

EXERCICE SEMI-GROUPE

LADGHEM OMAR

SEMI-GROUPES

Exercice 1. On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), & X(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

où $A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (1) (a) Rappeler la solution de ce système lorsque A ne dépend pas de t .
(b) On suppose que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la solution s'écrit

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} X_0.$$

- (2) On suppose que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on a $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Montrer que la solution s'écrit

$$X(t) = \exp\left(\int_0^t A(s) ds\right) X_0.$$

- (3) (a) On suppose que

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la solution du système est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 + (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} X_0.$$

- (b) Montrer que

$$\exp\left(\int_0^t A(s) ds\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^t - 1) \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Quelle est votre conclusion ?

Exercice 2. Soit E un espace de Banach, et soient $A, B \in L(E)$ deux endomorphismes bornés.

- (1) Redémontrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si les séries absolument convergentes sont convergentes.
- (2) Rappeler pourquoi on peut définir l'exponentielle

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

- (3) Redémontrer l'inégalité $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$. En déduire une estimation de $\|e^A\|$.
- (4) Montrer que $e^A e^B = e^{A+B}$ pour deux endomorphismes A, B qui commutent.
- (5) Montrer que $t \rightarrow e^{tA}$ est un semi-groupe uniformément continu.

Exercice 3. Soit E un espace de Banach, on considère l'application exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : L(E) &\rightarrow L(E) \\ A &\mapsto e^A. \end{aligned}$$

- (1) Montrer que $\exp$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle. Montrer que $\exp$ est une application de classe C^∞ sur $L(E)$.
- (2) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\exp : B_{L(E)}(0, \delta) \rightarrow B_{L(E)}(\text{Id}_E, \varepsilon)$ soit un difféomorphisme. On notera $\log : B_{L(E)}(\text{Id}_E, \varepsilon) \rightarrow B_{L(E)}(0, \delta)$ l'inverse.
- (3) Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi groupe uniformément continu, i.e. tel que

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}_+ &\rightarrow L(E) \\ t &\mapsto S_t \end{aligned}$$

est continue. Montrer qu'il existe t_0 et une fonction $t \rightarrow A_t$ telle que

$$S_t = e^{A_t}, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

- (4) Montrer que $A_{nt} = nA_t$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, nt \in [0, t_0]$.
- (5) Montrer que $A_{st} = sA_t$ pour tous $s \in \mathbb{Q}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, st \in [0, t_0]$.
- (6) Montrer que $A_{st} = sA_t$ pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, st \in [0, t_0]$.
- (7) En déduire que les semi-groupes uniformément continus sont les exponentielles d'applications linéaires bornées.

Exercice 4. Soit $E = L^2(\mathbb{R}^n)$, on considère l'application "translation"

$$(S_t u)(x) = u(x + t), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad t \geq 0.$$

- (1) Montrer que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu.
- (2) Déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.

SEMI-GROUPES

Définition 1. Soit $A : D(A) \rightarrow E$ un opérateur non-borné, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble des nombres complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(A - \lambda) : D(A) \rightarrow E$ soit inversible d'inverse $(A - \lambda)^{-1}$ continu. Le spectre de A est le complémentaire de l'ensemble résolvant.

Exercice 1. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach E vérifiant $S_1 = \text{Id}_E$.

- (1) Montrer que $(S_t)_{t \geq 0}$ est périodique.
- (2) Soit A le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S_t)_{t \geq 0}$. Montrer que le spectre de A est contenu dans $2\pi i\mathbb{Z}$.
- (3) Supposons de plus que E est un espace de Hilbert et que S_t est unitaire. Montrer que A/i est autoadjoint.

Exercice 2. On considère la mesure $d\mu = e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$, et l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Pour $f \in H$, on définit

$$N_t f(x) = \int f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) d\mu(y).$$

- (1) Montrer que $d\mu$ est une mesure de probabilité.
- (2) Le but de cette question est de montrer que N_t est un endomorphisme de H pour tout $t \geq 0$.
 - (a) Montrer que

$$|N_t f(x)|^2 \leq \int |f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)|^2 d\mu(y).$$

- (b) Montrer que $\|N_t f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$ pour tout $f \in H$.
- (3) Montrer que $N_0 f = f$ et que $N_t \circ N_s = N_{t+s}$.
- (4) Montrer que $(N_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contraction. On l'appelle le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.
- (5) Soit A le générateur infinitésimal de N_t . Montrer que la restriction de A à $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset H$ est $\partial_x^2 - x\partial_x$.

Exercice 3. Soient A, B deux opérateurs non bornés. On note $A \subset B$ si $D(A) \subset D(B)$ et $Au = Bu$ pour tout $u \in D(A)$.

- (1) Soit A un opérateur fermé à domaine dense. Montrer que A^* est à domaine dense. Déterminer $(A^*)^*$.
- (2) Soit A un opérateur maximal dissipatif, montrer que A^* est maximal dissipatif.
- (3) Montrer que pour deux opérateurs maximaux dissipatifs $D(A) \subset D(B)$ et $B|_{D(A)} = A$ entraîne $A = B$.
- (4) Montrer que le générateur infinitésimal de l'adjoint d'un semi-groupe de contraction est l'adjoint du générateur infinitésimal du semi-groupe.

Exercice 4. On considère sur $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ l'application linéaire suivante

$$S_t f(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|} \hat{f})$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier.

- (1) Montrer que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction.
- (2) Déterminer le générateur infinitésimal de S_t .
- (3) Montrer l'égalité suivante

$$e^{-r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-r^2/4u} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

(On pourra par exemple calculer les transformées de Fourier des membres de gauche et de droite de cette égalité.)

- (4) Dédurre de l'égalité précédente la transformée de Fourier inverse de $e^{-t|\xi|}$.
- (5) Montrer que

$$S_t f(x) = c_n \int \frac{t}{(|x-y|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y) dy$$

où c_n est une constante que l'on déterminera.

- (6) Montrer que $u(t, x) = S_t f(x)$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta_x u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

SEMI-GROUPES

Exercice 1. On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), & X(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

où $A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(1) (a) Rappeler la solution de ce système lorsque A ne dépend pas de t .

On a $X(t) = e^{tA}X_0$.

(b) On suppose que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la solution s'écrit

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} X_0.$$

La matrice A admet $i, -i$ pour valeurs propres, et se diagonalise sous la forme

$$A = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Son exponentielle se calcule donc facilement

$$e^{tA} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(2) On suppose que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on a $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Montrer que la solution s'écrit

$$X(t) = \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) X_0.$$

Remarquons que pour le produit matriciel (non commutatif!), on a

$$\frac{d}{dt} A^n(t) \neq n \dot{A}(t) A^{n-1}(t)$$

sauf si par exemple $[\dot{A}, A] = 0$. Par conséquent, si $[A(t), A(s)] = 0$ pour tout s, t , alors

$$\left[A(t), \left(\int_0^t A(s) ds \right) \right] = \int_0^t [A(t), A(s)] ds = 0$$

et donc en dérivant la série exponentielle terme à terme

$$\frac{d}{dt} \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) = A(t) \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right).$$

Le but du reste de cet exercice est de montrer que cette formule peut ne pas être valable dans le cas où la matrice A dépend de t .

(3) (a) On suppose que

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la solution du système est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 + (t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} X_0.$$

Le système (est trigonal et) se résout

$$\begin{cases} \dot{x} = ty \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

explicitement

$$\begin{cases} \dot{x} = x(0) + (t-1)e^t y(0) \\ y = y(0)e^t \end{cases}.$$

(b) Montrer que

$$\exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^t - 1) \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

On commence par remarquer que

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^t - 1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est votre conclusion ?

Cet exemple précis montre que la formule $X(t) = \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) X_0$ n'est pas vraie.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach, et soient $A, B \in L(E)$ deux endomorphismes bornés.

- (1) Redémontrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si les séries absolument convergentes sont convergentes.

Soit E un espace de Banach, et soit $\sum_{n \geq 0} x_n$ une série absolument convergente, la suite de sommes partielles est une suite de Cauchy car l'inégalité triangulaire implique

$$\left\| \sum_{k=n}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n}^m \|x_k\|$$

et la somme de droite tend vers 0 car la série $\sum \|x_k\|$ est convergente. La série $\sum_{n \geq 0} x_n$ converge donc.

Inversement, soit E un espace normé tel que toute série absolument convergente soit convergente. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente de limite x , car dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. En effet soit $\varepsilon > 0$, comme la suite est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\|x_{\varphi(n)} - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{car } \varphi(n) \geq n.$$

De plus, comme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m_0$, on a

$$\|x_{\varphi(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit donc pour tout entier $n \geq \max(n_0, m_0)$

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Construisons à présent la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe un entier $\varphi(k)$ tel que

$$\|x_n - x_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{pour } n \geq \varphi(k).$$

On peut toujours faire en sorte que $\varphi(k) > \varphi(k-1)$; par exemple, en modifiant le terme $\varphi(k)$ en $\varphi(k) + 1$ s'il était égal à son prédécesseur. On déduit donc

$$\sum_{k=1}^n \|x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k-1)}\| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2$$

ce qui implique que la suite croissante des sommes partielles $(\sum_{k=1}^n \|x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k-1)}\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc convergente. Par suite, la série $\sum_{k \geq 1} (x_{\varphi(k)} -$

$x_{\varphi(k-1)})$ est absolument convergente donc convergente. Or on a

$$x_{\varphi(n)} = \sum_{k=1}^n (x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k-1)}) + x_{\varphi(0)}$$

donc la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite converge.

(2) Rappeler pourquoi on peut définir l'exponentielle

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Cette série est absolument convergente et $L(E)$ est un espace de Banach si E est un espace de Banach.

(3) Redémontrer l'inégalité $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$. En déduire une estimation de $\|e^A\|$.

On a

$$\|A \circ B\| = \sup_{\|u\|=1} \|A(Bu)\| \leq \|A\| \sup_{\|u\|=1} \|Bu\| \leq \|A\| \|B\|.$$

En outre

$$\|e^A\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n \leq e^{\|A\|}.$$

(4) Montrer que $e^A e^B = e^{A+B}$ pour deux endomorphismes A, B qui commutent.

Comme les endomorphismes A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = e^A e^B.$$

(5) Montrer que $t \rightarrow e^{tA}$ est un semi-groupe uniformément continu.

L'aspect algébrique est traitée dans la question qui précède et on a $\|e^{tA} - \text{Id}_E\| \leq e^{t\|A\|} - 1$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0, donc e^{tA} est continu en 0 (et donc sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est un semi-groupe).

Exercice 3. Soit E un espace de Banach, on considère l'application exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : L(E) &\rightarrow L(E) \\ A &\mapsto e^A. \end{aligned}$$

- (1) Montrer que $\exp$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle. Montrer que $\exp$ est une application de classe C^∞ sur $L(E)$.

On a

$$e^H = I_n + H + H^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{(n+2)!} \right)$$

avec

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{(n+2)!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|H\|^n}{(n+2)!} \leq e^{\|H\|}$$

donc l'exponentielle est différentiable en 0 et sa différentielle est l'identité de $L(E)$.

- (2) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\exp : B_{L(E)}(0, \delta) \rightarrow B_{L(E)}(Id_E, \varepsilon)$ soit un difféomorphisme. On notera $\log : B_{L(E)}(Id_E, \varepsilon) \rightarrow B_{L(E)}(0, \delta)$ l'inverse.

D'après le théorème des fonctions implicites, comme la différentielle de l'exponentielle en 0 est une application inversible continue (c'est l'identité de $L(E)$), c'est un difféomorphisme local, et il existe donc $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\exp : B_{L(E)}(0, \delta) \rightarrow B_{L(E)}(Id_E, \varepsilon)$ soit un difféomorphisme.

- (3) Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi groupe uniformément continu, i.e. tel que

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}_+ &\rightarrow L(E) \\ t &\mapsto S_t \end{aligned}$$

est continue. Montrer qu'il existe t_0 et une fonction $t \mapsto A_t$ telle que

$$S_t = e^{A_t}, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Comme $t \mapsto S_t$ est continue, il existe t_0 tel que $\|S_t\| < \varepsilon$ et dans ce cas on considère

$$\begin{aligned} [0, t_0] &\rightarrow B_{L(E)}(I_n, \delta) \\ t &\mapsto A_t = \log S_t \end{aligned}$$

qui vérifie $S_t = e^{A_t}$ pour tout $t \in [0, t_0]$ et $A_0 = 0$.

- (4) Montrer que $A_{nt} = nA_t$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, nt \in [0, t_0]$.

On a $S_{nt} = (S_t)^n$ donc $e^{A_{nt}} = (e^{A_t})^n = e^{nA_t}$ par récurrence puisque $(n-1)A_t$ et A_t commutent. En passant au logarithme on obtient le résultat désiré.

- (5) Montrer que $A_{st} = sA_t$ pour tous $s \in \mathbb{Q}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, st \in [0, t_0]$.

Supposons que $s = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ alors on a $A_{pt/q} = pAt/q$ d'après la question précédente et il suffit de montrer que $A_t/q = A_t/q$, mais ceci est équivalent à montrer que $A_t = qA_{t/q}$ ce qui est vrai d'après la question précédente.

- (6) Montrer que $A_{st} = sA_t$ pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, st \in [0, t_0]$.

Par densité des rationnels dans les réels, et par continuité de $t \rightarrow A_t$, on obtient le résultat. Notons que si $s \in \mathbb{R}^+$, on peut trouver une suite croissante de rationnels positifs $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers s : ainsi $0 \leq s_n t \leq st \leq t_0$ et on peut appliquer la question précédente.

- (7) En déduire que les semi-groupes uniformément continus sont les exponentielles d'applications linéaires bornées.

On pose $A = t_0^{-1}A_{t_0}$, d'après la question précédente, on a

$$A_t = \frac{t}{t_0}A_{t_0} = tA$$

pour tout $t \in [0, t_0]$. Ainsi a-t-on $S_t = e^{tA}$ pour tout $t \in [0, t_0]$. En notant n la partie entière de t/t_0 et $\theta \in [0, 1)$ sa partie fractionnaire, on en déduit lorsque $t \in \mathbb{R}$,

$$S_t = S_{(n+\theta)t_0} = S_{t_0}^n S_{\theta t_0} = e^{nt_0 A} e^{\theta t_0 A} = e^{(n+\theta)t_0 A} = e^{tA}.$$

Exercice 4. Soit $E = L^2(\mathbb{R})$, on considère l'application "translation"

$$(S_t u)(x) = u(x+t), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad t \geq 0.$$

- (1) Montrer que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu.

Pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|u(\cdot+t) - u\|_{L^2} \leq t \|u'\|_{L^2} |\text{supp} u|^{1/2}$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Dans le cas général où $u \in L^2$, on choisit une suite $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui tend vers u dans L^2 et on remarque que

$$\|u(\cdot+t) - u\|_{L^2} \leq \|u_n(\cdot+t) - u_n\|_{L^2} + 2\|u - u_n\|_{L^2}.$$

Le deuxième terme peut être rendu inférieur à $2\varepsilon/3$ en choisissant n assez grand puis le premier inférieur à $\varepsilon/3$ en choisissant t assez petit étant donné que la limite est nulle pour des fonctions tests.

- (2) Déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.

On remarque que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\cdot + t) - u}{t} = u' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

ainsi $u \in L^2$ appartient au domaine du générateur infinitésimal de S_t si la dérivée au sens des distributions u' est également dans L^2 , autrement dit

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Au = u'.$$

SEMI-GROUPES

Définition 1. Soit $A : D(A) \rightarrow E$ un opérateur non-borné, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble des nombres complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(A - \lambda) : D(A) \rightarrow E$ soit inversible d'inverse $(A - \lambda)^{-1}$ continu. Le spectre de A est le complémentaire de l'ensemble résolvant.

Exercice 1. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach E vérifiant $S_1 = \text{Id}_E$.

- (1) Montrer que $(S_t)_{t \geq 0}$ est périodique.

On a

$$S_{t+n} = S_1 \circ \cdots \circ S_1 \circ S_t = S_t$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- (2) Soit A le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S_t)_{t \geq 0}$. Montrer que le spectre de A est contenu dans $2\pi\mathbb{Z}$.

Il s'agit de montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$, l'opérateur $A - \lambda : D(A) \rightarrow E$ est inversible d'inverse borné. On considère pour cela l'opérateur

$$T_\lambda u = \int_0^1 e^{-\lambda t} S_t u \, dt$$

pour lequel on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_h - \text{Id}_E}{h} \right) T_\lambda u &= \frac{1}{h} \left(\int_0^1 e^{-\lambda t} S_{t+h} u \, dt - \int_0^1 e^{-\lambda t} S_t u \, dt \right) \\ &= \left(\frac{e^{-\lambda h} - 1}{h} \right) T_\lambda u - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S_t u \, dt + \frac{1}{h} \int_1^{1+h} e^{-\lambda t} S_t u \, dt. \end{aligned}$$

Ce taux d'accroissement a une limite, ce qui montre que $T_\lambda u \in D(A)$ et en passant à la limite, on obtient

$$AT_\lambda u = \lambda T_\lambda u - u + e^{-\lambda} S_1 u$$

soit

$$(A - \lambda)T_\lambda u = (e^{-\lambda} - 1)u$$

c'est à dire que $(A - \lambda)^{-1}(e^{-\lambda} - 1)^{-1}T_\lambda$ si $\lambda \notin 2\pi i\mathbb{Z}$ et donc $e^{-\lambda} \neq 1$. Il est clair que T_λ est borné.

- (3) On suppose de plus que E est un espace de Hilbert et que le semi-groupe est unitaire. Montrer que A/i est autoadjoint.

On commence par remarquer que si $h \in [0, 1]$ alors S_h est inversible d'inverse S_{1-h} puisque

$$S_h \circ S_{1-h} = S_1 = \text{Id}_E.$$

On en déduit alors

$$S_h^* = S_{1-h}$$

puisque le semi-groupe est unitaire. Ainsi a-t-on

$$\left(\frac{S_h - \text{Id}_E}{h} \right)^* = \frac{S_h^* - \text{Id}_E}{h} = \frac{S_{1-h} - \text{Id}_E}{h}.$$

On en tire pour tout $u, v \in D(A)$

$$(Au, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\left(\frac{S_h - \text{Id}_E}{h} \right) u, v \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(u, \left(\frac{S_{1-h} - \text{Id}_E}{h} \right) v \right) = -(u, Av)$$

ce qui permet d'affirmer que $D(A) \subset D(A^*)$ et $A^*u = -Au$ pour tout $u \in D(A)$. Il suffit de montrer que $D(A^*) \subset D(A)$ pour conclure que A/i est autoadjoint. Cela découle de l'exercice 6 car les opérateurs A et A^* sont maximaux dissipatifs.

Exercice 2. On considère la mesure $d\mu = e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$, et l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Pour $f \in H$, on définit

$$N_t f(x) = \int f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) d\mu(y).$$

- (1) Montrer que $d\mu$ est une mesure de probabilité.

On a

$$\mu(\mathbb{R}^n)^2 = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 1.$$

- (2) Le but de cette question est de montrer que N_t est un endomorphisme de H pour tout $t \geq 0$.

- (a) Montrer que

$$\|N_t f(x)\|^2 \leq \int |f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)|^2 d\mu(y).$$

Ceci découle directement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des probabilités.

(b) Montrer que $\|N_t f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$ pour tout $f \in H$.

On intègre l'inégalité de la question précédente

$$\|N_t f\|_{L^2}^2 \leq \iint |f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)|^2 d\mu(y) d\mu(x)$$

puis on fait le changement de variable

$$\begin{cases} z = e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y \\ w = -\sqrt{1-e^{-2t}}x + e^{-t}y \end{cases}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \|N_t f\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \iint |f(z)|^2 \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(e^{-t}z + \sqrt{1-e^{-2t}}w)^2} e^{-\frac{1}{2}(e^{-t}w - \sqrt{1-e^{-2t}}z)^2}}_{=e^{-(z^2+w^2)/2}} dz dw \\ &\leq \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

(3) Montrer que $N_0 f = f$ et que $N_t \circ N_s = N_{t+s}$.

La première relation découle du fait que μ est une probabilité, la deuxième du calcul suivant

$$N_t \circ N_s f(x) = \iint f(e^{-(t+s)}x + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}z + \sqrt{1-e^{-2s}}y) d\mu(y) d\mu(z),$$

où l'on fait le changement de variable suivant

$$\begin{cases} w = \frac{e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}z + \sqrt{1-e^{-2s}}y}{\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}} \\ t = \frac{\sqrt{1-e^{-2s}}z - e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}y}{\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}}. \end{cases}$$

(4) Montrer que $(N_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contraction. On l'appelle le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Il s'agit de montrer que le semi-groupe est fortement continu, on a pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$|N_t f(x) - N_0 f(x)| \leq \|f'\|_{L^\infty} ((1-e^{-t})|x| + \frac{1}{\pi} \sqrt{1-e^{-2t}})$$

et ainsi

$$\|N_t f - N_0 f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi} \|f'\|_{L^\infty} ((1-e^{-t}) + \sqrt{1-e^{-2t}})$$

tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Dans le cas général pour $f \in H$, il existe une suite $f_n \in C_0^\infty$ qui tend vers f dans H , et pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\|N_t f - N_0 f\|_{L^2} \leq 2\|(f - f_n)\|_{L^2} + \|N_t f_n - N_0 f_n\|_{L^2}$$

puisque N_t est un semi-groupe de contraction. Il suffit alors de choisir n assez grand de sorte que $\|(f - f_n)\|_{L^2} \leq \varepsilon/3$ puis t assez petit de sorte que $\|N_t f_n - N_0 f_n\|_{L^2} \leq \varepsilon/3$.

- (5) Soit A le générateur infinitésimal de N_t . Montrer que la restriction de A à $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset H$ est $\partial_x^2 = x\partial_x$.

On utilise la formule de Taylor à l'ordre 2

$$\begin{aligned} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) &= f((1-t)x + \sqrt{2t}y + \mathcal{O}(t^{\frac{3}{2}})) \\ &= f(x) - \partial_x f(x)(tx - \sqrt{2t}y) + t\partial_x^2 f(x)y^2 + \mathcal{O}(t^{\frac{3}{2}}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

et on en déduit

$$\frac{N_t f(x) - f(x)}{t} = -x\partial_x f(x) + \partial_x^2 f(x) \underbrace{\int y^2 d\mu(y)}_{=2\Gamma(3/2)/\sqrt{\pi}=1} + o(1).$$

Ce qui donne $\partial_x^2 = x\partial_x$ comme générateur infinitésimal sur les fonctions test.

Exercice 3. Soient A, B deux opérateurs non bornés. On note $A \subset B$ si $D(A) \subset D(B)$ et $Au = Bu$ pour tout $u \in D(A)$.

- (1) Soit A un opérateur fermé à domaine dense. Montrer que A^* est à domaine dense. Déterminer $(A^*)^*$.

Si A est un opérateur non borné à domaine dense alors

$$\Gamma(A^*) = \{(-Au, u) : u \in D(A)\}^\perp = \{(-v, u) : (u, v) \in \Gamma(A)\}^\perp.$$

Commençons par l'inclusion

$$\Gamma(A^*) \subset \{(-Au, u) : u \in D(A)\}^\perp.$$

Soit $(v, A^*v) \in \Gamma(A^*)$ avec $v \in D(A^*)$ et $(-Au, u)$ avec $u \in D(A)$ alors

$$\langle (v, A^*v), (-Au, u) \rangle_{H \times H} = -\langle v, Au \rangle + \langle A^*v, u \rangle = 0.$$

Terminons par l'inclusion

$$\{(-Au, u) : u \in D(A)\}^\perp \subset \Gamma(A^*).$$

Soit (x, y) perpendiculaire à tous couples $(-Au, u)$ lorsque $u \in D(A)$: on a pour tout $u \in D(A)$

$$|\langle x, Au \rangle| = |\langle y, u \rangle| \leq \|y\| \|u\|$$

ce qui implique que $x \in D(A^*)$ et comme

$$\langle x, Au \rangle = \langle A^*x, u \rangle = \langle y, u \rangle$$

pour tout $u \in D(A)$ et comme $D(A)$ est dense, on a $y = A^*x$ et ainsi $(x, y) \in \Gamma(A^*)$.

Il s'agit de montrer que $D(A^*)^\perp = \{0\}$. Or si $u \in D(A^*)^\perp$ on a

$$(u, 0) \in \Gamma(A^*)^\perp$$

et comme le premier lemme se traduit par

$$\Gamma(A^*) = \{(-v, u) : (u, v) \in \Gamma(A)\}^\perp.$$

on a

$$(0, u) \in (\Gamma(A)^\perp)^\perp = \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A)$$

et donc $u = A(0) = 0$.

Si A est un opérateur fermé à domaine dense alors $(A^*)^* = A$.

On raisonne directement sur les graphes

$$\Gamma((A^*)^*) = \{(-v, u) : (u, v) \in \Gamma(A^*)\}^\perp = (\Gamma(A)^\perp)^\perp = \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A)$$

et on obtient $(A^*)^* = A$. La deuxième égalité vient de

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma((A^*)^*) &\Leftrightarrow (-y, x) \perp \Gamma(A^*) = \{(-v, u) : (u, v) \in \Gamma(A)\}^\perp \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (\Gamma(A)^\perp)^\perp \end{aligned}$$

- (2) Soit A un opérateur maximal dissipatif, montrer que A^* est maximal dissipatif.

Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction alors A^* est dissipatif. Si $u \in D(A) \cap D(A^*)$ alors on a

$$\operatorname{Re}\langle A^*u, u \rangle = \operatorname{Re}\langle u, Au \rangle \leq 0.$$

Le cas où $u \in D(A^*)$ est un peu plus subtil. Soit $u \in D(A^*)$ et $\lambda > 0$, si l'on note $u_\lambda = -\lambda R(\lambda)u$, on a $u_\lambda \in D(A)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda = u$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle A^*u, u_\lambda \rangle &= \operatorname{Re}\langle u, Au_\lambda \rangle = -\frac{1}{\lambda} \operatorname{Re}\langle (A - \lambda)u_\lambda, Au_\lambda \rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle u_\lambda, Au_\lambda \rangle - \frac{1}{\lambda} \|Au_\lambda\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

converge vers $\langle A^*u, u \rangle$ qui est par conséquent négatif. Ce qui implique le caractère dissipatif de A^* .

- (3) Montrer que pour deux opérateurs maximaux dissipatifs $D(A) \subset D(B)$ et $B|_{D(A)} = A$ entraîne $A = B$.

Soit $v \in D(B)$, il existe $u \in D(A)$ tel que $(B - \lambda)v = (A - \lambda)u$ et comme $Au = Bu$, on a $(B - \lambda)(v - u) = 0$. Or B est dissipatif donc

$$0 = -\langle (B - \lambda)(v - u), v - u \rangle \geq \lambda \|v - u\|^2$$

ce qui implique $u = v$ et donc $v \in D(A)$. Ceci donne $D(A) = D(B)$ et $A = B$.

- (4) Montrer que le générateur infinitésimal de l'adjoint d'un semi-groupe de contraction est l'adjoint du générateur infinitésimal du semi-groupe.

Soit S un semi-groupe de contraction fortement continu. Alors S^* est un semi-groupe de contraction

$$S_{t+r}^* = (S_{t+r})^* = S_t S_r^* = S_r^* S_t^*, \quad S_0^* = \text{id}, \\ \|S_t^*\| = \|S_t\| \leq 1.$$

De plus, on a

$$\|S_t^* u - u\|^2 \leq 2\|u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle S_t^* u, u \rangle = 2\|u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle u, S_t u \rangle$$

pour tout $u \in H$. On en déduit que S^* est fortement continu car le terme de droite tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Soit B le générateur infinitésimal de S^* , soit $u \in D(B)$ et soit $v \in D(A)$, on a

$$\langle Bu, v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle S_t^* u - u, v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle u, S_t v - v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

On en déduit que la forme linéaire $u \mapsto \langle Bu, v \rangle$ est bornée par $\|Av\|$, et donc que $u \in D(A^*)$ ainsi que $Bu = A^*u$.

Soit $u \in D(A^*)$ et $v \in D(A)$, en intégrant $d(Su)/dt = Au$ on a

$$\langle S_t v - v, u \rangle = \int_0^t \langle AS_\tau v, u \rangle d\tau$$

ce qui donne par adjonction

$$\langle v, S^*(t)v - v \rangle = \int_0^t \langle v, S_\tau^* A^* u \rangle d\tau$$

et comme $D(A)$ est dense dans H , on en déduit $S_t^* u - u = \int_0^t S_\tau^* A^* u d\tau$. Ceci permet de conclure que $u \in D(B)$ et $A^*u = Bu$. Ainsi a-t-on $D(A^*) = D(B)$ et $A^* = B$.

Exercice 4. On considère sur $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ l'application linéaire suivante

$$S_t f(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|} \hat{f})$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier.

- (1) Montrer que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction.

Il est clair que S_t est une application linéaire bornée de norme inférieure à 1, et que S_t est un semi-groupe. Le fait qu'il est fortement continu découle du théorème de convergence dominée.

- (2) Déterminer le générateur infinitésimal de S_t .

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}^n), \quad Af = |D|f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|\hat{f})$$

(3) Montrer l'égalité suivante

$$e^{-r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-r^2/4u} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

(On pourra par exemple calculer les transformées de Fourier des membres de gauche et de droite de cette égalité.)

On a

$$\mathcal{F}(e^{-|r|}) = \underbrace{\int_0^\infty e^{-r(1+i\rho)} dr}_{=\frac{1}{1+i\rho}} + \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{r(1-i\rho)} dr}_{=\frac{1}{1-i\rho}} = \frac{2}{1+\rho^2}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-r^2/4u} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{F}(e^{-r^2/4u}) e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-u(1+\rho^2)} du = \frac{2}{1+\rho^2}. \end{aligned}$$

Comme les deux transformées de Fourier sont égales, les fonctions sont égales.

(4) Dédurre de l'égalité précédente la transformée de Fourier inverse de $e^{-t|\xi|}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-t|\xi|}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{F}(e^{-t^2|\xi|^2/4u}) e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} = t^{-n} 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u(1+t^2|\xi|^2)} du \\ &= 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{t^{-n}}{(1+t^2|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{t}{(t^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

(5) Montrer que

$$S_t f(x) = c_n \int \frac{t}{(|x-y|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y) dy$$

où c_n est une constante que l'on déterminera.

On a

$$S_t(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{-t|\xi|} e^{-i(x-y)\xi} f(y) dy d\xi = \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \int \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y) dy.$$

(6) Montrer que $u(t, x) = S_t f(x)$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta_x u = 0 & \text{sur } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

En passant en Fourier, on a

$$\widehat{S_t f}(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$$

par conséquent

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{S_t f}(\xi) = |\xi|^2 e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$$

et donc

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S_t f(x) = -\Delta_x S_t f(x).$$