

Programme =

- Rappel d'Algèbre linéaire
- Méthode itératives
- Valeurs et vecteurs propres

$$A = P^{-1} D P$$

$$A^n = (P^{-1} D P)^n = P^{-1} D^n P$$

- Pour qu'on calcule le diagonal ?
- " " on fait diagonal ?

On va trouver A^n à travers D^n .
puis que $A^n = P^{-1} D^n P$

Une application linéaire f :

de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}^n$ vérifie :

- $\forall (x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2 : f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}^n : f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ l'ensemble des applications

linéaires de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$
 si on choisit des bases $(e_i)_{i=1}^n$ et $(f_i)_{i=1}^n$
 de $\mathbb{C}^n$, alors $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ et caractérisée par
 la matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ tq $f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A est dite matrice de f suivant les bases
 $(e_i)_{i=1}^n$ et $(f_i)_{i=1}^n$

soit $x \in \mathbb{C}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n y_j f_j \quad \text{alors} \quad y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \quad ?? \\ &\quad \text{preuve} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = Ax$$

Types des Matrice

1) A inversible s'il existe une matrice notée (A^{-1})
tq $AA^{-1} = A^{-1}A = \overline{I}$

On a =

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2) Matrice Conjuguée :

$B = (b_{ij})$ est la matrice conjuguée de $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$
si $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$ on a $(A)^{-1} = (\overline{A^{-1}})$

3) Matrice Transposée :

$B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ est la transposée de $A = (a_{ij})$
si $b_{ij} = a_{ji}$ on note $B = A^T$
On a =

- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4) A est dite symétrique si $A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

5) Matrice adjointe :

B est l'adjoint de A si :

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad B = A^*$$

$$A^* = (\bar{A})^T = (\overline{A^T})$$

$$(A^*)^* = A$$

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$$

6) Matrice hermitienne (auto adjoint)

$$\text{si } A = A^*, \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}} \Rightarrow a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$A \text{ est dite unitaire si } A^* = A^{-1}$$

$$A \text{ est dite normale si } A^* \cdot A = A \cdot A^*$$

7) Matrice Orthogonale =

une matrice unitaire d'éléments réels est une matrice orthogonale.

Produit hermitien :

soit $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ de composantes $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$
le produit hermitien de x et y noté (x, y) est une application de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ défini par :

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$$

Propriétés :

$$(u + v, y) = (u, y) + (v, y)$$

$$(\lambda x, y) = \lambda (x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

- $(x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- $(x, x) = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$

• Matrice hermitienne définie positive

Une matrice hermitienne A est dite définie positive

si : $\forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.

$$(Ax, x) > 0$$

Elle est dite semi définie positive si

$$\forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\} : (Ax, x) \geq 0$$

Déf: On appelle sous matrice principale d'ordre k d'une matrice A d'ordre n , la matrice constituée des k premières lignes et k premières colonnes on la note A_k .

Proposition :

les sous matrices principales d'une matrice **HDP** sont **HDP**

Preuve :

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$
 alors le vecteur $y = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$ et tq :

$$(A_k y, y) \stackrel{?}{=} (Ax, x) > 0$$

Si $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

$$(Ae_i, e_i) = a_{ii} > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

$$(Ax, x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

puis que $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ alors on obtient ✓
 $(Ax, x) = (A_k y, y)$

Opérateurs linéaires :

- 1- $l(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
- 2- $l(x) = 0 \iff x = 0.$
- 3- $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$
- 4- $l(\lambda x) = |\lambda| l(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

Norme de Holder :

- $l_p(x) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$
- $l_\infty(x) = \|x\|_\infty = \max |x_j|$
- $l_2(x) = \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}$
- $l_1(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|$

Inégalité de Holder :

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq l_p(x) \cdot l_q(y)$$

$$p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Normes d'opérateurs :

Définition : On définit une norme d'un opérateur linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$, dont la matrice est A par :

$$S_{l_p l_q}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{l_p(Ax)}{l_q(x)}$$

7

On dit que $S_{l_p l_q}$ est la norme matricielle induite par les normes l_p et l_q

Remarque :

On utilise souvent les normes $S_{l_p l_p}(A)$ pour $p = 1, 2, 3, \dots, \infty$

Propriétés :

1. $S_{l_1 l_1}(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

2. $S_{l_\infty l_\infty}(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

3. $S_{l_2 l_2}(A) = \sqrt{\lambda(A^* A)}$

λ est le rayon spectral.

Exercice :

Montrer $S_{l_p l_p}(A)$ est toujours définie et quelle est indépendante des bases de $\mathbb{C}^n$.

Conditionnement :
On pose $r(x) = \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ alors $S_{\| \cdot \|_p \| \cdot \|_p}(A) = \max_{x \neq 0} r(x)$

cherchons le $\min_{x \neq 0} r(x)$.

On pose $Ax = y$ Alors : $r(x) = \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \frac{\|y\|_p}{\|A^{-1}y\|_p}$

$$= \frac{1}{\frac{\|A^{-1}y\|_p}{\|y\|_p}}$$

Si on pose :

$$S_{\| \cdot \|_p \| \cdot \|_p}(A^{-1}) = \max_{y \neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|_p}{\|y\|_p}$$

On obtient :

$$\min_{x \neq 0} r(x) = \frac{1}{S_{\| \cdot \|_p \| \cdot \|_p}(A^{-1})}$$

Définition : On appelle conditionnement de A , la quantité
 $\text{Cond}_p(A) = \frac{\max_{x \neq 0} r(x)}{\min_{x \neq 0} r(x)}$
 $= S_{\| \cdot \|_p \| \cdot \|_p}(A) \cdot S_{\| \cdot \|_p \| \cdot \|_p}(A^{-1})$

notation :

$$S_{p,p}(A) = \|A\|_p \Rightarrow \text{Cond}_p(A) = \|A\|_p \|A\|_p^{-1}$$

Propriétés :

- $\text{Cond}_p(\alpha A) = \text{Cond}_p(A)$
 - $\text{Cond}_p(A) \geq 1$
- } démontrer

Déf :

Soit $[A^{(k)}]$ une suite de Matrices. On dira que $[A^{(k)}]$ converge vers A si :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - A\| = 0$$

$$\text{Si : } A^{(k)} = A^k$$

Théorème :

Une C.N.S pour que A^k converge vers 0 est que : $\rho(A) < 1$ (le rayon spectrale inférieur à 1)

Preuve :

$$A^n = S^{-1} D^n S, \quad D = S^{-1} A S$$

$$S^n = (D + N)$$

$$\sum C_n a^n b^{n-p}$$

Pour toute matrice A , il existe une décomposition de Jordan
cà-d = une matrice S inversible tq :
 $A = S A S^{-1}$ est de la forme =

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{pmatrix}$$

où $\tilde{J}_i$ est une matrice $n_i \times n_i$ tq :

$$\tilde{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

où λ_i est une valeur propre de A et $\sum n_i = n$.

$$(\tilde{A})^k = (S A S^{-1})^k$$

$$\Rightarrow A^k = S^{-1} \tilde{A}^k S$$

$$A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

et $\tilde{A}^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ Si : $\tilde{J}_i^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

Donc :

$$\tilde{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + N$$

avec :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{J}_i^k = (\lambda_i I + N)^k$$

$$= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda_i^j N^{k-j}$$

$$= N^k + k \lambda_i N^{k-1}$$

$$+ \dots + \lambda_i^k I$$

pour $k \rightarrow +\infty : N^k \rightarrow 0$
 et par suite : $\bar{J}_i^k \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lambda_i^k \rightarrow 0$
 $\lambda_i^k \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1$

$\Rightarrow \rho(A) < 1$

Les méthodes itératives :

Soit le système $Ax = b$. On décompose $A = M - N$ avec M inversible.

$Ax = b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. On part de $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

On définit la suite :

$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$

Notons $\bar{x}$ la solution exacte de $Ax = b$ et :

$e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$

$$\begin{cases} M\bar{x} = N\bar{x} + b \\ Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} - b \end{cases}$$

$\Rightarrow e^{(k)} = M^{-1}N \cdot e^{(k-1)}$

Posons : $B = M^{-1}N$

$\Rightarrow e^{(k)} = B^k \cdot e^{(0)}$

la méthode converge si : $e^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow B^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$
 $\Leftrightarrow \rho(B) < 1 \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$

Si : $A = D - E - F$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = D$$

$$N = E + F$$

Jacobi:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{C}^n \\ x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b \end{cases}$$

* Gauss-Seidel = شوار صاجي عد

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{C}^n \\ x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}F x^{(k)} + (D-E)^{-1}b \end{cases}$$

Convergence:

Th 1: (Hadamard)

les valeurs propres de $A \in \mathbb{C}^n$ à l'union des n disques

définie par :

$$D_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right\}$$

A n'est pas inversible $\Rightarrow$ le 0 est un v.p.
 pour montrer que A inversible $\Rightarrow$ montrer que 0 n'est un v.p.
 c.à.d. $0 \notin \cup_{k=1}^n D_k$

Preuve:

si λ est une valeur propre de A - le vecteur propre U
 $AU = \lambda \cdot U$, on peut ramener la plus grande composante
 de U à 1 posons :

$$\max_{1 \leq i \leq n} |U_i| = |U_k| = 1$$

On obtient :

$$(\lambda - a_{kk}) U_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} U_j$$

$$\text{Donc : } |\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} U_j \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |U_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$$

$$\Rightarrow \lambda \in D_k \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{k=1}^n D_k$$

Définition :

A est dite à diagonale strictement dominante si :

$$\forall i \leq n : |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Th # Si A est diagonale strictement dominante, alors
 elle est inversible

Preuve: On note que 0 n'est pas valeur propre de A .
 $|0 - a_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$

$$\Rightarrow 0 \notin \bigcup_{k=1}^n D_k$$

Propriétés:

$$1 - l_p(Au) \leq \|A\|_p \cdot l_p(u) \Rightarrow \|A\|_p = \sup_{u \neq 0} \frac{l_p(Au)}{l_p(u)} \geq \frac{l_p(Au)}{l_p(u)}$$

$$2 - |\lambda| l_p(u) = l_p(\lambda u) = l_p(Au) \leq \|A\|_p l_p(u)$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|_p$$

$$\Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|_p$$

Th: Si A est une diagonale strictement dominante, la méthode de Jacobi est C.V.

Preuve:

Il faut montrer que $\rho(B) < 1$
 avec : $B = D^{-1}(E+F)$

$$B = D^{-1}(E+F)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \end{cases}$$

$$\forall i, \sum_{j=1}^n |B_{ij}| = \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{a_{ii}}$$

$$\Rightarrow \max_i \sum_{j=1}^n |B_{ij}| < 1$$

$$\Rightarrow \|B\|_{\infty} < 1$$

$$\text{et puis que } \rho(B) < \|B\|_{\infty} < 1$$

$$\Rightarrow \rho(B) < 1$$

ne est pas inversible

Th: si A est singulière, alors il existe au moins j_0

$$\text{tq: } |a_{j_0 j_0}| < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^n |a_{j_0 k}|$$

Preuve: évidente.

(contraposé avec le théorème #)

Th: Si A est diagonale strict dominante, Gauss Seidel est convergente.

Preuve

$$\rho(B) < 1$$

$$B = (D-E)^{-1} F$$

Pour toute valeur propre λ de B .

$$\begin{aligned} B - \lambda I &= (D-E)^{-1} F - \lambda I \\ &= (D-E)^{-1} [F - \lambda(D-E)] \end{aligned}$$

$(B - \lambda I)$ est singulière.

$(D-E)$ est inversible et donc $Q = (F - \lambda(D-E))$ est singulière.

donc d'après le th, $\exists i$ tq :

$$|a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| = \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}| + \sum_{k=j+1}^n |a_{jk}|$$

$$\text{ou } a_{jk} = \begin{cases} -a_{jk} & \text{si } j < k \\ -\lambda a_{jk} & \text{si } j > k \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\lambda| |a_{jj}| \leq \sum_{k=1}^{j-1} |\lambda| |a_{jk}| + \sum_{k=j+1}^n |a_{jk}|$$

s'il existe une valeur propre λ tq $|\lambda| \geq 1$,
On obtient :

$$|\lambda| |a_{jj}| \leq |\lambda| \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}| + \sum_{k=j+1}^n |a_{jk}|$$

$$\leq |\lambda| \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right)$$

$$E = \sum a_{ij}$$

- $\Rightarrow |a_{jj}| < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{kj}|$ - Contradiction avec A est strict dominante
 $\Rightarrow \forall \lambda$ valeur propre de B , $|\lambda| < 1$
 $\Rightarrow \rho(B) < 1$

Méthode de Relaxation :

Lorsque le vecteur $x^{(k)}$ est connu, Ces méthodes déterminent $x_i^{(k+1)}$ par :

$$x_i^{(k+1)} = (1-w) x_i^{(k)} + w x_i^{(k+1)*}$$

où w est un réel (Facteur de relaxation) et $x_i^{(k+1)*}$ est déterminé par une méthode de Jacobi ou Gauss-Seidel avec Jacobi.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-w) x_i^{(k)}$$

- Si $w < 1$, On a sous-relaxation.
- Si $w > 1$, " " sur-relaxation.
- Si $w = 1$, On retrouve les méthodes de Jacobi ou Gauss-Seidel.

avec Gauss-Seidel :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) + (1-w) x_i^{(k)}$$

$$(D-E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \Rightarrow Dx^{(k+1)} = Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)} + b$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-w}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right] + x_i^{(k)}$$

d'où l'écriture matricielle :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - w D^{-1} \left[(-E) x^{(k+1)} + (D-E) x^{(k)} - b \right]$$

$$\frac{1}{w} (D - wE) x^{(k+1)} = \frac{1}{w} \left[(1-w) D + wF \right] x^{(k)} + b$$

Donc cette méthode est de la forme :

$$M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b$$

$$M = \frac{1}{w} (D - wE)$$

$$N = \frac{1}{w} \left[(1-w) D + wF \right]$$

On pose :

$$B = M^{-1} N$$

$$= (D - wF)^{-1} \left[(1-w) D + wF \right]$$

On pose :

$$L = D^{-1} E$$

$$U = D^{-1} F$$

Alors :

$$x^{(k+1)}$$

$$= (I - wL)^{-1} \left[(1-w) I + wU \right] x^{(k)} + w (I - wL)^{-1} D^{-1} b$$

On pose :

$$T_w = (I - wL)^{-1} \left[(1-w) I + wU \right]$$

Rayon Spectrale de Lw

$$\rho(Lw) \geq |w-1|$$

Théorème :

$$\rho(Lw) \geq |w-1|$$

Preuve :

$$\det(\lambda I - Lw) = \det \left(\lambda I - \frac{(1-w)L}{(1-wL)^{-1}} \left[(1-w)I + wU \right] \right)$$
$$= \det \left(\frac{(1-wL)^{-1}}{(1-wL)^{-1}} \left[(\lambda I - wL) - (1-w)I - wU \right] \right)$$

$$\det(\lambda I - Lw) = \det \left((I - wL)^{-1} \right) \cdot \det \left[\lambda(I-w) - wU - (1-w)I \right]$$

$$\det(I - wL) = 1$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - Lw) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i} \quad \text{avec } a_0 = 1?$$

$$= a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n a_n \quad ?$$

$$\text{Or } a_n = P(0)$$

$$= \det \left(-(1-w)I - wU \right)$$

$$= \left(w - \frac{1}{n} \right) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |w-1|$$

On sait que: $\varphi(Lw) \geq |\lambda_i|$

$$(\varphi(Lw))^n \geq \prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |w-1|^n$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(Lw) \geq |w-1|}$$

Théorème:

Une condition nécessaire de convergence de la méthode de Relaxation est que: $0 < w < 2$

Preuve:

Pour quoi $\varphi(Lw) < 1$ il est nécessaire que: $|w-1| < 1$

$$\Leftrightarrow 0 < w < 2$$

Exercice:

Si A est hermitienne définie positive, alors:

$$\varphi(Lw) < 1 \Leftrightarrow 0 < w < 2$$

Méthodes directes :

• Si $A = A^T$, $A = L \cdot U$.
 Si $A = L \cdot U$ et si D est la diagonale de U ,
 alors :

$$A = L \cdot U = L \cdot D \cdot V \quad (U = D \cdot V)$$

V est une matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Puis que A est symétrique

$$(LDV)^T = (LDV)^T = V^T D^T L^T \\ = V^T D L^T$$

$$\Rightarrow (V^T)^{-1} LD = D L^T V^{-1}$$

$(V^T)^{-1} LD$ est $\begin{pmatrix} \Delta & & \\ & \Delta & \\ & & \Delta \end{pmatrix}$
 $D L^T V^{-1}$ est $\begin{pmatrix} \Delta & & \\ & \Delta & \\ & & \Delta \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (V^T)^{-1} L &= I \Rightarrow V^T = L \\ L^T V^{-1} &= I \Rightarrow L^T = V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = LDL^T$$

TD N° 1:

Exo 10: $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible; pour $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ on définit:

$$A_{k+1} = 2A_k - A_k \cdot A \cdot A_k \quad k \geq 0$$

• Montrer que :

$$(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A^{-1} \iff \varphi(I - A \cdot A_0) < 1$$

Solution :

$$\begin{aligned} I - A \cdot A_{k+1} &= I - A(2A_k - A_k \cdot A \cdot A_k) \\ &= I - 2AA_k + (AA_k)^2 \\ &= (I - AA_k)^2 \end{aligned}$$

Notions :

$$AA_k = B_k$$

$$I - B_k = (I - B_{k-1})^2 = ((I - B_{k-2})^2)^2 = (I - B_0)^{2^k}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} (I - B_k) = 0 &\iff \lim_{k \rightarrow +\infty} (I - B_0)^{2^k} = 0 \\ &\iff \varphi(I - B_0) < 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} AA_k = I \iff \varphi(I - AA_0) < 1$$

Exo 28

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \quad \rho(A) < 1$$

$$B_m = I + A + A^2 + \dots + A^m$$

montrer que :

$I - A$ est inversible et que $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = (I - A)^{-1}$

Solution :

1) si λ est une valeur propre de A , $1 - \lambda$ est une V.P. de $I - A$ et $\lambda \neq 1 \Rightarrow 1 - \lambda \neq 0 \Rightarrow (I - A)$ est inversible

2) Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} A A^k \rightarrow I \Leftrightarrow A^k \rightarrow A^{-1}$

donc il faut montrer que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_m (I - A) \rightarrow I \Leftrightarrow B_m \rightarrow (I - A)^{-1}$$

$$\text{On a : } B_m = I + A + A^2 + \dots + A^m$$

$$A B_m = A + A^2 + \dots + A^{m+1}$$

$$(I - A) B_m = I - A^{m+1}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (I - A) B_m = I \quad \text{Car } (\rho(A) < 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} B_m = (I - A)^{-1}$$

EX03: $A \in M_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$

$$Ax = b \quad (1)$$

pour $\alpha \neq 0$

$$x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1}A) x^{(k)} + \alpha D^{-1}b.$$

1) Montrer que si cette méthode converge la limite est une solution de (1)

2) Exprime $D^{-1}A$ en fonction de A

3) utiliser la. c. v. pour $0 < \alpha \leq 1$ et A a diagonale strict dominante.

Solution:

$$x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1}A) x^{(k)} + \alpha D^{-1}b.$$

$$1) \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1}A) \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} + \alpha D^{-1}b.$$

$$\begin{aligned} x^* &= (I - \alpha D^{-1}A) x^* + \alpha D^{-1}b \\ &= x^* - \alpha D^{-1}A x^* + \alpha D^{-1}b + \alpha D^{-1}b. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha D^{-1}A x^* = \alpha D^{-1}b.$$

$$\Rightarrow Ax^* = b$$

$$2) D = (a_{ii})_{1 \leq i \leq n}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$D^{-1}A = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

3TD

$$0 < \alpha \leq 1 \quad \text{et} \quad (a_{ii}) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

$$\text{posons : } \bar{J}_\alpha = I - \alpha D^{-1} A.$$

$$(\bar{J}_\alpha)_{ij} = I_{ij} - \alpha (D^{-1} A)_{ij}.$$

$$(\bar{J}_\alpha)_{ij} = \begin{cases} 1 - \alpha & i = j \\ -\frac{\alpha a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \end{cases}$$

Pour $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |(\bar{J}_\alpha)_{ij}| &= |(\bar{J}_\alpha)_{ii}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(\bar{J}_\alpha)_{ij}| \\ &= |1 - \alpha| + |\alpha| \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|}{a_{ii}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |(\bar{J}_\alpha)_{ii}| < 1$$

$$\Rightarrow \|\bar{J}_\alpha\|_\infty < 1$$

$$\Rightarrow \rho(\bar{J}_\alpha) < 1$$

UTD

Exo 4: $A \in M_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$

$$Ax = b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{C}^n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + \alpha (b - Ax_k), \quad \alpha > 0. \end{array} \right.$$

On pose $a_{ii} > 0$ et A a diagonale strict dominante.
• Pour quelle α la méthode converge. ?

Solution :

$$x_{k+1} = (I - \alpha A) x_k + \alpha b.$$

$$\|I - \alpha A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |1 - \alpha a_{ii}| + \alpha \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

$$< |1 - \alpha a_{ii}| + \alpha a_{ii}$$

$$\text{Si } \alpha a_{ii} \leq 1 \quad (0 < \alpha \leq \frac{1}{\min(a_{ii}, 1 \leq i \leq n)})$$

$$\Rightarrow \|I - \alpha A\|_{\infty} < 1.$$