

Annalyse convexe

Partie de Cours

Notion convexité

Ensembles (Partie d'espace vectoriel)

fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

convexité d'un ensemble

Def: Soit E un $\mathbb{R}$ ev (non vide)

Pour $x, y \in E$ on appelle segment de extrémités x, y l'ensemble noté $[x, y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$

Def: une Partie non vide P d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel est dite convexe si, $\forall x, y \in P, [x, y] \subset P$

Exemple: Dans l'espace $\mathbb{R}^2$

$C((0,0), 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$ n'est pas convexe

$D((0,0), 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$

Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D((0,0), 1)$

$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \subset D((0,0), 1)$

$\exists \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1] : z = t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2)$

$$= (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2)$$

D'une part on a :

$$x_1^2 + y_1^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad x_2^2 + y_2^2 \leq 1$$

$$(tx_1 + (1-t)x_2)^2 + (ty_1 + (1-t)y_2)^2 \leq 1 \quad ??$$

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$ l'ensemble

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \right\} \text{ est convexe}$$

$\forall i = \overline{1, n}, x_i \geq 0$ appelé out hant

Positif

Propriétés :

01) Si C_1 et C_2 sont des convexes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E alors $C_1 + C_2$ est un convexe

$$C_1 + C_2 = \{ x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2 \}$$

Soit $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in C_1 + C_2$ Pour tout $t \in [0, 1]$

$$t(x_1 + x_2) + (1-t)(y_1 + y_2) = \underbrace{tx_1 + (1-t)y_1}_{\in C_1} + \underbrace{tx_2 + (1-t)y_2}_{\in C_2}$$

$\in C_1 + C_2$

02) Si C est convexe alors Pour tout réel α :

αC convexe

$$\alpha C = \{ \alpha x, x \in C \}$$

03) Soit $\{C_i\}_{i \in I}$ une famille de Convexe de E

Alors l'Intersection $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe

04) Soit $A: E \rightarrow F$ une application linéaire entre E et F

Alors:

- l'img d'une convexe de E par A est un convexe.

* L'Img réciproque d'un convexe de F est convexe

$C \subset F, A: E \rightarrow F$

$$A^{-1}(C) = \{x \in E : Ax \in C\}$$

05) Soit $C_1 \subset E, C_2 \subset F$, E et F sont des espaces vectoriels.
 $C_1 \times C_2$ est convexe $\Leftrightarrow C_1$ et C_2 sont convexes

Exercice:

Soit f une transformation affine de E vers F

$$f: E \rightarrow F$$

$$x \mapsto Ax + a$$

où A est un opérateur linéaire E vers F , et $a \in F$

Montrer que si C est convexe dans E alors $f(C)$

est convexe.

$$P \subset E \mapsto \{P\} \rightarrow x = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n \quad \left(\begin{array}{l} \alpha_i \in \mathbb{R} \\ P_i \in P \end{array} \right)$$

$$P \subset E \rightarrow \text{conv}(P) \ni x = ?$$

Def°

On dit que la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n h_i x_i$ est convexe si $\forall i = \overline{1, n}$, $0 \leq h_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^n h_i = 1$

Notion de Combinaison Convexe°

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$, n vecteurs d'un ev Réel E .

La combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ est dite

Convexe si $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_i \leq 1, \forall i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \end{array} \right.$

Def° Soit P une Partie non vide de E . On appelle l'enveloppe convexe de P notée convexe P , le Plus Petit Convexe, contenant P (au sens d'inclusion)

Proposition

Un ensemble P est dite convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments

← trivial (Par déf)

⇒ Supposons convexe et montrer que contient toutes les combinaisons convexes d'éléments

, Comme P est convexe, il contient les combinaisons convexes de 2 éléments x_1, x_2 de P

* supposons que P contient les combinaisons convexes de n éléments de P et montrons qu'il contient celles de $(n+1)$ éléments

$$\text{Soit } x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$$

et $x_i \in P, i = \overline{1, n+1}$

$(\alpha_1 \neq 1)$

$$x = \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i x_i$$

$$= \alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} x_i$$

Posons

$$y = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} x_i$$

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_1} = \frac{1}{1 - \alpha_1} \underbrace{\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i}_{1 - \alpha_1} = 1 \quad x \in P$$

Ainsi P contient toutes les combinaisons convexes de P

Th^o

Soit P une partie de E

$$\text{conv } P = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n t_i = 1, x_i \in P \right\}$$

Preuve^o convexe P est un convexe qui contient P
donc^o (selon la Proposition) il contient toutes les
combinaisons convexes d'éléments de P

donc^o l'inclusion $\supset$ est vraie

Montrons l'inclusion ($\subset$)

Remarquons d'abord que $\left[\sum_{i=1}^m t_i x_i, m \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^m t_i = 1, x_i \in P \right]$ est convexe.

Soit $\sum_{i=1}^m t_i x_i, \sum_{i=1}^{m_2} B_i y_i$ deux combinaisons
convexes d'éléments de P , $\alpha \in [0, 1]$

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^{m_1} t_i x_i \right) + (1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^{m_2} B_i y_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1} \alpha t_i x_i + \sum_{i=1}^{m_2} (1-\alpha) B_i y_i$$

$$\# \sum_{i=1}^{m_1} \alpha t_i + \sum_{i=1}^{m_2} (1-\alpha) B_i = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{m_1} t_i}_1 +$$

$$\underbrace{(1-\alpha) \sum_{i=1}^{m_2} B_i}_1 = 1$$

*

On déduit que $\left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n t_i = 1, x_i \in P \right\}$
 est convexe qui contient P

Comme $\text{conv } P$ est le Plus Petit convexe contenant
 alors $\circ$

$$\text{conv } P \subset \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=1}^n t_i = 1, x_i \in P \right\}$$

Exercice

A, B deux Parties de E

$$A \subset B \Rightarrow \text{conv } A \subset \text{conv } B$$

$$\text{conv}(A+B) = \text{conv } A + \text{conv } B$$

Déterminer $\text{conv}(\text{conv } A) = ?$

or) si $A \subset B \Rightarrow \text{conv } A \subset \text{conv } B$

Comme $B \subset \text{conv } B$ et $A \subset B$ alors $A \subset B \subset \text{conv}(B)$

et comme $\text{conv}(A)$ est le Plus Petit convexe
 contient A

alors $\circ$ $\text{conv } A \subset \text{conv } B$

(2) Mq $\text{conv}(A+B) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$

On a $\circ$

$A \subset \text{conv } A$ et $B \subset \text{conv } B$

alors $A+B \subset \text{conv } A + \text{conv } B \dots (*)$

et On a°

$$A+B \subset \text{conv}(A+B)$$

Donc° $\text{conv}(A+B) \subset \text{conv} A + \text{conv} B$

Car° $\text{conv} A + \text{conv} B$ est un convexe

Ma°

* $\text{conv}(A) + \text{conv}(B) \subset \text{conv}(A+B)$

Ph° (de Carathéodory)

Soit E un esp vectoriel de dimension finie $x_1, x_2, \dots, x_p$ des vecteurs de E

Def° On dit que les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont affinement indépendants si $p=0$ ou si l'une des conditions suivantes est satisfaite°

01) - $\sum_{i=0}^p \alpha_i x_i = 0$ et $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = \overline{0, p}$

02) - les vecteurs $\{x_i - x_0, i = \overline{1, p}\}$ sont linéairement indépendants.

03) - $\forall j \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$ les vecteurs $\{x_i - x_j, i = \overline{0, p}, i \neq j\}$ sont linéairement indépendants

Ph°

Soit P une partie d'un ev de dimension n
Alors tout élément s de $\text{conv} P$ peut s'écrire comme

combinaison convexe de $(n+1)$ éléments de P

Preuve

Soit $x \in \text{Conv } P$ et x une combinaison convexe de $(n+1)$ éléments de P
 ie $x = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ avec $\sum_{i=1}^m t_i = 1$, $x_i \in P$

on démontre que x peut s'écrire comme convexe de $(m-1)$ éléments de P

Comme $m \geq n+1$ les vecteurs $\{x_i - x_1, i = 2, \dots, m\}$
 ont $(m-1) \geq n$ vecteurs sont linéairement dépendants

Donc On peut trouver $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \neq 0_{\mathbb{R}^m}$
 tel que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$$

Comme $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \neq 0$ alors $\exists R = \alpha_R \neq 0$

et Par suite

$$x_R = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_R} x_i$$

$$\text{et } x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m t_i x_i - t_R \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_R} x_i$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m (t_i - t_R \frac{\alpha_i}{\alpha_R}) x_i$$

Ainsi x est une combinaison linéaire de $(m-1)$ éléments de P

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m (t_i - t_R \frac{\alpha_i}{\alpha_R}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m t_i - t_R \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_R}$$

$$\underbrace{\sum_{i \neq R} 1}_{1 - t_R}$$

$$= 1 - t_R - t_R \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_R}$$

$$= 1 - t_R \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_R} \right)$$

$$= 1 - \frac{t_R}{\alpha_R} \left(\alpha_R + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq R}}^m \alpha_i}_{=0} \right) = 1$$

La condition $i \neq R$

$$t_i - t_R \frac{\alpha_i}{\alpha_R} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_R}{t_R} \geq \frac{\alpha_i}{t_i} \quad \forall i \neq R$$

$$\left\{ \frac{\alpha_i}{t_i}, i = \overline{1, m} \right\}$$

On Prend $\frac{\alpha_R}{t_R} = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\alpha_i}{t_i} \right\} \quad (*)$

si on prend $\frac{\alpha_R}{t_R}$ selon $(*)$, x serait une combinaison convexe de $(m-1)$ élément de P .

Rmq : Si $(m-1) \geq n+1$ le même raisonnement se
 peut se remanier à une combinaison de $(m-2)$
 éléments et ainsi de suite jusqu'à une combinaison
 convexe de $(n+1)$ éléments.

Propositions

L'enveloppe convexe d'une Partie compacte dans un
 esp^l de dim finie est compacte

Preuve

PCE ($\dim E = n < \infty$)

Si P est compacte $\Rightarrow \text{conv } P$ est compacte

supposons que P est compacte dans E

Donc : P est bornée et est fermé

$\exists c > 0, \|x\| \leq c, \forall x \in P$

$\forall (x_n)_n \subset P$: si $x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in P$

Montrons que $\text{conv } P$ est compacte

soit $x \in \text{conv } P \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_m \in P$
 $\exists t_1, t_2, \dots, t_m : 0 \leq t_i \leq 1$
 et $\sum_{i=1}^m t_i = 1$

bg : $x = \sum_{i=1}^m t_i x_i$

Ainsi :

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^m t_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^m t_i \|x_i\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^m t_i C = C$$

Ceci entraîne que $\text{conv} P$ est bornée

Montrons la fermeture fermeture de conv P :

Soit $(x_n)_n \subset \text{conv} P$ tq $x_n \rightsquigarrow x$

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{i=1}^{n+1} t_{n,i} x_{n,i} \quad t_{n,i} \in [0,1], \sum_{i=1}^{n+1} t_{n,i} = 1,$$

$$x_{n,i} \in P$$

$$\{x_{n,i}\}_n \subset P$$

$$\left\{ (t_{m,1}, t_{m,2}, \dots, t_{m,n+1}) \right\}_m \in [0,1] \times [0,1] \times \dots \times [0,1]$$

$$\dots \times [0,1]$$

Comme P est compacte, $\{x_{n,i}\}$ admet une sous-suite $\{x_{n_k,i}\}$ conv $x_i \in P$

Aussi la compacité de $[0,1]^{n+1}$ entraîne l'existence d'une sous-suite $\{(t_{m_k,1}, t_{m_k,2}, \dots, t_{m_k,n+1})\}_k$ convergente vers $(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$

$$x_m = \sum_{i=1}^{n+1} t_{m,i} x_{n,i} = t_{m,1} x_{m,1} + t_{m,2} x_{m,2} + \dots$$

$$+ t_{m,(n+1)} x_{m,(n+1)}$$

Par passage à la limite ($m \rightarrow \infty$)

On obtient :

$$x = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{n+1} x_{n+1}$$

Il reste à établir que $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \circ \quad t_{m,1} + t_{m,2} + \dots + t_{m,n+1} = 1$$

Passage à la limite ($m \rightarrow \infty$)

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{n+1} = 1$$

Donc $x \in \text{Conv} P$

Notions de Faces et Points extrêmes par un convexe.

Def:

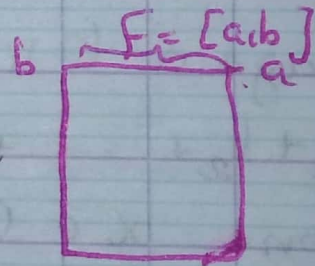
Soit C un convexe. Une Partie F de C est dite Face
de C si

- 1) F est convexe
- 2) $\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1]$
 $(1-t)x + ty \in F \Rightarrow x, y \in F$

On appelle point extrême toute face réduite à un
seul point

L'ensemble des points extrêmes de C est noté $\text{ext}(C)$

$\{a\}$ est un point extrême



Conséquences:

Toute intersection de faces est une face

Def:

Soit P une Partie d'un espace vectoriel E , On dit que
 P est un sous-espace affine si $\forall x, y \in P, \forall t \in \mathbb{R}$
 $tx + (1-t)y \in P$

on appelle l'enveloppe affine de P le plus petit
(pour C)

sous-espace affine qui contient P et on note

aff P

Exemple:

Soit f une forme linéaire sur E , Alors l'ensemble $\{x \in E, f(x) = a, a \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace affine

sur la séparation de convexes:

Def:

On appelle hyper plan de $\mathbb{R}^n$, tout sous-espace affine de dimension $(n-1)$. Autrement dit, tout sous-ensemble de la forme $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle = B\}$ avec $b \in \mathbb{R}^n - \{0\}, B \in \mathbb{R}$

A chaque hyperplan H correspond deux demi-espace ouverts

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle < B \right\}, \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle > B \right\}$$

$\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle b, x \rangle \end{array} \right.$

et deux demi-espace fermés

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle \leq B \right\} \text{ et } \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle \geq B \right\}$$

Def:

On dit que deux parties E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^n$ sont séparées s'il existe un hyperplan H de tq:
 E_1 sont contenu dans l'un demi-espace et E_2 dans l'autre demi-espace

Autrement, $\exists b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
 $\inf_{x \in E_1} \langle b, x \rangle > \sup_{x \in E_2} \langle b, x \rangle$

$$\exists H \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle = B\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle < B\} \supset E_1$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle > B\} \supset E_2$$

* On dit que E_2, E_1 sont strictement séparées ou (fortement séparées) s'il existe $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\inf_{x \in E_1} \langle b, x \rangle < \sup_{x \in E_2} \langle b, x \rangle$$

Lemme:

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$

Si E et x sont séparés alors $x \notin \bar{E}$

Preuve:

Supposons que E et $\{x\}$ sont séparés

Donc $\exists b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} :$

$$\sup_{y \in E} \langle b, y \rangle < \langle b, x \rangle$$

x Par l'absurde, supposons que $x \in \bar{E}$

$$\exists \pi > 0 \quad B(x, \pi) \subset E$$

Alors existe $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon b \in B(x, \pi) \subset E$
on aurait

$$\langle b, x + \varepsilon b \rangle \leq \langle b, x \rangle ?$$

$$\langle b, x + \varepsilon b \rangle = \langle b, x \rangle + \varepsilon \|b\|^2$$

> 0

$$\langle b, x + \varepsilon b \rangle > \langle b, x \rangle$$

ce que l'absurd.

Ph^o Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ alors
on a l'équivalence.

$$\boxed{1} \quad x \notin \bar{C}$$

$$\boxed{2} \quad C \text{ et } \{x\} \text{ sont fortement séparés}$$

Preuve^o

Montrons que $(1) \Rightarrow (2)$

supposons que $x \notin \bar{C}$

selon le Théorème de Projection orthogonale
il existe $x_0 \in C$ $x_0 = P_C x$

Posons^o $b = x - x_0$

Alors^o

$$\langle x - x_0, y - x_0 \rangle = \langle b, y - x_0 \rangle \leq 0, \forall y \in C$$

Donc

$$\langle b, y \rangle \leq \langle b, x \rangle \quad \forall y \in \bar{C}$$

$$\leq \langle b, x - b \rangle$$

$$\langle b, x \rangle - \|b\|^2 \quad \forall y \in \bar{C}$$

$$\underline{\langle b, y \rangle} \leq \underline{\langle b, x \rangle - \|b\|^2} \quad \forall y \in \underline{\bar{C}} = \underline{C}$$

$$\langle b, x \rangle = \|b\|^2$$

Alors

$$\sup_{y \in \bar{C}} \langle b, y \rangle \leq \langle b, x \rangle - \|b\|^2$$

$$y \in \bar{C} \quad \langle b, x \rangle$$

Comme

$$C \subset \bar{C} \quad \text{alors}$$

$$\sup_{y \in C} \langle b, y \rangle \leq \sup_{y \in \bar{C}} \langle b, y \rangle$$

$$\text{D'où} \quad \sup_{y \in C} \langle b, y \rangle \leq \langle b, x \rangle$$

Exercice

Si f est continue alors $\sup f|_C = \sup f$
Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1)

on suppose que C et $\{x\}$ sont fortement séparés

Montrons que $x \notin \bar{C}$

$$\exists b \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$$\sup_{y \in C} \langle b, y \rangle < \langle b, x \rangle$$

Comme l'application $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et continue
 $y \mapsto \langle b, y \rangle$

alors :

$$\sup_{y \notin C} \langle b, y \rangle = \sup_{y \notin \bar{C}} \langle b, y \rangle$$

Donc

$$\sup_{y \in \bar{C}} \langle b, y \rangle < \langle b, x \rangle$$

$$\Rightarrow x \in C$$



Corollaire :

Tout convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ est une intersection de demi-espaces fermés qui la contiennent

$$C = \bigcap \{ H \text{ demi-espaces fermés, } H \subset C \}$$

Preuve

Comme chaque demi espaces H contient C alors

$$\Leftrightarrow x \notin \bar{C}$$

$$\cap \{H_i\} \supset C$$

Il reste alors a montrer que $\bigcap \{H_i, H_i\} \subset C$

$$\cap \{H, H \supset C\} \subset C$$

$$A \subset B \Leftrightarrow C_B \subset C_A$$

on montre que $x \notin C \Rightarrow x \notin \cap \{H$

L'enveloppe convexe fermée

Soit P une partie d'un espace vectoriel E comme l'intersection fermée est un convexe fermé on peut parler du plus petit fermé contenant P

C'est l'intersection de tous les fermés contenant P est notée $\overline{\text{conv } P}$

$$\overline{\text{conv } P} = \bigcap \{ C, C \text{ convexe fermé}, C \supset P \}$$

Remarque

Si P est un convexe fermé alors $\overline{\text{conv } P} = P$

Proposition

Soit P_1 et P_2 deux parties E Alors

$$(1) P_1 \subset P_2 \Rightarrow \overline{\text{conv } P_1} \subset \overline{\text{conv } P_2}$$

$$(2) P \subset \overline{\text{conv } P} \subset \overline{\text{conv } \overline{P}} \subset \overline{\overline{\text{conv } P}} = \overline{\text{conv } \overline{P}} = \overline{\text{conv } P}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

Montrons que

$$\overline{P_1} \subset \overline{P_2} \Rightarrow \overline{\text{conv } P_1} \subset \overline{\text{conv } P_2}$$

Supposons que $\overline{P_1} \subset \overline{P_2}$

Comme $P_2 \subset \overline{\text{conv}} P_2$
alors

$$P_1 \subset \overline{\text{conv}} P_2$$

Donc

$$\overline{\text{conv}} P_1 \subset \overline{\text{conv}} P_2$$

fonction Convexe

Soit E un espace vectoriel réel on note par
 $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Dans la Pratique, le Problème
 $\min \{ f(x), x \in X \}$

où X est une partie est équivalent au Problème

$$\min \{ \tilde{f}(x), x \in E \}$$

$$\text{ou } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{si } x \in E \setminus X \end{cases}$$

Déf. 1 Le domaine d'une fonction
 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points x de E tels que $f(x) < +\infty$
et on le note $\text{dom } f$

Def^o
 on appelle l'epigraphe d'une fonction $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une partie de $E \times \mathbb{R}$ notée $\text{epi } f$ définie par
 $\text{epi } f = \{ (x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} ; f(x) \leq \alpha \}$ et l'epigraphie
 est notée par epig_s , $\text{epig}_s = \{ (x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} ; f(x) \leq \alpha \}$

Def^o (3)
 Une fonction $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite convexe si $\text{epi } f$
 est convexe

ie $\forall (x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi } f, \forall t \in [0, 1]$

$$t(x, \alpha) + (1-t)(y, \beta) \in \text{epi } f$$

$$(tx + (1-t)y, t\alpha + (1-t)\beta)$$

Proposition

Soit $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction

① si f est convexe alors $\text{dom } f$ est convexe

② f est convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in \text{dom } f, \forall t \in [0, 1]$
 $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

Preuve:

Suppose que f est convexe et montrons que $\text{dom } f$ est convexe.

Soit $x, y \in \text{dom } f$, $t \in]0, 1[$

$$x \in \text{dom } f \Leftrightarrow f(x) < \infty$$

$$y \in \text{dom } f \Leftrightarrow f(y) < \infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f(x) < \alpha$$

$$f(y) < \beta$$

(*)

$$tx + (1-t)y \in \text{dom } f$$

De (*) on déduit que

$$(x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi } f$$

Comme f est convexe, $\text{epi } f$ est convexe alors

$$t(x, \alpha) + (1-t)(y, \beta) \in \text{epi } f$$

$$\text{i.e. } t(x, \alpha) + (1-t)(y, \beta) \in \text{epi } f$$

D'où

$$f(tx + (1-t)y) \leq t\alpha + (1-t)\beta$$

Ainsi

finie

$$tx + (1-t)y \in \text{dom } f$$

② f est convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in \text{dom } f, \forall t \in [0, 1]$
 $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t)f(y)$
 Supposons que f est convexe donc $\text{epi } f$ est convexe

Soit $x, y \in \text{dom } f, t \in [0, 1]$,

et $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(x) \\ f(y) \leq f(y) \end{array} \right. \Rightarrow (x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi } f$

Alors $t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y)) \in \text{epi } f$

Donc

$(tx + (1-t)y, t f(x) + (1-t)f(y)) \in \text{epi } f$

D'où

$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t)f(y)$

Supposons que

$\forall x, y \in \text{dom } f, \forall t \in [0, 1]$

$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t)f(y)$

Montrons que $\text{epi } f$ est convexe

Soit $(x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi } f, t \in [0, 1]$

$t(x, \alpha) + (1-t)(y, \beta) \in \text{epi } f \Leftrightarrow (tx + (1-t)y,$

$t\alpha + (1-t)\beta) \in \text{epi } f$

$$\begin{aligned}
 & f(x) \leq \alpha \\
 & \text{et que } f(y) \leq \beta \\
 & f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t)f(y) \\
 & \leq t\alpha + (1-t)\beta
 \end{aligned}$$

Donc $[tx + (1-t)y, t\alpha + (1-t)\beta] \in \text{epi } f$
 et $\text{epi } f$ est convexe.

Définition

On dit que une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 est strictement convexe si

$$\forall x, y \in \text{dom } f, x \neq y, \forall t \in]0, 1[\\
 f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$$

Dans le cas où E est evn on peut parler
 de la convexité forte définie
 par :

Définition :

$f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite fortement convexe
 de module $\alpha > 0$ si

$$\forall x, y \in \text{dom } f, \forall t \in [0, 1].$$

$$\frac{\alpha}{2} t (1-t) \|x-y\|^2 + f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Théorème : Si X est une partie convexe d'un espace vectoriel E et f est strictement convexe sur X alors le problème

$$(I) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \end{cases} \quad \text{admet au plus une solution}$$

Preuve :

procédons par l'absurde. supposons alors qu'il existe $x_1 \neq x_2$ deux solutions du problème (I)

$$\begin{cases} x_1 \in X \\ f(x_1) = \min_{x \in X} f(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 \in X \\ f(x_2) = \min_{x \in X} f(x) \end{cases}$$

La convexité de X entraîne que $\frac{x_1 + x_2}{2} \in X$

La convexité stricte de f donne

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) < \min_{x \in X} f(x)$$

Ce qui est absurde

L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions:

soit I un ensemble d'indices, Pour tout $i \in I$
On suppose donnée une fonction $f_i: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$

$$(\{f_i\}_{i \in I}, f_i: i \in I \rightarrow \bar{\mathbb{R}})$$

On définit : $f: \sup_{i \in I} f_i: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$

$$x \mapsto f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$

(elle est bien définie)

car la borne supérieure existe

$$\sup_{i \in I} \{f_i(x)\}$$

Par définition, on appelle f l'enveloppe supérieure des fonctions $f_i, i \in I$

Proposition:

soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fonctions
définies de E vers $\bar{\mathbb{R}}$ alors

$$\text{epi} \left(\sup_i f_i \right) = \cap \left(\text{epi} f_i \right)$$

Preuve:

$$\text{epi} g = \{ (x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} : g(x) \leq \alpha \}$$

$$\text{soit } (x, \alpha) \in \text{epi} \left(\sup_{i \in I} f_i \right)$$

$$\text{Donc } \sup_{i \in I} f_i(x) \leq \alpha$$

$$\sup_{i \in I} \{ f_i(x) \} \leq \alpha$$

Par conséquent $f_i(x) \leq \alpha, \forall i \in I$

$$(x, \alpha) \in \text{epi} f_i, \forall i \in I$$

$$\text{Ainsi } (x, \alpha) \in \cap_{i \in I} \text{epi} f_i$$

Fonction sous-linéaire :

Définition :

Une fonction $\sigma : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
est dite sous-linéaire si :

- * σ est convexe

* σ est positivement homogène
($\forall t > 0, \forall x \in E, \sigma(tx) = t \sigma(x)$)

Exemples:
la norme

d'un $e.v$ est une fonction
sous linéaire

proposition :

soit $\sigma: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction à domaine
non vide. Alors on l'équivalence:

1/ σ est sous-linéaire

2/ $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x_1, x_2 \in \text{dom } \sigma$

$$\sigma(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 \sigma(x_1) + t_2 \sigma(x_2)$$

Fonction support (d'appui)

Soit E un espace euclidien pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on définit la fct support δ_P d'une partie P non vide de E par

$$\delta_P : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$d \mapsto \delta_P(d) = \sup_{x \in P} \langle d, x \rangle$$

Propriétés :

Soit P_1, P_2 des parties non vides de E

Alors :

① δ_P est sous-linéaire

② $\delta_{P_1} \leq \delta_{P_2} \Leftrightarrow \overline{\text{conv} P_1} \subset \overline{\text{conv} P_2}$

③ $\delta_{P_1} = \delta_{P_2} \Leftrightarrow \overline{\text{conv} P_1} = \overline{\text{conv} P_2}$

④ $\delta_P = \delta_{\overline{\text{conv} P}} = \delta_{P^*}^* = \delta_{\overline{\text{conv} P}}$

01 mq δ_P est sous-linéaire :

δ_P est sous-linéaire $\Leftrightarrow \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, et $d_1, d_2 \in E$
 $\delta_P(t_1 d_1 + t_2 d_2) \leq t_1 \delta_P(d_1) + t_2 \delta_P(d_2)$

Soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $d_1, d_2 \in E$

$$\delta_P(t_1 d_1 + t_2 d_2) = \sup_{x \in P} \langle t_1 d_1 + t_2 d_2, x \rangle$$

$$= \sup_{x \in P} \{ t_1 \langle d_1, x \rangle + t_2 \langle d_2, x \rangle \}$$

$$\leq \sup_{x \in P} t_1 \langle d_1, x \rangle + \sup_{x \in P} t_2 \langle d_2, x \rangle$$

puisque $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{x \in P} t_1 \langle d_1, x \rangle + \sup_{x \in P} t_2 \langle d_2, x \rangle = t_1 \sup_{x \in P} \langle d_1, x \rangle$$

$$+ t_2 \sup_{x \in P} \langle d_2, x \rangle$$

Donc $\mathcal{L}_P$ est sous linéaire

$$\sup \left\{ \overbrace{\frac{1+x}{x \in [0,1]}}^A + \overbrace{\frac{3+x}{x \in [0,1]}}^B \right\}$$

$$a+b \in A+B$$

$$a+b \in \sup(A+B)$$

$$\sup_{b \in B} (a+b) \leq \sup(A+B)$$

$$(a + \sup B) \in \sup(A+B)$$

$$\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$$