EXAMA EQUATION ELLIPTIQUE CORRIGÉ

****

LADGHEM OMAR

correction d'examen

الورقة الإضافية رقم : ....

الإسم واللقب : .... المقياس:.......... تاريخ الإمتحان:..........

Exercice (01) (12 points)

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$

On a $u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in L^6(\Omega)$

par l'injection

(1) $L^p \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}$, $N \geq 3$

$\frac{NP}{N-p} = \frac{3\times 2}{3-2} = 6$.

$u \in L^r(\Omega)$, $N=2$, $L^p \hookrightarrow L^r$

(01) avec $1 \leq r < +\infty$.

φ est lipchitzienne et $\varphi(0)=0$

$\exists c>0$

$|\varphi(u)-\varphi(0)| < c|u-0|$ (01)

donc $|\varphi(u)| < c|u|$

puisque $u \in L^6(\Omega)$ si $n=3$

alors $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$ (0,5)

et $u \in L^r(\Omega)$ si $n=2$

alors $\varphi(u) \in L^r(\Omega)$ (0,5)

$|w\varphi(u)|$ par hölder géné

$w \in L^p(\Omega) \underset{injection}{\Rightarrow} w \in L^3$, $n=3$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (0,5)

$w \in L^3$ et $\varphi(u) \in L^6 \Rightarrow w\varphi \in L^2$

$n=2$, on prend $r = \frac{2p}{p-2}$ (0,5)

$\frac{1}{p} + \frac{p-2}{2p} = \frac{2+p-2}{2p} = \frac{1}{2}$

$w \in L^p$, $\varphi(u) \in L^{\frac{2p}{p-2}} \Rightarrow w\varphi \in L^2$.

2) $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$.

$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$ (0,5)

$l(v) = \int_\Omega \varphi(\tilde{u})\,w(x)v(x) + \int_\Omega f.v$ (0,5)

On a a est bilineaire et l lineaire

$|a(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v|$

hölder

(0,5) $\leq \|\nabla u\|_{L^2} . \|\nabla v\|_{L^2}$

$\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$

donc est continue

$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$

$\geq \frac{1}{2}C_\Omega \|u\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}$

$c = \min\left(\frac{1}{2}C_\Omega, \frac{1}{2}\right)$

(0,5) $\geq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$

donc a est coercive.

$|l(v)| \leq \int |\varphi(\tilde{u})||w||v| + \int f.v$

(0,5) $\leq c\|w\|_{L^p} \|v\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$

$\leq C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$

l est continue

Par Lax-Milgram (0,5)

il existe une unique solution de (2) dans $H_0^1(\Omega)$

(1)

et demontre que $T(\tilde{u}_n) = T(\tilde{u}) = u$

$T(\tilde{u})$, $\tilde{u} \in B_R \Rightarrow \|\tilde{u}\| \leq R$.

T est borné dans $H_0^1(\Omega)$ (01)

donc (Par rellich) dans un compact de $L^2(\Omega)$; Avec R assez grand T envoie B_R dans B_R

donc $\{T(\tilde{u}), \tilde{u} \in B_R\}$ est relativement compact.

Par Schauder il existe un point fixe de T $\Rightarrow$ alors ce point fixe est la solution de (01) l'equation (1)

$v \leq 0$ sur $\partial\Omega$

...rs $v \leq 0$ dans $\overline{\Omega}$

...onc $u \leq \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\Omega)}}{\eta}\right\}$ 0,5

...osons $v = u + \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\Omega)}}{\eta}\right\}$ 0,5

$v \geq u + \|g\|_{C^0(\partial\Omega)}$ 0,5

$\geq u - g = 0$

...nc $v \geq 0$ dans $\partial\overline{\Omega}$

$\eta v = f + (c+\eta)\max\left\{\|g\|, \frac{\|f\|}{\eta}\right\}$

(1) $\geq f + \frac{c\|f\|}{\eta} + \|f\|$ $(\|f\|_{C^0} = \|f\|)$

0,5 $\geq \frac{c\|f\|}{\eta} \geq 0.$

...par principe de max. faible

donc $\|u\|_{C^0(\Omega)} \leq \max\left\{\|g\|_{C^0}, \frac{\|f\|_{C^0}}{\eta}\right\}.$

الإسم واللقب : .... المقياس:........................ تاريخ الإمتحان:........................

Exercice (02) 08 points

Posons $v = u - \max\left\{\|g\|_{C^0}, \frac{\|f\|_{C^0}}{\eta}\right\}$ (0,5)

$v \leq u - \|g\|_{C^0(\partial\Omega)} = 0$ sur $\partial\Omega$ (0,5)

$Lv + \eta v = Lu + \eta u - (L + \eta)(\max\{\ \ \})$

(1) $= f - (c + \eta)\max\left\{\|g\|, \frac{\|f\|}{\eta}\right\}$

$\max\left\{\|g\|, \frac{\|f\|}{\eta}\right\} \geq \frac{\|f\|}{\eta}$ et $c \geq 0$ et $\eta > 0$

$\leq f - \frac{c\|f\|_{C^0}}{\eta} + \|f\|_{C^0}$ (0,5)

donc

$Lv + \eta v \leq \frac{-c\|f\|}{\eta} \leq 0$

par principe de max fort

$$\begin{cases} Lv + \eta v \leq 0 & \text{dans } \Omega \\ v \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $v \leq 0$ dans $\overline{\Omega}$

donc $u \leq \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0}}{\eta}\right\}$ (0,5)

Posons $v = u + \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\Omega)}}{\eta}\right\}$ (0,5)

$v \geq u + \|g\|_{C^0(\partial\Omega)}$ (0,5)

$\geq u - g = 0$

donc $v \geq 0$ dans $\partial\overline{\Omega}$

$Lv + \eta v = f + (c + \eta)\max\left\{\|g\|, \frac{\|f\|}{\eta}\right\}$

(1) $\geq f + \frac{c\|f\|}{\eta} + \|f\|$ $(\|f\|_{C^0} = \|-f\|)$

(0,5) $\geq \frac{c\|f\|}{\eta} \geq 0$

par principe de max forte

$$\begin{cases} Lv + \eta v \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ v \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $v \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$ (01)

donc $0 \leq u + \max\left\{\|g\|_{C^0}, \frac{\|f\|_{C^0}}{\eta}\right\}$

donc $-\max\{\ \} \leq u$ (0,5)

alors $-\max\{\ \} \leq u \leq \max\{\ \}$

donc $\|u\|_{C^0(\Omega)} \leq \max\left\{\|g\|_{C^0}, \frac{\|f\|}{\eta}\right\}$

(2)