} + 2) = 2 \text{ donc } I_4 = \int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt$$

I_2 est conv

$$I_3 = \int_1^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

La fct $t \rightarrow f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$

est définie et cont sur $[1, \infty)$

la fct f est non bornée en $t_0 = \infty$

alors soit $b > 0$

$$\int_b^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+t^2} \right]_1^b$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$I_3 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{4}$$

d'où I_3 est convergente

$$I_4 = \int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt$$

La fct $t \rightarrow f(t) = t e^{-t^2}$ sur $(-\infty, 0]$.

Soit $b < 0$ alors

$$\int_b^0 t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_b^0$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-b^2}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t^2} \right] = -\frac{1}{2}$$

d'où I_4 convergente.

d'où I_4 cv

$$I_5 = \int_0^{\infty} dt = \int_{\mathbb{R}} 1(0, \infty) dt$$

$$m(0, \infty) = \infty$$

$$t \xrightarrow{f} f(t) = 1$$

Le pb de conv se pose $t = \infty$

$$I_5 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 1 dt$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [t]_0^b = \infty - 0 = \infty$$

alors I_5 est div.

- Solution Exo 2:

$$I_9 = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt$$

La fct :

$$t \rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}}$$

est définie et continue sur $[0, \infty)$ Le problème de convergence se pose en $t = \infty$

$$\sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} \sim \sqrt{\frac{2t}{5t^3}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$I_9 \sim \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{t^2} dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}} \int \frac{dt}{t} \text{ est div}$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ si $\alpha > 1$ et converge et si $\alpha < 1$ div

Bertrond $\int \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$

$$I_5 = \int_0^{\infty} dt$$

Le pb de convergence se pose en $t = \infty$

$$I_5 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 1 dt$$

$$= [t]_0^b = b$$

$$I_6 = \int_0^{\infty} \frac{1}{3^t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{3^t} = 3^{-t} = e^{-t \ln 3}$$

$$= e^{-t \ln 3} \text{ est définie et}$$

continue sur $[0, +\infty[$

et non bornée en $t = +\infty$

Soit $b > 0$,

$$\int_0^b \frac{1}{3^t} dt = \int_0^b e^{-t \ln 3} dt$$

$$= -\frac{1}{\ln 3} \int_0^b \ln 3 e^{-t \ln 3} dt$$

$$= -\frac{1}{\ln 3} [e^{-t \ln 3}]_0^b$$

$$= -\frac{1}{\ln 3} e^{-b \ln 3} + \frac{1}{\ln 3}$$

$$I_6 = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln 3} e^{-b \ln 3} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln 3}$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

Soit la fonction :

$$t \rightarrow f(t) = \frac{\ln(t)}{1+t^2}$$

est définie et continue

sur $]0, 1]$.

on a un problème de intégrale

ent $= 0$.

Soit $g(t) = \ln(t)$ on a

$$f(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} g(t)$$

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \right)$$

$$\text{donc } \int_0^1 f(t) dt, \int_0^1 g(t) dt$$

sont de même nature

$$\int_0^1 \ln(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln(t) dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [t \ln(t) - t]_0^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon]$$

$$\int_0^1 \ln(t) dt = [-1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon]_{\varepsilon \rightarrow 0}^1$$

$$\text{pour suite } \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

est convergente

$$I_{12} = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\text{on a } f(t) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^{\infty} e^{-t^2} dt$$

est cont $(t \rightarrow e^{-t^2})$

est tout sur $[0, 1]$

est cont car $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t^2} = 0$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{t^2}} = 0$$

(cc. de Riemann)

or $\frac{1}{t^2}$ est une série

de Riemann et comme

$\alpha = 2$ alors elle est

CV donc I_{12} et CV

donc elle est convergente.

28/11/2016

Rappel:

$$\text{Supp}(f) =$$

$$= \{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}$$

$$= \text{adh} \{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$$

$$A \in \mathcal{Q} \mapsto A(\varphi) = \langle A, \varphi \rangle$$

$$= (A, \varphi) = \int A(x) \varphi(x) dx$$

Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \iff$$

$$\mathcal{D}(\Omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \{$$

$$\exists K \text{ comp}, \text{supp}(\varphi_n) \subset K \forall n \geq n_0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n: D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$$

$$\mathbb{N}_n = \{0, 1, \dots\} = \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N}_0^n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

$$1/- \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$2/- \varphi_k(\Omega) = \frac{1}{k} \cdot \varphi(x) \text{ C.V.??}$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k} \varphi$$

$$1/- \text{supp}(\varphi_k) =$$

$$= \{x \in \Omega, \frac{1}{k} \varphi(x) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}$$

$$= \text{supp}(\varphi) \text{ est compacte}$$

$$2/- \text{soit } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ on a:}$$

$$D^\alpha \varphi_k(x) = \frac{1}{k} D^\alpha \varphi(x)$$

$$\varphi_k = \frac{1}{k} \sup_{n \in \mathbb{N}} D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

donc la suite φ_k converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$

$$1/- \varphi_k = \frac{1}{k} \varphi$$

$$2/- \varphi_k = \frac{1}{k} \varphi_n \left(\frac{x}{k} \right)$$

$$3/- \varphi_k = \frac{1}{k} \varphi(x_k)$$

def C.V. uniforme:

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$(f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f) \iff$$

$$\iff \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Supp

$$2/. \quad \Psi_k = \frac{1}{k} \cdot \Psi\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\text{Supp } \Psi_k = \{x \in \mathbb{R} : \Psi_k(x) \neq 0\}$$

$$\text{on pose: } A = \text{Supp}(\Psi)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \Psi_k\left(\frac{x}{k}\right) \neq 0\}$$

$$\text{on } \Psi\left(\frac{x}{k}\right) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{k} \in A, k \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in k \cdot A, k \geq 1$$

La 1^{ère} condition n'est pas remplie donc la suite Ψ_k ne converge pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Pourquoi $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Le 05/12/2016

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{C}$$

$$e \mapsto \langle T, e \rangle$$

T est continue $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall k \text{ (compt)}, \exists C_k > 0,$$

$$\exists x_k \in \mathbb{N}$$

tg.

$$|\langle T, e \rangle| \leq C_k \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{0 \leq q \leq m_k} |D^q e|$$

Le plus petit valeur de m_k réalisant l'estimation

$$0 \leq q \leq m_k$$

s'appelle l'ordre de la distribution T .

Exemple:

toute fct locale intégrable définie une distribution

(

$$f \in L^{\text{loc}}(\mathbb{R}) / f: \varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \quad (*)$$

$M_q: (*)$ une distribution:

T_f est linéaire en effet

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) dx \\ &= \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \langle T_f, \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle T_f, \alpha \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \alpha \varphi(x) dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$= \alpha \langle T_f, \varphi \rangle$$

donc T_f est linéaire.

T_f est continue en effet.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \right|$$

K compact

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\varphi(x)| dx$$

$$= \int_{K = \text{support}(\varphi)} |f(x)| |\varphi(x)| dx$$

$$\leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \int_{\text{support}(\varphi)} |f(x)| dx$$

C_K (constant)

$$= C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$$

$$= C_K \sup_{x \in K} |D^0 \varphi(x)|$$

Exercice 02:

Les fonctions réelles suivantes
sont des distributions

1) $T_1: \varphi \mapsto \langle T_1, \varphi \rangle = \int \varphi(x) dx$

2) $T_2: \varphi \mapsto \langle T_2, \varphi \rangle = \int \varphi(x) dx$

Exercice 03:

Soit l'application notée

δ_{x_0} , $x_0 \in \Omega$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

1) Montrer que :

δ_{x_0} définit une distribution
(s'appelle distribution
de Dirac)

2) Montrer que δ_{x_0}
ne peut être exprimé
à l'aide d'une intégrale
donc ce cas-là est dit
Singulière

Solution 02:

1) T_1 définit une distribution

Solution Ex 03:

$\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \Omega$.

$$\begin{cases} \delta_{x_0}: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \end{cases}$$

1) $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$?

2) $\delta_{x_0} \neq T_f$, $f \in L_p(\Omega)$
* linéarité:

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$
et $\alpha, \beta \in K$ tq.

$$\langle \delta_{x_0}, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \rangle = ?$$

$$= \alpha \langle \delta_{x_0}, \varphi_1 \rangle + \beta \langle \delta_{x_0}, \varphi_2 \rangle$$

$$\langle \delta_{x_0}, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \rangle =$$

$$=$$

$$= \alpha \langle \delta_{x_0}, \varphi_1 \rangle + \beta \langle \delta_{x_0}, \varphi_2 \rangle$$

Le 16/04/2017

Exercice 7 Montrer que:

$$\text{on a } \begin{cases} a \in C^0(\mathbb{R}) \\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \end{cases} \xrightarrow{H_9} aT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

- il faut que Montrer que
La définition :

$$aT : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle aT, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, a\varphi \rangle$$

est linéaire et continue

Exercice : Calculer :

1/- $x \cdot \delta$

2/- $\alpha(x) \cdot \delta$, $\alpha \in C^0(\mathbb{R})$.

3/- $x Pf(\frac{1}{x})$.

$$\langle Pf(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

4/- $x^m Pf(\frac{1}{x})$

Solution :

1/- $x \cdot \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a
par définition :

$$\langle x \cdot \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x \cdot \varphi \rangle$$

$$= (x \varphi)(0) = 0.$$

2/- $\alpha(x) \cdot \delta$, $\alpha \in C^0(\mathbb{R})$

$$\langle \alpha(x) \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha(x) \varphi \rangle$$

$$= \alpha.$$

$$= (\alpha \cdot \varphi)(0) = \alpha(0) \varphi(0)$$

Value principale :

$$Pf(\frac{1}{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi(0).$$

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

3/- $x Pf(\frac{1}{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle x Pf(\frac{1}{x}), \varphi \rangle =$$

$$= \langle Pf(\frac{1}{x}), x \varphi \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(x) dx$$

$$\Rightarrow x Pf(\frac{1}{x}) = [1] = 1$$

$$[f] = Tf = f$$

2^{ème} méthode

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T', \varphi' \rangle \Rightarrow T = T'$$

$$\forall \varphi$$

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$* \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$$

$$* \langle T^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle T, \varphi^{(j)} \rangle$$

$$\forall j \in \mathbb{N}$$

$$* \langle T^{(\alpha)}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \varphi^{(\alpha)} \rangle$$

22/01/2017

Les distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\Omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Exercice :

L'opérateur de dérivation est un opérateur linéaire et continue sur l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Solution :

1) on montrera la linéarité

$$D^\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega) \mapsto \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$T \mapsto D^\alpha(T)$$

$$\text{Soit } T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\text{Soit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$D^\alpha(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) =$$

$$= \lambda_1 D^\alpha(T_1) + \lambda_2 D^\alpha(T_2)$$

$$\text{Soit } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\langle D^\alpha(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2), \varphi \rangle =$$

$$= \lambda_1 \langle D^\alpha(T_1), \varphi \rangle +$$

$$+ \lambda_2 \langle D^\alpha(T_2), \varphi \rangle$$

$$=$$

$$=$$

2) La continuité :

Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\text{et } (T_j)_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T$$

est ce que :

$$D^\alpha(T_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} D^\alpha T$$

3) La convergence de $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\text{Soit } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\text{telle que } (T_j)_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{R}} T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

alors,

$$\langle T_j, \varphi \rangle \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

Exercice:

Calculer les dérivées au sens des distributions

1/- δ et des dérivées successives

$$2/- \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$3/- x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$4/- \text{La fct: } x \mapsto |x| \quad \mapsto (|x|)' = \operatorname{sgn}(x)$$

$$5/- \quad \quad \quad : x \mapsto \ln|x|$$

$$\hookrightarrow (\ln|x|)' = \psi\left(\frac{1}{x}\right) = -\psi\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solution:

1/- Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

donc :

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tq :

$$\langle \delta^{(\alpha)}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, \delta^{(\alpha)} \varphi \rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \delta^{(\alpha)} \varphi(0)$$

2/- $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ est localement intégrable avec cette définition une distribution qui.

de signe par, $\operatorname{sgn}(x)$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\langle (\operatorname{sgn}(x))', \varphi \rangle =$$

$$\langle (\operatorname{sgn}(x))', \varphi \rangle =$$

$$= -\langle \operatorname{sgn}(x), \varphi'(x) \rangle$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x) \varphi'(x) dx$$

$$= \left(+ \int_{-\infty}^0 \operatorname{sgn}(x) \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \operatorname{sgn}(x) \varphi'(x) dx \right)$$

$$= \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx$$

intégrale impropre

considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx = \left[\varphi(x) \right]_{-\infty}^0$$

$\varphi(x)$ est régulière

$$= \varphi(0).$$

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0).$$

$$\int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx$$

$$= -2\varphi(0).$$

$$= 2\delta(x).$$

$$= 2\langle \delta, \varphi \rangle$$

d'où :

$$(\operatorname{sgn}(x))' = 2\delta$$