- Analyse Numerique
Matreciele :

Rappel d'algèbre matricielle

Une application lineaire f de $\mathbb{C}^n$ des $\mathbb{C}$ verifier :

- $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^n$:
$f(x,y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$:
$f(\lambda x) = \lambda f(x)$

on note $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ l'ensemble des application lineaire de $\mathbb{C}^n$ de $\mathbb{C}^n$

Si on choisit des bases $(e_i)_{i=1}^n$ et $(f_i)_{i=1}^n$ alors : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ est caractérisée par la matrice alors :

$(f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n))$

$f(e_i)$ $A = (e_{ij})^n_{ij=1}$ tq

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j$$

$i = 1 \ldots n$

$f(e_1) \ldots f(e_n)$

bijective = inversible

A est inversible

$A + B = A(S + A^{-1}B$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A est dit matrice de f suivant les bases (e_i) et (f_j)

Quelque types de Matrice :

A est dite inversible, s'il existe une matrice B (notée A

tq ; $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

on a ;

$(A^{-1})^{-1} = A$ et $(A = B)^{-1} = B^{-1} = A^{-1}$

Matrice conjeguée :

$B = (b_{ij})$ $i = j = 1$ est la matrice conjeguée de $A = (a_{ij})^{-1}$ Si $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$

B est notée $\bar{A}$

ou $(\bar{A})^{-1} = (\overline{A^{-1}})$??

Matrice transposée :

B et la matrice transposés de A si :

$b_{ij} = a_{ji}$, $\forall ij = 1 \ldots n$

on note $B = A^T$

on a : $(A^T)^T = A$,

$(A.B)^T = B^T . A^T$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Scanned by CamScanner

- Matrice Symétrique :
A est dit symétrique si $A = A^T$
$a_{ij} = a_{ji}, \forall ij = 1 \ldots n$

- Matrice adjointe :
B est la adjointe de A
$b_{ij} = \bar{a}_{ji}$ nous avons
$A = (\bar{A})^T = (\overline{A^T}), (A^*)^* = A$
$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$

- Matrice Hermitienne :
A est dite Hermitienne ou autre adjointe si $A = A^*$
Peut s'écrite :
$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ et $a_{ii} \in \mathbb{R}$
$\forall i = 1 \ldots n$

$\begin{cases} \text{adjoint = transposé} \\ \text{car réels} \\ A_n = B \, . \, L = \Delta \end{cases}$

Matrice unitaire :
A est dite unitaire si
$A^* = A^{-1}$

Matrice normale :
A est dite normale si $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

- Matrice orthogonale :
une matrice à éléments réels est dites orthogonale $(A^T = A^{-1})$

Produit hermitien :
$x = (x_i)_{i=1}^n, \; y = (y_i)^n$
est produit hermitien de x et y noté (x, y)
est une application de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}$ def pos
$(x, y) = \sum x_i \bar{y}_i$

Propriétés :
1/- $(u + v, y) = (u, y) + (v, y)$
$\forall x, \forall y \in \mathbb{C}^n$
2/- $(\lambda u, y) = \lambda (u, y), \forall \lambda \in \mathbb{C}$
3/- $(x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y)$
4/- $(x, y) = \overline{(y, x)}$
5/- $(x, x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$

Matrice hermitienne déf positive : (M.H.DP)
une matrice hermitienne A est dites déf positive
si : $\forall x \in \mathbb{C}^n, (Ax, x) > 0$
elle est dites semi déf positive si $\forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$
$(Ax, x) \geq 0$

Df : on appelle sous matrice principale d'ordre k d'une matrice A d'ordre n ($n \geq k$) la matrice constituée des k premières lignes et k premières colonnes on la note A_k

Propositive :

Les sous matrice principales d'ordre k d'une matrice (M.H. D.P) sont des (M.H. D.P)

on a les $(Ax.x)$ est prendre la conjuguée aussi :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1\overline{x_1} + \cdots = a_{11}(x_1)^2$$

$$\cancel{\in \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_i)^2 \in \mathbb{R}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_i)^2 \in \mathbb{R}$$

- trouve de propositions :

Si $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in$ le vecteur ;

$y = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{K}^k$ vérifie

$(A_k y, y) = (Ax, x) > 0$

donc A_k est DP

$(\Rightarrow)\ a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\quad c^t$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{12} = \overline{a_{21}} \\ a_{13} = \overline{a_{31}} \\ a_{23} = \overline{a_{32}} \end{matrix}$$

de plus $e_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ le i^{eme} vecteur de la base canonique $(Ae_i, e_i) = a_{ii} > 0$

Dons le deusieme preuve on a poler si il y a une sous matrice qui la une element dons le matrice mais sous conjuguées inverse n'est pas dons la matrice et pour wila on a :

Pour denombre qui est une matrice hermitien

- Norme d'operateur linéaire :

une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application f de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ qui verifie :

1/- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$

2/- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3/- $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

4/- $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$

Def :

on appelle norme de Holder Holder toute application ℓ_p de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ def par

$$\ell_p(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}$$

Ex : montrer que ℓ_p est une norme les trois normes ℓ_p les plus utilisées sont :

- $\ell_\infty(x) = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

- $\ell_2(x) = \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}$

- $\ell_1(x) = \|x\|_1 = \sum_{j=1} |x_j|$

- Inegalité de Holder :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \ell_p(x)\, \ell_q(y)$$

avec : $P > 1$

et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

- Norme d'operateur :

Def : on Def une norme d'un operateur linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ dont la matrice est A par

$$S\ell_p\ell_q(A) = \sup \frac{\ell_p(Ax)}{\ell_q(x)}$$

on dite que $S\ell_p\ell_q(A)$ est la norme matricielle induite par ℓ_p et ℓ_q

Rmq : en utilisée souvent la norme $S\ell_p\ell_q(A)$. pour $P = 1, 2 \ldots \infty$

Proposition :

1/- $S\ell_1\ell_1(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

2/- $S\ell_\infty\ell_\infty(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

3/- $S\ell_2\ell_2(A) = \sqrt{\rho(A^* \cdot A)}$

où $\rho(A^* \cdot A)$ est le rayon spectral de $A^* \cdot A$

Ex : Montrer 1/ 2/ 3/.
on utilise la notation
$\|A\|_i = S\ell_i \ell_i(A)$

Conditionnement d'une matrice :

Si on pose $r(x) = \frac{\ell_p(Ax)}{\ell_p(x)}$

alors : $S\ell_p\ell_p(A) = \sup\limits_{x\neq 0} r(x)$

cherchons le inf $r(x)$

en posons $Ax = y$ on obtient

$$r(x) = \frac{\ell_p(Ax)}{\ell_p(x)} = \frac{\ell_p(y)}{\ell_p(A^{-1}y)}$$

(A inversible)

$$= \frac{1}{\frac{\ell_p(A^{-1}y)}{\ell_p(A)}}$$ si on introduit

$$S\ell_p\ell_p(A^{-1}) = \sup_{y\neq 0} \frac{\ell_p(A^{-1}y)}{A_p(y)}$$

on obtient :

$$\min r(x) = \frac{1}{\ell_p\ell_p(A^{-1})} \quad ??$$

Déf :

on appelle conditionnel d'un operateur lineaire de $\mathbb{C}^n$ ds $\mathbb{C}^n$ le rapport noté :

$$\text{Cond}\,p(A) = \frac{\max r(x)}{\min r(x)}$$

$= S\ell_p\ell_p(A)\, S\ell_p\ell_p(A^{-1})$

$= \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$

Th :

1/ $\ell_p(Au) \leq \|A\|_p\, \ell_p(u)$
$\forall u \in \mathbb{C}^n$

2/ $\rho(A) \leq \|A\|_p \quad \forall p \geq 1$

Dém 1/

1/ pour $u = 0$ la relation est verifier pour $u \neq 0$

$\|A\|_p = \sup \frac{\ell_p(Au)}{\ell_p(u)} \geq \frac{\ell_p(Au)}{\ell_p(u)}$

$\Rightarrow \ell_p(Au) \leq \|A\|_p\, \ell_p(u)$

Dém 2/

$\ell_p(\lambda u) = \ell_p(Au) \leq \|A\|_p \ell_p(u)$

$|\lambda|\, \cancel{\ell_p(u)} = \leq \|A\|_p\, \cancel{\ell_p(u)}$

$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|_p$

$\Rightarrow \max |\lambda| \leq \|A\|_p$

$\Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|_p$

Proposition :

1/- $\text{cond}\,p(\alpha A) = \text{cond}\,p(A)$
$\forall \alpha \in \mathbb{C}^n$

2/- $\text{cond}\,p(A) \geq 1$

Soit $\{A^k\}$ une suite de matrice on dire $A^{(k)}$ cv converge vers A si

Si : $\|A^{(k)} - A\| = 0$

Scanned by CamScanner

on La norme $\|.\|$ est une norme S ℓ_p ℓ_p

$P = 1 \dots \infty$

on S'interesse en cas $A^{(k)} = A^k$

Théorème :

une C N S pour que La suite A^k converge vers 0 est que $\rho(A) < 1$.

Preuve :

Pour toute matrice A il existe une decomposition de Jordon on c-à-d : il existe S inversible tq : $SAS^{-1} = \tilde{A}$ soit de La forme Jordon on

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} J_1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & J_N \end{vmatrix} \text{ et } J_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{vmatrix}$$

donc $(\tilde{A})^k = (SAS^{-1})^k$

$= S A^k S^{-1}$

donc $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow \tilde{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

diagonalisable Si

dim λ_i = le dim de La multiplicateon :

$\Leftrightarrow m\, P_\lambda(A) = (\lambda-1)^2$

$= (\lambda-1)^2(\lambda-2)^3(\lambda+4)^1$

dim $E_1 = 2$ dim $E_2 = 3$

dim $E_{-4} = 1$

et $\tilde{A}^k \to 0$ si le bloc

$J_i \to 0$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$= \lambda_i I + N$. $N = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

N est dites matrice Nilpotente c-a-d :

$\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $N^p = 0$

$J_i = \lambda_i I + N$

$\Rightarrow J_i^N = (\lambda_i I + N)^k$

$$= \sum_{J=0}^{k} C_k^J \lambda_i^J N^{k-J}$$

$$= \left(\sum_{J=0}^{k-1} C_k^J \lambda_i^J N^{k-1}\right) + \lambda_i^k$$

$= N^k + k\lambda_i N^{k-1} + \dots + \lambda_i k I$

$k \to \infty$, $N^k \to \infty$

et par suite

$J_i^k \to 0 \Leftrightarrow \lambda_i^N I \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1$

$\Leftrightarrow \max|\lambda_i| < 1$

$\Leftrightarrow \rho(A) < 1$

Scanned by CamScanner

Les Methodes ~~de~~ itératives

Soit le système $Ax = b$

Principe :

on décompose A sous la forme $M - N$ avec M inversible.

$Ax = b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

à partir d'un vecteur $x^{(0)} \in \mathbb{C}$ on déf la suite :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{(-1)}b$$

Posons :

$e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$ ($\bar{x}$ solution de $Ax = b$)

$M\bar{x} = N\bar{x} + b$

$Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$

$\Rightarrow M(x^{(k)} - x) = N(x^{(k-1)} - \bar{x})$

$\Rightarrow e^{(k)} = M^{-1}N e^{(k-1)}$

Posons $B = M^{-1}N$ alors

$e^{(k)} = B^{k} \cdot e^{(0)}$

donc la méthode C.V si

si $e^{(k)} \longrightarrow 0$ donc

$B^{k} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1$

$\Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$

Rappel :

Jacobi : $A = D - E - F$

$M = D$, $N = E + F$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{C}^n \\ x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b \end{cases}$$

- Gauss Seidel :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{C}^n \\ x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b \end{cases}$$

1/- localisation des valeurs propres :

- Th de Hadamard :

Les valeurs propres de A appartiennent à l'union des n disques :

D_k { $k = 0, \dots, n$ }

déf par :

$$D_k = \{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{kk}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \}$$

- Preuve :

Si λ est valeur propre de A de vecteur propre u ($Au = \lambda u$)

on peut ramener la plus grande composante de u à 1, supposons que c'est la $k^{ième}$ composante :

$\max(u_i) = (u_k) = 1$.

on obtient :

$$(\lambda - a_{kk})u_k \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot u_j$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{kk} & a_{kn} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_k \\ u_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_k \\ u_n \end{pmatrix}.$$

$$A u = \lambda u$$

$$a_{k1} u_1 + a_{k2} u_2 + \dots + a_{nn} u_n = (\lambda - a_{kk}) u_k$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{kk}| = \left|\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj} u_j\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\,|u_j| \leq \sum_{j=1, j\neq k} |a_{kj}|$$

- Déf : A est dites à diagonale dominante si $\forall i \quad 1 \leq i \leq n$

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, k\neq j}^{n} |a_{ij}|$$

elle est dite à diagonale strict dominante si : $\forall i$

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

- Théorème :

Si A est a diagonale strict dominante elle est inversible

Preuve :

on montrer que 0 n'est pas valeur propre de $0 \notin \cup D_k$

car $|0 - a_{ii}| = |a_{ii}| >$

$$= |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} |a_{ij}|$$

Th :

Si A est a diagonale stric dominante alors La méthode de Jacobi est CV

TD Preuve :

A est inversible et

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

il faut montrer que :

$\rho(B) < 1$ avec

$$B = D^{-1}(E+F) \quad (1)$$

$$B = \begin{cases} B_{ii} = 0 \\ B_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad i\neq j \end{cases}$$

$\forall i$:

$$\sum_{j=1}^{n} |B_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{a_{ii}} < 1$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} |B_{ij}| = \|B\|_\infty < 1$$

Puisque $\rho(B) \leq \|B\|_\infty < 1$

$$\Rightarrow \rho(B) < 1$$

Corrollaire :

Si A est une matrice singulaire (non inversible) alors il existe au moins un $\exists j$ tq :

$$|a_{jj}| \leq \sum_{k=1, k\neq j}^{n} |a_{jk}|$$

Théorème :

Si A est a diagonale stric dominante La méthode de Gauss-Seidel et CV

Preuve :

on demontre que $\rho(B) < 1$

avec $B = (D-E)^{-1} F$

Pour toute

Valeur propre λ de B on a :

$B - \lambda I = (D-E)^{-1} F - \lambda I$

$= (D-E)^{-1} [F - \lambda(D-E)]$

est singulaire

$\exists j$ tq : $|a_{jj}| \leq \sum_{k=1, j \neq k}^{n} |a_{jk}|$

$= \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}| + \sum_{k=j+1}^{n} |a_{jk}|$

$a_{jk} = \begin{cases} -a_{jk} & j < k \\ -\lambda a_{jk} & j \geq k \end{cases}$

$|\lambda| \, |a_{jj}| \leq \sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}| |\lambda| + \sum_{k=j+1}^{n} |a_{jk}|$

supposons qu'il existe λ tq : $|\lambda| \geq 1$ donc

$|\lambda| \, |a_{jj}| \leq \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} |\lambda| + \sum_{k=j+1}^{n} |a_{jk}|$

$\leq |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{n} |a_{jk}| \right)$

$\Rightarrow |a_{jj}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^{n} |a_{jk}|$

qui est une contradiction avec A a diagonale stric dominante

donc $|\lambda| < 1 \Rightarrow \rho(B) < 1$

Le 27/11/2016.

Exercice :

$A \in M_n(\mathbb{C})$ inversible

pour $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$ donnée on définit la suite

$A_{k+1} = 2A_k - A_{k_k}$,

$(A.\ A_k \in \mathcal{M})$, $k \in \mathbb{N}$.

Montrer que :

$\lim A_k = A^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho(I - AA_0) < 1$

Indication :

Montrer que :

$I - A A_{k+1} = (I - AA_k)^2$

posons $B_k = A \cdot A_k$

$\Rightarrow I - B_{k+1} = (I - B_k)^{2^1}$

$= (I - B_{k-1})^{2^2}$

$= (I - B_{k-2})^{2^3} = \ldots = (I - B_0)^{2^{k+1}}$

on obtient :

$\lim_{n \to +\infty} (I - B_k) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} (I - B_k)^{2^k} = 0$

$\Leftrightarrow \rho(I - B_0) < 1$

$\Leftrightarrow \lim (I - B_k)^{2^k} = 0$

$\Leftrightarrow \rho(I - B_k) < 1$

$\lim_{k \to +\infty} B_k = I$

$\Leftrightarrow \rho(I - AA_0) < 1$

$\lim_{k \to +\infty} B_k = 0 \iff \rho(I - AA_0) < 1$

$\lim_{k \to +\infty} A_0 A_k = I \iff \rho(I - AA_0) < 1$

$\lim_{k \to +\infty} A_k = A^{-1} \iff \rho(I - AA_0) < 1$

Exercice 02 :

$A \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) < 1$

- on pose : $B_m = I + A + \dots + A^m$

Montrer que :

$(I - A)$ est inversible et que $\lim_{m \to +\infty} B_m = (I - A)^{-1}$

Si λ est valeur propre de A, $1 - \lambda$ est valeur propre de $I - A$ et puisque

$|\lambda| < 1 \Rightarrow 1 - \lambda \neq 0$

$\Rightarrow I - A$ est inversible

$B_m = I + A + \dots + A^m$

$A . B_m = A + A^2 + \dots + A^{m+1}$

$\Rightarrow (I - A) B_m = I - A^{m+1}$

* Si $m \to +\infty$ $A^{m+1} \longrightarrow 0$

$(\rho(A) < 0)$

$\Rightarrow \lim_{m \to +\infty} (I - A) B_m = I$

$\Rightarrow \lim_{m \to +\infty} B_m = (I - A)^{-1}$

Exercice 03 :

Methode de Relaxation

$0 < \omega < 2$ est necessaire pour les CV

montrer que si A est Hermitienne def positive alors la condition est suffisante

Le 04/12/2016

Exercice :

$\alpha \neq 0$, $A = (a_{ij})_{ij=1}^{n}$

$x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1} A) x^{(k)} + \alpha D^{-1} b$ (1)

1/- Montrer que si (1) CV la limite est solution de $Ax = b$

2/- exprimer les coeff de $D^{-1}A$ en fct de A

3/- on suppose que : $0 \leq \alpha \leq 1$ est que A est a diagonale stric dominante

* Montrer que :

1/- $\| I - \alpha D^{-1} A \|_\infty < 1$

Solution Exo :

1/- $x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1}A)x^{(k)} + \alpha D^{-1}b$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1}A)\lim\limits_{k\to+\infty} x^{k} + \alpha D^{-1}b$

$x^* = (I - \alpha D^{-1}A)x^* + \alpha D^{-1}b$

$\Rightarrow Ax^* = b$

$$D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}A = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$J_\alpha = (I - \alpha D^{-1}A) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{si } i = j \\ -\dfrac{\alpha a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Pour $1 \leq i \leq n$

$$\sum_{i=1}^{n} |J\alpha| = |J\alpha|_{ii} + \sum_{j=1}^{n} |J\alpha|_{ij}$$

$$= |1-\alpha| + \alpha \sum_{j=1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leq$$

$$\leq |1-\alpha| + \alpha < 1$$

$$\Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |J\alpha| < 1$$

$\Rightarrow \|J_\alpha\|_\infty < 1$

$\rho(J_\alpha) \leq \|J_\alpha\|_\infty < 1$

$\Rightarrow$ (1) est c.v

. Si $\alpha = 1$:

Le 08/01/2017

Calculer des valeurs propres :

Rappel :

Soient $A \in M(\mathbb{C})$

Déf : on appelle valeur propre de A le nombre λ pour lequel il existe $u \in \mathbb{C}^n$ $(u \neq 0)$ tq :

$Au = \lambda u$.

Le couple (λ, u) est appelé élément propre.

Remarque :

1/- $(A - \lambda I)u = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u \in Ker(A - \lambda I)$

2/- $(A - \lambda I)$ est singulaire

3/- $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est le polynôme caractéristique de A

Scanned by CamScanner

4/- dim Ker $(A-\lambda I)$ est égale en plus à l'ordre de multiplicité de λ

5/- A et B sont dites semblable s'il existe S inversible tq :

$B = S^{-1} A S$

6/- deux matrices semblable ont les mêmes valeurs propres (Exercice)

7/- si u et v soit les valeurs propres associés à λ pour A et B alors :

$v = S^{-1} u$

8/- $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

9/- $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

10/- $Au = \lambda u$

a/- $(A - \alpha I)u = (\lambda - \alpha) u$

b/- $A^k . u = \lambda^k . u \quad \forall k \in \mathbb{N}$

c/- $A^{-1} u = \frac{1}{\lambda} u$.

d/- $tr(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

e/- $P_A(A) = 0$

Th :

Les valeurs propres de A^* sont les conjuguées des valeurs propres de A.

A et A^T ont les même valeurs propres

- Preuve :

$\det(A - \bar{\lambda} I) \overset{?}{=} \overline{\det(A - \lambda I)}$

$\overset{?}{=} \overline{\det(A - \lambda I)} = 0$

Th :

A est diagonalisable si

dim $(\ker(A - \lambda I))$ = l'ordre de multiplicité λ pour toutes v.p. λ