

**EXAMA EQUATION
ELLIPTIQUE CORRIGÉ**

LADGHEM OMAR

correction d'examen

الورقة الإضافية رقم:

المقياس: تاريخ الإمتحان:

الإسم واللقب:

exercice (12 points)

$u \in H^1(\Omega)$

$a(u, v) \Rightarrow u \in L^p(\Omega)$

par l'injection

$L^p \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}, N \geq 3$

$c \frac{Np}{N-p} = \frac{3 \times 2}{3-2} = 6$

$u \in L^r(\Omega), N=2, L^p \hookrightarrow L^r$

avec $1 \leq r < +\infty$

est lipschitzien et $\varphi(0) = 0$

si $c > 0$

$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq c|u-v|$

$|\varphi(u)| \leq c|u|$

si $u \in L^6(\Omega)$ si $n=3$

alors $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$

si $u \in L^r(\Omega)$ si $n=2$

alors $\varphi(u) \in L^r(\Omega)$

par l'holder gène

$u \in L^p(\Omega) \Rightarrow w \in L^3, n=3$

$\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$w \in L^3$ et $\varphi(w) \in L^6 \Rightarrow w\varphi \in L^2$

on prend $r = \frac{2p}{p-2}$

$\frac{1}{p} + \frac{p-2}{2p} = \frac{2+p-2}{2p} = \frac{1}{2}$

$\varphi(w) \in L^{\frac{2p}{p-2}} \Rightarrow w\varphi \in L^2$

$\tilde{u} \in L^2(\Omega)$

$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

$l(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\Omega} g(x) v(x) \, dx$

on a a est bilinéaire et l linéaire

$|a(u, v)| \leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v|$

holder

$\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}$

$\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$

donc est continue

$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$

$c = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \left\{ \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right\}$

$\geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$

donc a est coercive

$|l(v)| \leq \int_{\Omega} |f(x)| |v(x)| \, dx + \int_{\Omega} |g(x)| |v(x)| \, dx$

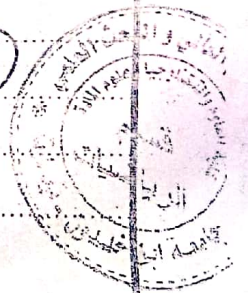
$\leq c \|w\|_{L^p} \|v\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$

$\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$

l est continue

Par lax-Milgram il existe une unique solution de (2) dans

$H^1(\Omega)$



et démontre que $T(\alpha_n) = T(\alpha) = \alpha$

$T(\alpha)$, $\tilde{u} \in B_R \Rightarrow \|\tilde{u}\| \leq R$.

T est borné dans $H_0^1(\Omega)$ (01)

donc (Par Rellich) dans un
compact de $L^2(\Omega)$. Avec R assez
grand T envoie B_R dans B_R
donc $\{T(\tilde{u}), \tilde{u} \in B_R\}$ est
relativement compact.

Par Schauder il existe un point
fixe de $T \Rightarrow$ alors ce point
fixe est la solution de (01)
l'équation (1)

(2)



$v \leq 0$ dans $\delta\Omega$

donc $\|u\|_{C^0(\Omega)} \leq \max\left\{\|g\|_{C^0}, \frac{\|f\|}{\eta}\right\}$

$v \leq 0$ dans Ω

sur $u \leq \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\Omega)}}{\eta}\right\}$

dans $v = u + \max\left\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\Omega)}}{\eta}\right\}$

$v \geq u + \|g\|_{C^0(\partial\Omega)}$

$\geq u - g = 0$

$v \geq 0$ dans Ω

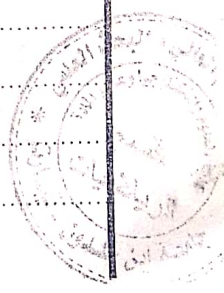
$u = f + (c + \eta) \max\left\{\|g\|_{C^0}, \frac{\|f\|}{\eta}\right\}$

$\geq f + \frac{c\|f\|}{\eta} + \|f\| \quad (c\|f\| = \|f\|)$

$\geq \frac{c\|f\|}{\eta} \geq 0$

max principe de max. forte

(5)



exercice (02) 08 points

dans $v = u - \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$
 $v \leq u - \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\} = 0$ sur $\partial\Omega$

$+ \eta v = Lu + \eta u - (L + \eta) (\max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\})$

$\alpha = f - (c + \eta) \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$
 $\frac{\|g\| + \frac{\|f\|_{C^0}}{h}}{h} \geq \frac{\|f\|_{C^0}}{h}$ et $c \geq 0$ et $\eta > 0$
 $\leq f - \frac{c \|f\|_{C^0}}{h} + \|f\|_{C^0}$

donc
 $+ \eta v \leq -\frac{c \|f\|_{C^0}}{h} \leq 0$

par principe de max. fort
 $\left. \begin{array}{l} Lu + \eta v \leq 0 \text{ dans } \Omega \\ v \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$

rs $v \leq 0$ dans $\bar{\Omega}$

donc $u \leq \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$

dans $v = u + \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$

$v \geq u + \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$
 $\geq u - g = 0$
 $v \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$

$\eta v = f + (c + \eta) \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$

$\geq f + \frac{c \|f\|_{C^0}}{h} + \|f\|_{C^0}$ ($\|f\|_{C^0} = \|f\|$)

$\geq \frac{c \|f\|_{C^0}}{h} \geq 0$

principe de max. fort

$\left. \begin{array}{l} Lu + \eta v \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ v \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$

alors $v \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$

donc $0 \leq u + \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$

donc $-\max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\} \leq u$

alors $-\max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\} \leq u \leq \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$

donc $\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \max_{C^0(\bar{\Omega})} \left\{ \|g\|, \frac{\|f\|_{C^0}}{h} \right\}$

