

*Mustapha SADOUKI*

*Maitre de Conférences*

Faculté des Sciences et de la Technologie

# *Cours de Mathématiques pour la Physique*

- ❖ Intégrales simples et multiples
  - ❖ Intégrales impropres
  - ❖ Equations différentielles
    - ❖ Les séries : Numériques, Entières et de Fourier
    - ❖ Transformation de Fourier
    - ❖ Transformation de Laplace

Tome 1

Le présent document est le fruit d'une expérience pédagogique acquise ces quatre dernières années (2011-2014) dans le cadre de l'enseignement assurée de la deuxième année licence de physique. Ce cours photocopié correspond au programme de l'Unité d'Enseignement Fondamental UEF-F121 : « Séries et équations différentielles » de la deuxième année de la licence de physique fondamental, il intéressera aussi les étudiants de la licence sciences et technologies en Electronique, Electromécanique, Génie Mécanique, Génie Civil, automatique ...

Je tiens à remercier Monsieur *Mohamed FELLAH* professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène d'Alger, Professeur *Mourad LOUNIS* et *Maamar BENBACHIR* maître de conférences à l'université Djilali Bounaama de Khemis-Miliana pour leurs conseils critiques et suggestions.

# Sommaire

<b>Chapitre 1 : Intégrales simples et multiples</b>	
1. Intégral de Riemann	
1.1 Calcul d'une aire	01
1.2 Propriétés	02
1.3 Applications	02
1.3.1 Valeur moyenne – Valeur efficace	02
1.4 Intégrales indéfinies	03
1.5 Intégrales généralisées	03
1.6 Méthodes d'intégration	03
1.6.1 Décomposition en somme	03
1.6.2 Intégration par parties	03
1.6.3 changement de variable	04
2. Intégrales doubles	05
2.1 Généralités	05
2.2 Calcul en coordonnées cartésiennes	06
2.3 Calcul en coordonnées polaires	07
2.4 Calcul d'aire du domaine $D$	08
2.5 Changement de variables	08
3. Intégrales triples	09
3.1 Généralités	09
3.2 Méthodes de calcul de l'intégrales triple	10
3.2.1 Calcul en coordonnées cartésiennes	10
3.2.2 Calcul de l'intégrale triple sur un parallélépipède rectangle	12
3.2.3 Calcul de l'intégrale triple par la méthode de tranche	12
3.2.4 Calcul de l'intégrale triple par la méthode de bâtons	14
3.3 Changement de variable dans les intégrales triples	15
3.3.1 Déterminant Jacobien	15
3.3.2 Calcul en coordonnées cylindriques	16
3.3.3 Calcul en coordonnées sphériques	17
<b>Chapitre 2 : Intégrales impropres (généralisées)</b>	
1. Cas d'un problème à une seule borne	19
2. Cas d'un problème aux deux bornes	20
3. Intégrales faussement impropres	20
4. Propriétés	21
5. Théorème de convergence – Fonction intégrables	23
5.1 Théorème de convergence	23
5.2 Critère d'équivalence	24
5.3 Fonction intégrables	24
5.4 Utilisation de développements asymptotiques	25
<b>Chapitre 3 : Equations différentielles</b>	
1. Définition	27
2. Equation différentielle linéaire du premier ordre	27
2.1 Equation différentielle linéaire sans second membre	27
2.2 Equation différentielle linéaire avec second membre	28
2.2.1 Recherche d'une solution particulière	29

2.2.2 Méthode de variation de la constante	29
2.3 Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants	30
2.4 Equation de Bernoulli et Equation de Riccati	31
2.4.1 Equation de Bernoulli	31
• Transformation d'une équation de Bernoulli en équation linéaire	32
2.4.2 Equation de Riccati	33
• Transformation d'une équation de Riccati en équation de Bernoulli	33
• Transformation d'une équation de Riccati en équation linéaire	33
3. Equation différentielle d'ordre deux	36
3.1 Equation différentielle linéaire sans second membre à coefficients constants	36
3.2 Equation différentielle d'ordre deux linéaire avec second membre et à coefficients constants	37
3.3 Solutions particulières	37
3.4 Equation différentielle d'ordre deux avec des coefficients non constants et sans second membre :	38
3.4.1 Cas des équations incomplètes	38
• Cas des équations $F(x, y', y'') = 0$ (absence de $y$ )	38
• Cas des équations $F(y, y', y'') = 0$ (absence de $x$ )	39
3.5 Equation différentielle d'ordre deux linéaire sans second membre et à coefficients non constants :	40
3.6 Equation différentielle d'ordre deux linéaires à coefficients non constants avec second membre :	42
4. Système d'équations différentielles	44
4.1 Définition d'un système d'équations différentielles	44
4.2 Equation différentielle d'ordre $n$	45
4.3 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants	46
4.3.1 Cas des valeurs propres réelles	46
4.3.2 Cas des valeurs propres complexes	48
4.3.3 Cas d'une matrice non diagonalisable	48
4.4 Systèmes linéaires non homogènes à coefficients constants	50
5. Equations aux dérivées partielles (EDP)	52
5.1 Rappel sur les dérivées partielles	52
5.2 Dérivées successives	52
5.3 Dérivées d'une fonction composées de deux variables	53
5.4 Différentielles totales	53
5.5 Formes différentielles totales exactes	54
5.6 Application à l'intégration d'équations différentielles du premier ordre	55
5.7 Facteur Intégrants	56
5.7.1 Détermination de facteurs intégrants monovariabiles	56
• Facteur intégrant de la forme $F(x)$	57
• Facteur intégrant de la forme $F(y)$	57
5.8 Généralisation aux fonctions de plus de deux variables :	59
5.9 Différentielle totales et fonctions d'état	61
5.10 Equation linéaire et homogène aux dérivées partielles du 1 <sup>er</sup> ordre dans le cas d'une fonction de 2 variables	62

<b>Chapitre 4 : Les séries</b>	65
1 Séries numériques	65
1.1 Série géométrique	65
1.2 Série exponentielle	65
1.3 Séries à termes positifs ou nuls	67
1.4 Critères de Cauchy et de d'Alembert	70
1.4.1 Critère de Cauchy	70
1.4.2 Critère de d'Alembert	71
1.5 Séries à termes quelconques	72
1.6 Somme de séries	72
2 Séries entières	74
2.1 Définitions	74
2.2 Lemme d'Abel	75
2.3 Rayon de convergence d'une suite entière	75
2.4 Détermination de rayon de convergence	75
2.4.1 Lemme d'Hadamard	75
2.5 Dérivée et primitive d'une série entière	76
2.6 Opération sur les séries entières	77
2.7 Série de Taylor	77
2.8 Equations différentielles et série entières	78
2.8.1 La série des binômes	78
2.8.2 Equation du second ordre	79
3. Séries de Fourier	81
3.1 Série trigonométrique	81
3.2 Condition de Dirichlet	81
3.3 Expression de décomposition en série de Fourier	82
3.4 Forme algébrique de la décomposition en série de Fourier	83
3.5 Forme polaire de la décomposition en série de Fourier	83
3.6 Forme complexe de la décomposition en série de Fourier	84
3.7 Parité des fonctions	85
3.7.1 Cas des fonctions paires	85
3.7.2 Cas des fonctions impaires	86
3.8 Développement en série de Fourier de fonction non périodiques	88
3.9 Relation de Parseval	91
<b>Chapitre 5 : Transformation de Fourier</b>	93
1. Définition	93
2. Inversion de la transformation de Fourier	93
3. Propriétés de la transformation de Fourier	94
3.1 Linéarité	94
3.2 Translation	94
3.3 Modulation	94
3.4 Changement d'échelle	95
3.5 Conjugaison complexe	95
3.6 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction	95
3.7 Dérivation de la transformée de Fourier	96
3.8 Convolution et transformation de Fourier	97
3.9 Théorème de Parseval – Conservation de la norme	98
4. Transformée de Fourier d'une fonction radiale à deux et trois dimensions	100
5. Transformation de Fourier d'une fonction de plusieurs variables	100

6. Relation d'incertitude	101
<b>Chapitre 6 : Transformation de Laplace</b>	<b>103</b>
1. Définition et transformée inverse	103
2. Propriétés des transformées de Laplace	104
2.1 Linéarité	104
2.2 Translation dans l'espace de départ	104
2.3 Dilatation ou contraction dans l'espace de départ	104
2.4 Transformée de Laplace d'une fonction modulée	104
2.5 transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction	105
2.6 Transformée de Laplace de la primitive d'une fonction	105
2.7 Dérivation de la transformée de Laplace	105
2.8 Théorème de la valeur initiale	105
2.9 Théorème de la valeur finale	105
2.10 Transformée de Laplace d'un produit de convolution	106
3. Applications : Transformature de Laplace des fonction usuelles	106
3.1 Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac	106
3.2 Transformée de Laplace de l'échelon unitaire	107
3.3 Transformée de Laplace de la fonction <i>sinus</i>	107
3.4 Transformée de Laplace de la fonction <i>cosinus</i>	107
3.5 Transformée de Laplace de l'exponentielle	108
3.6 Résolution d'une équation différentielle linéaire	108
4. Table de transformées de Laplace	110
Annexe	111
Bibliographie	117

## Chapitre 1 :

# Intégrales simples et multiples

## 1. Intégrale de Riemann

### 1.1 Calcul d'une aire :

Soit  $f$  une fonction une fonction de la variable réelle telle que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[a, b]$   $f(x) \geq 0$ . On note  $C_f$  sa représentation graphique, on appelle  $S$  la surface décrite par

$$S: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

$x_0, x_1, \dots, x_n$  des réels tels que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

Dans chaque intervalle de la forme  $[x_{k-1}, x_k]$  on choisit un réel  $h_k$  (au hasard) et on pose  $Y_k = f(h_k)$ . On appelle alors  $R_k$  le rectangle de base  $[x_{k-1}, x_k]$  et de hauteur  $Y_k$ . Les rectangles  $R_k$  recouvrent approximativement la surface  $S$ , plus les largeurs des rectangles  $R_k$  sont petites, plus l'approximation est « bonne ». On définit  $\Delta x = \max_{k=1..n} (x_k - x_{k-1})$  et on impose la condition  $\Delta x \rightarrow 0$ , Riemann pose alors  $S_n = \sum_{k=1}^n y_k (x_k - x_{k-1})$  et on démontre que :

Si  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} S_n = L$  alors  $L$  ne dépend pas du choix des  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ni des  $h_k$ .

Dans ce cas on note  $L$  sous la forme  $\int_a^b f(x) dx$  qui se lit « somme entre  $a$  et  $b$  de  $f(x) dx$  ».

$a$  et  $b$  sont les bornes de l'intégrale,  $f(x) dx$  est l'intégrande,  $dx$  est l'élément différentiel et  $x$  est une variable « muette » qui n'intervient pas dans le résultat.

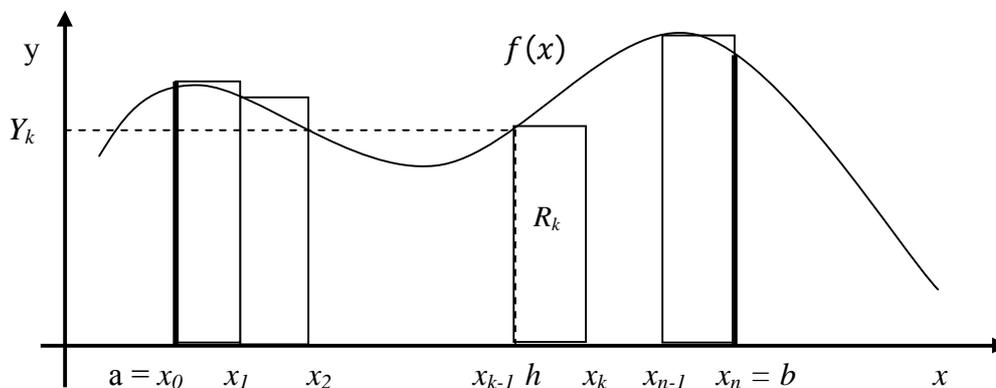


Figure 1.1 – Intégrale de Riemann

## 1.2 Propriétés :

Nous admettons les propriétés suivantes :

- **Positivité** : si  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$  avec  $a < b$  alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

- **Conservation de l'ordre** :

Si  $f(x) < g(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$  alors  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

- **Linéarité** :  $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

- **Relation de Chasles** :  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

- **Symétries** :  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx & \text{si } f \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases}$

- **Période** : si  $f$  a pour période  $T$  alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \text{ et } \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

- $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

- Si  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

## 1.3 Applications

### 1.3.1 Valeur moyenne - Valeur efficace

La valeur moyenne de « plusieurs » nombres est la constante qui en remplaçant chacun de ces nombres donnerait la même « somme ».

#### Exemple :

- Calculer la moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 m dx \Rightarrow m = 1/3.$$

- Calculer la moyenne des sinus des réels compris entre 0 et  $\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = \int_0^{\pi/2} m dx \Rightarrow m = 2/\pi.$$

#### Définitions :

La fonction  $f$  étant intégrable dans  $[a, b]$  :

On appelle moyenne de  $f(x)$  dans  $[a, b]$  le nombre  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ .

On appelle valeur efficace de  $f(x)$  dans  $[a, b]$  le nombre  $v$  tel que  $v^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx$

### 1.4 Intégrales indéfinies :

La notation sans borne  $\int f(x)dx$  présente intégrale indéfinie, le calcul de cette intégrale se termine toujours par une constante d'intégration.

**Exemple :**

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + cste$$

### 1.5 Intégrale généralisées

La méthode de Riemann ne peut s'appliquer qu'à des intégrales dans un intervalle borné lorsque l'un des deux bornes d'intégration est infini le calcul de l'intégrale passe par un calcul de limite.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  désigne  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$

De même, pour  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  désigne  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$

Enfin, pour la notation  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ , on sépare l'intégrale en deux parties pour pouvoir traiter séparément les deux limites.

### 1.6 Méthodes d'intégration :

#### 1.6.1 Décomposition en somme

Si une fonction  $f$  est telle que  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  et si  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  ont des primitives on calcule  $\int_a^b f(x)dx$  en utilisant  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

**Exercice :**

$$\text{Calculer } I = \int_0^1 \frac{x^2}{x-2} dx$$

**Solution :**

$$I = \int_0^1 \frac{(x^2-4)+4}{x-2} dx = \int_0^1 \left( x + 2 + \frac{4}{x-2} \right) dx = \frac{5}{2} + 4 \ln(2)$$

#### 1.6.2 Intégration par parties

On sait que  $d(uv) = vdu + udv$  et en intégrant  $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$ . C'est-à-dire :  $uv = \int vdu + \int udv$ , on en déduit :

- Pour les intégrales indéfinies :  $\int udv = uv - \int vdu$
- Pour les intégrales définies  $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$

**Remarque :**

L'intégration par parties est commode dans les cas où  $f(x)$  est de l'une des formes  $P(x)e^{ax}$  ou  $P(x)\sin(\omega x)$  où  $P(x)\ln(ax), \dots$  ( $P(x)$  est un polynôme).

**1.6.3 Changement de variable**

On suppose que  $f$  est une fonction intégrable dans  $[a, b]$ , que  $\varphi$  est une fonction à dérivée continue, réalisant une bijection de  $[\alpha, \beta]$  vers  $[a, b]$  et telle que  $\begin{cases} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{cases}$  dans ces conditions  $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ .

**Exercices :**

- **Calcule**  $I = \int \sqrt{1-x^2} dx$

$x \in [-1; 1]$ , on pose  $x = \sin t$  avec  $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  alors  $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$  et  $dx = \cos(t) dt$  avec  $t = \text{Arcsin}(x)$  on obtient,

$$I = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) + Cte$$

$$= \frac{1}{2} \left( \text{Arcsin}(x) + x\sqrt{1-x^2} \right) + Cte$$

- **Calcule**  $I = \int_1^e x^2 \ln(x) dx$  (intégration par partie)

$$I = \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[ \frac{x^3 \ln(x)}{3} \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{e^3 - 1}{3} \right) = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

- **Calcule**  $I = \int \frac{1}{(1+u^2)^2} du$  (changement de variable)

On pose  $u = \tan(x)$  d'où  $du = (1+u^2) \cdot dx$  et  $\frac{1}{1+u^2} = \cos^2(x) \dots$

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^2} du = \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) + Cst$$

$$= \frac{1}{2} \left( \text{Arctan}(u) + \frac{u}{1+u^2} \right) + Cste$$

- **Calcule**  $I = \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$  (changement de variable)

On pose  $u = \sqrt{1+x}$  d'où  $u^2 = 1+x$  et  $2udu = dx$

On obtient :  $I = \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{u^2-1}{u} \cdot 2u \cdot du$

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int (u^2 - 1) du \\
 &= 2 \left( \frac{u^3}{3} - u \right) + Cte \\
 &= 2\sqrt{1+x} \left( \frac{x-2}{3} \right) + Cte
 \end{aligned}$$

- **Calcul de**  $\int_{-1}^0 x\sqrt{1+x^2}$  (changement de variable)

On pose  $u = 1 + x^2$  d'où  $du = 2xdx$  et  $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 2 \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$

On obtient :  $\int_{-1}^0 x\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_2^1 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_2^1 = \frac{1}{3} (1 - 2\sqrt{2})$

- **Calcul de**  $\int \text{Arcsin}(x). dx$  (intégration par partie + changement de variable)

$$\begin{aligned}
 I &= \int \text{Arcsin}(x). dx = x \text{Arcsin}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin(x) - \left[ \int \frac{-\frac{1}{2} du}{\sqrt{u}} \right] \\
 &= x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{u} + Cte
 \end{aligned}$$

Où on a posé  $\begin{cases} u = 1 - x^2 \\ du = -2xdx \end{cases}$

On obtient :

$$I = x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} + Cte.$$

- **Calcul de**  $\int x e^{\sqrt{x}} dx$  (changement de variable + 3 intégrations par partie)

On pose  $t = \sqrt{x}$  d'où  $t^2 = x \Rightarrow dx = 2t dt$

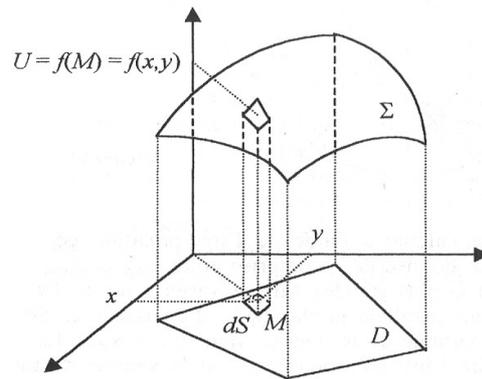
$$\int x e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t^3 e^t dt = \dots = 2e^{\sqrt{x}} (x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6) + Cte$$

## 2. Intégrales doubles

### 2.1 Généralités :

Soit  $f$  une fonction des deux variables  $x$  et  $y$  définie sur un domaine  $D \in \mathcal{R}^2$ . On sait que lorsqu'on fait varier les coordonnées du point  $M(x, y)$  dans  $D$  et que l'on reporte sa cote  $U = f(M)$ , on obtient la représentation graphique de  $f$  qui est une surface que l'on notera  $\Sigma$ .  $dS$  est la surface infinitésimale entourant le point  $M$ . Alors  $f(M)dS$  représente le volume du prisme infinitésimal dessiné ci dessous (fig 1.2). Lorsqu'on fait la somme de tous les volumes des prismes  $f(M)dS$  pour tous les points  $M \in D$ , on obtient une intégrale double :

$$I = \iint_D f(M) dS \quad (1.2)$$



**Figure 1.2- Représentation graphique de  $f(M)$  lorsque  $M$  varie dans le domaine  $D$**

Cette intégrale double représente mathématiquement le volume algébrique compris entre le plan  $xOy$  délimité par le domaine  $D$  et la surface  $\Sigma$ . La notation  $\iint$  renvoie au fait que le domaine d'intégration est une surface à deux dimensions et donc que nous allons procéder à deux intégrations successives.

## 2.2 Calcul en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, l'élément de surface  $dS$  s'obtient en faisant varier  $x$  de  $dx$  et  $y$  de  $dy$ . Ainsi  $dS$  est un rectangle de côtés  $dx$  et  $dy$  et donc  $dS = dxdy$ .

On a donc :

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy \quad (1.3)$$

On peut inverser les rôles de  $x$  et  $y$  et on obtient :

$$I = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left( \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (1.4)$$

**Exemple :**

- Calcule  $I = \iint_D (1 + x) dxdy$  où  $D = [0,1] \times [0,2]$

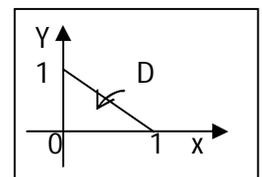
$$\text{On a } I = \iint_D f_1(x)f_2(y) dxdy = \int_0^2 dy \int_0^1 (1 + x) dx = 3$$

- Calcule l'intégrale double

$$I = \iint_D (x^2 + y) dxdy \text{ où } D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

- Lorsque  $x$  est compris entre 0 et 1, le nombre  $y$  varie de 0 à  $1 - x$ , donc :

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (x^2 + y) dy \right) dx = \frac{1}{4}$$



### 2.3 Calcul en coordonnées polaires

On obtient l'élément de surface  $dS$  en coordonnées polaires, en faisant varier  $r$  de  $dr$  et  $\theta$  de  $d\theta$ .  $dS$  est alors un secteur angulaire que l'on considère comme un pseudo rectangle infinitésimal de longueur  $dr$  et de largeur  $rd\theta$ . Ainsi  $dS = r dr d\theta$ .

L'intégrale  $I$  se calcule par deux intégration successives :

$$I = \iint_D g(r, \theta) r dr d\theta = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left( \int_{r_{\min}(\theta)}^{r_{\max}(\theta)} r g(r, \theta) dr \right) d\theta \quad (1.5)$$

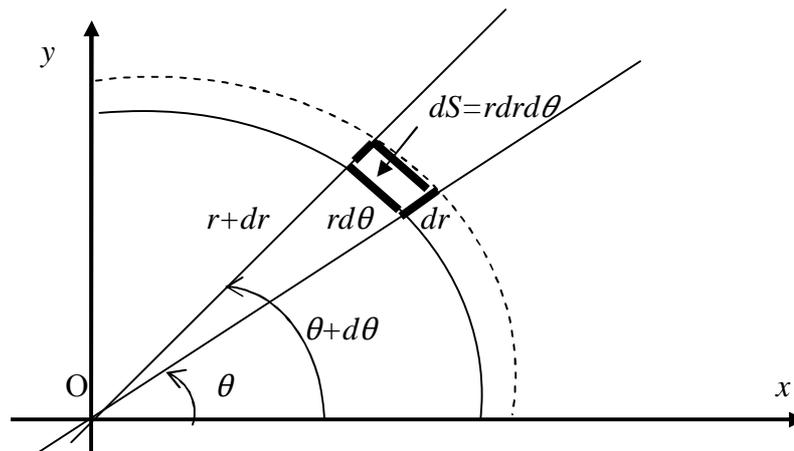


Figure 1.3 Élément de surface  $dS$  en coordonnées polaires.

Soit  $I = \iint_D f(u, v) du dv$  une intégrale double. On dit que le domaine d'intégration  $D$  est un pavé si les bornes  $v_{\min}(u)$  et  $v_{\max}(u)$  sont indépendantes de  $u$ . Dans ce cas on a :

$$I = \iint_D f(u, v) du dv = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} f(u, v) du dv \quad (1.6)$$

Lorsque l'on est en coordonnées cartésiennes, un pavé est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. En coordonnées polaires, un pavé est un secteur circulaire.

Si en plus sur ce pavé  $D$  on a  $f(u, v) = g(u)h(v)$ , on dit que  $f$  est à variables séparables, dans ce cas on peut alors transformer le calcul d'une intégrale double en un produit de deux intégrales simples :

$$I = \iint_D f(u, v) du dv = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} h(v) dv \times \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} g(u) du \quad (1.7)$$

#### Exercice :

- Calculer  $I = \iint_D xy dx dy$  où  $D$  est le pavé  $[0, 1] \times [0, 2]$

**Solution :**

$$I = \iint_D xy dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^2 y dy = 1$$

## 2.4 Calcul de l'aire du domaine D :

Dans le cas où  $f(u, v) = 1$ , l'intégrale  $A = \iint_D dudv$  correspond à l'aire du domaine  $D$ . En coordonnées cartésiennes  $A = \iint_D dx dy$  et en coordonnées polaires  $A = \iint_{\Omega} r dr d\theta$ .

**Exercice :**

Calculer l'aire de la région du plan  $xOy$  délimitée par les courbes :

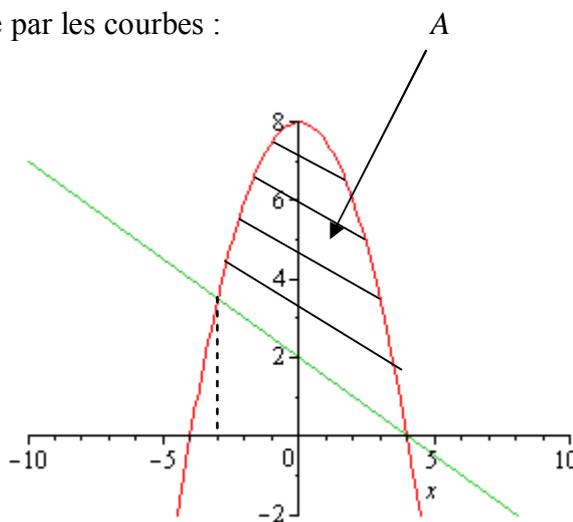
$$2y = 16 - x^2 \quad \text{et} \quad x + 2y = 4$$

**Solution :**

Lorsque  $x$  varie entre  $-4$  et  $4$ ,  $y$  varie entre

$$y_{\min} = \frac{1}{2}(4 - x) \quad \text{et} \quad y_{\max} = \frac{1}{2}(16 - x^2)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^4 \left( \int_{\frac{1}{2}(4-x)}^{\frac{1}{2}(16-x^2)} dy \right) dx \\ &= \int_{-4}^4 \left( -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6 \right) dx = \frac{80}{3} \end{aligned}$$



## 2.5 Changement de variable :

On appelle jacobien de  $\varphi: (u, v) \mapsto (x, y)$  le déterminant suivant :

$$\det(j(\varphi(u, v))) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Soit  $D$  une partie de  $\mathcal{R}^2$  et  $\varphi: [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \mapsto [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$  telle que  $\varphi(\Omega) = D$ , on a alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(\varphi(u, v)) \det(j(\varphi(u, v))) dudv.$$

Soit  $D$  un domaine défini en coordonnées polaires comme un pavé  $\Omega = [r_0, r_1] \times [\theta_0, \theta_1]$ . On a  $\varphi: [r, \theta] \mapsto [r \cos \theta, r \sin \theta]$  et on retrouve alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta \quad (1.9)$$

**Exercice :**

- Calculer en passant aux coordonnées polaires  $I = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$

$D$  est la couronne limitée par les cercles de centre  $O$  et de rayons respectifs  $a$  et  $b$  ( $0 < a < b$ ).

**Solution :**

Le domaine  $D$  est obtenu lorsque les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  parcourent le rectangle.

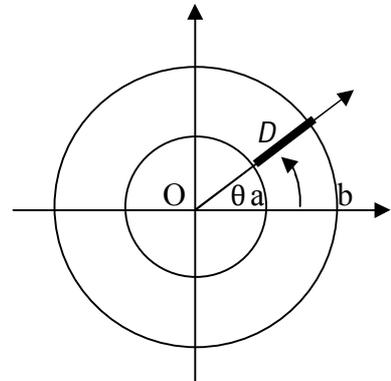
$$D = [a, b] \times [-\pi, \pi]$$

D'autre part,

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{r^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(r \cos t, r \sin t) r dr d\theta \\ &= \iint_D \frac{dr dt}{r} \\ &= \left( \int_a^b \frac{dr}{r} \right) \left( \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \\ &= 2\pi \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

**3. Intégrales triples****3.1 Généralités**

Soit  $f$  une fonction de trois variables  $x, y$  et  $z$  définie sur un domaine  $V \in \mathcal{R}^3$ , est  $M$  est un point appartient à  $V$  ( $M \in V$ ) entouré par un volume infinitésimale  $dV$ . Lorsqu'on fait la somme de tous les volumes pour tous les points  $M \in V$ , on obtient une intégrale triple :

$$I = \iiint_V f(M) dV \quad (1.10)$$

**Question :** pourquoi calcule-t-on une intégrale triple ?

. **Calcul de masse :** Si  $V$  est un domaine de l'espace constitué d'un matériau de masse volumique  $\mu(x, y, z)$ , alors la masse  $m$  de  $V$  est égale à :

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (1.11)$$

. **Calcul de volume :** Lorsque, en particulier,  $\mu(x, y, z) = 1, \forall (x, y, z) \in V$ , cette masse est égale au volume du domaine  $V$  multiplié par 1, ce qui permet de calculer le volume  $V$  d'un domaine quelconque de l'espace par :

$$V = \iiint_v dx dy dz \quad (1.12)$$

**Calcul des coordonnées du centre de gravité d'un domaine de l'espace :** Les coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  du centre de gravité d'un domaine  $V$  de masse volumique  $\mu(x, y, z)$  sont données par :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iiint_v x_\mu(x, y, z) dx dy dz \\ y_G = \frac{1}{m} \iiint_v y_\mu(x, y, z) dx dy dz \\ z_G = \frac{1}{m} \iiint_v z_\mu(x, y, z) dx dy dz \end{cases} \quad (1.13)$$

### 3.2 Méthodes de calcul d'une intégrale triple :

#### 3.2.1 Calcul en coordonnées cartésiennes :

On procède par analogie avec les intégrales doubles. En coordonnées cartésiennes, l'élément de volume  $dV$  s'obtient en faisant varier  $x$  de  $dx$ ,  $y$  de  $dy$  et  $z$  de  $dz$  et donc  $dV = dx dy dz$ .

On a alors :

$$I = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} \left( \int_{z_{\min}(x,y)}^{z_{\max}(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \quad (1.14)$$

Bien sur, on peut intervertir les rôles de  $x, y, z$ . ainsi, on a 6 possibilités différentes pour le calcul de l'intégrale  $I$ .

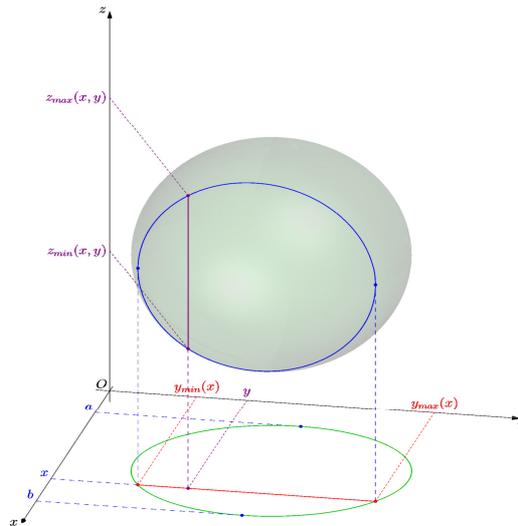


Figure 1.4 – Bornes d'intégrations en coordonnées sphériques

**Exemple :**

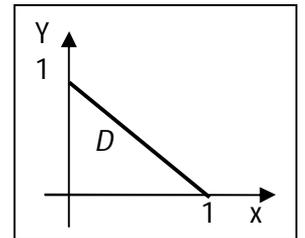
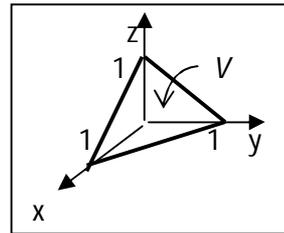
Calcule  $I = \iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz.$

Où  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$

**Solution :**

La projection du domaine  $V$  sur le plan  $xOy$  est le domaine  $D$  limité par les axes et le droite d'équation  $x + y = 1$ .

Lorsque  $(x, y)$  appartient à  $D$ , on a



$$I_z(x, y) = \int_0^{1-x-y} [(x + y + z)^2 dx dy] dz = \left[ \frac{(x+y+z)^3}{3} \right]_0^{1-x-y} = \frac{1}{3} (1 - (x + y)^3),$$

On calcule alors l'intégrale double,

$$I = \iint_D \frac{1}{3} (1 - (x + y)^3) dx dy,$$

Lorsque  $x$  est compris entre 0 et 1, on a :

$$\begin{aligned} I_{zy}(x) &= \int_0^{1-x} I_z(x, y) dy \\ &= \int_0^{1-x} \frac{1}{3} (1 - (x + y)^3) dy \\ &= \frac{1}{3} \left[ y - \frac{(x + y)^4}{4} \right]_0^{1-x} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{12} x^4 \end{aligned}$$

Alors,

$$I = \int_0^1 I_{zy}(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{12} x^4 \right) dx = \left[ \frac{x}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{60} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

### 3.2.2 Calcul d'une intégrale triple sur un parallélépipède rectangle :

Le calcul pratique de cette intégrale triple va se ramener au calcul pratique d'une intégrale simple et d'une intégrale double, ou de trois intégrales simples sur un domaine  $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \quad (1.15)$$

Il est facile de voir que l'on peut écrire les intégrales simples dans n'importe quel ordre puisque les bornes de ces intégrales sont indépendantes lorsque le domaine d'intégration est un parallélépipède rectangle.

#### Exemples :

Donner la valeur de l'intégrale suivant :

$$I = \iiint_V (1+x) z dx dy dz \quad \text{où } V = [0,1] \times [0,2] \times [0,1].$$

$$- \quad I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 (1+x) dx \int_0^2 dy \int_0^1 z dz = \frac{3}{2} * 2 * \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$I = \iiint_V x^2 y e^{xyz} dx dy dz \quad \text{où } V = [0,1] \times [0,2] \times [-1,1].$$

- Puisque la dérivée par rapport à  $z$  de  $e^{xyz}$  est  $xye^{xyz}$ , on peut commencer par intégrer par rapport à  $z$ , ce qui donne :

$$I = \iiint_V x^2 y e^{xyz} dx dy dz = \iint_D x \left( \int_{-1}^{+1} x y e^{xyz} dz \right) dx dy \quad \text{où } D = [0,1] \times [0,2].$$

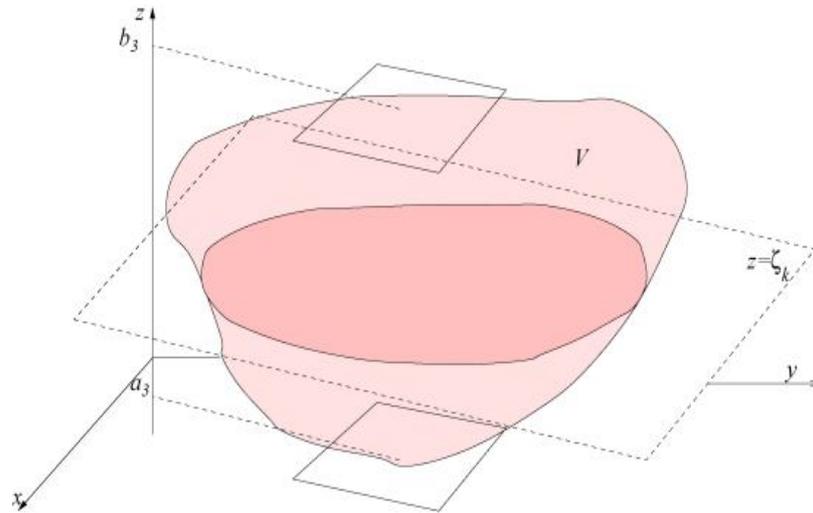
$$I = \int_0^1 \left( \int_0^2 (x e^{xy} - x e^{-xy}) dy \right) dx = \int_0^1 [e^{xy} - e^{-xy}]_0^2 dx = sh2 - 2.$$

### 3.2.3 Calcul de l'intégrale triple par la méthode de tranche :

Lorsque le domaine  $V$  de l'espace n'est pas un parallélépipède rectangle on peut ramener le calcul de l'intégrale triple à celui d'une intégrale simple et d'une intégrale double. La difficulté consiste à trouver les « bonnes » bornes de cette intégrale simple et de cette intégrale double. On suppose que le domaine  $V$  peut être défini par :  $V = \{(x, y, z) \in R^3 / a_3 \leq z \leq b_3, (x, y) \in D_z\}$  où  $D_z$  est le domaine (plan) intersection de volume  $V$  avec le plan parallèle à  $xOy$  qui a pour cote  $z$ , ce domaine  $D_z$  varie avec  $z$  en

général,  $a_3$  est la plus petite cote des points du domaine  $V$  et  $b_3$  la plus grande cote des points de  $V$ . On peut montrer que

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_3}^{b_3} \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \quad (1.16)$$



**Figure 1.5 – Méthode des tranches**

Dans la formule précédente on a privilégié l'axe Oz. On aurait pu aussi bien privilégier l'axe Oy, ce qui donnerait

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_3}^{b_3} \left( \iint_{D_y} f(x, y, z) dx dz \right) dy$$

### Exemples :

1. Soit  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z \leq 1\}$

Montrer que  $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  peut s'écrire :

$$I = \int_{a_3}^{b_3} \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \quad \text{où} \quad \int_{a_3}^{b_3} \left( \iint_{D_x} f(x, y, z) dz dz \right) dx \quad \text{Préciser les valeurs de } a_3, b_3, a_1, b_1.$$

### Solution :

Le volume  $V$  est la demi boule de centre  $(0,0,1)$ , de rayon 1 située au dessous du plan d'équation  $z = 1$ .

Donc  $z$  varie de 0 à 1:  $a_3 = 0, b_3 = 1$ .  $D_{z_0}$  est l'intersection de  $V$  avec le plan d'équation  $z = z_0$ , il s'agit donc d'un disque situé dans le plan d'équation  $z = z_0$ , centré en  $(0,0,z_0)$  et de rayon  $\sqrt{1 - (z_0 - 1)^2}$ .

$x$  varie de -1 à 1:  $a_1 = -1, b_1 = 1$ .

$D_{x_0}$  est un demi disque situé dans le demi-plan  $x = x_0, z \leq 1$ , de centre  $(x_0, 0, 1)$  et de rayon  $\sqrt{1 - x_0^2}$ .

2. Calculer par la méthode des tranches le volume du domaine

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

**Solution :**

$$- I = \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 \left( \iint_{D_z} dx dy \right) dz$$

Où  $D_z$  est le triangle  $\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 - z\}$ , ce qui donne :

$$I = \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 \left( \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-x} dy dx \right) dz = 1/6$$

### 3.2.4 Calcul d'une intégrale triple par la méthode des bâtons :

Dans la méthode des tranches, on a exprimé une intégrale triple  $I$  comme une intégrale simple d'intégrale double, on peut également exprimer  $I$  comme une intégrale double d'intégrale simple, c'est la méthode des bâtons qui va être décrite ci-dessous.

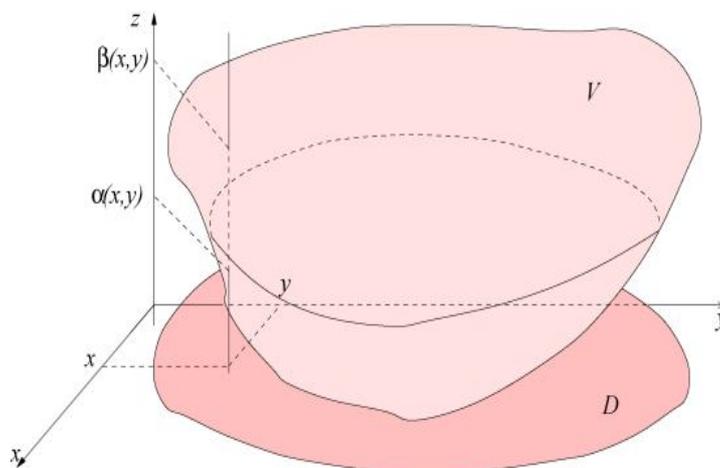
On suppose maintenant que le domaine  $V$  est décrit par :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

L'expression de l'intégrale triple par la méthode des bâtons est la suivantes :

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \quad (1.17)$$

Le domaine plan  $D$  est la projection orthogonale de  $V$  sur le plan  $xOy$ .



**Figure 1.6 – Méthode des bâtons**

Soit un point de coordonnées  $(x, y)$  dans  $D$ , on considère alors la droite parallèle à  $Oz$  et qui passe par ce point. Cette droite coupe le domaine  $V$  en deux points dont les cotes  $\alpha(x, y)$  et  $\beta(x, y)$  comme cela est représenté par la figure (1.6).

En fait  $z = \alpha(x, y)$  est la surface qui limite le domaine  $V$  vers le bas.  $z = \beta(x, y)$  est la surface qui limite le domaine  $V$  vers le haut.

On aurait aussi en privilégiant l'axe  $Oy$

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{\alpha(x, z)}^{\beta(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz \quad (1.18)$$

où  $D$  est la projection de  $V$  dans le plan  $xOz$  et  $[\alpha(x, z), \beta(x, z)]$  est l'intersection de la droite parallèle à  $Oy$  passant par le point  $(x, y)$  du domaine  $D$  avec  $V$ .

### Exemples :

1. Soit  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z \leq 1\}$ .

Montrer que :  $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  peut s'écrire  $\iint_D \left( \int_{\alpha(x, z)}^{\beta(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz$

- Le volume  $V$  est la demi boule de centre  $(0, 0, 1)$ , de rayon 1 située au dessous du plan d'équation  $z = 1$ . Donc  $D$ , projection de  $V$  sur le plan  $xOy$  est un disque de centre  $O$  et de rayon 1.
- La surface qui limite le volume au dessus est le plan  $z = 1$ , la surface qui limite le volume en dessous est la demi sphère inférieure d'équation  $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .  
d'où  $\alpha(x, y) = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  et  $\beta(x, y) = 1$

2. Calculer par la méthode des bâtons le volume du domaine

$$V = \{(x, y, z), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

- $\iiint_V dx dy dz = \iint_D \left( \int_0^{1-x-y} dz \right) dx dy$ , où  $D$  est le triangle du plan  $xOy$   $\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  ce qui donne

$$\iiint_V dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx = 1/6$$

## 3.3 Changement de variable dans les intégrales triples

### 3.3.1 Déterminants jacobien :

On considère le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = a(u, v, w) \\ y = b(u, v, w) \\ z = c(u, v, w) \end{cases} \quad (u, v, w) \in \Omega \quad (1.19)$$

Où  $a, b, c$  sont des fonctions supposées continument différentiables sur un domaine  $\Omega$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . On appelle matrice jacobienne, la matrice  $j(u, v, w)$  suivante :

$$j(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial a(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial a(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial a(u, v, w)}{\partial w} \\ \frac{\partial b(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial b(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial b(u, v, w)}{\partial w} \\ \frac{\partial c(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial c(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial c(u, v, w)}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (1.20)$$

et on appelle déterminant jacobien ou jacobien le déterminant :

$$DJ(u, v, w) = \det J(u, v, w) \quad (1.21)$$

Par le changement de variable ci-dessus, on a :

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} g(u, v, w) |DJ(u, v, w)| du dv dw \quad (1.22)$$

Le terme  $|DJ(u, v, w)|$  représente la valeur du jacobien.

### Exemples:

Quelles sont les matrices jacobienes des changements de variable :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Quel sont les jacobiens associées ?

### Solution :

$$\text{- On a } J(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow DJ(r, \theta, z) = r.$$

$$\text{- } J(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -r \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi & 0 & r \cos \phi \end{bmatrix} \Rightarrow DJ(r, \theta, \phi) = r^2 \cos \phi$$

### 3.3.2 Calcul en coordonnées cylindriques :

Les coordonnées cylindriques sont données par :

$$I = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (1.23)$$

Ici  $dV$  est obtenu en faisant varier  $r$  de  $dr$ ,  $\theta$  de  $d\theta$  et  $z$  de  $dz$ .  $dV$  est un pseudo-parallélépipède tel que  $dV = r dr d\theta dz$ .

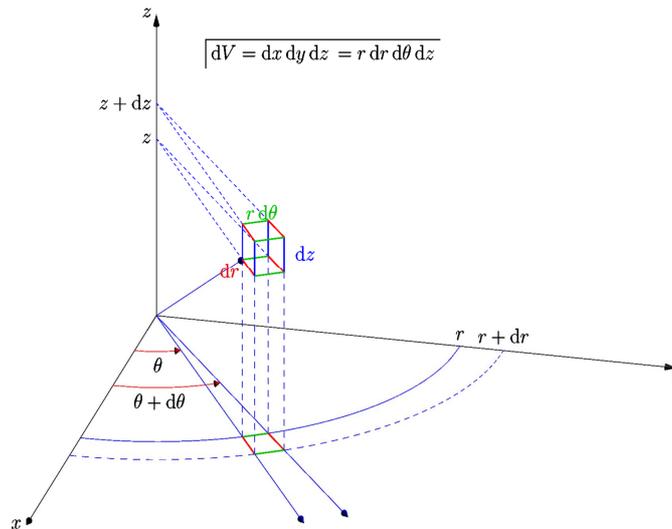


Figure 1.7 - Élément de volume  $dV$  en coordonnées cylindriques

On a donc :  $I = \iiint_V g(r, \theta, z) r dr d\theta dz$ . dans la pratique, on calcule souvent ainsi :

$$I = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left( \int_{r_{\min}(\theta)}^{r_{\max}(\theta)} \left( \int_{z_{\min}(r, \theta)}^{z_{\max}(r, \theta)} r g(r, \theta, z) dz \right) dr \right) d\theta \quad (1.24)$$

**Exemple :**

Calculer le volume du cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ .

**Solution :**

$$V = \iiint_V r dr d\theta dz = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = h\pi R^2$$

### 3.3.3 Calcul en coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont données par :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (1.25)$$

L'élément de volume est alors  $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ .

et on a donc :

$$I = \iiint_V h(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (1.26)$$

son calcul se fait de la manière suivante :

$$I = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \left( \int_{\theta_{\min}(\varphi)}^{\theta_{\max}(\varphi)} \left( \int_{r_{\min}(\theta, \varphi)}^{r_{\max}(\theta, \varphi)} r^2 h(r, \theta, \varphi) dr \right) \sin \theta d\theta \right) d\varphi \quad (1.27)$$

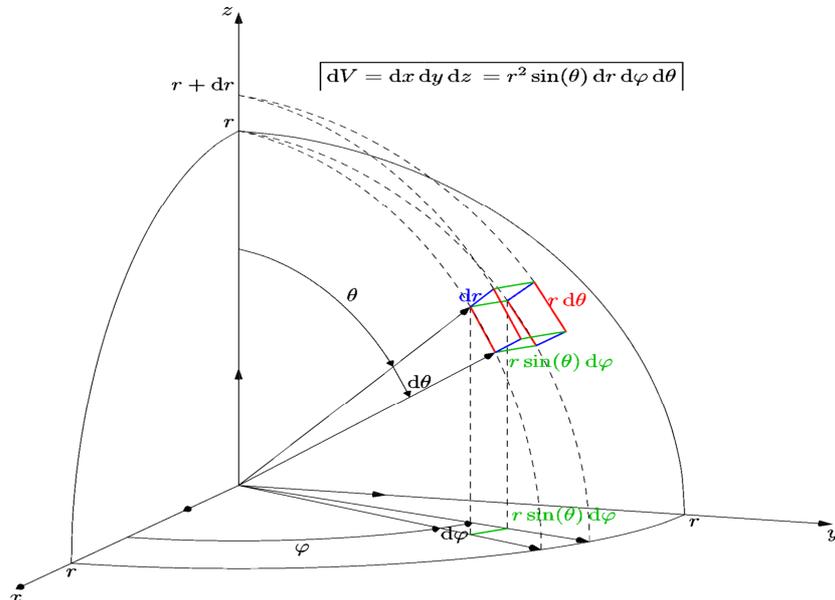


Figure 1.7 - Élément de volume  $dV$  en coordonnées sphériques

### Exercice :

Calculer  $I = \iiint_V z dx dy dz$

Où  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 ; z \geq 0\}$ .

### Solution :

En coordonnées sphérique l'intégrale  $I$  devient:

$$I = \iiint_{\Omega} r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta d\varphi$$

où  $\Omega(r, \theta, \varphi) = [0, R] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} r^3 \sin(2\theta) dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

## Chapitre 2

# Intégrales impropres (généralisées)

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion d'intégration à une fonction continue par morceaux sur un intervalle non borné ou sur un intervalle (semi) ouvert.

### 1. Cas d'un problème à une seule borne :

On donne ici la définition pour l'intervalle  $[a, b[$  où  $-\infty < a < b < +\infty$ . on adaptera cette définition pour les intervalles suivants :  $[a, +\infty[$ ,  $]-\infty, b]$  et  $]a, b]$ .

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a, b[ \subset \mathcal{R}$ .

On dit que l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b[$  est convergente ( ou converge, ou existe) lorsque l'intégrale partielle  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  possède une limite finie lorsque  $x \rightarrow b^-$ , Si c'est le cas, on note cette limite  $\int_a^{b^-} f(t)dt$  dans le cas contraire on dit que l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b[$  est divergente ou qu'elle n'a pas de sens.

#### Remarque :

- Si on est dans le cas de la convergence, et en notant  $F$  une primitive quelconque de  $f$  sur  $[a, b[$ , on utilisera la notation,

$$\int_a^{b^-} f(t)dt = [F(t)]_a^{b^-} = \lim_{t \rightarrow b^-} (F(t) - F(a)).$$

- Soit  $c \in [a, b[$  :  $\int_a^{b^-} f(t)dt$  converge  $\Leftrightarrow \int_c^{b^-} f(t)dt$  converge

#### Exemples :

- Soit  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(t) = 1/t^2$ . Pour  $x \geq 1$  on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \quad \text{donc l'intégrale de } f \text{ sur } [1, +\infty[ \text{ est}$$

convergente et on écrit  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$ .

- Soit  $g$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(t) = \frac{1}{t}$ . Pour  $x \geq 1$  on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty. \text{ Donc l'intégrale } [1, +\infty[ \text{ est divergente.}$$

- Considérons la fonction cosinus sur  $\mathcal{R}_+$ . on a pour tout  $x \geq 0$  :

$\int_0^x \cos t \, dt = [\sin t]_0^x = \sin x$  qui n'admet pas de limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , donc l'intégrale  $\int_0^x \cos t \, dt$  n'a pas de sens.

- Soit  $h$  définie sur  $]0,1]$  par  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ . Pour  $0 < x \leq 1$  on a :

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0} 2 - 2\sqrt{x} = 2 \text{ est donc l'intégrale } \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \text{ existe et vaut } 2.$$

- Montrons que  $\int_{\rightarrow 0}^1 \ln t \, dt$  converge et vaut  $-1$ . Pour  $0 < x \leq 1$  on a :

$$\int_x^1 \ln t \, dt = [t \ln t]_x^1 - \int_x^1 dt = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 - x \ln x = -1, \text{ d'où le résultat.}$$

## 2. Cas d'un problème aux deux bornes :

On s'intéresse ici au cas des intervalles  $]a, b[$ ,  $] -\infty, b[$ ,  $]a, +\infty[$  et  $\mathcal{R}$ , c'est à dire au cas des intégrales doublement impropres. Donnons par exemple la définition sur  $]a, b[$ .

### Définitions :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  et  $c \in ]a, b[$

On dit que l'intégrale de  $f$  sur  $]a, b[$  est convergente lorsque **les deux intégrales**  $\int_{\rightarrow a}^c f(t) \, dt$  et  $\int_c^{\rightarrow b} f(t) \, dt$  convergent, Si c'est le cas, on note :

$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(t) \, dt = \int_{\rightarrow a}^c f(t) \, dt + \int_c^{\rightarrow b} f(t) \, dt$ , Sinon on dit que l'intégrale de  $f$  sur  $]a, b[$  est divergente.

### Remarque :

Il faut décomposer en somme l'intégrale donnée pour connaître sa nature. On retiendra par exemple que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \sin t \, dt = 0$  et pourtant  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t \, dt$  n'a pas de sens puisque  $\int_0^{\infty} \sin t \, dt$  diverge.

### Exemple :

On a déjà montré que  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  est convergente. Pour  $x \in ]0, 1]$  on a :

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - 1 = +\infty. \text{ Donc } \int_{\rightarrow 0}^1 \frac{dt}{t^2} \text{ diverge. Ainsi l'intégrale } \int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ est divergente.}$$

## 3. Intégrales faussement impropres

On se place ici sur l'intervalle  $[a, b[$  où  $-\infty < a < b < +\infty$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b[$ . si  $f$  admet une limite finie en  $b^-$  alors  $\int_a^{\rightarrow b} f$  converge.

On dit dans ce cas que l'intégrale est **faussement impropre** (ou mal écrite) en  $b$ .

**Exemples :**

- L'intégrale  $\int_{\rightarrow 0}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$  est faussement impropre en 0, donc converge. En effet,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$ . et  $\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha < 1$ . En effet,

Soit  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ , on a les cas suivants :

1- Si  $\alpha = 1$ , une primitive de  $1/t$  sur  $\mathbb{R}^*_+$  est  $\ln t$  qui n'admet de limite finie ni en  $+\infty$  ni en  $0^+$ , donc  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  et  $\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{dt}{t}$  divergent.

Supposons désormais  $\alpha \neq 1$ .

2-  $\forall x \geq 1$ ,  $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} [t^{1-\alpha}]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$  qui tend, lorsque  $x \rightarrow +\infty$  vers  $+\infty$  si  $\alpha < 1$  et vers  $\frac{1}{\alpha-1}$  si  $\alpha > 1$ .

3-  $\forall x \in ]0,1]$ ,  $\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [t^{1-\alpha}]_x^1 = \frac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$  qui tend, lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , vers  $+\infty$  si  $\alpha > 1$  et vers  $\frac{1}{1-\alpha}$  si  $\alpha < 1$ .

On notera que  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  est toujours divergente car les conditions  $\alpha > 1$  et  $\alpha < 1$  sont incompatibles.

- $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 0$ .

Pour  $\alpha = 0$  l'intégrale est bien sur divergente, on suppose donc  $\alpha \neq 0$ . On a alors, pour tous  $x \geq 0$  :

$\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^x = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x})$  ce qui, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , tend vers  $+\infty$  si  $\alpha < 0$  et vers  $1/\alpha$  si  $\alpha > 0$ .

- Dans le cas général, on montre par récurrence sur  $n$  le résultat suivant.

$$\forall \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt \text{ converge et vaut } \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

**4. Propriétés :****4.1 Linéarité :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $[a, b[$  et  $\lambda$  une constante :

- Si  $\int_a^{\rightarrow b} f$  converge et  $\int_a^{\rightarrow b} g$  converge alors  $\int_a^{\rightarrow b} (f + g)$  converge et on a :

$$\int_a^{\rightarrow b} (f + g) = \int_a^{\rightarrow b} f + \int_a^{\rightarrow b} g.$$

- Si  $\int_a^{\rightarrow b} f$  converge alors  $\int_a^{\rightarrow b} \lambda f$  converge et vaut  $\lambda \int_a^{\rightarrow b} f$

Attention aux éclatements illicites ! On pourrait écrire :

$$1 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1+t}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1+t}{t^2} dt - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

Or ça n'a aucun sens car les deux dernières intégrales écrites sont divergentes.

#### 4.2 Intégration par parties :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $[a, b[$ .

Si  $f g$  possède une limite finie en  $b^-$ , alors les intégrales  $\int_a^{\rightarrow b} f'g$  et  $\int_a^{\rightarrow b} fg'$  sont de la même nature. Si de plus elles sont convergentes, alors :

$$\int_a^{\rightarrow b} f'g = [fg]_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} fg'$$

#### Exemple :

Montrons que l'intégrale  $\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$  converge et calculons sa valeur.

On remarque que :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$  et donc l'intégrale est faussement impropre en 0, donc convergente.

Une primitive de  $\frac{2t}{(1+t^2)^2}$  est  $\frac{-1}{1+t^2}$  mais si on fait ce choix, le terme tout intégré devient

$\left[ \frac{-\ln t}{1+t^2} \right]_{\rightarrow 0}^1$  qui n'a pas de sens. Il faut choisir la primitive de  $\frac{2t}{(1+t^2)^2}$  qui s'annule en 0, c'est-à-

dire  $1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$ . les trois objets de la formule ont alors un sens et on peut écrire :

$$\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2} dt = \left[ \frac{t^2 \ln t}{1+t^2} \right]_{\rightarrow 0}^1 - \int_{\rightarrow 0}^1 \frac{t}{1+t^2} dt = 0 - \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2}.$$

#### 4.3 Changement de variable :

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  ;  $\varphi$  une bijection de classe  $C^1$  de  $]a, b[$  sur son image et  $f$  une fonction continue sur  $\varphi(]a, b[)$ .

Les intégrales  $\int_{\rightarrow \varphi(a)}^{\rightarrow \varphi(b)} f(t) dt$  et  $\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$  sont de la même nature, et égales si convergentes.

#### Exemple 1 :

1. Calculons  $I = \int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos t}$ .

La règle de Bioche nous invite à poser  $u = \tan \frac{t}{2}$  soit  $t = 2 \arctan u = \varphi(u)$ . La fonction  $\varphi$  établit une bijection  $C^1$  de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, \pi[$  et la fonction  $f: t \mapsto \frac{1}{2+\cos t}$  est continue sur  $[0, \pi[$

donc on peut appliquer le théorème du changement de variable. On rappelle les formules suivantes :

$$\text{Pour } u = \tan \frac{t}{2}; \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}; \sin t = \frac{2u}{1+u^2}; dt = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\text{On a donc : } I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{3+u^2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \arctan \left( \frac{u}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} = \pi/\sqrt{3}$$

### Exemple 2 :

$$\text{Pour } a < b, \text{ calculons } I = \int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$$

$$(t-a)(b-t) = -t^2 + (a+b)t - ab = -\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

$$\text{On a donc pour } a < t < b : \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \frac{2}{b-a} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \text{ où on a posé :}$$

$$u = \frac{2}{b-a}t - \frac{a+b}{b-a} \quad \text{i.e.} \quad t = \varphi(u) = \frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2} \quad \text{où } \varphi: ]-1,1[ \rightarrow ]a,b[$$

D'où :

$$I = \frac{2}{b-a} \int_{\rightarrow -1}^{\rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{(b-a)}{2} du = \int_{\rightarrow -1}^{\rightarrow 1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_{-1}^1 = \pi$$

## 5. Théorème de convergence - Fonctions intégrables

### 5.1 Théorème de convergence

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $[a, b[ \subset \mathcal{R}$ . on suppose que :

$$\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

i. Si  $\int_a^{\rightarrow b} g$  converge alors  $\int_a^{\rightarrow b} f$  converge et  $0 \leq \int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$ .

ii. Si  $\int_a^{\rightarrow b} f$  diverge alors  $\int_a^{\rightarrow b} g$  diverge.

### Exemple :

$$\text{Montrons que } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt \text{ est convergente.}$$

$$\text{On a : } \forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}. \text{ Or l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ est convergente et vaut } \pi/2.$$

D'après le théorème de comparaison on conclue que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$  est convergente et que

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi}{2}$$

## 5.2 Critère d'équivalence :

### Théorème :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $[a, b[ \subset \mathcal{R}$ . on suppose que  $f(t) \xrightarrow{b} g(t)$  et que  $f$  garde un signe constant au voisinage de  $b$ . alors les intégrales  $\int_a^{\rightarrow b} f$  et  $\int_a^{\rightarrow b} g$  ont la même nature.

### Exemple :

Déterminer la nature de  $\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{t^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta} dt$  où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

Il suffit de remarquer que  $\frac{t^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta} \xrightarrow{0^+} \frac{1}{t^{\beta-\alpha}} \geq 0$  et donc l'intégrale étudiée a la même nature que l'intégrale de Riemann  $\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{dt}{t^{\beta-\alpha}}$  qui converge Si et seulement si  $\beta - \alpha < 1$ .

## 5.3 Fonctions intégrables

soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b[$ . on dit que l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b[$  est absolument convergente ou encore que  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  lorsque  $\int_a^{\rightarrow b} |f(t)| dt$  est convergente.

### Théorème :

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

### Exemples :

1-  $\frac{\sin x}{x^2}$  a une intégrale absolument convergente sur  $[1, +\infty[$  car  $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$  et  $\frac{1}{x^2}$  a une intégrale convergente sur  $[1, +\infty[$ .

2- Etudions, pour  $\alpha > 0$ , la nature de  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ .

- Si  $\alpha > 1$ , on a alors  $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ . De plus l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  est convergente car  $\alpha > 1$ , donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$  est absolument convergente (donc convergente).
- Si  $0 < \alpha \leq 1$ . Montrons que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$  est convergente.

On applique le théorème d'intégration par partie : puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\cos t}{t^\alpha} = 0$ , l'intégrale étudiée a même nature que  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$  or cette dernière est absolument convergente (donc convergente), en effet :

$\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ . et l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$  est convergente car  $\alpha + 1 > 1$ .

- Si  $0 < \alpha \leq 1$ . Montrons que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$  est convergente.
- Si  $0 < \alpha \leq 1$ . Montrons que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt$  diverge.

On utilise la minoration suivante :  $|\sin t| \geq \sin^2 t$ . On a donc :

$\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{t^\alpha}$ , il suffit donc de démontrer, d'après le théorème de la comparaison, que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} dt$  est divergente. Or on a :

$$\frac{\sin^2 t}{t^\alpha} = \frac{1}{2t^\alpha} - \frac{\cos 2t}{2t^\alpha}.$$

On étudie donc la nature des deux intégrales suivantes :

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^\alpha}$  : elle est divergente d'après le critère de Riemann ( $\alpha \leq 1$ ).
- $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t^\alpha} dt$  : elle est convergente (par intégration par parties identique à celle faite précédemment).

On en déduit, par le théorème de la linéarité que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} dt$  diverge et donc que  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt$  diverge également.

$$0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \text{ est semi-convergente.}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \text{ est absolument convergente.}$$

En particulier on voit que l'intégrale  $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ , qui est faussement impropre en 0, est semi-convergente et de méthode permettant de prouver qu'elle vaut  $\pi/2$ .

#### 5.4 Utilisation de développements asymptotiques

Il est parfois possible, en utilisant des développements limités, d'écrire une fonction  $f$ , dont on veut étudier la convergence de l'intégrale sur  $[a, b[$ , comme somme de deux (ou plus) fonctions dont la convergence des intégrales est plus simple à étudier.

##### Exemple :

On considère, la fonction  $f(x) = \frac{\sin x}{x + \cos x}$  continue sur  $[1, +\infty[$ , on peut écrire  $f(x) = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{1 + \frac{\cos x}{x}}$  et avec le développement limité à l'ordre 1 de  $\frac{1}{1+u}$  :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \left[ 1 - \frac{\cos x}{x} (1 + \varepsilon(x)) \right] \text{ avec } \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0.$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x \cos x}{x^2} (1 + \varepsilon(x)).$$

L'intégrale de  $\frac{\sin x}{x}$  est semi-convergente sur  $[1, +\infty[$  et celle de  $\frac{\sin x \cos x}{x^2} (1 + \varepsilon(x))$  est absolument convergente sur  $[1, +\infty[$  puisque  $\left| \frac{\sin x \cos x}{x^2} (1 + \varepsilon(x)) \right| \leq \frac{2}{x^2}$ .

## Chapitre 3

# Equations différentielles

### 1. Définition :

De manière générale, une équation différentielle est une équation :

- Dont l'inconnu est une fonction  $y$  dépendant d'une variable  $x$  (ou  $t$ ).
- Qui fait intervenir  $y$  et certaines de ses dérivées  $y'$ ,  $y''$ , ... etc et éventuellement la variable  $x$  (ou  $t$ ).

Résoudre l'équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle, qui satisfont l'équation (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).

### 2. Equation différentielle linéaire du premier ordre :

Une équation différentielle linéaire d'ordre un est de la forme :

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (3.1)$$

- On parle d'équation différentielle d'ordre un sans second membre si  $g(x) = 0$  (SSM).
- On parle d'équation différentielle linéaire d'ordre un avec second membre si  $g(x) \neq 0$  (ASM).
- La fonction  $g(x)$  est le second membre de l'équation, l'équation sans second membre (SSM) est encore appelée équation homogène.

#### 2.1 Equation différentielle linéaire sans second membre (SSM) :

Nous considérons des équations de la forme :

$$y' + f(x)y = 0 \quad (3.2)$$

Ces équations SSM sont à variables séparables et aisément intégrables sous réserve de pouvoir calculer la primitive de la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} y' + f(x)y = 0 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -f(x)dx \end{aligned}$$

Par intégration on obtient :

$$\ln y = -F(x) + C$$

Où  $F(x)$  est la primitive de la fonction  $f(x)$  est  $C$  est la constante d'intégration.

Finalement on trouve :

$$y = Ke^{-F(x)} \quad (3.4)$$

Où on a posé  $K = e^C$  est une constante.

### Exemples :

- Résoudre l'équation :  $y' + e^x y = 0$  (E<sub>0</sub>)

#### Solution :

$$\begin{aligned} (E_0) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -ye^x \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -e^x dx \\ &\Leftrightarrow \ln y = -e^x + C \\ &\Leftrightarrow y = Ke^{-e^x} \quad (C,K) : \text{constantes} \end{aligned}$$

- Résoudre l'équation :  $y' = y^3 e^x$  (E'<sub>0</sub>)

#### Solution :

$$\begin{aligned} (E'_0) &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y^3 e^x \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y^3} = e^x dx \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2y^2} = e^x + C \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{C-2e^x} \\ &\Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{C-2e^x}} \quad C : \text{constante} \end{aligned}$$

## 2.2 Equation différentielle linéaire avec second membre (ASM) :

Nous considérons dans ce paragraphe des équations de la forme :

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (3.5)$$

Ces équations avec second membre (ASM) se résolvent en deux temps :

1- On intègre d'abord l'équation sans second membre (SSM) pour obtenir :

$$y_0 = Ke^{-F(x)}$$

2- On résout l'équation avec second membre ASM, soit en recherchant une solution particulière  $y_p$  de (E), soit en utilisant la méthode de variation de la constante.

### 2.2.1 Recherche d'une solution particulière :

Supposons que l'on dispose d'une solution particulière  $y_p$  de (E), alors la solution générale de (E) est la fonction définie par :

$$y = y_0 + y_p = Ke^{-F(x)} + y_p \quad (3.6)$$

#### Vérification :

Soit  $y = y_0 + y_p = Ke^{-F(x)} + y_p$ . Montrons qu'une telle fonction est bien solution de (3.5).  $y_p$  est une solution particulière de (3.5), elle vérifie donc  $y'_p + f(x)y_p = g(x)$ , par ailleurs  $y' = -Kf(x)e^{-F(x)} + y'_p$ , on remplace dans (3.5) :

$$\begin{aligned} y' + f(x)y &= -Kf(x)e^{-F(x)} + y'_p + f(x)(Ke^{-F(x)} + y_p) \\ &= -Kf(x)e^{-F(x)} + Kf(x)e^{-F(x)} + y'_p + f(x)y_p \\ &= y'_p + f(x)y_p \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Alors,  $y = y_0 + y_p = Ke^{-F(x)} + y_p$  est bien solution de (3.5).

#### Exemple :

Résoudre l'équation  $y' + xy = x^2 + 1$  (E)

#### Solution :

On résout d'abord l'équation SSM :  $y' + xy = 0$  (E<sub>0</sub>)

On trouve :  $y_0 = Ke^{-\frac{x^2}{2}}$

On cherche une solution particulière de (E), posons  $y_p = ax + b$  où a et b sont à déterminer de telle sorte que  $y_p$  vérifie (E), on trouve a = 1 et b = 0. Une solution particulière de (E) est donc  $y_p = x$ .

On conclue sur la solution générale de (E) :  $y = y_0 + y_p = Ke^{-\frac{x^2}{2}} + x$ .

Cette méthode repose entièrement sur la connaissance de  $y_p$  qui n'est pas toujours facile à obtenir. La méthode de variation de la constante est par contre beaucoup plus générale.

### 2.2.2 Méthode de variation de la constante :

On utilise cette technique lorsqu'on ne peut pas trouver de solution particulière de l'équation avec second membre (3.5), on résout dans ce cas l'équation sans second membre (SSM) qui fournit  $y_0 = Ke^{-F(x)}$ , puis on fait varier la constante :

En posant dans (3.5),  $y = K(x)e^{-F(x)}$ , on obtient :

$$K'(x)e^{-F(x)} - f(x)K(x)e^{-F(x)} + f(x)K(x)e^{-F(x)} = g(x) \Leftrightarrow K'(x)e^{-F(x)} = g(x)$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = g(x) e^{F(x)}$$

Ainsi, par intégration et sous réserve que l'on puisse calculer une primitive de  $g(x) e^{F(x)}$ , on obtient :  $K(x) = \int g(x) e^{F(x)} dx$ .

Finalement la solution générale de l'équation (3.5) s'écrit :

$$y = e^{-F(x)} \int g(x) e^{F(x)} dx \quad (3.7)$$

### Exemple :

- Résoudre l'équation :  $y' - \frac{y}{x} = x^2$  (E)

### Solution :

On résout d'abord l'équation sans second membre SSM :

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \quad (E_0)$$

$$(E_0) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln y = \ln x + C$$

Il vient :  $y_0 = C_1 x$  avec  $C_1 = e^C$

On utilise ensuite la méthode de variation de la constante en cherchant  $y$  sous la forme  $y = C_1(x) x$ , on remplace  $y$  dans (E), on obtient,  $C_1'(x) = x$ , d'où  $C_1(x) = \frac{x^2}{2} + K$ , et la solution générale de (E) est :  $y = \frac{x^3}{2} + Kx$

## 2.3 Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

Nous considérons cette fois des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients, constants, c'est-à-dire de la forme :

$$y' + ay = g(x) \quad (3.8)$$

avec  $a \in \mathcal{R}$  une constante.

C'est un cas particulier des équations différentielles du premier ordre que nous avons vu précédemment, en effet, nous avons ici,  $f(x) = a$ . Ainsi, après avoir résolu l'équation SSM,

la méthode précédente s'applique, soit avec recherche d'une solution particulière, soit par variation de la constante, la solution particulière  $y_p$ , dans ce cas, s'obtient parfois facilement :

- Si  $g(x) = P_n(x)$  un polynôme de degré  $n$ , alors  $y_p = Q_n(x)$  un polynôme de degré  $n$ .
- Si  $g(x) = e^{mx}P_n(x)$  alors on pose  $y_p = ze^{mx}$ , et  $z$  devient la fonction inconnue de l'équation différentielle :  $z' + (a + m)z = P(x)$ , on est ramené au cas précédent.

**Exemple :**

Résoudre l'équation : 
$$y' - 2y = x^3 + 1 \quad (E)$$

**Solution :**

On résout d'abord l'équation SSM : 
$$y' - 2y = 0 \quad (E_0)$$

On trouve 
$$y_0 = Ce^{2x}.$$

On cherche ensuite une solution particulière de (E) :

Posons  $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont à déterminer pour que  $y_p$  vérifie (E). on trouve  $a = \frac{1}{2}, b = c = -\frac{3}{4}, d = \frac{7}{8}$ . Par conséquent :

$$y_p = -\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}(x^2 + x) - \frac{7}{8}.$$

On conclut sur la solution générale de (E),  $y = y_p + y_0$  soit :

$$y = Ce^{2x} - \frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}(x^2 + x) - \frac{7}{8}$$

## 2.4 Equations de Bernoulli et Equations de Riccati

### 2.4.1 Equation de Bernoulli

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle de la forme :

$$x' + a(t)x = b(t)x^n \quad (3.9)$$

Où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions continues de la variable indépendante  $t$  ou des constantes connues, avec la condition :

$$n \neq 0 \text{ et } n \neq 1 \quad (3.10)$$

Bien entendu, si  $n = 0$ , l'équation de Bernoulli devient une équation linéaire avec second membre

$$x' + a(t)x = b(t) \quad (3.11)$$

et si  $n = 1$  l'équation de Bernoulli devient une équation linéaire sans second membre

$$x' + (a(t) - b(t))x = 0 \quad (3.12)$$

- **Transformation d'une équation de Bernoulli à une équation linéaire**

Il est aisé de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Bernoulli à une équation différentielle linéaire par les transformations suivantes.

- Divisons tous les termes de l'équation par  $x^n$ , on obtient

$$x^{-n}x' + a(t)x^{1-n} = b(t) \quad (3.13)$$

Faisons le changement de variable suivant

$$y = x^{1-n} \quad (3.14)$$

- La dérivée des deux membres de la fonction (3.14) donne

$$y' = (1-n)x^{-n}x' \quad (3.15)$$

- Substituons ces transformations dans l'équation (3.13), il vient

$$y' + (1-n)a(t)y = (1-n)b(t) \quad (3.16)$$

Il est à remarquer que l'équation différentielle (3.16) est linéaire, simple à résoudre par la méthode de variation des constantes.

**Exemple :**

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x' + \frac{2}{t}x = \frac{\exp t}{\sqrt{x}} \quad (E)$$

**Solution :**

L'équation différentielle (E) est de Bernoulli avec  $n = -\frac{1}{2}$ , divisons tous les termes par  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ , on obtient l'équation suivante

$$x^{1/2}x' + \frac{2}{t}x^{3/2} = \exp t \quad (E_1)$$

Introduisons la nouvelle fonction  $y$  donnée en fonction de  $x$  par la relation

$$y = x^{3/2}$$

D'où la dérivée des deux membres de la fonction  $y(t)$  donne

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} x'$$

Portons ses expressions dans l'équation (E<sub>1</sub>), on est ramené à une équation linéaire avec second membre

$$\frac{2}{3}y' + \frac{2}{t}y = \exp t$$

Il est aisé de voir que cette équation se résout par la méthode de variation des constantes dont la solution est :

$$y(t) = 9 \left( -\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t} + \frac{1}{6} \right) e^t + \frac{Cte}{t^3}$$

D'où la solution,  $x(t) = (y(t))^{\frac{2}{3}}$

#### 2.4.2 Equation de Riccati :

On appelle équation de Riccati toute équation différentielle de la forme :

$$x' + a(t)x + b(t)x^2 = c(t) \quad (3.17)$$

où  $a(t), b(t)$  et  $c(t)$  sont des fonctions continues de la variable indépendante  $t$  ou des constantes connues avec la condition

$$b(t) \neq 0 \quad \text{et} \quad c(t) \neq 0 \quad (3.18)$$

- **Transformation d'une équation de Riccati à une équation de Bernoulli**

Il est simple de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Riccati à une équation différentielle de Bernoulli par les transformations suivantes :

- Connaissons une solution particulière  $x_1(t)$  d'équation de Riccati.
- Substituons le changement de variable

$$x = x_1(t) + y \quad (3.19)$$

Pour aboutir à une équation de Bernoulli de la forme

$$y + A(t)y = b(t)y^2 \quad (3.20)$$

où  $A(t)$  est une fonction continue donnée par

$$A(t) = a(t) - 2b(t)x_1(t) \quad (3.21)$$

- **Transformation d'une équation de Riccati à une équation linéaire**

Il est aisé de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Riccati à une équation linéaire avec second membre par les transformations suivantes :

- Connaissons une solution particulière  $x_1(t)$  d'équation de Riccati.
- Substituons le changement de variable

$$x = x_1(t) + \frac{1}{y} \quad (3.22)$$

Pour aboutir à une équation différentielle linéaire non homogène de la forme

$$y' + A(t)y = b(t) \quad (3.23)$$

où  $A(t)$  est une fonction continue donnée par

$$A(t) = 2b(t)x_1(t) - a(t) \quad (3.24)$$

- Intégrons les équations obtenues par ces changements, suivant les cas connus, équations linéaires ou équations de Bernoulli.

### Remarque 1

Il n'est pas toujours évident de trouver la solution particulière de l'équation de Riccati.

### Exemple :

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$x' - x + x^2 = 4t^2 + 2t + 2 \quad (E)$$

### Solution :

On remarque dans l'équation (E) que les termes du premier membre sont semblables à ceux du second membre, il suffit donc de prendre le changement de variable suivant

$$x = at + b \quad (E_1)$$

Portons l'expression (E<sub>1</sub>) dans l'équation (E) et égalons les coefficients des termes semblables, on trouve les constante  $a$  et  $b$ .

Si la solution particulière du type donné existe, ce qui n'est pas toujours le cas, on trouve :

$$a^2t^2 + (-a + 2ab)t + a - b + b^2 = 4t^2 + 2t + 2$$

En égalant les coefficients de même puissance de  $t$  dans les deux membres, on obtient le système

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ -a + 2ab = 2 \\ a - b + b^2 = 2 \end{cases}$$

Il est simple de voir que les valeurs  $a = 2$  et  $b = 1$  sont solution de ce système.

D'où l'existence de la solution particulière  $x_1(t)$  sous forme polynomiale

$$x_1 = 2t + 1$$

Soit le changement de variable suivant

$$x = x_1(t) + \frac{1}{y} = 2t + 1 + \frac{1}{y}$$

Substituons cette expression dans l'équation différentielle (E), afin d'obtenir une équation linéaire non homogène de la forme

$$y' + (-4t - 1)y = -1$$

qui se résout par la méthode de variation de la constante.

Comme, on peut mettre le changement de variables suivant

$$x = x_1(t) + y = 2t + 1 + y$$

dans l'équation différentielle (E), afin d'obtenir une équation de Bernoulli de la forme

$$y' + (4t + 1)y = -y^2$$

### Proposition 1

Etant donné une équation de Riccati de la forme

$$x' = Ax^2 + \frac{B}{t}x + \frac{C}{t^2} \quad (3.25)$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des constantes, si de plus, on a

$$(B + 1)^2 \geq 4AC \quad (3.26)$$

alors cette équation admet une solution particulière  $x_1(t)$  de la forme

$$x_1(t) = \frac{a}{t} \quad (3.27)$$

En effet, portons l'expression  $x_1(t) = \frac{a}{t}$  dans l'équation (3.25), on obtient

$$\frac{Aa^2 + (B + 1)a + C}{t^2} = 0 \quad (3.28)$$

Pour trouver la valeur de  $a$ , il faut que la condition  $(B + 1)^2 \geq 4AC$  soit remplie.

### Proposition 2

Etant donné une équation de Riccati de la forme

$$x' - \frac{1}{2t}x = \frac{A}{t}x^2 + C \quad (3.29)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes, alors cette équation se ramène à une équation à variable séparables par la substitution de la fonction suivante

$$x = y\sqrt{t} \quad (3.30)$$

En effet, portons l'expression  $x(t) = y\sqrt{t}$  dans l'équation (3.29), on obtient

$$\sqrt{t}y' = Ay^2 + C \quad (3.31)$$

ou encore

$$\frac{dy}{Ay^2 + C} = \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (3.32)$$

### 3. Equation différentielle d'ordre deux :

#### 3.1 Equation différentielle linéaire sans second membre à coefficients constants :

On désigne ainsi une équation différentielle de la forme :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (3.33)$$

Avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  des constantes.

On cherche des solutions sous la forme  $y = e^{rx}$  avec  $r$  une constante. En remplaçant  $y = e^{rx}$  dans (3.33) puis en simplifiant par  $e^{rx}$  on obtient l'équation :

$\varphi(r) = r^2 + ar + b = 0$ , qui s'appelle polynôme caractéristique de l'équation (3.33).

La nature des solutions de l'équation (3.33) dépend de la nature des solutions de  $\varphi(r) = 0$ .

On note  $\Delta = a^2 - 4b$  le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si  $\Delta > 0$ , alors  $\varphi(r) = 0$  admet deux racines réelles distinctes  $r_1, r_2$  et l'équation (3.33) admet deux solutions particulières  $y_1 = e^{r_1x}$  et  $y_2 = e^{r_2x}$ , la solution générale de l'équation (3.33) est donc :

$$y = C_1 e^{r_1x} + C_2 e^{r_2x} \quad (3.34)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes.

- Si  $\Delta = 0$ , alors  $\varphi(r) = 0$  admet une racine double  $r_0 = -a/2$  et l'équation (3.33) admet la solution particulière  $y_p = e^{r_0x}$ , en posant  $y = z e^{r_0x}$ , on montre que la solution générale de l'Eq. (3.33) est :

$$y = (C_1x + C_2)e^{r_0x} \quad (3.35)$$

- Si  $\Delta < 0$ , alors  $\varphi(r) = 0$  admet deux racines complexes conjugués  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , la solution générale de l'Eq (3.33) s'écrit alors :

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) \quad (3.36)$$

#### Exemple :

Résoudre l'équation,

$$y'' - 2y' + y = 0$$

#### Solution :

L'équation caractéristique s'écrit :  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , elle admet une racine double  $r_0 = 1$ . Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$y = e^x(C_1x + C_2)$$

### 3.2 Equation différentielle d'ordre deux linéaire avec second membre et à coefficients constants :

Ils sont de la forme

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (3.37)$$

Ces équations ASM se résolvent en deux temps :

- 1- On intègre d'abord l'équation SSM, on obtient  $y_0$ .
- 2- On résout l'équation ASM en recherchant une solution particulière  $y_p$  de l'Eq. (3.37) et dans ce cas  $y = y_p + y_0$  (solution générale).

#### Exemple :

Résoudre l'équation :

$$y'' - 2y' + y = 2x^2 - x - 1 \quad (E)$$

#### Solution :

- Résolution de l'équation SSM :

$$y_0 = (C_1x + C_2)e^x.$$

- On cherche alors une solution particulière  $y_p$  sous la forme :

$y_p = ax^2 + bx + c$  (Solution particulière de la forme du second membre) soit solution de (E), on trouve par identification  $a = 2, b = 7, c = 0$ , on en déduit que :

$$y_p = 2x^2 + 7x + 9$$

est une solution particulière de (E).

- La solution générale de (E) est :  $y = y_p + y_0$  c'est-à-dire :

$$y = (C_1x + C_2)e^x + 2x^2 + 7x + 9$$

### 3.3 Solutions particulières :

Nous allons résumer dans un tableau les solutions particulières dans le cas d'équations différentielles avec un second membres (ASM) 'simple'.

<b>Equation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre linéaire à coefficient constant</b> $y' + ay = g(x)$	<b>Solution particulière</b> Soit $\varphi(r) = r + a$ l'équation caractéristique
Second membre de la forme : $g(x) = P_n(x)$ avec $d^\circ P = n$	$y_p = x^k Q_n(x)$ avec $d^\circ Q_n = d^\circ P_n$ $k = 0$ si $0$ n'est pas sol_ de l'équ_ $\varphi(r) = 0$ $k = 1$ si $0$ est sol_ de l'équ_ $\varphi(r) = 0$
Second membre de la forme : $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ avec $d^\circ P = n$	$y_p = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$ avec $d^\circ Q_n = d^\circ P_n$ $k = 0$ si $\alpha$ n'est pas sol_ de l'équ_ $\varphi(r) = 0$ $k = 1$ si $\alpha$ est sol_ de l'équ_ $\varphi(r) = 0$
Second membre de la forme : $g(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$	$y_p = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$
<b>Equation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants</b> $y'' + ay' + by = g(x)$	<b>Solution particulière</b> Soit $\varphi(r) = r^2 + ar + b$ l'équation caractéristique
Second membre de la forme : $g(x) = P_n(x)$ avec $d^\circ P = n$	$y_p = x^k Q_n(x)$ avec $d^\circ Q_n = d^\circ P_n$ $k = 0$ si $0$ n'est pas sol_ de l'équ_ $\varphi(r) = 0$ $k = 1$ si $0$ est racine de l'équ_ $\varphi(r) = 0$ $k = 2$ si $0$ est racine double de $\varphi(r) = 0$
Second membre de la forme : $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ avec $d^\circ P = n$	$y_p = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$ avec $d^\circ Q_n = d^\circ P_n$ $k = 0$ si $\alpha$ n'est pas sol_ de l'équ_ $\varphi(r) = 0$ $k = 1$ si $\alpha$ est racine de l'équ_ $\varphi(r) = 0$ $k = 2$ si $\alpha$ est racine double de $\varphi(r) = 0$

### 3.4 Equation différentielle d'ordre deux avec des coefficients non constants et sans second membre :

#### 3.4.1 Cas des équations incomplètes :

- **Cas des équations  $F(x, y', y'') = 0$ , (absence de  $y$ )**

L'astuce consiste ici à poser  $z = y'$ , ce qui permet de ce ramener à  $F(x, z, z') = 0$ , qui est une équation différentielle d'ordre un, on résout d'abord  $F(x, z, z') = 0$ , ce qui donne  $z = f(x, C_1)$  puis on résout  $y' = z$ , ce qui permet d'obtenir  $y = F(x, C_1) + C_2$ .

#### Exemple :

Résoudre l'équation :

$$(x^2 + 1)y'' + xy' = 0. \quad (E_0)$$

#### Solution :

Absence de  $y$ , on pose  $z = y'$ , d'où :

$$(E_0) \Leftrightarrow (x^2 + 1)z' + xz = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln z = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Reste à résoudre :

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (E_1)$$

$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow y = C_1 \arg(\sinh x) + C_2 = C_1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C_2$$

- **Cas des équations  $F(y, y', y'') = 0$ , (Absence de  $x$ )**

Dans ce cas on pose encore  $y' = z$  d'où :

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= z \frac{dz}{dy} \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à considérer  $z$  comme une fonction de  $y$ , on est ainsi ramené à l'équation :

$$F\left(y, z, z \frac{dz}{dy}\right) = 0, \text{ avec } dx = \frac{dy}{z}.$$

**Exemple :**

Résoudre l'équation :

$$2yy'' = y'^2 + 1 \quad (\text{E})$$

On pose  $z = y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y'' = z \frac{dz}{dy}$

On remplace  $y'$  et  $y''$  par ces expressions dans l'équation (E) on trouve :

$$2yz \frac{dz}{dy} = z^2 + 1$$

Où les variables se séparent :

$$\frac{2z}{z^2 + 1} dz = \frac{dy}{y}$$

ce qui donne

$$y = C_1(z^2 + 1)$$

Sachant que

$$z = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$$

ce qui conduit à :

$$z = \frac{x}{2C_1} + C_2$$

En remplaçant cette expression dans l'expression de  $y$ , on obtient finalement,

$$y = C_1 \left( \left( \frac{x}{2C_1} + C_2 \right)^2 + 1 \right).$$

### 3.5 Equation différentielle d'ordre deux linéaire sans second membre et à coefficients non constants :

On appelle ainsi une équation différentielle de la forme :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (3.38)$$

Ces équations ne se résolvent que si on dispose d'une solution particulière  $y_p$ .

**Remarque :**

$y_p = e^x$  est solution particulière de toute équation différentielle de la forme :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \text{ à condition que : } 1 + a(x) + b(x) = 0.$$

Connaissant  $y_p$  on pose  $y = z y_p$ ,  $z$  devenant la nouvelle fonction inconnue de  $x$ . Il en résulte :

$$y' = y'_p z + y_p z' \quad \text{et} \quad y'' = y''_p z + 2y'_p z' + y_p z''$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(E_0) &\Leftrightarrow y_p'' z + 2y_p' z' + y_p z'' + a(x)(y_p' z + y_p z') + b(x)y_p z = 0 \\ &\Leftrightarrow y_p z'' + (2y_p' + a(x)y_p)z' + (y_p'' + a(x)y_p' + b(x)y_p)z = 0 \\ &\Leftrightarrow y_p z'' + (2y_p' + a(x)y_p)z' = 0.\end{aligned}$$

On pose alors :  $u = z'$  ce qui ramène à une équation différentielle d'ordre un à variables séparables :

$$y_p u' = -(2y_p' + a(x)y_p)u \Rightarrow \frac{du}{u} = -\left(2\frac{y_p'}{y_p} + a(x)\right)dx$$

Par intégration on trouve :

$$\ln u = -(2 \ln y_p + A(x)) + C \quad \text{avec} \quad A(x) = \int a(x) dx$$

Ainsi :  $u = C_1 \frac{e^{-A(x)}}{y_p^2}$  où on a posé  $C_1 = e^C$

Reste à résoudre  $z' = C_1 \frac{e^{-A(x)}}{y_p^2}$  c'est-à-dire  $z = C_1 F(x) + C_2$  ce qui conduit finalement à la solution générale de l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) de départ:

$$y = y_p(C_1 F(x) + C_2) \quad (3.39)$$

### Exemple :

Résoudre l'équation :

$$(x+1)y'' - (2x-1)y' + (x-2)y = 0 \quad (E_0)$$

### Solution :

On constate que  $y_p = e^x$  est une solution particulière de (E<sub>0</sub>).

On pose  $y = ze^x$  d'où  $y' = e^x(z + z')$  et  $y'' = e^x(z'' + 2z' + z)$

En remplaçant dans (E<sub>0</sub>) et en simplifiant, on obtient :

$$(x+1)z'' + 3z' = 0$$

On pose alors :  $u = z'$  ce qui donne :  $(x+1)u' + zu = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{3}{x+1}dx$

Ainsi :  $\ln u = -3 \ln(x+1) + C$ , il vient :  $u = z' = \frac{C_1}{(x+1)^3}$  où on a posé  $C_1 = e^C$

Finalement,  $z = -\frac{C_1}{2(x+1)^2} + C_2$ .

La solution générale de (E<sub>0</sub>) est donc :

$$y = e^x \left( \frac{k_1}{(x+1)^2} + C_2 \right)$$

### 3.6 Equation différentielle d'ordre deux linéaires à coefficients non constants avec second membre :

Sont de la forme :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \quad (3.40)$$

1) Si on connaît une solution particulière  $y_p$ , la solution générale est alors :  $y = y_0 + y_p$  où  $y_0$  est la solution de l'équation homogène.

#### Exemple :

Soit l'équation (E) :  $x^2y'' + xy' - y = x^3$  dont les solutions de l'équation homogène sont  $y_1 = \frac{1}{x}$  et  $y_2 = x$ , alors la solution homogène de l'équation (E) est:  $y_0 = \frac{C_1}{x} + C_2x$ .

A la vue du second membre, l'intégrale particulière sera un polynôme de 3eme degré :  $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . On obtient donc, en remplaçant dans (E) :  $y_p = \frac{x^3}{8}$  d'où la solution générale  $y = \frac{x^3}{8} + \frac{C_1}{x} + C_2x$

2) Si on ne connaît pas de solution particulière, on applique la méthode de Lagrange appelé aussi méthode de variation de la constante, dans laquelle on va faire varier les constantes de la solution homogène  $y_0$ , on pose :  $C_1 = C_1(x)$  et  $C_2 = C_2(x)$ .

On dérive  $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$  pour obtenir :

$$y' = C_1(x)y'_1 + C_2(x)y'_2 + C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 \quad (3.41)$$

On impose alors que

$$C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 \quad (3.42)$$

En dérivant (3.41) on obtient :

$$y'' = C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + C_1(x)y''_1 + C_2(x)y''_2 \quad (3.43)$$

En remplaçant les équations (3.41) et (3.43) dans l'Eq.(3.40) on trouve :

$$(C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + C_1(x)y''_1 + C_2(x)y''_2) + a(x)(C_1(x)y'_1 + C_2(x)y'_2) + b(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = f(x) \quad (3.44)$$

Comme  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions particulières, l'équation se simplifiée en deux système :

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x) \end{cases} \quad (3.45)$$

et comme  $y_1$  et  $y_2$  sont linéairement indépendantes :

$$(\text{Wronskien}) : W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.46)$$

on a alors les solutions  $C_1(x)$  et  $C_2(x)$  qui par intégration dépend chacune d'une constante arbitraire, d'où la solution générale.

### Exemple :

Résoudre l'équation :

$$y'' + 4y = \tan x \quad (\text{E})$$

### Solution :

L'équation homogène est :  $y'' + 4y = 0$  dont les solutions sont :

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Cherchons les solutions générales par la méthode de Lagrange, on a :

$$\begin{cases} C'_1(x) \cos 2x + C'_2(x) \sin 2x = 0 & (1) & \times & \sin 2x \\ -C'_1(x) \sin 2x + C'_2(x) \cos 2x = \frac{1}{2} \tan x & (2) & \times & \cos 2x \end{cases}$$

De (1) + (2) on trouve :

- $C'_2 = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x} \cos 2x = \frac{1}{2} \left( \sin 2x - \frac{\sin x}{\cos x} \right)$

Par intégration  $C_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \ln(\cos x) + k_2$

- D'après (1) :  $C'_1 \cos 2x = -C'_2 \sin 2x \Rightarrow C'_1 = \frac{1}{2} (\cos 2x - 1)$

D'où :  $C_1 = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x + k_1$

Finalement la solution générale de l'équation (E) s'écrit :

$$y = \left( \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2}x + k_1 \right) \cos 2x + \left( -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \ln(\cos x) + k_2 \right) \sin 2x$$

## 4. Système d'équations différentielles

### 4.1 Définition d'un système d'équations différentielles :

#### Exemple :

Le système suivant :

$$\begin{cases} y'_1(x) = (2x - 1)y_1(x) + 2(1 - x)y_2(x) + 2x \\ y'_2(x) = (x - 1)y_1(x) + (2 - x)y_2(x) + x \end{cases} \quad (3.47)$$

est un système de deux équations différentielles, dont l'écriture matricielle est :

$$y'(x) = A(x).y(x) + g(x) \quad (3.48)$$

Où,

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}, y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, A(x) = \begin{pmatrix} 2x - 1 & 2(1 - x) \\ x - 1 & 2 - x \end{pmatrix} \text{ et } g(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

#### Définition :

On appelle système d'équations différentielles linéaires du premier ordre un système de la forme :

$$y'(x) = A(x).y(x) + g(x) \quad (3.50)$$

- Où  $A(x)$  est une matrice donnée dont les éléments  $a_{ij}(x)$  sont des fonctions de la variable  $x$ .
- Le second membre  $g(x)$  appartient à  $\mathcal{R}^n$ , ses composantes  $g_i(x)$  ( $i=1,n$ ) sont des fonctions de la variable  $x$ .
- On dit que le système est à coefficients constants si la matrice  $A$  ne dépend pas de la variable  $x$ .
- On dit que le système est homogène si  $g(x) = 0, \forall x$ .

#### 4.2 Equation différentielle d'ordre n :

Une équation différentielle linéaire d'ordre n se met sous la forme d'un système de n équations différentielles linéaires du premier ordre. En effet soit l'équation :

$$z^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)z^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_1(x)z'(x) + \alpha_0(x)z(x) = g(x) \quad (3.51)$$

On pose:

$$\begin{cases} y_1(x) = z(x) \\ y_2(x) = z'(x) \\ \vdots \\ y_n(x) = z^{(n-1)}(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_1(x) = z'(x) = y_2(x) \\ y'_2(x) = z''(x) = y_3(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) = z^{(n)}(x) = -\alpha_{n-1}(x)y_n(x) - \dots - \alpha_1(x)y_2(x) - \alpha_0(x)y_1(x) + g(x) \end{cases} \quad (3.52)$$

Alors l'équation (3.51) se réécrit :

$$y'(x) = A(x).y(x) + g(x) \quad (3.53)$$

Où :

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0(x) & -\alpha_1(x) & -\alpha_2(x) & \dots & -\alpha_{n-2}(x) & -\alpha_{n-1}(x) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

et

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

**Exemple :**

Soit l'équation différentielle suivante :

$$z'' + b(x)z' + c(x)z = 0,$$

$b(x)$  et  $c(x)$  étant des fonctions réelles.

Transformer cette équation différentielle du second ordre en un système d'équations différentielles du premier ordre.

**Solution :**

$$\text{On pose, } \begin{cases} y_1(x) = z(x) \\ y_2(x) = z'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = z''(x) = -b(x)y_2(x) - c(x)y_1(x) \end{cases}$$

Soit,

$$y'(x) = A(x).y(x)$$

Avec,

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) \end{pmatrix}$$

**4.3 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants :**

Ce sont des systèmes de la forme,

$$y' = A.y \quad \text{où} \quad A = (a_{i,j}) = (\text{Csts}) \quad (3.57)$$

**Théorème :**

Soit  $v$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors :  $y = e^{\lambda x}v$  est solution du système  $y' = A.y$

**4.3.1 Cas des valeurs propres réelles :****Corollaire :**

Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  est une base de vecteurs propres de  $A$  associée aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , alors  $y_1 = e^{\lambda_1 x}v_1, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}v_2, \quad \dots, \quad y_n = e^{\lambda_n x}v_n$  est un système fondamentale de solution de  $y' = A.y$

**Exercice :**

Résoudre le système,

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = y_1 \end{cases} \quad (S_0)$$

$$(S_0) \Leftrightarrow y' = A \cdot y \text{ avec, } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cherchons les valeurs propres de A.

Le polynôme caractéristique de A est :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) \text{ où } I \text{ est la matrice identité.}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0.$$

Les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2$

- Cherchons les vecteurs propres  $v_1, v_2$  correspondants aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  respectivement.

$$\text{Soit } v_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ on a } (A - \lambda_1 \cdot I)v_1 = 0 \Leftrightarrow (A + I) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\beta$$

$$\text{Soit, } v_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ on prend } v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{De même on a } (A - \lambda_2 \cdot I)v_2 = 0, \text{ on trouve, } v_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution générale est,

$$y = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} \\ y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \end{cases}$$

- Si A admet des valeurs propres multiples, on peut encore appliquer la méthode précédente à condition que la multiplicité algébrique de chaque valeur propre soit égale à la dimension du sous espace propre associé.

**Exemple :**

Soit la matrice A définie par,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est,  $p(\lambda) = (1 + \lambda)^2(\lambda - 2)$

A admet une valeur propre double  $\lambda_1 = 2$  et un vecteur propre associé  $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Elle a aussi une valeur propre double  $\lambda_2 = -1$  qui admet deux vecteurs propres linéairement indépendants :

$$v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la solution générale du système est :

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + \left( C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-x}$$

#### 4.3.2 Cas des valeurs propres complexes :

Si  $\lambda$  est une valeur propre complexe de A et  $v$  le vecteur propre correspondant alors  $\bar{v}$  est le vecteur propre associé à la valeur propre  $\bar{\lambda}$ .

Donc il suffit de travailler avec l'une des valeurs propres complexes, soit  $y = e^{\lambda x} v$ , la solution générale  $y_g$  est :

$$y_g = C_1 \operatorname{Re}(y) + C_2 \operatorname{Im}(y) \quad (3.58)$$

#### Exemple :

$$\text{Résoudre, } \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -y_1 \end{cases} \Leftrightarrow y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

- Vecteur propre de la valeur propre  $\lambda=i$  :

$$\text{On a } (A - i\lambda)v = 0 \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \alpha \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

La solution correspondante :  $y = e^{\lambda x} v = e^{ix} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ , avec  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

et la solution générale est :  $y_g = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$

#### 4.3.3 Cas d'une matrice non diagonalisable :

Supposons que A, de degré n, a seulement k ( $k < n$ ) vecteurs propres linéairement indépendants. Nous avons k solutions de  $y' = A \cdot y$  de la forme  $e^{\lambda x} v$ . Il manque  $m = (n - k)$  solutions pour avoir un système fondamentale de solution.

Soit  $\lambda$  valeur propre de  $A$  de multiplicité  $m$ , nous allons construire ces  $m$  solutions explicitement.

Définissons  $m$  vecteurs,  $h_1, h_2, \dots, h_m$  par :

$$(A - \lambda.I)h_i = h_{i-1} \quad (3.59)$$

et,

$$y_i = e^{\lambda x} \left( h_i + xh_{i-1} + \frac{x^2}{2!}h_{i-2} + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}h_{i-m+1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.60)$$

Alors les  $y_i$  sont des solutions linéairement indépendantes de  $y' = A.y$

**Exemple :**

Résoudre,

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y'_2 = -2y_1 - y_3 \\ y'_3 = 2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases} \quad (s_0)$$

**Solution :**

$$(s_0) \Leftrightarrow y' = A.y, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda.I) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

Les valeurs propres sont :  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 1$  (double).

Cherchons les vecteurs propres correspondants,

$$- (A - \lambda_1 I)v_1 = 0, \text{ on trouve } v_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ soit } y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$- (A - \lambda_2 I)v_2 = 0, \text{ on trouve } v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ soit } y_2 = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

un seul vecteur propre  $v_2$ , alors  $A$  non diagonalisable.

On pose  $h_1 = v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et cherchons le deuxième vecteur propre  $h_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  comme suit,

$$(A - \lambda_2 I)h_2 = h_1, \text{ on trouve } h_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } y_3 = e^x(h_2 + xh_1)$$

La solution générale du système (s) est :

$$y = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2x} + \left( C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ x \\ 1-x \end{pmatrix} \right) e^x$$

#### 4.4 Systèmes linéaires non homogènes à coefficients constants :

Il est de la forme :

$$y' = A \cdot y + g(x) \quad (3.61)$$

La solution du système (s) se fait en deux temps,

- On résout le système homogène (s<sub>0</sub>) :  $y' = A \cdot y$
- Pour trouver une solution de (s), il suffit d'utiliser la méthode de variation de constante. On cherche une solution sous la forme :

$$\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n \quad (3.62)$$

On pose :

$$C(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \vdots \\ C_n(x) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

L'équation (3.62) se réécrit sous forme matricielle :

$$\tilde{y} = y(x) \cdot C(x) \quad (3.64)$$

et

$$\tilde{y}' = y'(x) \cdot C(x) + y(x) \cdot C'(x) \quad (3.65)$$

On remplace  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  dans l'Eq.(3.61) on trouve :

$$y'(x) \cdot C(x) + y(x) \cdot C'(x) = A \cdot y(x) \cdot C(x) + g(x) \Rightarrow y(x) \cdot C'(x) = g(x)$$

D'où, il vient

$$C'(x) = y(x)^{-1} \cdot g(x) \quad (3.66)$$

On détermine  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ , et on déduit  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

**Exemple :**

$$\text{Résoudre,} \quad \begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 + e^x \\ y'_2 = 2y_1 + y_2 \end{cases} \quad (s)$$

**Solution :**

$$(s) \Leftrightarrow y' = A \cdot y + g(x),$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Cherchons les solutions du système homogène  $(s_0) : y' = A \cdot y$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ où } \lambda_2 = 3, \text{ deux valeurs propres réelles.}$$

- Cherchons les vecteurs propres  $v_1$  et  $v_2$  correspondants aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

$$(A - \lambda_1 \cdot I)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ soit } y_1 = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 \cdot I)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } y_2 = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution  $y_0$  du système homogène est :

$$y_0 = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Variation des constantes  $C_1$  et  $C_2$  :

On a trouvé que :

$$y(x) \cdot C'(x) = g(x) \Rightarrow \begin{cases} C'_1(x)e^{-x} + C'_2(x)e^{3x} = e^x & (1) \\ -C'_1(x)e^{-x} + C'_2(x)e^{3x} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow C'_2(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} \quad \text{d'où } C_2(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} + k_2$$

$$(1) - (2) \Rightarrow C'_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \text{d'où } C_1(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + k_1$$

- La solution générale du système (s) s'écrit :

$$y = \left( \frac{1}{4}e^{2x} + k_1 \right) e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left( -\frac{1}{4}e^{-2x} + k_2 \right) e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 5. Equations aux dérivées partielles (EDP) :

### Définition :

Soit une fonction  $f(x, y)$  de deux variables réelles définie dans un voisinage de  $A = [a, b]$  ; si la fonction  $f(x, b)$  fonction de  $x$  seulement a une dérivée pour la valeur  $a$  de  $x$ , on la note  $f'_x(a, b)$  et on l'appelle dérivée partielle de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$  au point  $(a, b)$ .

Si en tout point d'un voisinage de  $A$ ,  $f'_x(x, y)$  existe, on définit ainsi une nouvelle fonction, la dérivée partielle de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$ . On définit de même la dérivée partielle par rapport à  $y$ . On note :

$$f'_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{et} \quad f'_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad (3.67)$$

### 5.2 Dérivées successives :

De la même façon que précédemment, on peut étudier l'existence de la dérivée par rapport à  $x$  de  $f'_x(x, y)$  et de  $f'_y(x, y)$  ; on définit ainsi les dérivées secondes que l'on note

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (3.68)$$

On peut de même définir les dérivées secondes par rapport à  $y$ ,

$$f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (3.69)$$

### Théorème (de Schwarz) :

Si en un point de  $A = [a, b]$ , les dérivées successives  $f''_{xy}$  et  $f''_{yx}$  existent et sont continues, en ce point ces dérivées sont égales :

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (3.70)$$

### Exemple :

Déterminer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  de la fonction  $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2$ .

### Solution :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 5y & \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -5 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -5x + 2y & \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -5 \end{aligned}$$

### 5.3 Dérivées d'une fonction composées de deux variables :

Soit la fonction  $F(x, y) = f(u, v)$ ,  $u$  et  $v$  étant des fonctions de  $x$  et  $y$  admettant des dérivées partielles, si  $f(u, v)$  admet des dérivées partielles continues, alors  $F(x, y)$  admet des dérivées partielles données par :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.71)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.72)$$

#### Exemple :

$$\text{Soit } f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2u + v \\ y = u - 2v \end{cases}$$

Déterminer  $\frac{\partial f}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}$

#### Solution :

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -2$$

Il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (2x + y)(2) + (x + 2y)(1) = 5x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (2x + y)(1) + (x + 2y)(-2) = -3y$$

### 5.4 Différentielles totales :

#### Définition :

Soit une fonction de deux variables  $U(x, y)$  possédant des dérivées partielles continues. La différentielle totale ou exacte de  $U(x, y)$  s'écrit :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad (3.73)$$

Si  $U(x, y) = Cte$ , alors  $dU = 0$ .

**Exemple :**

Soit  $U(x, y)$  la fonction de deux variables définie par :

$$U(x, y) = x + x^2y^3$$

$$dU(x, y) = (1 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy$$

**5.5 Formes différentielles totales exactes**

Soit une équation différentielle donnée sous la forme :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3.74)$$

Si on peut trouver une fonction  $U(x, y)$  qui vérifie :

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{et} \quad N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.75)$$

Alors on peut poser l'équation (3.74) sous la forme d'une différentielle totale exacte :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad (3.76)$$

Alors  $U(x, y)$  est la solution cherchée sous forme implicite :

$$U(x, y) = Cte$$

Pour cela, il faut prouver que les dérivées  $\frac{\partial M}{\partial y}$  et  $\frac{\partial N}{\partial x}$  sont égales. En effet, conformément au théorème de Schwarz :

Soit  $U(x, y)$  une fonction de class  $C^2$  dérivable, si  $\frac{\partial U}{\partial x}$  et  $\frac{\partial U}{\partial y}$  sont continues, alors  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$  une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3.74) soit une équation exacte est donc :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (3.77)$$

Dés lors, la fonction  $U(x, y)$  peut être trouvée de façon systématique par :

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + k(y) \quad (3.78)$$

Dans cette intégration par rapport à  $x$ ,  $k(y)$  joue le rôle d'une constante. Il suffit de dériver la fonction  $U(x, y)$  par rapport à  $y$  pour déterminer la fonction  $k(y)$  :

$$N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow k'(y) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx \right) = N(x, y) \quad (3.79)$$

On obtiendrait le même résultat en intégrant d'abord  $N(x, y)$  par rapport à  $y$  et en dérivant ensuite par rapport à  $x$ .

### 5.6 Application à l'intégration d'équations différentielles du premier ordre

Soit à résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (3.80)$$

Où  $M(x, y)$  et  $N(x, y)$  sont deux fonctions quelconque de  $x$  et de  $y$ . on peut résoudre cette équation en posant :

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (3.81)$$

Résoudre l'équation (3.80) revient à résoudre  $dU = 0$  soit  $U(x, y) = Cte$  Après avoir vérifié que  $dU$  est une différentielle totale, il suffit donc de déterminer  $U(x, y)$  selon la méthodologie présentée précédemment. Nous verrons plus tard comment résoudre l'équation (3.80) dans le cas où  $dU$  n'est pas une différentielle totale exacte.

#### Exemple :

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2} \quad (E)$$

#### Solution :

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(1 + 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

Posons :

$$dU = (1 + 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy$$

Résoudre l'équation (E) revient à déterminer la solution de  $dU = 0$ . Ceci est aisé si l'on peut montrer que  $dU$  est une différentielle totale. Soit :

$$M = 1 + 2xy^3 \quad \text{et} \quad N = 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

D'où, en intégrant la différentielle totale exacte  $dU$ , :

$$U(x, y) = x + x^2y^3$$

$$dU = 0 \Rightarrow U = Cte$$

D'où :

$$x + x^2y^3 = Cte$$

Est solution de (E).

### 5.7 Facteur Intégrants

Soit la différentielle  $dU$  :

$$dU = 2xydx + (4y + 3x^2)ydy = 0 \quad (3.82)$$

Cette différentielle n'est pas totale. En effet :

Soit  $M(x, y) = 2xy$  et  $N(x, y) = (4y + 3x^2)y$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

On ne peut donc pas résoudre l'équation (3.82) par la procédure présentée dans la partie précédente. On a alors recours au facteur intégrant.

#### Définition :

Soit une différentielle de la forme :

$$\delta V = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (3.83)$$

Telle que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Cette différentielle n'est pas exacte. On cherche alors une fonction auxiliaire  $F(x, y)$  telle que :

$$dU = F(x, y)P(x, y)dx + F(x, y)Q(x, y)dy \quad (3.84)$$

Soit une différentielle totale.

Cette fonction  $F(x, y)$  est appelée facteur intégrant de la différentielle  $\delta V$ .

#### 5.7.1 Détermination de facteurs intégrants monovariabiles :

Il s'agit de trouver une fonction  $F(x, y)$  qui vérifie la relation :

$$\frac{\partial(FP)}{\partial y} = \frac{\partial(FQ)}{\partial x} \quad (3.85)$$

Soit :

$$P \frac{\partial F}{\partial y} + F \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.86)$$

Restreignons nous ici à rechercher des fonctions monovariabiles  $F(x)$  ou  $F(y)$ .

- **Facteur intégrant de la forme  $F(x)$  :**

Si on recherche un facteur intégrant de la forme  $F(x)$ , il doit vérifier :

$$F \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{dF}{dx} + F \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.87)$$

Soit en réarrangement et en divisant par  $FQ$  :

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.88)$$

Soit :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (3.89)$$

Le facteur intégrant est obtenu par :

$$F(x) = e^{\int \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx} \quad (3.90)$$

- **Facteur intégrant de la forme  $F(y)$**

Si on recherche un facteur intégrant de la forme  $F(y)$ , il doit vérifier :

$$F \frac{\partial Q}{\partial x} = P \frac{dF}{dy} + F \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.91)$$

Soit en réarrangement et en divisant par  $FP$  :

$$\frac{1}{P} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} + \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.92)$$

Soit :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (3.93)$$

Le facteur intégrant est obtenu par :

$$F(y) = e^{\int \frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy} \quad (3.94)$$

D'une manière générale, on cherche un facteur intégrant du type  $F(x)$  quand :

$$\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x) \quad (3.95)$$

et un facteur du type  $F(y)$  quand :

$$\frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = g(y) \quad (3.96)$$

**Exemple :**

$$\text{Résoudre} \quad y - xy' = 0 \quad (E)$$

**Solution :**

$$\text{Soit } dV = ydx - xdy$$

Cette différentielle n'est pas exacte. On cherche  $F(x, y)$  telle que :

$$dU = F(x, y)dV$$

Soit une différentielle exacte.

Si on cherche  $F(x)$  alors il faut :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{-x} \left( \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial x} \right)$$

Soit :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{x} (1 + 1)$$

$$F(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x}$$

D'où

$$F(x) = \frac{1}{x^2}$$

La différentielle :

$$dU = FdV = \frac{1}{x^2} (ydx - xdy)$$

est une différentielle totale. Résoudre l'équation  $dV = 0$  revient à résoudre l'équation  $dU = 0$ . Soit :

$$U(x, y) = \int y \frac{1}{x^2} dx + k(y) = -\frac{y}{x} + k(y)$$

et

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x} + k'(y) \\ N(x, y) = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow k'(y) = 0 \Rightarrow k(y) = Cte$$

D'où la solution :

$$U(x, y) = -\frac{y}{x} + Cte = C \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1$$

Où  $C_1$  est une constante réelle soit :

$$y = C_1 x$$

La solution de l'équation (E) est donc une famille de ligne passant par l'origine.

### 5.8 Généralisation aux fonctions de plus de deux variables :

Soient  $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$  trois fonctions continues des trois variables  $x, y, z$  et  $\delta g$  la forme différentielle :

$$\delta g = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \quad (3.97)$$

$\delta g$  est une différentielle totale exacte si :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \end{cases} \quad (3.98)$$

Plus généralement :

Soient  $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  fonction continues des  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $\delta g$  la forme différentielle :

$$\delta g = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_2 + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_n$$

$\delta g$  est une forme différentielle totale exacte si :

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial y_{i,i \neq 1}} = \frac{\partial Y_{i,i \neq 1}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Y_j}{\partial z_{i,i \neq j}} = \frac{\partial Z_{i,i \neq j}}{\partial y_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial Z_n}{\partial x_{i,i \neq n}} = \frac{\partial X_{i,i \neq n}}{\partial z_n} \end{cases} \quad (3.99)$$

#### Exemples :

- Estimation d'une erreur

Soit un bloc rectangulaire de longueur  $x$ , largeur  $y$  et hauteur  $z$ , les mesures d'un tel bloc conduit aux valeurs suivantes :  $x = 10$  cm,  $y = 12$  cm,  $z = 20$  cm avec une marge d'erreur de 0.05 cm. A partir de l'expression de la différentielle totale exacte de l'aire de ce bloc, évaluer approximativement l'erreur maximale concernant l'aire du bloc ainsi que le pourcentage d'erreur du aux erreurs de mesures.

**Solution :**

L'air d'un bloc rectangulaire s'écrit :  $S = 2(xy + xz + yz)$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz$$

$$dS = 2(y + z)dx + 2(x + z)dy + 2(x + y)dz$$

La plus grande erreur que l'on peut commettre sur S est :

$$dS_{max} = 2(12 + 20) * 0.05 + 2(10 + 20) * 0.05 + 2(12 + 10) * 0.05 = 8.4 cm^2$$

Soit un pourcentage d'erreur de :

$$er = 100 * \frac{dS_{max}}{S} = 0.75 \%$$

- Soient trois variables indépendantes  $x, y$  et  $z$ . Montrer que l'expression :

$$dU = (3x^2yz)dx + z(x^3 + 2y)dy + y(x^3 + y)dz$$

Est une différentielle totale. En déduire l'expression de  $U(x, y, z)$ .

**Solution :**

Soit :  $p = 3x^2yz$  ;  $q = z(x^3 + 2y)$  ;  $r = y(x^3 + y)$ .

$dU$  est une différentielle totale si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y} \end{array} \right.$$

Calculons ces dérivées partielles :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = 3x^2z$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} = 3x^2y$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y} = x^3 + 2y$$

$dU$  est bien une différentielle totale. On a :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2yz$$

D'où,

$$U = x^3yz + g(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3z + \frac{\partial g}{\partial y} = q = zx^3 + 2yz \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 2yz$$

Soit :

$$g(y, z) = zy^2 + f(z)$$

D'où :

$$U = x^3yz + zy^2 + f(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^3y + y^2 + \frac{\partial f}{\partial z} = r = yx^3 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

On obtient alors,

$$U(x, y, z) = x^3yz + zy^2 + C$$

Où  $C$  est une constante réelle.

### 5.9 Différentielle totales et fonctions d'Etat

Soit  $dZ$  une différentielle totale. Alors :

$$\int_{Z_1}^{Z_2} dZ = Z_2 - Z_1 = \Delta Z \quad (3.100)$$

En physique, la fonction  $Z$  est dite équation d'état, et la valeur de  $\Delta Z$  ne dépend pas du chemin suivi.

Soit  $dV$  un différentielle qui n'est pas totale. En physique, on la notera  $\delta V$ . Dans ce cas :

$$\int_{Z_1}^{Z_2} dZ \neq Z_2 - Z_1 \quad (3.101)$$

La valeur de  $\Delta V$  dépend du chemin suivi.

### 5.10 Equation linéaire et homogène aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre dans le cas d'une fonction de 2 variables

Etant donnée une fonction  $f$  de deux variables  $x, y$ .

On appelle EDP du 1<sup>er</sup> ordre linéaire, toute équation de la forme :

$$P(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (3.102)$$

où  $P, Q, R$  sont des fonctions de  $x, y, z$ ,

Soit  $z = f(x, y)$  une solution de l' EDP (3.102).

Posons

$$\phi(x, y, z) = f(x, y) - z \quad (3.103)$$

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = -1 \end{cases} \quad (3.104)$$

L'équation (3.102) s'écrit :

$$P(x, y, z) \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial \phi}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (3.105)$$

Soit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (3.106)$$

On ramène ainsi l'intégration (3.102) à celle d'une équation homogène. Si  $\phi_1 = C_1$  et  $\phi_2 = C_2$  sont deux intégrales premières du système adjoint :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (3.107)$$

L'intégrale générale est une fonction arbitraire :

$$\phi = \Omega(\phi_1, \phi_2) \quad (3.108)$$

et l'équation générale des surfaces intégrales de l'équation (3.102) peut s'écrire :

$$\Omega(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (3.109)$$

**Exercice :**

Résoudre l'équation :

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - a) \frac{\partial z}{\partial y} = z(x, y)$$

**Solution :**

Le système adjoint est :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2(y - a)} = \frac{dz}{z}$$

De ce système, on obtient deux intégrales premières :

$$\begin{cases} z = C_1 x \\ x^2 = C_2 (y - a) \end{cases}$$

On a  $C_1 = \Omega(C_2)$ , soit :

$$z(x, y) = x \Omega \left( \frac{x^2}{y - a} \right)$$

Où  $\Omega$  désigne une fonction arbitraire.



## Chapitre 4 :

# Les séries

### 1- Séries numériques

#### Définition 1 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathcal{N}}$  une suite de réels ou de complexes. On appelle série de terme général  $u_n$ , et on note  $\sum u_n$  la suite des sommes partielles,  $(s_n)_{n \in \mathcal{N}}$ , où pour tout  $n \in \mathcal{N}$ ,

$$s_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i \quad (4.1)$$

Les deux séries les plus souvent utilisées sont la série géométrique et la série exponentielle.

#### 1.1 Série géométrique :

Le terme général d'une série géométrique est  $u_n = r^n$ , les sommes partielles ont une expression explicite.

$$s_n = \sum_{i=0}^n r^i = 1 + r + \dots + r^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1 \\ \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

#### 1.2 Série exponentielle :

Le terme général de la série exponentielle est  $u_n = \frac{1}{n!}$ , les sommes partielles  $s_n$  sont des rationnels mais n'ont pas d'expression explicite.

Observons que n'importe quelle suite  $(s_n)_{n \in \mathcal{N}}$  peut être vue comme une série, de terme général  $u_n = s_n - s_{n-1}$ , pour  $n \geq 1$  et  $u_0 = s_0$ . Dans la plupart des cas, les sommes partielles n'ont pas d'expression explicite, et c'est souvent pour cela que l'on parle de série plutôt que de suite.

#### Définition 2 :

On dit que la série  $\sum u_n$  converge vers  $s$  si la suite des sommes partielles converge vers  $s$ , qui est appelée somme de la série,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = s \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = s \quad (4.3)$$

Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

**Exemples :**

- La série géométrique  $\sum r^n$  converge si et seulement si  $|r| < 1$ . Dans ce cas, la somme est  $\frac{1}{1-r}$ .
- La somme de la série exponentielle est le nombre  $e$ , dont le logarithme népérien vaut 1.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \approx 2.71828$$

- La somme de la suite suivante est :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$ .

En effet,

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

donc,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

**Théorème 1:**

Si la série  $\sum u_n$  converge, alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (4.4)$$

La contraposée de ce résultat est souvent utilisée : une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut pas converger.

**Remarque :**

Le fait que le terme général tende vers 0 n'est pas qu'une condition nécessaire de convergence. De nombreuses séries divergentes ont un terme général qui tend vers 0. Par exemple, la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n+1}$  diverge. En effet :

$$s_{2n-1} - s_{n-1} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy, donc elle ne converge pas.

La linéarité des limites entraîne immédiatement le théorème suivant.

**Théorème 2 :**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes, de somme respectives  $s$  et  $t$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux complexes quelconques. Alors la série de terme général  $\alpha u_n + \beta v_n$  est convergente, et sa somme est  $\alpha s + \beta t$ .

**Exemple :**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

Comme conséquence de la linéarité, observons que si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge, alors  $\sum (u_n + v_n)$  diverge. Comme autre conséquence, pour  $\alpha \neq 0$ ,  $\sum \alpha u_n$  converge si et seulement si  $\sum u_n$  converge.

**1.3 Séries à termes positifs ou nuls :**

La série à termes positifs ou nuls sont plus faciles à étudier. En effet si  $u_n \geq 0$  pour tout  $n$ , la suite des sommes partielles est croissante.

$$s_n - s_{n-1} = u_n \geq 0 \quad (4.5)$$

Une suite croissante  $(s_n)_{n \in \mathcal{N}}$  n'a que deux comportements possibles. Soit elle est majorée et elle converge, soit elle tend vers  $+\infty$ .

**Théorème 3 :**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe  $n_0 \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n$ .

- Si  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.

**Exemples :**

- Nous avons déjà vu que la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ converge.}$$

Nous allons en déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

En effet :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{2}$$

En particulier, il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$  :

$$\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

En effet c'est vrai pour  $n \geq 4$ , mais il est inutile de calculer une valeur précise  $n_0$ . On en déduit que la série de terme général  $\frac{1}{2n^2}$  converge.

Montrons maintenant que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^3} \text{ converge,}$$

pour tout réel  $\alpha$ . En effet :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln n)^\alpha = 0$$

donc il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{1}{n} (\ln n)^\alpha \leq 1.$$

En multipliant les deux membres par  $\frac{1}{n^2}$  :

$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

Comme la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, il en est de même de la série  $\sum \frac{(\ln n)^\alpha}{n^3}$ , par le théorème 3.

Inversement, nous avons vu que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge. On en déduit facilement que les séries  $\sum \frac{\ln n}{n}$  et  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge également.

Le théorème de comparaison permet d'utiliser des équivalents.

#### **Théorème 4 :**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à terme strictement positifs, équivalentes au voisinage de  $+\infty$ ,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \quad (4.6)$$

Alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature (convergentes ou divergentes)

#### **Exemple :**

$$\sum \frac{n^2+3n+1}{n^4+2n^3+4} \text{ converge}$$

$$\sum \frac{n+\ln n}{n^3} \text{ converge}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à  $\frac{1}{n^2}$ , et nous avons vu que la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge. Par contre.

$$\sum \frac{n^2+3n+1}{n^3+2n^3+4} \text{ diverge}$$

$$\sum \frac{n+\ln n}{n^2} \text{ diverge}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à  $\frac{1}{n}$ , et nous avons vu que la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

- **Série de Riemann**

$$\text{Si } \alpha \leq 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge}$$

$$\text{Si } \alpha > 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}$$

- **Série de Bertrand**

$$\text{Si } \beta \leq 1 \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ diverge}$$

$$\text{Si } \beta > 1 \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ converge}$$

Nous retrouvons en particulier le fait que  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, alors que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

**Exemple :**

Voici deux exemples d'utilisation des équivalents pour la comparaison avec les séries de Riemann et de Bertrand.

- La série :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  converge.

En effet :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

- La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$  diverge.

En effet :

$$\frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n \ln n}$$

et la série de Bertrand  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  diverge.

### 1.4 Critère de Cauchy et de d'Alembert :

Rappelons tout d'abord que la série géométrique  $\sum r^n$  converge si  $|r| < 1$ , diverge sinon. Les critères de Cauchy et de d'Alembert permettent de comparer une série à terme positifs avec la série géométrique. Pour comparer  $u_n$  avec  $r^n$ , le critère de Cauchy porte sur  $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}}$ , le critère de d'Alembert sur  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

#### 1.4.1 Critère de Cauchy :

##### Théorème 6 :

Soit  $\sum u_n$  une série de terme positifs ou nuls.

- S'il existe une constante  $r < 1$  et un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\sqrt[n]{u_n} < r < 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ converge.} \quad (4.7)$$

- S'il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\sqrt[n]{u_n} > 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge} \quad (4.8)$$

##### Démonstration :

Rappelons que la nature de la série ne dépend pas de ses premiers termes. Dans le premier cas,

$$\sqrt[n]{u_n} < r \Rightarrow u_n < r^n$$

Si  $0 < r < 1$ , alors la série  $\sum r^n$  converge, d'où le résultat par le théorème de comparaison.

Dans le second cas,

$$\sqrt[n]{u_n} > 1 \Rightarrow u_n > 1$$

Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

##### Corollaire :

Soit  $\sum u_n$  une série de termes positifs, telle que  $\sqrt[n]{u_n}$  converge vers  $l$ .

- Si  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge.
- Si  $\sqrt[n]{u_n}$  tend vers 1, on ne peut pas conclure en général.

##### Exemples :

- $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$  converge, car  $\sqrt[n]{u_n}$  tend vers  $\frac{2}{3} < 1$ .
- $\sum \left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n$  diverge, car  $\sqrt[n]{u_n} > 1$ .

**Remarque :**

Le critère de Cauchy ne s'applique ni aux séries de Riemann, ni aux séries de Bertrand.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(\ln n)^\beta}} = 1 \quad (4.9)$$

Or certaines de ses séries converge, d'autres divergent.

**1.4.2 Critère de d'Alembert :**

Le critère de d'Alembert est plus facile à appliquer, par contre il échoue plus souvent que celui de Cauchy.

**Théorème 7 :**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs.

- S'il existe une constante  $r < 1$  et un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ converge.} \quad (4.10)$$

- S'il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge.} \quad (4.11)$$

**Démonstration :**

Rappelons que la nature de la série ne dépend pas de ses premiers termes. Dans le premier cas, on vérifie par récurrence que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r \implies u_n < u_{n_0} r^{-n_0} r^n.$$

Si  $0 < r < 1$ , alors la série  $\sum r^n$  converge, d'où le résultat par le théorème de comparaison.

Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , la suite  $(u_n)$  est croissante, elle ne peut donc pas tendre vers 0 et la série diverge.

**Corollaire :**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs, telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  converge vers  $l$ .

- Si  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge.
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ , on ne peut pas conclure en général.

**Remarque :**

Le critère de d'Alembert ne s'applique ni aux séries de Riemann, ni aux séries de Bertrand.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\ln(n+1))^\beta}{n(\ln(n))^\beta} = 1$$

Plus généralement, si  $u_n$  est une fraction rationnelle en  $n$  et  $\ln(n)$ , alors les deux critères échouent. Dans ce cas, il faut calculer un équivalent et appliquer le théorème 4.

### 1.5 Séries à termes quelconques :

Quand une série n'est pas à termes positifs, la première chose à faire est d'examiner la série des valeurs absolues, ou des modules s'il s'agit de nombres complexes.

#### Définition :

On dit que la série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série  $\sum |u_n|$  converge.

#### Théorème :

Une série absolument convergente est convergente.

#### Démonstration :

Supposons pour commencer que les  $u_n$  sont réels. Pour tout  $n \in \mathcal{N}$ , notons.

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geq 0 \\ -u_n & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathcal{N}$  :

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

Par le théorème de comparaison, si  $\sum |u_n|$  converge, alors  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent aussi. Par linéarité,  $\sum (u_n^+ - u_n^-) = \sum u_n$  converge, or  $u_n^+ + u_n^- = u_n$ . D'où le résultat.

### 1.6 Sommes de séries :

Il n'y a pas beaucoup de séries dont on connaît la somme, à part la série exponentielle, les séries géométriques. Voici par exemple deux résultats classiques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

On pourra calculer certaines sommes, en combinant celles qu'on connaît.

#### Exemples :

- Soit la série  $\sum \frac{1}{(n^2+1)}$ , c'est bien une série convergente, car son terme générale est positif, et équivalent à  $\frac{1}{n^2}$ . Nous allons démontrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)} = \frac{3}{4}$$

Utilisons la décomposition en élément simples.

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1}.$$

Par récurrence, on en déduit l'expression des sommes partielles.

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$$

D'où le résultat.

En utilisant la même technique de décomposition en élément simple, on pourra aussi calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+7n+6}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{5}{3}.$$

Un autre exemple de calcul de somme qui se ramène à une série géométrique. Soit  $r$  tel que  $|r| < 1$ . Nous allons montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

Pour cela écrivons :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=0}^{+\infty} nr^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nr^n \\ &= r \sum_{n=1}^{+\infty} nr^{n-1} = r \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} + r \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)r^{n-1} \\ &= \frac{r}{1-r} + rs \end{aligned}$$

D'où le résultat, en résolvant cette équation en  $s$ . la même technique permet de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 r^n = \frac{r^2 + r}{(1-r)^3}$$

Quand le terme général est le quotient d'un polynôme en  $n$  par  $n!$ , on peut toujours se ramener à la série exponentielle. Si le polynôme est  $n$ ,  $(n-1)$ , ..., la simplification est immédiate.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e.$$

Un polynôme en  $n$  de degré  $\geq 1$  peut toujours s'exprimer comme combinaison linéaire de  $1$ ,  $n$ ,  $n(n-1)$ , ... par exemple,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+n}{n!} = 2e.$$

On pourra procéder de même pour calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n-1}{n!} = 3e.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3-n^2-n-1}{n!} = e.$$

## 2. Séries entières

### 2.1 Définition :

On appelle série entière toute série de fonction  $\sum f_n$  dont le terme générale est de la forme  $f_n(x) = a_n x^n$ , où  $(a_n)$  désigne une suite réelle ou complexe et  $x \in \mathcal{R}$ .

Une série entière est noté  $(\sum a_n x^n)$ , comme pour les séries de fonctions, on cherche l'ensemble :

$$\Delta = \left\{ x \in \mathcal{R}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\} \quad (4.12)$$

Qu'on appelle domaine de convergence de la série entière.

### Exemples :

- $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

Posons  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$  est appelons le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 0$$

La série entière est absolument convergente pour toute  $x \in \mathcal{R}$ , donc  $\Delta = \mathcal{R}$ .

- $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n^2}$

Posons  $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 x \right| = 0$$

- Si  $|x| < 1$ , la série est absolument convergente
- Si  $|x| > 1$ , la série diverge.
- Etudions le cas où  $|x| = 1$ , dans ce cas on a :  $|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n^2} \right|$ ,

La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n^2}$  est alors absolument convergente dans  $[-1, 1]$ , ( $\Delta = [-1, 1]$ ).

- $\sum_{n \geq 0} n! x^n$

Cette série ne converge que si  $x = 0$  car  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)x|$  et la limite n'existe que si  $x = 0$ , d'où  $\Delta = 0$ .

## 2.2 Lemme d'Abel :

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière. On suppose qu'il existe  $x_0 \in \mathcal{R}$  tel que la suite  $a_n x^n$  soit bornée, alors :

- 1- la série  $\sum a_n x^n$  est absolument convergente pour  $|x| < |x_0|$ .
- 2- la série  $\sum a_n x^n$  est normalement convergente pour  $|x| < r$  pour tout  $0 < r < |x_0|$ .

## 2.3 Rayon de convergence d'une suite entière :

Pour les séries entières, la forme de convergence prend une forme assez simple.

### Théorème :

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière, alors il existe un unique nombre réel  $R \geq 0$  (éventuellement infini) tel que :

- $\sum a_n x^n$  converge absolument dans  $] - R, R[$ .
- $\sum a_n x^n$  diverge si  $|x| > R$ .

### Remarque :

Le rayon de convergence d'une série  $\sum a_n x^n$  est caractérisé par :

- 1-  $|x| < R \Rightarrow \sum a_n x^n$  est absolument convergente.
- 2-  $|x| > R \Rightarrow \sum a_n x^n$  diverge.
- 3-  $|x| = R$  est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
- 4- Pour tout  $r \in \mathcal{R}^+$  tel que  $r < R$ , la série  $\sum a_n x^n$  est normalement (donc absolument) convergente pour  $|x| \leq r$ .

## 2.4 Détermination du rayon de convergence :

### 2.4.1 Lemme d'Hadarnard :

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière, le rayon de convergence  $R$  est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (4.13)$$

#### - Preuve :

- 1- Posons  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ . En utilisant le critère de d'Alembert on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = l|x|, \text{ ceci implique :}$$

a-  $(l|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{l}) \Rightarrow$  la série est absolument convergente.

b-  $(l|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{l}) \Rightarrow$  la série est divergente.

D'après la remarque précédente,  $R = \frac{1}{l}$ .

c- Posons  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . En utilisant le critère de Cauchy :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l|x|$ , puis on adopte le même raisonnement que précédemment, on aboutit à la même conclusion  $R = \frac{1}{l}$ .

### Exemples :

- $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n^2}$

On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \right| = 1$ , rayon de convergence  $R = 1$ . La série est absolument convergente pour toute  $|x| < 1$  et divergente si  $|x| > 1$ .

- $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

On a,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$ , donc le rayon de convergence est  $R = \infty$ , la série est absolument convergente pour tout  $x \in \mathcal{R}$ .

- $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2^n}$ ,

le critère de Cauchy donne :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$ , le rayon de convergence est  $R = 2$ , la série est absolument convergente pour tout  $|x| < 2$  est divergente si  $|x| > 2$ .

## 2.5 Dérivée et primitive d'une série entière :

- **Proposition 1 :**

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ , et soit :  $f: ]-R, R[ \rightarrow \mathcal{R}$   
la fonction définie par  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , alors  $f$  est dérivable et on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (4.14)$$

- **Proposition2 :**

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ , et soit :  $f: ]-R, R[ \rightarrow \mathcal{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , on considère la fonction  $F: ]-R, R[ \rightarrow \mathcal{R}$  définie par  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ , alors ,

$$F'(x) = f(x), \forall x \in ]-R, R[$$

- **Remarque :**

Dans le cas réel, si  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  avec  $a_n \in \mathcal{R}$  et  $x \in ]-R, R[$ ,

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n, \forall x \in ]-R, R[$$

## 2.6 Opération sur les séries entières :

- **Proposition :**

Soit  $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$  deux séries entières ayant respectivement  $R$  et  $R'$  pour rayon de convergence .

1- Si  $R \neq R'$ , le rayon de convergence  $R''$  de la série  $\sum (a_n + b_n) x^n$  est  $R'' = \min(R, R')$ .

2- Si  $R = R'$  le rayon de convergence de la série  $\sum (a_n + b_n) x^n$  est  $R'' \geq R$ .

**Exemple :**

Soient les deux séries  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$  les deux séries ont pour rayon de convergence  $R = 1$ .

Par contre la série somme  $(f + g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$  a pour rayon de convergence  $R'' = 2$ .

## 2.7 Série de Taylor

Pour qu'une fonction  $f$  soit développable en série entière au voisinage d'un point  $x_0 \in \mathcal{R}$ , il est nécessaire qu'elle soit de classe  $C^\infty$  dans un voisinage  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  de  $x_0$  et dans ce cas on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (4.15)$$

**Exemple :**

$\forall x \in \mathcal{R}$ , on a :

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

## 2.8 Equations différentielles et série entières :

### 2.8.1 La série des binômes :

Considérons la fonction  $y = f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$ , son domaine de définition est  $] -1, +\infty[$ , on a une relation simple entre la fonction  $f$  et de sa dérivée.

$y = (1+x)^\alpha$ , on a  $y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ , d'où l'équation différentielle :

$$y'(1+x) = \alpha y \quad (4.16)$$

Toutes les solutions de cette équation sont de la forme  $y = C(1+x)^\alpha$ , où  $C$  est une constante arbitraire.

Cherchons maintenant s'il existe une fonction  $f$  développable en série entière au voisinage de 0,  $f(x) = \sum a_n x^n$  qui est solution de (E). Pour qu'une telle fonction existe il est nécessaire d'avoir les relations :

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) - \alpha f(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n] x^n = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

On déduit alors que  $(n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n = 0$ , pour toute  $n \in \mathcal{N}$ , et donc,  $(n+1)a_{n+1} = (\alpha-n)a_n$ , ceci permet d'avoir :

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha a_0 \\ a_2 &= \frac{(\alpha-1)}{2} a_1 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= \frac{(\alpha-n+2)}{n-1} a_{n-2} \\ a_n &= \frac{(\alpha-n+1)}{n} a_{n-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ce qui donne enfin :

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} a_0 \quad (4.19)$$

Soit la série,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n \quad (4.20)$$

Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)}{(n + 1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n}{n + 1} \right| = 1$$

Par construction, la série  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$  est solution de l'équation différentielle (E), elle est donc de la forme  $f(x) = C(1 + x)^\alpha$ ,

on déduit que pour  $x \in ] - 1, 1[$  :

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n, \quad R = 1 \quad (4.21)$$

### 2.8.2 Equation du second ordre :

Considérons l'équation différentielle  $y''(x) + y(x) = 0$ . nous savons que la solution est de la forme  $y = A \sin x + B \cos x$ .

Pour résoudre l'équation par la méthode des séries entières on remplace la fonction inconnue  $y(x)$  par une série entière dont on essaiera de déterminer les coefficients.

En posant :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (4.22)$$

On trouve :

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \quad (4.23)$$

et

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \dots \quad (4.24)$$

On substitue les expressions pour  $y'$  et  $y''$  dans l'équation différentielle, ce qui donne :

$$y'' + y' = (a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + \dots + [a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n] + \dots = 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2!}a_0 \\ a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = -\frac{1}{4!}a_2 \\ \vdots \\ a_{2n+2} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}a_{2n} = \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}a_0 \end{cases} \quad (4.26)$$

et

$$\begin{cases} a_3 = -\frac{1}{3!}a_1 \\ a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = -\frac{1}{5!}a_3 \\ \vdots \\ a_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+1)(2n)}a_{2n-1} = \dots = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_1 \end{cases} \quad (4.27)$$

Observons que l'on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0$ , d'où il résulte que le rayon de convergence de la série est infinie. La solution peut s'écrire :

$$y(x) = a_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + a_1 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \quad (4.28)$$

Soit,

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x \quad (4.29)$$

D'une manière plus générale, on peut appliquer cette méthode pour résoudre des équations différentielles de la forme :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (4.30)$$

### 3- Séries de Fourier

Dans la plupart des domaines de la physique, en électricité, optique, acoustique, thermique, mécanique, ... on a souvent affaire à des fonctions périodiques, mais de forme quelconque.

Nous allons montrer que sous certaines conditions, on peut considérer ces signaux comme la superposition de fonctions périodiques simples que sont les fonctions sinus et cosinus. Le signal apparaît alors comme la somme d'une série trigonométrique appelée *série de Fourier*.

#### 3.1 Série trigonométriques :

Une série trigonométrique est une série dont le terme général est une fonction trigonométrique dont la fréquence varie selon l'indice  $n$ .

**Exemple :**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \dots + a_i \cos(i\omega t) + \dots,$$

#### 3.2 Condition de Dirichlet :

Pour être développable en série de Fourier, une fonction  $f(t)$  doit :

- être périodique, de période  $T$ , de pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , telle que  $f(t + T) = f(t)$  pour tout  $t$ ,
- être définie dans un intervalle  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$
- vérifier les conditions dites de Dirichlet qui sont les suivantes :

1- Les discontinuités de  $f$  sont de premier espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.

2-  $f$  admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

3- la série de Fourier associée à  $f$  est convergente, de plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction  $f$  est continue.

## Exemples :

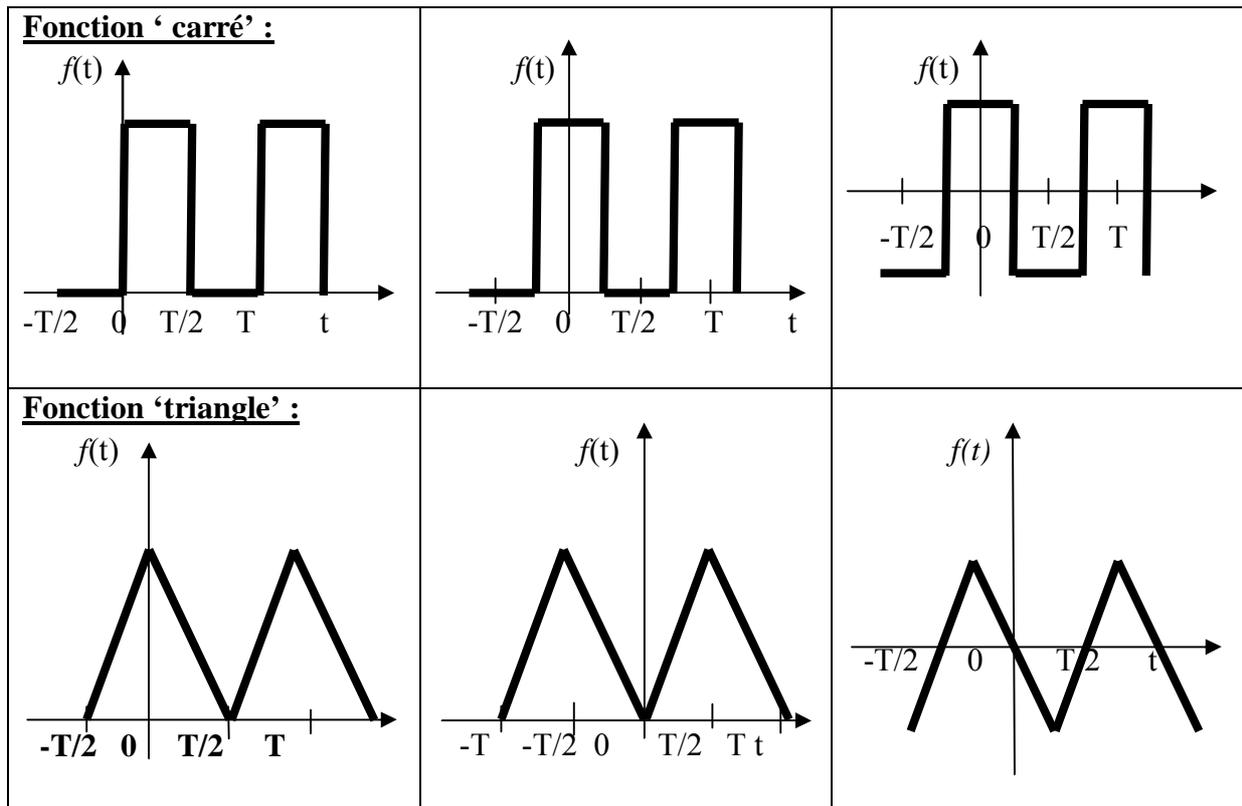


Figure 4.1 Série de Fourier des fonctions 'carré' et 'triangle'

## Contre exemple :

Une fonction telle que  $f(t) = \frac{1}{t}$  pour  $-\tau < t < \tau$ , de période  $T = 2\tau$ , non bornée en  $t = 0 + 2\pi k$  n'est pas décomposable en série de Fourier.

Il en est de même pour la fonction  $f(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$  de période  $T$  sur l'intervalle  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ . en effet cette fonction admet une infinité de maxima et de minima, de valeur  $\pm 1$  au voisinage de zéro (chaque fois que  $\frac{1}{t} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

## 3.3 Expression de la décomposition en série de Fourier

Soit une fonction périodique  $f(t)$  de la variable  $t$  qui satisfait aux conditions de Dirichlet, elle est alors développable en série de Fourier, sous la forme :

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \dots + a_n \cos(n\omega t) + \dots \\ + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots + b_n \sin(n\omega t) + \dots \quad (4.31)$$

Où encore, en posant  $b_0 = 0$ ,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (4.32)$$

Où  $n$  est un entier naturel et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Les coefficients  $a_0, a_n, b_n$  sont des constantes réelles que l'on appelle les **coefficients de Fourier**. Ils représentent l'amplitude des termes successifs de la série trigonométrique.

Considérons la fonction  $f(t)$  de la variable  $t$ , intégrable sur l'intervalle  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$

#### Calcul de $a_0$ :

Par définition on a :  $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$ ,

C'est la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle d'une période  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

### 3.4 Forme algébrique de la décomposition en série de Fourier :

La forme la plus couramment utilisée de la décomposition en série de Fourier d'une fonction  $f(t)$  est la forme algébrique. Elle s'écrit comme suit :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (4.33)$$

Les coefficients de la série de Fourier s'évaluent selon les expressions suivantes

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (4.34)$$

#### Remarques :

- Il est important de remarquer que l'expression du coefficient  $a_0$  n'est pas la même que celle que l'on obtiendrait en faisant  $n = 0$  dans l'expression de  $a_n$ .
- Pour  $n = 1$ , la fonction  $(a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t))$  s'appelle le fondamental de la fonction.
- Les fonctions  $(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$  s'appellent les harmoniques de la fonction.
- Les intégrales sont à prendre sur une période de la fonction  $f(t)$ . On peut donc généraliser les expressions suivantes :

### 3.5 Forme polaire de la décomposition en série de Fourier :

Soit le développement en série de Fourier de  $f(t)$  :  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ . On peut écrire la décomposition en série de Fourier comme une somme infinie

de fonction cosinus uniquement ou sinus en faisant intervenir des déphasages dans les fonctions trigonométriques.

- Choisissons d'exprimer la décomposition série de Fourier de  $f(t)$  avec uniquement des fonctions cosinus.

$$\text{On pose alors : } \begin{cases} a_n = \rho_n \cos \varphi_n \\ b_n = \rho_n \sin \varphi_n \end{cases} \quad \text{Ainsi} \quad \begin{cases} \rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \\ \cos \varphi_n = \frac{a_n}{\rho_n} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ \sin \varphi_n = \frac{b_n}{\rho_n} = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ \text{tg } \varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad (4.35)$$

$\varphi_n$  est la phase de l'harmonique  $n$ . Alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n [\cos \varphi_n \cos(n\omega t) + \sin \varphi_n \sin(n\omega t)]. \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \end{aligned} \quad (4.36)$$

On écrira donc :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_0 = a_0 \\ \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

- Choisissons maintenant d'exprimer la décomposition série de Fourier de  $f(t)$  avec uniquement des fonctions sinus.

$$\text{On pose alors : } \begin{cases} a_n = \rho_n \sin \psi_n \\ b_n = \rho_n \cos \psi_n \end{cases} \quad \text{Ainsi} \quad \begin{cases} \rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \\ \cos \psi_n = \frac{b_n}{\rho_n} = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ \sin \psi_n = \frac{a_n}{\rho_n} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ \text{tg } \psi_n = \frac{a_n}{b_n} \end{cases} \quad (4.38)$$

$\psi_n$  est la phase de l'harmonique  $n$ . Alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n [\cos \psi_n \cos(n\omega t) + \sin \psi_n \sin(n\omega t)]. \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \sin(n\omega t - \psi_n) \end{aligned} \quad (4.39)$$

On écrira donc :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \sin(n\omega t - \psi_n) \quad (4.40)$$

### 3.6 Forme complexe de la décomposition en série de Fourier :

Introduisons les formules d'Euler dans la décomposition en série de Fourier de  $f(t)$  mise sous forme algébrique.

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}.$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right).$$

Soit

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t} \right) \quad (4.41)$$

Posons,  $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$  et  $c'_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$  et calculons leurs expressions.

Les deux coefficients  $a_n$  et  $b_n$  étant réels, les coefficients  $c_n$  et  $c'_n$  sont alors complexes conjugués l'un de l'autre :  $c'_n = \overline{c_n}$

Calculons  $c_n$  :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt - \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt, \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)] dt. \end{aligned}$$

Soit :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad \text{et} \quad c'_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{in\omega t} dt \quad (4.42)$$

On passe de  $c_n$  à  $c'_n$  en changeant  $i$  en  $-i$ , ce qui revient, d'après l'expression de  $c_n$  à changer  $n$  en  $-n$ .

$$c'_n = \overline{c_n} = c_{-n}$$

Le développement de  $f(t)$  est alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}) \quad (4.43)$$

et s'exprime ainsi sous la forme :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (4.44)$$

Pour la valeur particulière  $n = 0$ , on obtient

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (4.45)$$

### 3.7 Parité des fonctions :

Le calcul des coefficients de la décomposition en série de Fourier d'une fonction  $f(t)$  se simplifie lorsque la fonction à décomposer est pair ou impaire.

### 3.7.1 Cas des fonctions paires :

soit la fonction paire  $f(t)$ . Alors  $f(t) = f(-t)$ .

La fonction  $f(t) \cos(n\omega t)$  est aussi une fonction paire sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  alors que la fonction  $f(t) \sin(n\omega t)$  est une fonction impaire, il en résulte que :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

La décomposition en série de Fourier d'une fonction paire ne contient que des termes en cosinus avec éventuellement un terme en  $a_0$ . On ne calcule donc ces coefficients que sur une demi-période.

- **Cas des fonctions impaires :**

soit la fonction impaire  $f(t)$ . Alors  $f(t) = -f(-t)$ .

La fonction  $f(t) \cos(n\omega t)$  est aussi une fonction impaire sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  alors que la fonction  $f(t) \sin(n\omega t)$  est une fonction paire, il en résulte que :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0 \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = 0 \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases} \quad (4.47)$$

La décomposition en série de Fourier d'une fonction impaire ne contient que des termes en sinus. De plus, elle ne possède pas de terme  $a_0$ .

En résumé :

$$f(t) \text{ paire} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

$$f(t) \text{ impaire} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases} \quad (4.49)$$

**Remarques :**

- Si  $f(t)$  est une fonction paire les coefficients  $c_n$  sont réels.
- Si  $f(t)$  est une fonction impaire les coefficients  $c_n$  sont imaginaires purs.
- Si  $f(t)$  est une fonction quelconque les coefficients  $c_n$  sont complexes.

**Exemples**

Deux exemples vont être traités en détail. Leur décomposition en série de Fourier sera d'abord calculée sous forme algébrique puis les formes polaires et complexes seront données.

**- Fonction  $f(x) = x$  :**

Soit  $f: ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathcal{R}$  une fonction périodique,  $T = 2\pi$  définie par  $f(x) = x$ .

1. les discontinuités de  $f$  sont les points de la forme  $x_k = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$  et sont de première espèce car  $f(\pi + 0) = \pi$  et  $f(\pi - 0) = -\pi$ .

2.  $f$  est partout dérivable sauf aux points  $x_k$ . En ces points nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1.$$

$f$  vérifie les conditions de Dirichlet, donc développable en série de Fourier.

$f$  est impaire donc  $a_0 = a_n = 0$  et  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$ , et par suite :

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

**- fonction créneau  $f(t)$  :**

Soit la fonction créneau  $f(t)$  présentée sur la figure suivante.

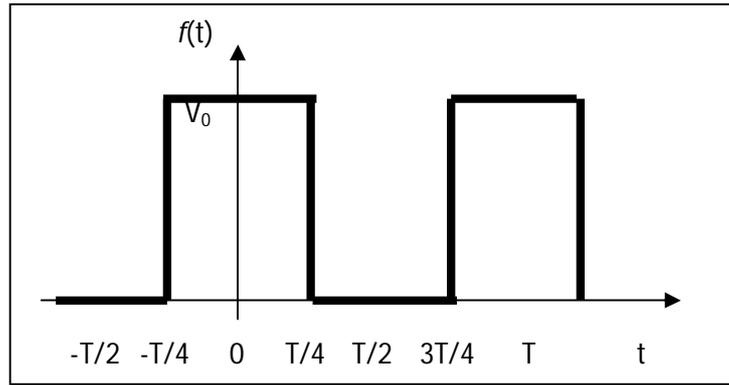


Figure 4.2 Fonction créneau

Calcul de  $a_0$  :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 dt \Rightarrow a_0 = \frac{V_0}{2}.$$

Calcul de  $a_n$  :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 \cos(n\omega t) dt = \frac{2V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Si  $n$  est un nombre pair,  $n = 2p$  :  $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0$

Si  $n$  est un nombre impair,  $n = 2p + 1$  :  $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left((2p + 1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$

$$a_n = \begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} (-1)^p \end{cases}$$

Calcul de  $b_n$  :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 \sin(n\omega t) dt = 0.$$

Finalement la décomposition en série de Fourier du créneau s'écrit sous forme algébrique comme suit :

$$f(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} \cos((2p+1)\omega t),$$

Vu que les coefficients  $b_n$  sont nuls, la forme polaire est égale à la forme algébrique : pour tout  $n$ ,  $\rho_n = a_n$  et  $\varphi_n = 0$ .

Pour la forme complexe cela donne :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} V_0 e^{-in\omega t} dt = \frac{V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} n = 2p \rightarrow C_{2p} = 0 \\ n = 2p + 1 \rightarrow C_{2p+1} = (-1)^p \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} = \frac{a_{2p+1}}{2} \\ n = 0 \rightarrow C_0 = \frac{V_0}{2} = a_0 \end{cases}$$

### 3.8 Développement en série de Fourier de fonctions non périodiques :

Il est clair que le développement en série de Fourier se pratique sur les fonctions périodiques. Cependant, il est possible, dans certains cas, de faire de tels développements pour des fonctions quelconques.

Soit  $f: [a, b] \mapsto \mathcal{R}$  une fonction non périodique définie sur l'intervalle  $[a, b]$ . Soit  $g: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  une fonction périodique de période  $T \geq b - a$  telle que la restriction  $g|_{[a, b]} = f$ . Si  $g$  satisfait les conditions de Dirichlet, on aura :

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

Avec  $a_n$  et  $b_n$  les coefficients de Fourier associés à  $g$ . La somme de cette série coïncide partout avec  $f$  dans l'intervalle  $[a, b]$  sauf peut être aux points de discontinuités de  $f$ .

#### Remarque :

Soit  $f: [0, l] \mapsto \mathcal{R}$  une fonction quelconque, et  $l > 0$ . On suppose que  $f$  peut-être prolongée sur  $] -l, 0[$  et que les conditions de Dirichlet soit satisfaites. Dans ce cas, on a le choix sur ce prolongement. On peut choisir soit un prolongement pair soit un prolongement impair pour éviter les longs calculs des coefficients.

#### Exemple :

Donner une série de Fourier de période  $2\pi$  qui coïncide sur  $]0, \pi[$  avec la fonction  $f(x) = e^x$ .

#### Solution :

Ici on ne précise que l'intervalle où la série de Fourier coïncide avec  $f$ , c'est-à-dire  $]0, \pi[$ .

Comme la période de la série de Fourier est  $2\pi$ , il y a alors une infinité de réponses, examinons trois cas différents.

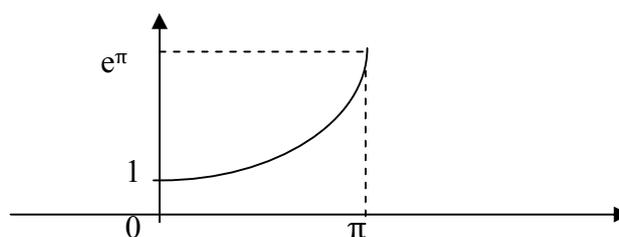


Figure 4.3 - La fonction  $f(x)$

1) Choisissons un prolongement pair et posons :  $f_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ e^{-x} & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$

On vérifie aisément que  $f_1$  est une fonction paire. Posons  $f_1(0) = 1$  et  $f_1(\pi) = e^\pi$ , on a alors un prolongement continue sur  $\mathcal{R}$ . Le graphe de  $f_1$  et celui de la série de Fourier seront identiques.

Le calcul des coefficients donne :

$$a_0 = \frac{(e^\pi - 1)}{\pi}, \quad a_n = 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1 + n^2} \quad \text{et} \quad b_n = 0.$$

On a alors :

$$S_1(x) = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2 + 1} \cos(nx) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ e^{-x} & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

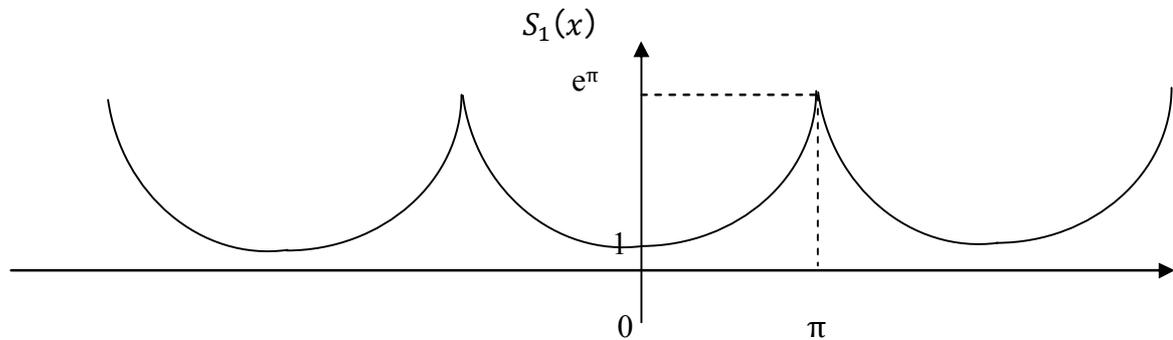


Figure 4.4 - La série  $S_1(x)$

2) Choisissons un prolongement impair et posons :  $f_2(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ -e^{-x} & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$

On remarque que  $f_2$  est une fonction impaire mais n'est pas continue sur  $\mathcal{R}$ . Elle est discontinue en tout point de la forme  $k\pi, k \in \mathcal{Z}$ .

Le calcul des coefficients donne :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2n(1 - (-1)^n e^\pi)}{\pi(1 + n^2)},$$

On a alors :

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(1 - (-1)^n e^\pi)}{\pi(1 + n^2)} \sin(nx) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \\ e^{-x} & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi \end{cases}$$

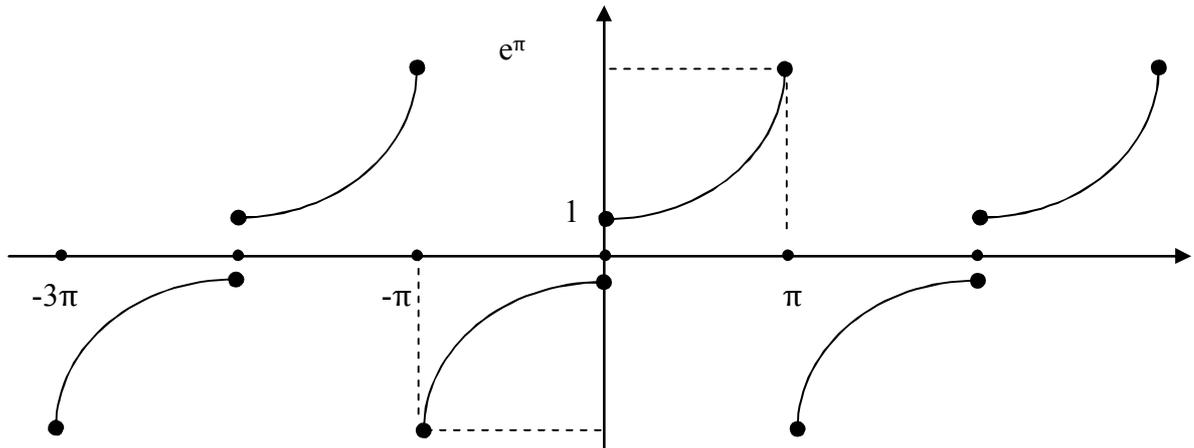


Figure 4.5 - La série  $S_2(x)$

3- Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons :

$$f_3(x) = e^x \text{ si } x \in ]-\pi, \pi[.$$

On remarque que  $f$  est une fonction discontinue en tout point de la forme  $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . On a le résultat final :

$$S_3 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos(nx) - n \sin(nx)) \right) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]-\pi, \pi[ \\ \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} & \text{si } x = \pm\pi \end{cases}$$

On a obtenu trois séries différentes qui valent exactement  $e^x$  sur l'intervalle  $]0, \pi[$ . On pouvait choisir d'autres prolongements et obtenir d'autres séries.

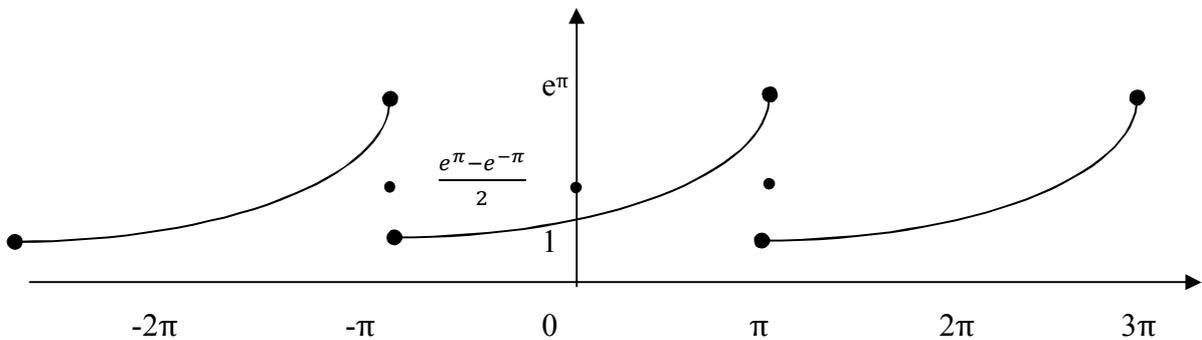


Figure 4.6 - La série  $S_3(x)$

### 3.9 Relation de Parseval :

Soit une fonction  $f(t)$  de la variable  $t$  développée en série de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

Multiplions chaque membre de la relation précédente par la fonction  $f(t)$  et intégrons sur une période.

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 dt &= \int_{-T/2}^{T/2} a_0 f(t) dt + \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))] dt. \\ &= a_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \end{aligned}$$

On reconnaît les expressions des coefficients  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  du développement en série de Fourier de  $f(t)$ , à un coefficient près.

$$\begin{aligned} \text{D'où :} \quad \int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 dt &= a_0^2 T + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 dt &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Où on a introduit la forme polaire,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (4.51)$$

avec

$$\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

L'intégrale du membre de gauche représente la valeur moyenne du carré de la fonction  $f(t)$ .

Par définition c'est **le carré de la valeur efficace** de  $f(t)$ .

## Chapitre 5 :

# Transformation de Fourier

### 1. Définition :

Soit  $f(x)$  une fonction absolument intégrable sur  $\mathcal{R}$  à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle  $x$ . On appelle transformée de Fourier de  $f(x)$  la fonction complexe de la variable réelle  $k$  définie par :

$$F(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (5.1)$$

En physique, dans la plupart des exemples, la variable concernée est, soit une longueur, soit un temps. Usuellement, la notation  $x$  représente une longueur. Dans ce cas, la variable  $k$  a les dimensions de l'inverse d'une longueur. Elle est appelée le vecteur d'onde. Lorsque l'on considère une fonction  $f(t)$  du temps, on utilise pour la transformée de Fourier de  $f(t)$  la notation.

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.2)$$

Où la variable  $\omega$ , qui a la dimension de l'inverse d'un temps, est la fréquence angulaire.

### 2. Inversion de la transformation de Fourier :

On démontre que, inversement, on peut en général obtenir  $f(x)$  à partir de  $F(k)$  par la transformation dite de Fourier inverse :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (5.3)$$

Où la notation  $\mathcal{F}^{-1}$  désigne la transformée de Fourier inverse.

### Remarque :

Les conventions utilisées pour définir les transformées de Fourier ne sont pas universelles. On peut, par exemple, définir les transformées de Fourier par les relations :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad \text{et} \quad F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

mais on préférera la définition précédente, plus symétrique et donc plus facile à mémoriser. D'autre part, on pourra noter que les intégrales de Fourier peuvent être vues comme limites de séries de Fourier (voir par exemple l'appendice I du Cohen-Tannoudji).

### 3. Propriétés de la transformation de Fourier :

#### 3.1 Linéarité

L'intégration étant une opération linéaire, la transformation de Fourier l'est aussi, c'est-à-dire que,  $\lambda$  et  $\mu$  étant des scalaires, on a :

$$\mathcal{F}[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda F(k) + \mu G(k) \quad (5.4)$$

De même pour la transformée inverse, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}[\lambda F(k) + \mu G(k)] = \lambda \mathcal{F}^{-1}(F(k)) + \mu \mathcal{F}^{-1}(G(k)) \quad (5.6)$$

#### 3.2 Translation :

chignons la transformée de Fourier de  $f(x - a)$ ,  $a$  est réel. En posant  $u = x - a$ , on obtient :

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a) e^{-ikx} dx = e^{-ika} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iku} du \quad (5.7)$$

Soit :

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = e^{-ika} F(k) \quad (5.8)$$

À la translation de  $f(x)$  correspond un déphasage de  $F(k)$  proportionnel à  $k$  (la transformée de Fourier de  $f(x - a)$  s'obtient en multipliant  $F(k)$  par le facteur de phase  $e^{-ika}$ ).

#### 3.2 Modulation :

Inversement, la transformée de Fourier de  $e^{ik_0x} f(x)$  ( $k_0$  réel) est donnée par :

$$\mathcal{F}[e^{ik_0x} f(x)] = F(k - k_0) \quad (5.9)$$

À la modulation de  $f(x)$  correspond une translation de  $F(k)$ .

Par conséquent, la transformée de Fourier d'un signal  $f(t)$  modulé par  $e^{i\omega_0 t}$  est donnée par :

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0) \quad (5.10)$$

### 3.4 Changement d'échelle :

changer l'unité pour la variable  $x$  revient à multiplier celle-ci par une constante réelle  $a \neq 0$ . En posant  $u = ax$ , on obtient

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-ikx} dx = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\frac{iku}{a}} du \quad (5.11)$$

Soit :

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right) \quad (5.12)$$

En termes plus physiques, une compression de l'échelle des longueurs entraîne une dilatation de l'échelle des vecteurs d'onde. De même, une compression de l'échelle des temps entraîne une dilatation de l'échelle des fréquences angulaires. C'est l'a une propriété extrêmement importante en pratique de la transformation de Fourier.

### 3.5 Conjugaison complexe :

La transformée de Fourier du conjugué d'une fonction  $f(x)$  est :

$$\mathcal{F}[f^*(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) e^{-ikx} dx = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx \right]^* \quad (5.13)$$

Soit :

$$\mathcal{F}[f^*(x)] = F^*(-k) \quad (5.14)$$

### 3.6 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

La transformée de Fourier de la dérivée  $f'(x)$  d'une fonction  $f(x)$  est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ikx} dx \quad (5.15)$$

Intégrons par partie l'intégrale définissant la transformée de Fourier de la dérivée :

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (5.16)$$

La fonction  $f(x)$  étant intégrable sur  $\mathcal{R}$ , cela implique que sa limite est nulle pour  $x \rightarrow \pm\infty$ . De ce fait, le premier terme du membre de droite est nul, il vient :

$$\mathcal{F}[f'(x)] = ik\mathcal{F}[f(x)] = ikF(k) \quad (5.17)$$

A la dérivation de  $f(x)$  par rapport à  $x$  correspond donc la multiplication de  $F(k)$  par  $ik$ . Plus généralement, pour la dérivée d'ordre  $m$ , on a :

$$\mathcal{F}[f^{(m)}(x)] = (ik)^m F(k) \quad (5.18)$$

Cette propriété est fondamentale car elle permet de résoudre simplement certaines équations différentielles. En particulier, si on considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre  $n$  où  $y(x)$  est inconnue et où le terme forcé est  $u(x)$ :

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y^{(1)}(x) + a_0 y(x) = u(x) \quad (5.19)$$

La transformée de Fourier étant linéaire, la transformée de Fourier de cette équation est un polynôme d'ordre  $n$  en  $k$  :

$$a_n (ik)^{(n)} Y(k) + a_{n-1} (ik)^{(n-1)} Y(k) + \dots + a_1 (ik) Y(k) + a_0 Y(k) = U(k) \quad (5.20)$$

Il est alors facile de déduire  $Y(k)$  et d'en déduire, à l'aide d'une transformée inverse, la solution  $y(x)$  de l'équation différentielle. Comme on le verra au chapitre suivant cette méthode est encore plus commode avec la transformée de Laplace. Dans un cas comme dans l'autre, la transformée inverse est parfois fastidieuse il est fréquemment fait usage de tables où sont consignées un grand nombre de fonctions usuelles et leurs transformées respectives.

On outre, le résultat  $\mathcal{F}[f^{(m)}(x)] = (ik)^m F(k)$  conduit à une majoration importante. De la formule

$$(ik)^m F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(x) e^{-ikx} dx \quad (5.21)$$

On déduit l'inégalité :

$$|k|^m |F(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(x)| dx \quad (5.22)$$

Plus  $f(x)$  est dérivable, à dérivées intégrables, plus sa transformée de Fourier  $F(k)$  décroît rapidement à l'infini.

### 3.7 Dérivation de la transformée de Fourier :

La dérivée de  $F(k)$  par rapport à la variable  $k$  donne :

$$\frac{d}{dk} F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-ikx} dx = \mathcal{F}[-ixf(x)] \quad (5.23)$$

Il suffit de dériver sous le signe d'intégration la transformée de Fourier. Ce résultat se généralise aux dérivées successives de  $F(k)$  par :

$$F^{(m)}(k) = \mathcal{F}[(-ix)^m f(x)] \quad (5.24)$$

Ce résultat conduit encore à une majoration :

$$|F^{(m)}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m |f(x)| dx \quad (5.25)$$

Plus  $f(x)$  décroît rapidement à l'infini, plus  $F(k)$  est dérivable (avec des dérivées bornées).

### Exemples :

- On peut montrer (soit en résolvant une équation différentielle, soit en utilisant l'analyse complexe) que la fonction gaussienne

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

a pour transformée de Fourier une gaussienne :

$$F(k) = e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$$

- On peut montrer encore, que la fonction lorentzienne.

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0$$

A pour transformée de Fourier la fonction "en toile de tente" (non dérivable en  $k = 0$ ) :

$$F(k) = e^{-a|k|}$$

- La fonction porte est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

elle a pour transformée de Fourier la fonction :

$$F(k) = 2 \frac{\sin ak}{k}$$

### 3.8 Convolution et transformation de Fourier :

On définit le produit de convolution de deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  absolument intégrables par la formule :

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du \quad (5.26)$$

La transformée de Fourier de cette fonction :

$$\mathcal{F}[f * g] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(u)g(x-u)dxdu \quad (5.27)$$

Effectuons le changement de variables  $x - u = v, dx = dv$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(u+v)} f(u)g(v)dudv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iku} f(u)du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikv} g(v)dv \end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation :

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = \mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[g(x)] \quad (5.28)$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit ordinaire des transformées de Fourier de ces deux fonctions.

A cause de la symétrie des intégrales de Fourier et de Fourier inverse représentant respectivement  $f(x)$  et  $F(k)$ , il existe un résultat analogue reliant le produit (ordinaire)  $f(x)g(x)$  et le produit de convolution de  $F(k)$  et de  $G(k)$ :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k) * G(k)] = \mathcal{F}^{-1}[F(k)]\mathcal{F}^{-1}[G(k)] \quad (5.29)$$

### 3.9 Théorème de Parseval – Conservation de la norme :

- **Théorème :**

Soit la fonction  $f(x)$  et  $F(k)$  sa transformée de Fourier, on montre que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk \quad (5.30)$$

A la condition que les intégrales existent. Plus généralement, on a, à la condition que les intégrales existent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)G^*(k)dk \quad (5.31)$$

**Démonstration :**

On a :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(k) e^{-ikx} dk dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) G^*(k) e^{-ikx} dk dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(k) dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)G^*(k) dk
 \end{aligned}$$

En physique, si  $f(t)$  représente une onde ou une vibration quelconque (la variable est alors le temps  $t$ ), et si  $F(\omega)$  est sa transformée de Fourier le théorème de Parseval se réécrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5.32)$$

Les deux intégrales ci-dessus représentent l'énergie totale de la vibration. La puissance instantanée dissipée est en mécanique  $f(t)v(t)$  (force  $\times$  vitesse), en électricité  $V(t)I(t)$  (tension  $\times$  courant). L'intégrale temporelle représente donc l'énergie totale. L'intégrale au second membre correspond à une décomposition en vibrations harmoniques. Elle exprime le fait que l'énergie totale est la somme des énergies de chacune des composantes. Cette relation a été utilisée pour la première fois par un physicien (Lord Rayleigh, 1889).

- **Conservation de la norme :**

Un cas pratique important en physique, notamment en mécanique quantique et en optique, est celui des fonctions appartenant à l'espace des fonctions de carré sommable (c'est-à-dire de carré intégrable), telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 < +\infty \quad (5.33)$$

Entre les fonctions  $f(x)$  et  $F(k)$ , on a l'égalité de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk \quad (5.34)$$

qui exprime que, dans l'espace des fonctions de carré sommable, la transformation de Fourier conserve la norme.

#### 4. Transformée de Fourier d'une fonction radial à deux et trois dimensions :

On a :

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}^2} f(r) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (5.35)$$

En utilisant dans le plan des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  définies en prenant comme axe polaire la direction du vecteur  $\vec{k}$ , on a :

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r f(r) dr \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \theta} d\theta \quad (5.36)$$

La fonction  $F(k)$  ne dépend en réalité que du module  $k$  de  $\vec{k}$ . C'est donc aussi une fonction radiale. En utilisant la représentation intégrale de la fonction de Bessel d'ordre zéro  $J_0(x)$ , on obtient le résultat suivant :

$$F(k) = \int_0^{+\infty} r J_0(kr) f(r) dr \quad (5.37)$$

Dans le cas à trois dimension en prenant l'axe  $Oz$  selon la direction du vecteur  $\vec{k}$ , on a :

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (5.38)$$

On a le résultat final :

$$F(k) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{+\infty} r^2 \frac{\sin kr}{kr} f(r) dr \quad (5.39)$$

Ce résultat est important en pratique, par exemple dans la théorie de la diffusion par un potentiel central.

#### 5. Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables :

On considère un vecteur  $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de l'espace à  $n$  dimensions  $\mathcal{R}^n$  et un vecteur  $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  de  $\mathcal{R}^n$ . On considère une fonction  $f(r)$  absolument intégrable, c'est-à-dire telle que :

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(\vec{r})| d\vec{r} < +\infty \quad (5.40)$$

Sa transformée de Fourier est une fonction  $F(k)$  définie par

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (5.41)$$

De façon générale, les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables sont du même type que celles qui correspondent au cas d'une seule variable. Citons ci-dessous quelques cas particuliers intéressants.

- Dans le cas particulier où la fonction  $f(r)$  se factorise,

$$f(\vec{r}) = f_1(r_1)f_2(r_2) \dots f_n(r_n) \quad (5.42)$$

Sa transformée de Fourier se factorise également :

$$F(\vec{k}) = \mathcal{F}[f_1 f_2 \dots f_n] = F_1(k_1)F_2(k_2) \dots F_n(k_n) \quad (5.43)$$

- Il existe un autre cas simple, c'est celui où la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est fonction seulement de  $r = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ . La fonction  $f(r)$  est alors invariante par rotation. On dit que c'est une fonction radiale. Nous avons étudié ci-dessus ce cas en détail lorsque le nombre de dimension de l'espace est égal à 2 puis à 3.

## 6. Relation d'incertitude :

Considérons pour fixer les idées une fonction du temps. Plus cette fonction varie rapidement, plus sa transformée de Fourier s'étend vers les fréquences angulaires élevées. Il s'ensuit que, plus un signal est bref, plus sa transformée de Fourier décroît lentement à l'infini. A la limite, une impulsion de Dirac a une transformée de Fourier non décroissante à l'infini. Inversement, plus la transformée de Fourier décroît rapidement, plus le signal décroît lentement. Cela peut s'exprimer quantitativement de différentes manières suivant la façon dont on exprime l'étendue d'un signal.

Pour les fonctions de carré sommable, donc en particulier pour les fonctions d'onde  $\psi(x)$  en mécanique quantique, il est d'usage courant de considérer l'écart quadratique moyen  $\Delta x$  défini par :

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (5.44)$$

Où la moyenne de  $x$  et la moyenne de  $x^2$  sont définies respectivement par :

$$\langle x \rangle = \frac{\int x |\psi(x)|^2 dx}{\int |\psi(x)|^2 dx}, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2 |\psi(x)|^2 dx}{\int |\psi(x)|^2 dx} \quad (5.45)$$

Si  $\psi(k)$  désigne la transformée de Fourier de  $\psi(x)$ , on considère aussi l'écart quadratique moyen  $\Delta k$  défini par :

$$(\Delta k)^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 \quad (5.46)$$

Où la moyenne de  $k$  et la moyenne de  $k^2$  sont définies respectivement par :

$$\langle k \rangle = \frac{\int k |\psi(k)|^2 dk}{\int |\psi(k)|^2 dk}, \quad \langle k^2 \rangle = \frac{\int k^2 |\psi(k)|^2 dk}{\int |\psi(k)|^2 dk} \quad (5.47)$$

On peut montrer que les écarts quadratiques moyens  $\Delta x$  et  $\Delta k$  vérifient l'inégalité suivante :

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (5.48)$$

Cette relation est connue en mécanique quantique sous le nom de relation d'incertitude de Heisenberg.

## Chapitre 6 :

# Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est essentiellement utilisée dans un cadre physique, c'est pourquoi on considère uniquement des signaux dits causaux, c'est à dire nuls pour  $t < 0$ .

La fonction causal la plus largement utilisée est la fonction échelon unité, notée  $u$  et définie sur  $\mathcal{R}$  par :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

On rend une fonction causale en la multipliant par la fonction échelon unité.

### 1. Définition et transformée inverse

#### Définition 1 :

La transformée de Laplace de la fonction causale  $f(t)$ , notée  $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$  est donnée par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (6.2)$$

Où  $p$  est une variable réelle ou complexe appelé variable de Laplace,  $f$  est appelée originale de  $F$ .

On définit une transformation inverse, notée  $\mathcal{L}^{-1}$ , telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)). \quad (6.3)$$

Cette transformation inverse est définie comme suit :

#### Définition 2 :

La transformée inverse de Laplace de la fonction  $F(p)$ , notée  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$  est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (6.4)$$

Où  $p$ , appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe.

On utilise très peu cette définition mathématique pour calculer des transformées inverses. Dans la plupart des applications on parvient à se ramener à des formes répertoriées dans des tables où sont consignées des fonctions usuelles et leurs transformées de Laplace.

## 2. Propriétés des transformées de Laplace :

Une fois établies quelques propriétés pratiques de la transformée de Laplace, on étudiera les propriétés fondamentales qui permettent de relier les opérations de dérivation (respectivement, d'intégration) par rapport au temps  $t$ , à la multiplication (respectivement, la division) par la variable  $p$ .

### 2.1. Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire, autrement dit, pour tout couple de fonctions  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  telles que leurs transformées de Laplace convergent, et pour tout couple de constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , on vérifie :

$$\mathcal{L}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha \mathcal{L}(f_1(t)) + \beta \mathcal{L}(f_2(t)) \quad (6.5)$$

Il en est évidemment de même pour la transformée inverse. Pour tout couple de constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(F_1(p)) + \beta \mathcal{L}^{-1}(F_2(p)) \quad (6.6)$$

### 2.2. Translation dans l'espace de départ :

La transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  retardée de  $\tau$  est donnée par :

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)) = e^{-p\tau} \mathcal{L}(f(t)) = e^{-p\tau} F(p) \quad (6.7)$$

### 2.3. Dilatation ou contraction dans l'espace de départ :

pour un réel positif  $k$ , on a :

$$\mathcal{L}(f(kt)) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \quad (6.8)$$

### 2.4. Transformée de Laplace d'une fonction modulée :

La transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ , modulée par  $e^{-\alpha t}$  est donnée par :

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t)) = F(p + \alpha) \quad (6.9)$$

Le terme de modulation étant constant par rapport à la variable d'intégration, on peut le déplacer dans l'intégrale et faire apparaître la transformée de Laplace en  $(p + \alpha)$  au lieu de  $p$ .

**2.5. Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction :**

Si on note  $f(0^+)$  la valeur initiale de la fonction  $f(t)$ , la transformée de Laplace de la dérivée  $\frac{df(t)}{dt}$  est donnée par la relation :

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = pF(p) - f(0^+) \quad (6.10)$$

**2.6. Transformée de Laplace de la primitive d'une fonction :**

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction  $f(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p}F(p) \quad (6.11)$$

**2.7. Dérivation de la transformée de Laplace :**

En dérivant la transformée de Laplace dans l'intégrale, on a :

$$\frac{d\mathcal{L}(f(t))}{dp} = -t\mathcal{L}(f(t)) \quad (6.12)$$

Plus généralement, en dérivant  $n$  fois, on a :

$$\frac{d^n \mathcal{L}(f(t))}{dp^n} = (-t)^n \mathcal{L}(f(t)) \quad (6.13)$$

Le terme en  $(-t)^n$  n'affecte pas la convergence de l'intégrale si l'intégrale en  $f(t)$  était définie (autrement dit, si  $f(t)$  admettait une transformée de Laplace).

**2.8. Théorème de la valeur initiale :**

La valeur initiale d'une fonction  $f(t)$  peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction à partir de la relation connue sous le nom de théorème de la valeur initiale, qui se prononce comme suit :

La valeur en  $t = 0$  de  $f(t)$  est donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (6.14)$$

**2.9. Théorème de la valeur finale :**

La valeur finale d'une fonction  $f(t)$  peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction à partir de la relation connue sous l'appellation de théorème de la valeur finale :

La limite pour  $t \rightarrow \infty$  de la fonction  $f(t)$  est donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (6.15)$$

### 2.10. Transformée de Laplace d'un produit de convolution :

le produit de convolution de deux fonctions causales  $f(t)$  et  $g(t)$ , noté  $f(t) * g(t)$ , est défini par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (6.16)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit usuel des transformées de Laplace des fonctions :

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) \quad (6.17)$$

## 3. Applications :

### 3.1 Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac :

Le Dirac, s'il n'est pas physiquement réalisable (valeur infinie pendant un temps infiniment court !) est utilisé pour décrire la réponse des systèmes dynamiques à des sollicitations très brèves. On peut approcher la fonction Dirac par une fonction porte d'amplitude  $\frac{1}{T}$  sur un intervalle  $T$ . On considère donc la fonction :

$$D(t) = \begin{cases} 1/T, & \text{si } t \in ]0, T[ \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.18)$$

La transformée de Laplace de  $D(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}(D(t)) = \int_0^{+\infty} D(t) e^{-pt} dt = \int_0^T \frac{e^{-pt}}{T} dt = \left[ \frac{e^{-pt}}{-pT} \right]_0^T = \frac{e^{-pT} - 1}{-pT} \quad (6.19)$$

Ecrivons le développement en série de ce résultat :

$$\mathcal{L}(D(t)) = \frac{e^{-pT} - 1}{-pT} = \frac{-1 + \sum_{k \geq 0} \frac{(-pT)^k}{k!}}{-pT} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-pT)^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{pT}{2} + \frac{p^2 T^2}{6} - \dots$$

La limite de cette somme lorsque  $T \rightarrow 0$  donne la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{k \geq 1} \frac{(-pT)^{k-1}}{k!} = 1 \quad (6.20)$$

### 3.2. Transformée de Laplace de l'échelon unitaire :

la fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside et notée  $H(t)$ , est définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par :

$$\mathcal{L}(H(t)) = \int_0^{+\infty} H(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} \quad (6.22)$$

La partie réelle de  $p$  étant positive, la limite en  $t \rightarrow \infty$  de  $e^{-pt}$  est nulle. On a donc finalement :

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{p} \quad (6.23)$$

### 3.3. Transformée de Laplace de la fonction *sinus* :

La fonction *sinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielle complexes :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (6.24)$$

Donc la transformée de Laplace du *sinus* se calcule comme suit :

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{i\omega t - pt} - e^{-i\omega t - pt}) dt = \frac{1}{2i} \left[ \frac{e^{i\omega t - pt}}{i\omega - p} + \frac{e^{-i\omega t - pt}}{i\omega + p} \right]_0^{+\infty} \quad (6.25)$$

La partie réelle de  $p$  étant positive, la limite en  $t \rightarrow \infty$  de  $e^{-pt}$  est nulle. Il vient donc :

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = -\frac{1}{2i} \left( \frac{1}{i\omega - p} + \frac{1}{i\omega + p} \right) = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2} \quad (6.26)$$

### 3.4 Transformée de Laplace de la fonction *cosinus*

Comme pour la fonction *sinus*, la fonction *cosinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielle complexes :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (6.27)$$

Donc la transformée de Laplace du *cosinus* se calcule comme suit :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{i\omega t - pt} + e^{-i\omega t - pt}) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i\omega t - pt}}{i\omega - p} - \frac{e^{-i\omega t - pt}}{i\omega + p} \right]_0^{+\infty} \quad (6.28)$$

La partie réelle de  $p$  étant positive, la limite en  $t \rightarrow \infty$  de  $e^{-pt}$  est nulle. Il vient donc :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{i\omega - p} + \frac{1}{i\omega + p} \right) = \frac{p}{\omega^2 + p^2} \quad (6.29)$$

On peut également obtenir ce résultat en remarquant que la dérivation de la fonction *sinus* donne :

$$\frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \omega \cos(\omega t) \quad (6.30)$$

En utilisant la linéarité et la propriété de la transformée de Laplace d'une fonction dérivée, il vient :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{\omega} (p\mathcal{L}(\sin(\omega t)) - \sin(0)) = \frac{p}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (6.31)$$

On retrouve donc bien le résultat établi plus haut.

### 3.5. Transformée de Laplace de l'exponentielle :

La transformée de Laplace de la fonction  $f(t) = e^{-\alpha t}$  se calcule directement par :

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha t}) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t - pt} dt = \left[ -\frac{e^{-(\alpha+p)t}}{\alpha + p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p + \alpha} \quad (6.32)$$

### 3.6 Résolution d'une équation différentielle linéaire :

On cherche la solution  $x(t)$  de l'équation différentielle :

$$x''(t) + 4x'(t) + x(t) = 2e^{-2t}$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(0) = 1.$$

Prenons la transformée de Laplace de chaque membre de l'égalité. Le terme forcé est une exponentielle, dont on a déjà calculé la transformée de Laplace. Donc la transformée du membre de droite est :

$$\mathcal{L}(2e^{-2t}) = \frac{2}{p+2}.$$

Notons  $X(p)$  la transformée de Laplace de la fonction  $x(t)$ . Par linéarité, la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x''(t) + 4x'(t) + 3x(t)) &= \mathcal{L}(x''(t)) + 4\mathcal{L}(x'(t)) + 3\mathcal{L}(x(t)). \\ &= p\mathcal{L}(x'(t)) - x'(0) + 4(p\mathcal{L}(x(t)) - x(0)) + 3\mathcal{L}(x(t)) \\ &= p^2X(p) - px(0) - x'(0) + 4pX(p) - 4x(0) + 3X(p) \\ &= (p^2 + 4p + 3)X(p) - 1.\end{aligned}$$

En remarquant que

$$p^2 + 4p + 3 = (p + 1)(p + 3),$$

on obtient l'équation suivante, donnant l'expression de  $X(p)$  en fonction de  $p$  :

$$(p^2 + 4p + 3)X(p) - 1 = \frac{2}{p + 2} \Rightarrow X(p) = \frac{2}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)} + \frac{1}{(p + 1)(p + 3)}$$

Une décomposition en élément simples de chaque fraction rationnelle en  $p$  donne :

$$\begin{aligned}\frac{2}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)} &= \frac{1}{p + 1} - \frac{2}{p + 2} + \frac{1}{p + 3} \\ \frac{1}{(p + 1)(p + 3)} &= \frac{1/2}{p + 1} - \frac{1/2}{p + 3}\end{aligned}$$

Autrement dit, il vient,

$$X(p) = -\frac{2}{p + 2} + \frac{3/2}{p + 1} + \frac{1/2}{p + 3}$$

Reste à déterminer la transformée inverse de cette expression, par linéarité on sait que :

$$x(t) = -2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 2}\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + 3}\right)$$

On a déjà établi que la transformée de Laplace de  $e^{-at}$  est  $\frac{1}{(p+\alpha)}$ , la solution est donc finalement

$$x(t) = -2e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

On vérifie aisément que la solution trouvée satisfait les conditions initiales.

## 4. Table des transformées de Laplace :

$x(t)$	$\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$
$\delta(t)$ impulsion unitaire	1
$\Gamma(t)$ échelon unitaire	$\frac{1}{p}$
$t$ (rampe unitaire)	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
$x(t - \tau)$ (retard)	$e^{-p\tau}X(p)$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
$\frac{1}{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \right)$	$\frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)}$
$\frac{\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{p}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
$1 - (\alpha t + 1)e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha^2}{p(p + \alpha)^2}$
$(1 + (\beta - \alpha)t)e^{-\alpha t}$	$\frac{p + \beta}{(p + \alpha)^2}$

## Annexe : (un peu de physique)

Revenons sur l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = d \cos \omega t$$

où  $a > 0, b \geq 0, c > 0, d \geq 0$ , et  $y$  une fonction de  $t$ . Ce type d'équation intervient dans un grand nombre de phénomènes physiques, où  $t$  représente le temps, en particulier en mécanique et en électrodynamique :

### En mécanique :

Un objet est soumis à une force de frottement opposée à sa vitesse et proportionnelle à celle-ci, à une force de rappel proportionnelle à son déplacement et enfin, à un régime forcé de pulsation  $\omega$ . C'est le cas par exemple pour :

- Le pendule élastique (masse-ressort) :

Masse  $m$ , coefficient de frottement  $f$ , raideur de ressort  $k$ , force imposé de module  $F$ .

L'équation du mouvement est donnée par :

$$mx'' + fx' + kx = F \cos \omega t$$

- Le pendule de torsion :

Moment d'inertie  $J$ , coefficient de frottement  $f$ , couple de rappel  $C$ , couple forcé de module  $G$ .

L'équation du mouvement est donnée par :

$$J\theta'' + f\theta' + C\theta = G \cos \omega t$$

- Le pendule simple :

Masse au bout d'un fil de longueur  $l$ , dans un champ de gravitation  $g$ , pour des petites oscillations :

L'équation du mouvement est donnée par :

$$l\theta'' + g\theta = 0$$

### En électrodynamique :

Un circuit électrique comprend en série, une résistance  $R$ , une inductance  $L$ , et une capacité  $C$ . il est soumis à une tension périodique  $U$  de pulsation  $\omega$ . La quantité d'électricité  $Q$  traversant un point du circuit vérifie :

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = U \cos \omega t$$

Le cas étudié s'applique dans ces deux situations, ce qui signifie également que tout phénomène mécanique a un équivalent électrique, et inversement.

**1- Equation homogène  $ay'' + by' + cy = 0$** 

Cette équation correspond à un système qui n'est soumis à aucune oscillation forcée. L'équation caractéristique est :

$$ar^2 + br + c = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$  avec  $\delta$  éventuellement imaginaire pur ou nul, les racines sont donc :

$$r_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Si  $b = 0$ , alors  $\delta$  est imaginaire pur et non nul, et les solutions sont des fonctions trigonométriques, sans atténuation de l'amplitude. Nous noterons  $\frac{\delta}{2a} = i\omega_0$ .  $\omega_0$  est appelé pulsation propre d'oscillation du système étudié, avec  $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$ .

Si  $b > 0$ , la partie réelle de  $r_1$  et  $r_2$  est strictement négative car  $b^2 > \delta^2$ . Les solutions sont des combinaisons linéaires d'exponentielles qui tendent vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Si  $\delta$  est imaginaire pur, ce qui se produit lorsque  $b^2 < 4ac$ , les solutions oscillent autour de 0, avec atténuation de l'amplitude.

Dans tous les exemples physiques proposés,  $\frac{b}{a}$  est homogène à l'inverse d'un temps et peut donc être noté  $\frac{1}{\tau}$ . L'équation différentielle prend alors la forme :

$$y'' + \frac{1}{\tau}y' + \omega_0^2 y = 0$$

- Si  $\tau > \frac{1}{2\omega_0}$  le système est faiblement amorti,  $\Delta$  est négatif,  $\delta$  est imaginaire pur.

$r = \frac{1}{2\tau} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$ . Les solutions  $y$  sont combinaison linéaire de  $\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\cos(\omega t)$  et  $\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\sin(\omega t)$ , avec une pulsation  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$  légèrement inférieure à la pulsation propre.

On définit alors le facteur de qualité  $Q$  de l'oscillation par l'expression :

$$Q = 2\pi \frac{E}{W}$$

où  $E$  est l'énergie emmagasinée par l'oscillateur et  $W = |\Delta E|$  l'énergie dissipée au cours d'un cycle. Ces énergies sont, dans le cas mécanique ou électrique, proportionnelles au carré de l'amplitude de  $y$ . Nous donnerons donc une expression de  $Q$  dans le cas général de notre équation différentielle en prenant  $E$  égal à ce carré. Comme  $y(t)$  est de la forme  $y_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\cos(\omega t + \varphi)$  l'amplitude vaut  $y_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$ . Au cours d'un cycle, par exemple

entre les instants  $t = 0$  et  $t = \frac{2\pi}{\omega}$ , l'énergie  $E$  passe de la valeur  $y_0^2$  à  $y_0^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ . Dans le cas où le système est faiblement amorti,  $\frac{1}{\tau}$  est très faible, de sorte que  $W = y_0^2 \frac{1}{\tau} = y_0^2 \frac{2\pi}{\omega\tau}$  et que  $\omega$  est quasiment égal à la fréquence propre de résonance  $\omega_0$ . On a alors :

$$Q = \omega\tau \approx \omega_0\tau$$

L'ordre de grandeur de  $Q$  pour un circuit  $RLC$  est  $\frac{L\omega_0}{R}$ . Pour un oscillateur mécanique, où  $f$  est le coefficient de frottement.

- Le cas limite (appelé amortissement critique) est obtenu lorsque  $\tau = \frac{1}{2\omega_0}$ , pour lequel  $\Delta = 0$ . On a alors  $r = -\frac{1}{2\tau}$ , et  $y$  est combinaison linéaire de  $\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$  et de  $t \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$
- Si  $\tau < \frac{1}{2\omega_0}$ , le système est fortement amorti,  $\Delta$  est positif,  $\delta$  est réel. Il n'y a pas d'oscillation. On a  $r = -\frac{1}{2\tau} \pm i\sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \beta$ .  $y$  est combinaison linéaire de  $\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \exp(\beta t)$ . On préférera parfois prendre le demi-somme et la demi-différence de ces fonctions, faisons intervenir les fonctions trigonométrique *sinus* et *cosinus* hyperbolique, établissant un rapprochement formel avec le premier cas.  $y$  est alors combinaison linéaire de  $\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \operatorname{ch}(\beta t)$  et  $\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \operatorname{sh}(\beta t)$ .

L'amortissement critique correspond aux deux cas limites  $\omega \rightarrow 0$  et  $\beta \rightarrow 0$ .

$\tau$  s'appelle durée de relaxation en énergie. L'énergie est, dans les exemples proposés, proportionnelle à  $y_0^2$ . La durée  $\tau$  donne un ordre de grandeur de la durée au bout de laquelle l'énergie du système a diminué de  $1/e$ .

## 2- Solution particulière avec second membre

Cette équation correspond à un système qui est soumis à une oscillation forcée.

Lorsque  $b > 0$ , il y a toujours une solution particulière avec second membre  $d \exp(i\omega t)$  sous la forme  $y = A \exp(i\omega t)$ , car  $i\omega$  ne peut être solution de l'équation caractéristique. On obtient une solution avec second membre  $d \cos(\omega t)$  en prenant la partie réelle. La solution générale est donc la somme d'une solution périodique de pulsation  $\omega$  et de solutions exponentielles s'annulant en  $+\infty$ . Les solutions exponentielles n'interviennent physiquement que lors de la phase transitoire correspondant à la mise en route du système. La solution périodique correspond, elle, à la solution en régime permanent.

Lorsque  $b = 0$ , la situation est analogue sauf dans un cas, si  $\omega$  est égal à  $\omega_0$ , solution de l'équation caractéristique. Il y a alors une solution particulière avec second membre  $d \exp(i\omega_0 t)$  sous la forme  $y = At \exp(i\omega_0 t)$ . On obtient une solution avec second membre  $d \cos(\omega_0 t)$  en prenant la partie réelle. On dit qu'il y a résonance. Dans ce cas,  $y$  prendra des valeurs arbitrairement grandes.

Cas général	Mécanique	Electricité	
$y$	élongation $x$	charge $Q$	grandeur étudiée
$y'$	vitesse $V$	intensité $I$	dérivée
Le coefficient $a$ s'oppose aux variations de la dérivée par inertie ou auto-induction	masse $m$	inductance $L$	Energie cinétique où magnétostatique : $W = \left(\frac{1}{2}mV^2, \frac{1}{2}LI^2\right)$
Le coefficient $b$ est responsable des pertes d'énergie	frottement $f$	résistance $R$	Puissance de l'effet Joule $P = N^2 = RI^2$
Le coefficient $c$ est celui du phénomène de rappel	raideur $k$	Capacité $C$	Energie potentielle emmagasinée $W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
Durée de relaxation $\tau = \frac{a}{b}$	$\frac{m}{f}$	$\frac{L}{R}$	
Période $T$ à la résonance $\frac{2\pi}{\omega_0}$ Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{c/a}$	$2\pi\sqrt{m/k}$ $\sqrt{k/m}$	$2\pi\sqrt{LC}$ $1/\sqrt{LC}$	
Le coefficient $d$ est celui du moteur du phénomène	force $F$	tension $U$	Résistance = $N$ ou $RI$ Rappel = $kx$ ou $Q/C$
$b = d = 0$ $y = y_0 \cos(\omega t + \varphi)$	pas de frottement pas de force imposée	pas de résistance pas de tension imposée	phénomène périodique non amorti
$b > 0, d = 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$	frottement pas de force imposée	résistance pas de tension imposée	amortissement du phénomène
$b > 0, d > 0$ Solution particulière $y = y_0 \cos(\omega t + \varphi)$	frottement force imposée	résistance tension	régime stationnaire périodique asymptotique
$b = 0, d > 0$ Si $\omega \neq \omega_0$ , alors $y$ est somme de fonctions périodiques de pulsation $\omega$ et $\omega_0$ . Si $\omega = \omega_0$ , il y a résonance	Pas de frottement force imposée	Pas de résistance Tension imposée	

Le phénomène de résonance se produit en général avec un coefficient  $b$  non nul, quoique faible. Il est parfois recherché (enfant sur une balançoire donnant des impulsions à la fréquence propre de la balançoire, antenne en résonance avec une fréquence donnée), parfois évité (utilisation d'amortisseurs).



# Bibliographie

- [1] W. APPEL, Mathématiques pour la physique et les physiciens, 4ème Ed., H&K Edition, Paris, (2008).
- [2] M. FELLAH , Introduction aux fonctions spéciales et à la transformation de Laplace, Office des publications universitaires, Algérie (2013).
- [3] E. BELORIZKY, Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et des ingénieurs, EDP Sciences, Paris, (2007).
- [4] C. ASLANGUL, Des mathématiques pour les sciences, Concepts, méthodes et techniques pour la modélisation, De Boeck, Bruxelles (2011).
- [5] S. NICAISE, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus, Ed. Dunod, Paris, (2000).
- [6] A. TRITIAK. Cours équations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie (1981).
- [7] M. NADIR. Cours équations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie (2004).
- [8] M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO. Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir (1978).
- [9] X. MEYER Equations aux dérivées partielles, Cours et exercices corrigés, INPT-ENSIACET, Toulouse, France (2005).
- [10] B. Bekka, Suites et séries de fonctions , Cours L3 Rennes (2014).