Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Cas des équations d'ordre 1 et 2

Cours de : Martine Arrou-Vignod
Médiatisation : Johan Millaud

Département RT de l'IUT de Vélizy

Mai 2007

Table des matières

Chapitre I

Avant-Propos

I.1 Navigation dans le cours

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.1 LaTeX et PolyTeX

Cette ressource a été conçue à l'aide du traitement de texte LaTeX et de la chaîne éditoriale PolyTeX.

LaTeX est certainement le traitement de texte le plus performant quand il s'agit d'écrire des mathématiques. On peut se le procurer gratuitement par l'intermédiaire de diverses distributions. Sous Windows, c'est la distribution MikTeX qui est la mieux adaptée en vue d'une utilisation conjointe avec la chaîne éditoriale Polytex. On trouvera toutes les informations nécessaires à propos de cette distribution à l'URL :

http ://www.miktex.org

PolyTeX est une chaîne éditoriale de production permettant de produire des cours matérialisés sur des supports électroniques (écran) ou physiques (papier). Elle est téléchargeable à l'URL :

http ://www.lmac.utc.fr/polytex/

Les cours électroniques produits à l'aide de PolyTeX intègrent différents systèmes de navigation que l'on va détailler dans les paragraphes suivants.

I.1.2 Configuration d'Adobe (Acrobat) Reader

Le cours électronique produit par PolyTEX est un document au format *pdf* visualisable au moyen du logiciel Adobe (Acrobat) Reader.

Configuration du logiciel : pour que la navigation avec les liens actifs soit adaptée au format du document, sélectionnez, dans le menu *Affichage* les options *page entière* et *une seule page* (dans le sous-menu *Disposition* à partir de la version 6 d'Acrobat Reader).
On peut également optimiser le confort de lecture en sélectionnant l'option *Plein écran* du menu *Fenêtre* (version 6 ou plus d'Acrobat Reader) ou du menu *Affichage* (version 5 d'Acrobat Reader).

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 La barre de navigation

Exceptées la page de titre et les tables des matières, toutes les pages comportent un bandeau horizontal avec des liens permettant d'accéder aux unités logiques (grain, section ou chapitre) suivante et précédente, et à l'unité hierarchique de niveau supérieur.

Ainsi, sur la présente page, le lien "◄ précédent" permet de revenir au grain sur les objectifs de la section, et le lien "suivant ►" mène au grain sur le système de renvois.

On l'aura compris : un *grain* représente l'élément de base dans la structure hiérarchique du cours ; une section est composée de plusieurs grains, tandis que plusieurs sections forment un chapitre. Les grains s'enchaînent de manière linéaire : il faut donc utiliser les liens "◄ précédent" et "suivant ►" pour aborder les nouvelles notions dans l'ordre logique. **Chaque grain correspond à une, voire deux, notion(s) nouvelle(s)**. Par souci de lisibilité, la taille d'un grain devrait dans l'idéal se limiter à une page-écran et ne devrait jamais excéder deux pages : on passe d'une page d'un grain à une autre en cliquant sur les triangles doubles ◄◄ et ►► situés en bas de page (si le grain ne tient pas sur une seule page).

Le lien "▲ section" renvoie au sommaire de la section sur la navigation dans la ressource. On utilise ce type de lien notamment lorsqu'on arrive en fin de section ou de chapitre afin de pouvoir accéder ensuite au sommaire de la section ou du chapitre suivant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.1.4 Le système de renvois

Exemples :
Exemple A.1

Exercices :
Exercice B.1

Documents :
Document C.1.1

On vient de signaler que les éléments de cours, ou grains, se suivaient de manière linéaire et introduisaient chacun au maximum deux notions nouvelles. Pour bien comprendre ces notions et les assimiler, le grain peut être associé à un (ou des) exemple(s) et à un (ou des) exercice(s). Pour y accéder, on dispose de renvois situés sur la première page du grain juste après le titre. On trouve le même type de renvois en début d'exemple et d'exercice afin de permettre des aller-retours rapides entre ces différents paragraphes.

Ainsi, en cliquant sur le renvoi "Exemple A.1" ci-dessus, on accède à une page d'exemple d'où l'on peut, soit revenir au grain de cours actuel, soit accéder à l'exercice "Exercice B.1" associé.

Les paragraphes introductifs de chaque notion sont donc organisés de manière triangulaire. On doit aborder une notion en lisant tout d'abord les explications théoriques données dans le grain de cours, puis en considérant le (ou les) exemple(s) associé(s) et, finalement, en réalisant le (ou les) exercice(s) d'application proposé(s). Le système de renvois permet de revenir en arrière à n'importe quel moment de cette progression.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Si malgré tout, on se perd dans la lecture de la ressource, il est possible de retrouver son chemin grâce au menu de navigation globale qu'on va détailler dans le grain suivant.

Par ailleurs, on peut également faire figurer dans la zone de renvois un lien vers un "document" : la partie *Documents* d'un fichier généré avec PolyTEX comporte tout ce qui n'est ni un paragraphe de cours indispensable en première lecture, ni un exemple, ni un exercice. On peut y placer par exemple des remarques d'approfondissement sur ce qui a été écrit dans la partie cours, les solutions des exercices proposés...
Ainsi, en cliquant sur le renvoi "Document C.1" ci-dessus, on accède à une page donnant des informations complémentaires sur PolyTEX.

I.1.5 Le menu de navigation

La liste de liens actifs située dans le coin inférieur droit constitue ce que l'on appelle le menu de navigation.

Il permet à tout moment d'accéder au sommaire général ou aux sommaires des exemples et des exercices. On remarque aussi la présence d'un lien intitulé "Documents" : il permet de basculer vers des documents d'approndissement et d'illustration du cours.

Les liens "Concepts" et "Notions" conduisent à des index regroupant tous les concepts et notions définis dans le cours. Ces index permettent d'accéder rapidement aux grains, exemples et exercices associés à un concept ou une notion donnés. On ne fait pas une grande distinction entre concept et notion : techniquement, PolyTEX associe à chaque grain un seul et unique *concept canonique* qui apparaît dans l'index des concepts, donc si d'autres notions importantes figurent dans le même grain, on les déclare comme des notions. Par exemple, ce grain a pour but premier de présenter le menu de navigation : on pourra donc accéder directement à ce grain depuis l'index des concepts par l'entrée "Menu de navigation". Mais on a aussi défini la notion de *concept canonique*, donc l'auteur a choisi de rajouter une entrée "Concept canonique" dans l'index des notions pour pouvoir accéder à cette définition sans avoir à faire une recherche laborieuse pour trouver la page qui la contient...

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2 Présentation générale de la ressource

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.1 Objectifs du cours

Dans ce cours, on introduit la notion d'équation différentielle, et on donne une méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier et du second ordre.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.2 Pré-requis

Avant d'aborder ce cours, il faut être capable de :

– dériver des fonctions réelles "simples"

– intégrer des fonctions réelles "simples"

– faire une intégration par parties

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.2.3 Limites du cours

Ce cours se limite à l'étude et à la résolution des équations différentielles linéaires **à coefficients constants du premier et du second ordre**. On n'étudie pas ici la résolution :

- des équations différentielles linéaires à coefficients non constants
- des équations différentielles non linéaires
- des équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 3

Ces équations feront l'objet d'un autre cours.

I.2.4 Transversalité

Les équations différentielles se rencontrent dans bon nombre de domaines scientifiques.

Par exemple, ce cours donne les outils nécessaires à la résolution, en électronique, des équations différentielles caractérisant le régime transitoire des circuits linéaires. Dans ce domaine, la méthode de résolution avec recherche d'une solution particulère est privilégiée à la méthode de variation de la constante. Par ailleurs, on peut aussi utiliser la transformée de Laplace pour résoudre des équations différentielles linéaires, mais on n'aborde pas cette méthode ici.

Chapitre II
Equations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre

II.1 Vocabulaire – Définitions

II.1.1 Objectifs du chapitre et de la section

Dans ce chapitre, on va étudier la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.
On commence donc dans cette première section par préciser la signification des termes :

- Equation différentielle **du premier ordre**
- Equation différentielle **linéaire** du premier ordre
- Equation différentielle linéaire du premier ordre **à coefficients constants**
- **Résoudre** une équation différentielle du premier ordre

II.1.2 Equation différentielle du premier ordre

On appelle équation différentielle *du premier ordre* toute relation entre :

– une variable x
– une fonction de x notée $y(x)$
– la dérivée première de cette fonction : $y'(x)$

Exemple :

$$3x\,y(x)y'(x) - y^2(x) - x^2 = 4x$$

est une équation différentielle du premier ordre.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.1.3 Equation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle équation différentielle *linéaire* du premier ordre une équation diférentielle de la forme :

$$\boldsymbol{a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)}$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues de x et où $y(x)$ est la fonction de x à déterminer.

Exemple 1 :

$$3x^2y'(x) - \ln(x)\, y(x) = e^x$$

est une équation différentielle linéaire.

Exemple 2 :

$$x^2y'(x) - y^2(x) = x^2$$

n'est pas une équation différentielle linéaire.

Notation : on notera par la suite en abrégé "*EDL1*" l'expression "Equation Différentielle Linéaire du premier ordre".

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.1.4 EDL1 à coefficients constants

On appelle équation différentielle *linéaire du premier ordre à coefficients constants* une équation différentielle linéaire du premier ordre telle que $a(x)$ et $b(x)$ soient des constantes :

$$\boldsymbol{a y'(x) + b y(x) = f(x)} \qquad \text{avec } \boldsymbol{a \neq 0}$$

Notation : on utilisera par la suite le sigle "*EDL1CC*" pour désigner une Equation Différentielle Linéaire du premier ordre à Coefficients Constants.

Exemple :

$$3y'(x) + 4y(x) = 5x^2 - 4$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.1.5 Résoudre une équation différentielle

Résoudre ou *Intégrer* une équation différentielle du premier ordre, c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient la relation caractérisant cette équation et préciser sur quel(s) intervalle(s) la résolution est valide.

Dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants, ce(s) intervalle(s) corresponde(nt) à (aux) intervalle(s) sur le(s)quel(s) le second membre $f(x)$ est défini.

Par la suite, on ne précisera le (ou les) intervalle(s) en question que dans les cas où il(s) est (sont) différent(s) de $\mathbb{R}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.2 Résolution d'une EDL1 à coefficients constants

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.2.1 Equation sans second membre

On appelle équation sans second membre associée à $ay'(x) + by(x) = f(x)$, l'équation :

$$\boldsymbol{ay'(x) + by(x) = 0}$$

Notation : par la suite, pour alléger les écritures, on notera

- y au lieu de $y(x)$
- y' au lieu de $y'(x)$
- et donc $ay' + by = 0$ l'équation sans second membre associée à l'EDL1 à coefficients constants $ay'(x) + by(x) = f(x)$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.2.2 Résolution de l'équation sans second membre

Exemples :
Exemple A.2

On résout ici l'équation sans second membre $ay' + by = 0$:

a) On remarque tout d'abord que $y = 0$ est une solution évidente de l'équation différentielle.

b) Pour $y \neq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
ay' + by = 0 &\iff \frac{y'}{y} = \frac{-b}{a} \\
&\iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{-b}{a}\,\mathrm{d}x \quad \text{(méthode de séparation des variables)} \\
&\iff \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{-b}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{-b}{a}\int \mathrm{d}x \\
&\iff \ln(\,|y|\,) = \frac{-b}{a}x + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R} \\
&\iff |y| = e^C\, e^{-\frac{b}{a}x} \\
&\iff y = \pm e^C\, e^{-\frac{b}{a}x} \\
&\iff y(x) = k\, e^{-\frac{b}{a}x} \qquad \text{en posant} k = \pm e^C \\
&(k \text{ est donc un réel quelconque non nul})
\end{aligned}
$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

En tenant compte des solutions trouvées en a) et en b), on en déduit que **la solution de l'équation différentielle sans second membre est :**

$$\boldsymbol{y(x) = k\, e^{-\frac{b}{a}x}} \qquad \textbf{avec } \boldsymbol{k \in \mathbb{R}}$$

On voit que l'on a une infinité de solutions pour $y(x)$, chaque solution correspondant à un k différent.
On obtiendra donc un faisceau de courbes, chaque courbe correspondant à une valeur de k.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.2.3 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème : la solution générale $y(x)$ de l'équation $ay'(x) + by(x) = f(x)$ est la somme $\boldsymbol{y(x) = y_s(x) + y_p(x)}$ où :

- $\boldsymbol{y_s(x)}$ est la solution générale de l'équation $ay'(x) + by(x) = 0$ (dite sans second membre)
- et $\boldsymbol{y_p(x)}$ est une solution particulière de l'équation $ay'(x) + by(x) = f(x)$ (dite avec second membre)

Démonstration : soit $y(x)$ la solution générale de l'équation avec second membre ; alors $y(x)$ vérifie

$$ay'(x) + by(x) = f(x) \qquad (1)$$

Soit $y_p(x)$ une solution particulière de l'équation avec second membre ; alors $y_p(x)$ vérifie

$$ay_p'(x) + by_p(x) = f(x) \qquad (2)$$

En faisant $(1) - (2)$, on obtient :

$$a\left[y'(x) - y_p'(x)\right] + b\left[y(x) - y_p(x)\right] = 0$$

$y(x) - y_p(x)$ est donc la solution générale de l'équation sans second membre que nous avons appelée $y_s(x)$, or :

$$y_s(x) = y(x) - y_p(x) \Longleftrightarrow y(x) = y_s(x) + y_p(x)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.2.4 Solution particulière d'une EDL1CC ayant un second membre usuel

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4
Exemple A.5
Exemple A.6

Exercices :
Exercice B.2
Exercice B.3
Exercice B.4

Propriété (admise) : quand le second membre $f(x)$ d'une EDL1CC se présente sous l'une des formes usuelles recensées plus bas, alors cette équation différentielle admet une solution particulière $y_p(x)$ de la même "forme" que le second membre $f(x)$. Plus précisément :

second membre	solution particulière
$\boldsymbol{f(x) = C}$ où C est une constante	si $b \neq 0$, une solution particulière sera $\boldsymbol{y_p(x) = \frac{C}{b}}$
	et si $b = 0$, une solution particulière sera $\boldsymbol{y_p(x) = \frac{C}{a} x}$
justification	

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

second membre	solution particulière
$\boldsymbol{f(x) = P(x)}$ où P est un polynôme de degré n avec $n \in \mathbb{N}^*$	On cherche une solution sous la forme $\boldsymbol{y_p(x) = Q(x)}$ où Q est un polynôme tel que :
	si $b \neq 0$, alors $\deg(Q) = n$
	si $b = 0$, alors $\deg(Q) = n + 1$ et $\mathrm{val}(Q) = 1$
justification	

second membre	solution particulière
$\boldsymbol{f(x) = P(x)\, e^{sx}}$ où P est un polynôme de degré n et s est un réel	On cherche une solution sous la forme $\boldsymbol{y_p(x) = Q(x)\, e^{sx}}$ où Q est un polynôme tel que :
	si $s \neq -\frac{b}{a}$, alors $\deg(Q) = n$
	si $s = -\frac{b}{a}$, alors $\deg(Q) = n+1$ et $\mathrm{val}(Q) = 1$
justification	

second membre	solution particulière
$\boldsymbol{f(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi)}$ où ω est une réel non-nul	On cherche une solution sous la forme : $\boldsymbol{y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)}$
justification	

Pour un rappel sur la notion de valuation

Solution particulière d'une EDL1CC ayant un second membre usuel

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.2.5 Méthode de la variation de la constante

Exemples :
Exemple A.7

Exercices :
Exercice B.5

On s'intéresse toujours à une EDL1CC qu'on note (ε) :

$$(\varepsilon) \quad ay'(x) + by(x) = 0$$

Lorsque le second membre $f(x)$ d'une EDL1CC ne correspond à aucun des seconds membres usuels identifiés précédemment et donc ne permet pas de connaître la forme d'une solution particulière, on utilise la méthode dite de variation de la constante.

- Pour cela, on résout tout d'abord l'équation sans second membre associée comme on l'a vu précédemment : on obtient la solution générale $y_s(x) = k\, e^{\frac{-b}{a}x}$ où k est une constante réelle.
- Puis, on fait comme si k était une fonction de x, en cherchant à quelle condition la fonction $y(x) = k(x)\, e^{\frac{-b}{a}x}$ est solution de l'équation (ε). On dérive donc $y(x)$:

$$y'(x) = k'(x)\, e^{\frac{-b}{a}x} - \frac{b}{a}k(x)\, e^{\frac{-b}{a}x}$$

On remplace alors les expressions de $y(x)$ et $y'(x)$ dans (ε) :

$$a\left(k'(x)\, e^{\frac{-b}{a}x} - \frac{b}{a}k(x)\, e^{\frac{-b}{a}x}\right) + b\, k(x)\, e^{\frac{-b}{a}x} = f(x)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Après simplification, on obtient :

$$a\,k'(x)\,e^{\frac{-b}{a}x} = f(x) \Longleftrightarrow k'(x) = \frac{f(x)}{a}\,e^{\frac{b}{a}x}$$

En intégrant cette dernière relation, on trouve l'expression de $k(x)$ qu'on peut remplacer dans celle de $y(x)$ pour en déduire la solution générale de l'équation avec second membre (ε) .

Remarque : la méthode de la variation de la constante n'est pratique que lorsqu'on ne connaît pas la forme d'une solution particulière de l'équation proposée. En effet, elle est en général plus longue à mettre en oeuvre que celle qu'on a vue précédemment pour les seconds membres usuels.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre III
Equations différentielles linéaires à coefficients constants du second ordre

III.1 Vocabulaire – Définitions

III.1.1 Objectifs du chapitre et de la section

Dans ce chapitre, on va étudier la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
On commence donc dans cette première section par préciser la signification des termes :

- Equation différentielle **du second ordre**
- Equation différentielle **linéaire** du second ordre
- Equation différentielle linéaire du second ordre **à coefficients constants**
- **Résoudre** une équation différentielle du second ordre

III.1.2 Equation différentielle du second ordre

On appelle équation différentielle *du second ordre* toute relation entre :

- une variable x
- une fonction de x notée $y(x)$
- la dérivée première de cette fonction : $y'(x)$
- la dérivée seconde de cette fonction : $y''(x)$

Exemple :

$$y(x)y''(x) - y'(x)y^3(x) - x^2 = \ln x$$

est une équation différentielle du second ordre.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.1.3 Equation différentielle linéaire du second ordre

On appelle équation différentielle *linéaire* du second ordre une équation diférentielle de la forme :

$$\boldsymbol{a(x)y"(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)}$$

où $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues de x et où $y(x)$ est la fonction de x à déterminer.

Exemple 1 :

$$3x^2y"(x) - \ln(x)\,y(x) = e^x$$

est une équation différentielle linéaire.

Exemple 2 :

$$3x^2y"(x) - \frac{1}{x}y'(x) - y(x) = e^x$$

est une équation différentielle linéaire.

Exemple 3 :

$$x^2y"(x) + y'(x) - y^2(x) = x^2$$

est une équation différentielle linéaire.

Notation : on notera par la suite en abrégé "*EDL2*" l'expression "Equation Différentielle Linéaire du second ordre".

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.1.4 EDL2 à coefficients constants

On appelle équation différentielle *linéaire du second ordre à coefficients constants* une équation différentielle linéaire du second ordre telle que $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ soient des constantes :

$$\boldsymbol{ay"(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)} \qquad \text{avec } \boldsymbol{a \neq 0}$$

Notation : on utilisera par la suite le sigle "*EDL2CC*" pour désigner une Equation Différentielle Linéaire du second ordre à Coefficients Constants.

Exemple :

$$3y"(x) - 2y'(x) + 4y(x) = x - 2$$

est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.1.5 Résoudre une équation différentielle

Résoudre ou *Intégrer* une équation différentielle du second ordre, c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient la relation caractérisant cette équation et préciser sur quel(s) intervalle(s) la résolution est valide.

Dans le cas des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, ce(s) intervalle(s) corresponde(nt) à (aux) intervalle(s) sur le(s)quel(s) le second membre $f(x)$ est défini.

Par la suite, on ne précisera le (ou les) intervalle(s) en question que dans les cas où il(s) est (sont) différent(s) de $\mathbb{R}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Résolution d'une EDL2 à coefficients constants

III.2.1 Equation sans second membre

On appelle équation sans second membre associée à $ay"(x)+by'(x)+cy(x) = f(x)$, l'équation :

$$\boldsymbol{ay"(x) + by'(x) + cy(x) = 0}$$

<u>Notation :</u> par la suite, pour alléger les écritures, on notera

- y au lieu de $y(x)$
- y' au lieu de $y'(x)$
- $y"$ au lieu de $y"(x)$
- et donc $ay" + by' + cy = 0$ l'équation sans second membre associée à l'EDL2 à coefficients constants $ay"(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.2.2 Résolution de l'équation sans second membre

Exemples :
Exemple A.8
Exemple A.9
Exemple A.10

On résout ici l'équation sans second membre $ay" + by' + cy = 0$: (ε_H) .

On cherche s'il existe des solutions $y(x)$ ayant la même forme que celles des équations homogène associées aux EDL du premier ordre à coefficient constant, c'est à dire de la forme : $y(x) = e^{rx}$ où r est un coefficient réel .
Pour une telle fonction, on a : $y'(x) = r\,e^{rx}$ et $y"(x) = r^2\,e^{rx}$. En remplaçant dans (ε_H) , on obtient :

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

Et donc r doit être solution de l'équation :

$$ar^2 + br + c = 0$$

dite *équation caractéristique* associée à (ε_H) .

La solution générale $y_s(x)$ de l'équation sans second membre (ε_H) dépend alors de la valeur des racines de cette équation caractéristique selon le théorème suivant.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Résolution de l'équation sans second membre

Théorème (admis) :

– Si les racines de l'équation caractéristique $\boldsymbol{r_1}$ **et** $\boldsymbol{r_2}$ **sont réelles et distinctes**, alors la solution $y_s(x)$ de l'équation sans second membre est :

$$\boldsymbol{y_s(x) = A\,e^{r_1 x} + B\,e^{r_2 x}} \text{ avec } \boldsymbol{A} \text{ et } \boldsymbol{B} \text{ dans } \mathbb{R}$$

– Si les racines de l'équation caractéristique $\boldsymbol{r_1}$ **et** $\boldsymbol{r_2}$ **sont réelles et confondues** $\boldsymbol{(r_1 = r_2)}$, alors la solution $y_s(x)$ de l'équation sans second membre est :

$$\boldsymbol{y_s(x) = (Ax + B)\,e^{r_1 x}} \text{ avec } \boldsymbol{A} \text{ et } \boldsymbol{B} \text{ dans } \mathbb{R}$$

– Si les racines de l'équation caractéristique $\boldsymbol{r_1}$ **et** $\boldsymbol{r_2}$ **sont complexes et conjuguées** $\boldsymbol{(r_1 = \alpha + j\beta}$ **et** $\boldsymbol{r_2 = \alpha - j\beta}$ **où** $\boldsymbol{j}$ **est le nombre complexe tel que** $\boldsymbol{j^2 = -1)}$, alors la solution $y_s(x)$ de l'équation sans second membre est :

$$\boldsymbol{y_s(x) = \big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big)\,e^{\alpha x}} \text{ avec } \boldsymbol{A} \text{ et } \boldsymbol{B} \text{ dans } \mathbb{R}$$

III.2.3 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème : la solution générale $y(x)$ de l'équation $ay"(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ est la somme $\boldsymbol{y(x) = y_s(x) + y_p(x)}$ où :

- $\boldsymbol{y_s(x)}$ est la solution générale de l'équation $ay"(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ (dite sans second membre)
- et $\boldsymbol{y_p(x)}$ est une solution particulière de l'équation $ay"(x)+by'(x)+cy(x) = f(x)$ (dite avec second membre)

Démonstration : soit $y(x)$ la solution générale de l'équation avec second membre ; alors $y(x)$ vérifie

$$ay"(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \qquad (1)$$

Soit $y_p(x)$ une solution particulière de l'équation avec second membre ; alors $y_p(x)$ vérifie

$$ay"_p(x) + by'_p(x) + cy_p(x) = f(x) \qquad (2)$$

En faisant $(1) - (2)$, on obtient :

$$a\left[y"(x) - y"_p(x)\right] + b\left[y'(x) - y'_p(x)\right] + c\left[y(x) - y_p(x)\right] = 0$$

$y(x) - y_p(x)$ est donc la solution générale de l'équation sans second membre que nous avons appelée $y_s(x)$, or :

$$y_s(x) = y(x) - y_p(x) \Longleftrightarrow y(x) = y_s(x) + y_p(x)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.2.4 Solution particulière d'une EDL2CC ayant un second membre usuel

Exemples :
Exemple A.11
Exemple A.12
Exemple A.13

Exercices :
Exercice B.6
Exercice B.7
Exercice B.8
Exercice B.9

Propriété (admise) : quand le second membre $f(x)$ d'une EDL2CC se présente sous l'une des formes usuelles recensées plus bas, alors cette équation différentielle admet une solution particulière $y_p(x)$ de la même "forme" que le second membre $f(x)$. Plus précisément :

<table>
<tr><th>second membre</th><th>solution particulière</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$\boldsymbol{f(x) = P(x)}$
où P est un polynôme de degré n
avec $n \in \mathbb{N}$</td><td>On cherche une solution sous la forme
$\boldsymbol{y_p(x) = Q(x)}$
où Q est un polynôme tel que :</td></tr>
<tr><td>si $c \neq 0$, alors $\deg(Q) = n$</td></tr>
<tr><td>si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors $\deg(Q) = n + 1$ et $\mathrm{val}(Q) = 1$</td></tr>
<tr><td>si $c = 0$ et $b = 0$, alors $\deg(Q) = n + 2$ et $\mathrm{val}(Q) = 2$</td></tr>
</table>

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

second membre	solution particulière
$\boldsymbol{f(x) = P(x)\, e^{sx}}$ où P est un polynôme de degré n et s est un réel	On cherche une solution sous la forme $$\boldsymbol{y_p(x) = Q(x)\, e^{sx}}$$ où Q est un polynôme tel que :
	si s n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $\deg(Q) = n$
	si s est racine simple de l'équation caractéristique, alors $\deg(Q) = n + 1$ et $\mathrm{val}(Q) = 1$
	si s est racine double de l'équation caractéristique, alors $\deg(Q) = n + 2$ et $\mathrm{val}(Q) = 2$

second membre	solution particulière
$\boldsymbol{f(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi)}$ où ω est un réel non-nul	Si $j\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme : $\boldsymbol{y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)}$
	Si $j\omega$ est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme : $\boldsymbol{y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)}$

Pour un rappel sur la notion de valuation

Solution particulière d'une EDL2CC ayant un second membre usuel

Chapitre IV
Un peu d'entraînement

IV.1 Pour une bonne acquisition

Exercices :
Exercice B.10

Les exercices proposés jusqu'ici ne suffisent pas forcément à faire du lecteur un spécialiste de la résolution des équations différentielles à coefficients constants du premier et du second ordre.

Pour acquérir une grande aisance et des automatismes dans ce type de problème, il n'y a pas de secret : il faut s'entraîner. Voilà pourquoi vous trouverez une douzaine d'équations à résoudre dans le dernier exercice de cette ressource (cf. lien ci-dessus).

Par ailleurs, vous trouverez sur le site d'IUTenLigne, une ressource constituée de Questionnaires à Choix Multiples vous permettant de vérifier la bonne acquisition des principaux résultats exposés dans la présente ressource.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exemples

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exercices :
Exercice B.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi ”Exemple A.1” depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi ”Exemple A.1” de l’exercice B.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l’un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2 Résolution d'une EDL1 à coefficients constants sans second membre

Cours :
Résolution de l'équation sans second membre d'une EDL1

Illustrons la méthode de résolution du cours avec l'équation :

$$y'(x) - 2y(x) = 0$$

Si y n'est pas la solution évidente $y = 0$, alors on a les équivalences :

$$\begin{aligned} y' - 2y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \ln(\,|y|\,) = 2x + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow y = \pm e^{C}\, e^{2x} \\ &\Longleftrightarrow y(x) = ke^{2x} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

En prenant en compte la solution évidente $y = 0$, on en déduit que la solution de l'équation différentielle $y'(x) - 2y(x) = 0$ est :

$$y(x) = ke^{2x} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Les courbes représentant cette solution pour des valeurs de k entières et comprises entre -4 et 4 sont :

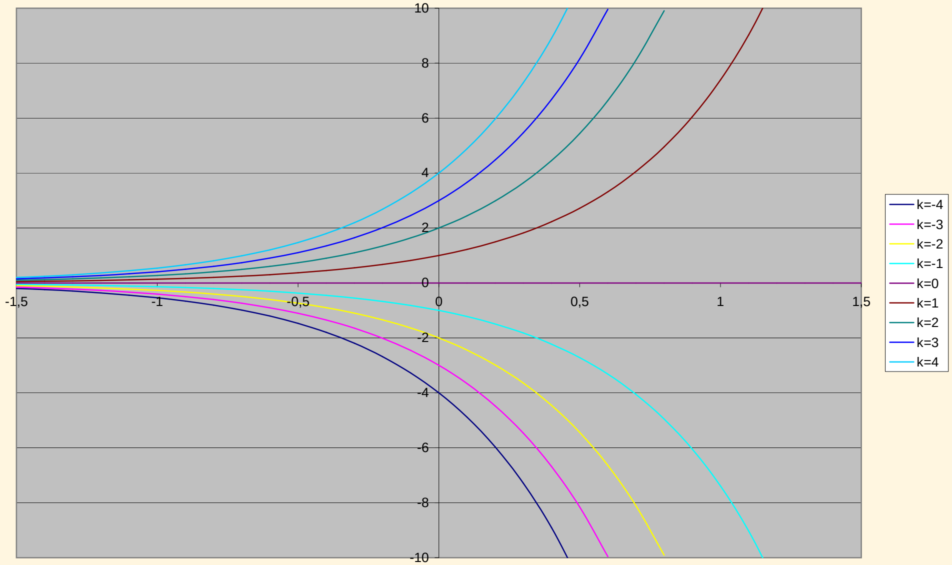


Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3 Résolution d'une EDL1CC avec second membre polynômial

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.4
Exemple A.5
Exemple A.6

On résout dans cet exemple l'équation différentielle : $(\varepsilon) \qquad y'(x)+2y(x) = 2x+1$

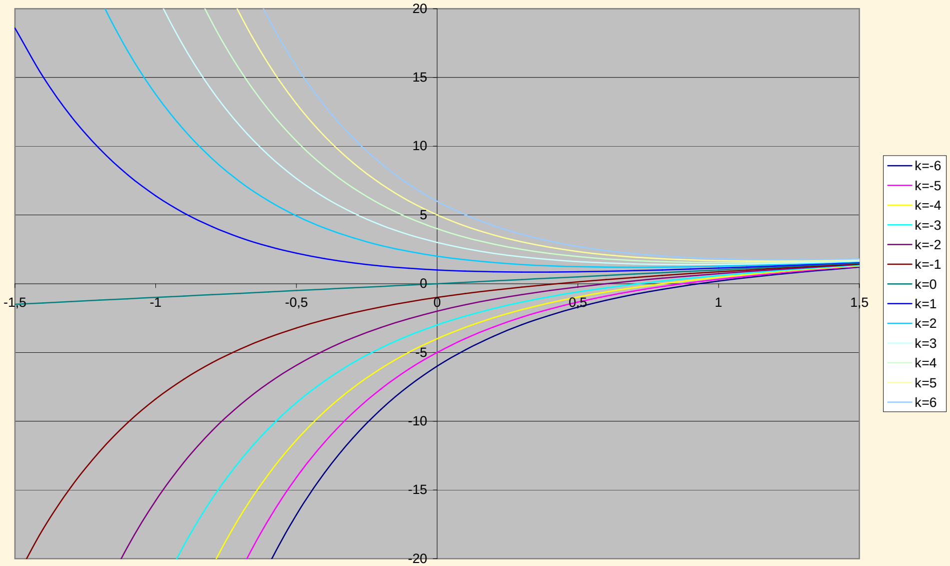
1. Résolution de l'équation sans second membre : $y'(x)+2y(x) = 0$ admet comme solution $y_s(x) = k\,e^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Recherche d'une solution particulière : le second membre est un polynôme de degré 1, donc on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré, c'est à dire $y_p(x) = ax+b$.
   On a : $y_p'(x) = a$ et en remplaçant dans (ε) :
   $$a+2(ax+b) = 2x+1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ a+2b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$
   D'où : $y_p(x) = x$.
3. Solution générale de l'équation avec second membre :
   $$y(x) = y_s(x)+y_p(x) = k\,e^{-2x}+x \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3
Résolution d'une EDL1CC avec second membre polynômial

Les courbes représentant la solution générale précédente pour des valeurs de k entières et comprises entre -6 et 6 sont :



Remarque : k peut être déterminé à l'aide de conditions initiales. Il n'existe par exemple qu'une seule fonction solution de (ε) et vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$. En effet, cette condition se traduit par :

$$y(0) = k\, e^{-2\times 0} + 0 \Longleftrightarrow k = 1$$

Ainsi, $y(x) = e^{-2x} + x$ est la solution de l'équation $y'(x) + 2y(x) = 2x + 1$ vérifiant la condition $y(0) = 1$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4 Résolution d'une EDL1CC avec second membre trigonométrique

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.5
Exemple A.6

On résout dans cet exemple l'équation différentielle : $(\varepsilon) \qquad y'(t)-4y(t)=\cos(3t)$ vérifiant la condition $y(0)=0$.

1. Résolution de l'équation sans second membre : $y'(t)-4y(t)=0$ admet comme solution $y_s(t)=k\,e^{4t}$ avec $k\in\mathbb{R}$.
2. Recherche d'une solution particulière : le second membre est une fonction trigonométrique de période $T=\frac{2\pi}{3}$, donc on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction trigonométrique de même période mais d'amplitude et de phase éventuellement différentes, c'est à dire $y_p(t)=A\cos(3t)+B\sin(3t)$.
   On a : $y_p'(t)=-3A\sin(3t)+3B\cos(3t)$ et en remplaçant dans (ε) :
   $$-3A\sin(3t)+3B\cos(3t)+4\times[A\cos(3t)+B\sin(3t)]=\cos(3t)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Par identification, on en déduit :

$$\begin{cases} -3A+4B=0 \\ 4A+3B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{-4}{25} \\ b=\frac{3}{25} \end{cases}$$

D'où : $y_p(t)=\frac{-4}{25}\cos(3t)+\frac{3}{25}\sin(3t)\,.$

3. Solution générale de l'équation avec second membre :

$$y(t)=y_s(t)+y_p(t)=k\,e^{4t}-\frac{4}{25}\cos(3t)+\frac{3}{25}\sin(3t) \text{ avec } k\in\mathbb{R}$$

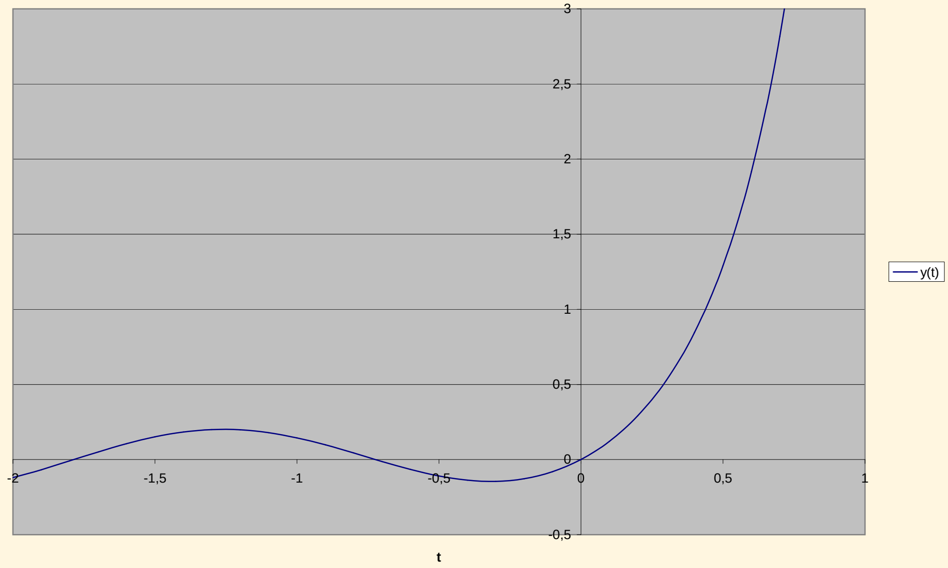
4. Solution vérifiant la condition initiale :

$$y(0)=0 \iff k-\frac{4}{25}=0 \iff k=\frac{4}{25}$$

Ainsi : $y(t)=\frac{4}{25}\,e^{4t}-\frac{4}{25}\cos(3t)+\frac{3}{25}\sin(3t)\,.$

La courbe représentant la solution précédente est :

Exemple A.4
Résolution d'une EDL1CC avec second membre trigonométrique



Exemple A.4
Résolution d'une EDL1CC avec second membre trigonométrique

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5 Résolution d'une EDL1CC avec second membre exponentiel – Cas 1

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4
Exemple A.6

On résout ici l'équation différentielle : (ε) $2y'(t) + 4y(t) = (t^2 + t + 1)e^{-t}$ vérifiant la condition $y(0) = 2$.

1. Résolution de l'équation sans second membre : $2y'(t) + 4y(t) = 0$ admet comme solution $y_s(t) = k\,e^{-2t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Recherche d'une solution particulière : le second membre est de la forme $f(t) = P(t)\,e^{st}$ avec P de degré 2 et $s = -1 \neq -2 = \frac{b}{a}$, donc on cherche une solution particulière sous la forme du produit d'un polynôme de degré 2 et de la même fonction exponentielle, c'est à dire $y_p(t) = (at^2 + bt + c)e^{-t}$.
   On a : $y_p'(t) = (2at + b)e^{-t} - (at^2 + bt + c)e^{-t}$ et en remplaçant dans (ε) :

$$2[(2at + b)e^{-t} - (at^2 + bt + c)e^{-t}] + 4(at^2 + bt + c)e^{-t} = (t^2 + t + 1)e^{-t}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C'est à dire :

$$[4at + 2b + 2(at^2 + bt + c)]e^{-t} = (t^2 + t + 1)e^{-t}$$

Par identification, on en déduit :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + 2b = 1 \\ 2b + 2c = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

D'où : $y_p(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + 1\right) e^{-t}$.

3. Solution générale de l'équation avec second membre :

$$y(t) = y_s(t) + y_p(t) = k\, e^{-2t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + 1\right) e^{-t} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

4. Solution vérifiant la condition initiale :

$$y(0) = 2 \Longleftrightarrow k + 1 = 2 \Longleftrightarrow k = 1$$

Ainsi : $y(t) = e^{-2t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + 1\right) e^{-t}$.

Exemple A.5
Résolution d'une EDL1CC avec second membre exponentiel – Cas 1

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.6 Résolution d'une EDL1CC avec second membre exponentiel – Cas 2

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4
Exemple A.5

Exercices :
Exercice B.2
Exercice B.3
Exercice B.4

On résout ici l'équation différentielle : (ε) $2y'(t) + 2y(t) = (t^2 + t + 1)e^{-t}$ vérifiant la condition $y(0) = 2$.

1. Résolution de l'équation sans second membre : $2y'(t) + 2y(t) = 0$ admet comme solution $y_s(t) = k\,e^{-t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Recherche d'une solution particulière : le second membre est de la forme $f(t) = P(t)\,e^{st}$ avec P de degré 2 et $s = -1 = \frac{b}{a}$, donc on cherche une solution particulière sous la forme du produit de la même fonction exponentielle et d'un polynôme de degré $2 + 1 = 3$ et de valuation 1, c'est à dire $y_p(t) = (at^3 + bt^2 + ct)e^{-t}$.
   On a : $y_p'(t) = (3at^2 + 2bt + c)e^{-t} - (at^3 + bt^2 + ct)e^{-t}$ et en remplaçant dans (ε) :

   $$2[(3at^2 + 2bt + c)e^{-t} - (at^3 + bt^2 + ct)e^{-t}] + 2(at^3 + bt^2 + ct)e^{-t} = (t^2 + t + 1)e^{-t}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C'est à dire :

$$[6at^2 + 4bt + 2c]e^{-t} = (t^2 + t + 1)e^{-t}$$

Par identification, on en déduit :

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 4b = 1 \\ 2c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où : $y_p(t) = \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\right) e^{-t}$.

3. Solution générale de l'équation avec second membre :

$$y(t) = y_s(t) + y_p(t) = k\, e^{-2t} + \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\right) e^{-t} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

4. Solution vérifiant la condition initiale :

$$y(0) = 2 \iff k = 2 \iff k = 1$$

Ainsi : $y(t) = 2e^{-t} + \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\right) e^{-t}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.7 Méthode de variation de la constante

Cours :
Variation de la constante

Exercices :
Exercice B.5

Illustrons la méthode de variation de la constante avec l'équation :

$$(\varepsilon) \quad y'(x) + y(x) = \frac{1}{x} e^{-x}$$

– Résolution de l'équation sans second membre associée :

$$y'(x) + y(x) = 0 \Longleftrightarrow y_s(x) = k\, e^{-x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

– Méthode de variation de la constante : à partir de la solution $y_s(x)$ précédente, on pose

$$y(x) = k(x)\, e^{-x} \qquad (\star)$$

ce qui donne $y'(x) = k'(x)\, e^{-x} - k(x)\, e^{-x}$. D'où, en remplaçant dans (ε) :

$$\begin{aligned} k'(x)\, e^{-x} - k(x)\, e^{-x} + k(x)\, e^{-x} = \tfrac{1}{x} e^{-x} &\Longleftrightarrow k'(x) = \tfrac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow k(x) = \ln|x| + K \text{ (avec } K \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

En remplaçant dans $(\star)$, on obtient la solution générale de l'équation (ε) :

$$y(x) = \ln|x| \times e^{-x} + K\, e^{-x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

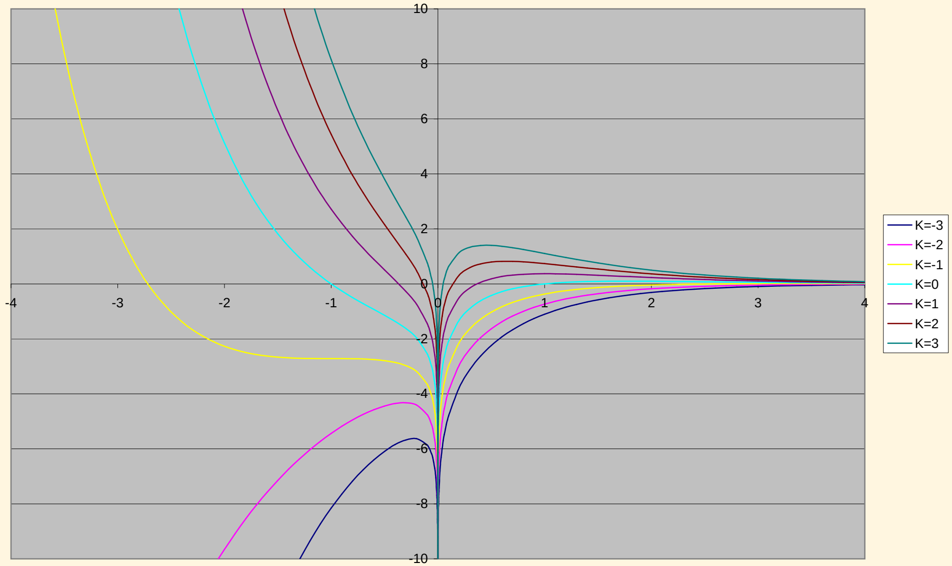
Exemples
Exercices
Documents

Remarque : l'équation (ε) n'était pas définie pour $x = 0$, la solution n'est pas définie pour $x = 0$. La résolution est donc valable sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et sur l'intervalle $]0; +\infty[$. La courbe représentative de la solution générale $y(x)$ pour des valeurs de K entières et comprises entre -3 et 3 est :

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.7
Méthode de variation de la constante



(On remarque la présence d'une asymptote verticale d'équation $x = 0 \ldots$)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.8 Résolution d'une EDL2CC sans second membre – Cas 1

Cours :
Résolution de l'équation sans second membre d'une EDL2

Exemples :
Exemple A.9
Exemple A.10

Pour résoudre l'EDL2CC sans second membre :

$$y"(x) + y'(x) - 2y(x) = 0 \qquad (\varepsilon)$$

on recherche tout d'abord les racines de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + r - 2 = 0$$

Le discriminant de ce trinôme est : $\Delta = 9$, et on trouve comme racines réelles distinctes : $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$.
Par conséquent, la solution générale de (ε) est :

$$y(x) = A\,e^{x} + B\,e^{-2x} \quad \text{avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}$$

La courbe représentative de cette solution $y(x)$ dépend des valeurs des constantes A et B. Par exemple, pour des valeurs de A et B entières et entre -2 et 2, on obtient le faisceau de courbes :

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

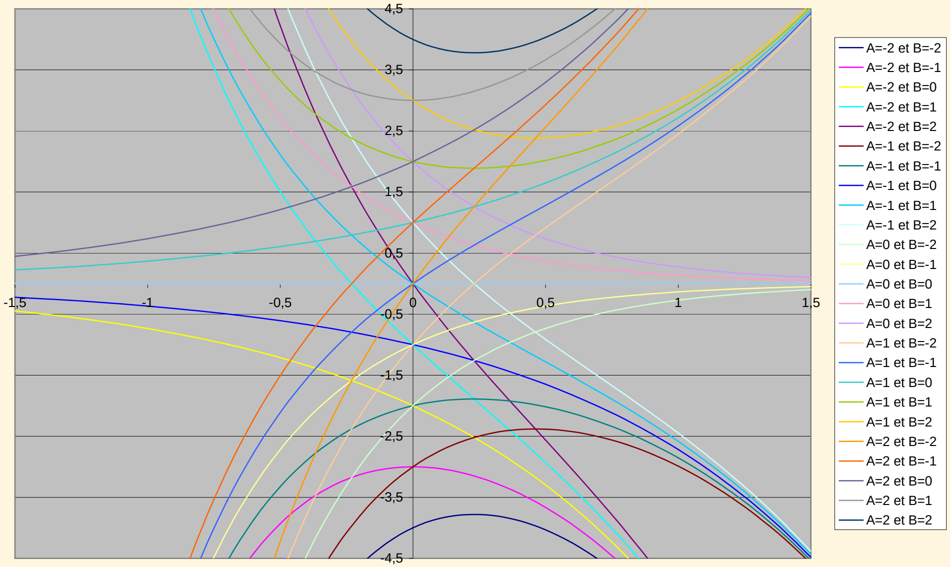


Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.9 Résolution d'une EDL2CC sans second membre – Cas 2

Cours :
Résolution de l'équation sans second membre d'une EDL2

Exemples :
Exemple A.8
Exemple A.10

Pour résoudre l'EDL2CC sans second membre :

$$y"(x) + 2y'(x) + y(x) = 0 \qquad (\varepsilon)$$

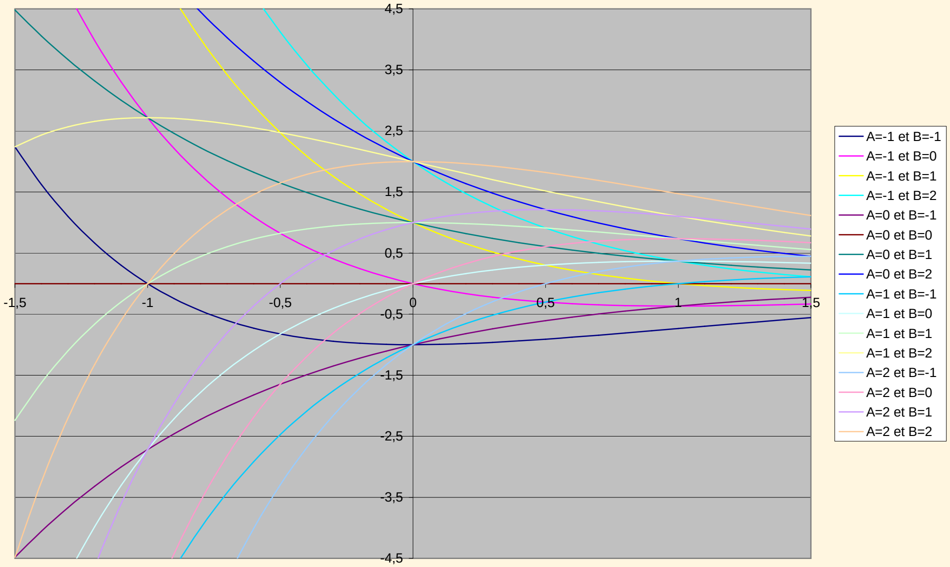
on recherche tout d'abord les racines de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

Le discriminant de ce trinôme est : $\Delta = 0$, et on trouve comme racine réelle double : $r_1 = -1$.
Par conséquent, la solution générale de (ε) est :

$$y(x) = (Ax + B)\, e^{-x} \quad \text{avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}$$

La courbe représentative de cette solution $y(x)$ dépend des valeurs des constantes A et B. Par exemple, pour des valeurs de A et B entières et entre -1 et 2, on obtient le faisceau de courbes :



Exemple A.9
Résolution d'une EDL2CC sans second membre – Cas 2

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.10 Résolution d'une EDL2CC sans second membre – Cas 3

Cours :
Résolution de l'équation sans second membre d'une EDL2

Exemples :
Exemple A.8
Exemple A.9

Pour résoudre l'EDL2CC sans second membre :

$$y"(x) - 2'(x) + 2y(x) = 0 \qquad (\varepsilon)$$

on recherche tout d'abord les racines de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

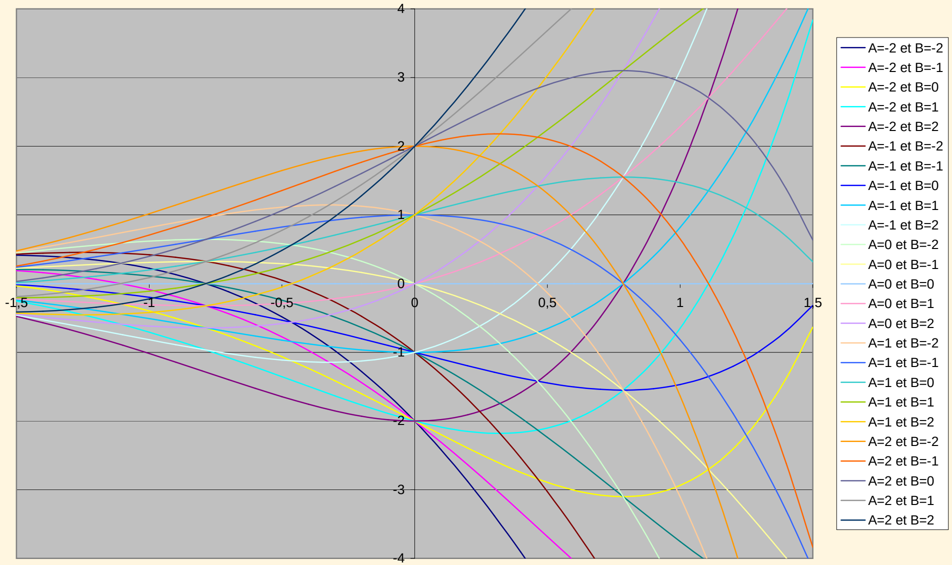
Le discriminant de ce trinôme est : $\Delta = -4$, et on trouve comme racines complexes conjuguées : $r_1 = 1 + j$ et $r_2 = 1 - j$.
Par conséquent, la solution générale de (ε) est :

$$y(x) = e^x(A\cos x + B\sin x) \quad \text{avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}$$

La courbe représentative de cette solution $y(x)$ dépend des valeurs des constantes A et B. Par exemple, pour des valeurs de A et B entières et entre -2 et 2, on obtient le faisceau de courbes :

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents



Exemple A.10
Résolution d'une EDL2CC sans second membre – Cas 3

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.11 Résolution d'une EDL2CC avec second membre polynômial

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.12
Exemple A.13

On résout ici l'équation différentielle (ε) : $y"(x)+4y'(x)+4y(x)=2x+1$ vérifiant les conditions $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

1. Résolution de l'équation sans second membre : $y"(x)+4y'(x)+4y(x)=0$ a pour équation caractéristique $r^2+4r+4=0$ qui admet $r=-2$ comme racine double. Ainsi la solution de l'équation sans second membre est : $y_s(x)=(Ax+B)\,e^{-2x}$ avec A et B dans $\mathbb{R}$,.
2. Recherche d'une solution particulière : le second membre est un poynôme de degré 1, donc on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré, c'est à dire $y_p(x)=ax+b$.
   On a : $y_p'(x)=a$ et $y"_p(x)=0$, d'où en remplaçant dans (ε) :
   $$0+4\times a+4\times(ax+b)=2x+1 \iff \begin{cases} 4a=2 \\ 4a+4b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{-1}{4} \end{cases}$$
   D'où : $y_p(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

3. Solution générale de l'équation avec second membre :

$$y(x) = y_s(x) + y_p(x) = (Ax + B)\, e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}$$

4. Détermination de la valeur des constantes : on détermine A et B à l'aide des conditions initiales. En effet, sachant que $y'(x) = A\, e^{-2x} - 2(Ax + B)\, e^{-2x} + \frac{1}{2}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} B - \frac{1}{4} = 0 \\ A - 2B + \frac{1}{2} = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} B = \frac{1}{4} \\ A = 1 \end{array} \right.$$

La solution de l'équation (ε) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est donc :

$$y(x) = \left(x + \frac{1}{4} \right) e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Exemple A.11
Résolution d'une EDL2CC avec second membre polynômial

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.12 Résolution d'une EDL2CC avec second membre constant

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.11
Exemple A.13

On résout ici l'équation différentielle (ε) : $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{4}y(t) = 4$ vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1. Résolution de l'équation sans second membre : $\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{4}y(t) = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} = 0$, de discriminant $\Delta = -\frac{3}{4} = \left(\frac{j\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et qui admet $r_1 = \frac{-1}{4} + \frac{j\sqrt{3}}{4}$ et $r_2 = \frac{-1}{4} - \frac{j\sqrt{3}}{4}$ comme racines complexes conjuguées. Ainsi la solution de l'équation sans second membre est :
$$y_s(t) = e^{\frac{-t}{4}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)\right) \text{ avec } A \text{ et } B \text{ dans } \mathbb{R}$$
2. Recherche d'une solution particulière : le second membre est une constante, donc on cherche une solution particulière sous la forme d'une constante, c'est à dire $y_p(t) = C$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On a : $y_p'(t) = 0$ et $y"_p(t) = 0$, d'où en remplaçant dans (ε) :

$$0 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times C = 4 \Longleftrightarrow C = 16$$

D'où : $y_p(t) = 16$.

3. Solution générale de l'équation avec second membre :

$$y(t) = y_s(t) + y_p(t) = e^{\frac{-t}{4}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)\right) + 16 \text{ avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}$$

4. Détermination de la valeur des constantes : on détermine A et B à l'aide des conditions initiales. En effet, sachant que

$$y'(t) = e^{\frac{-t}{4}} \left(-A\tfrac{\sqrt{3}}{4}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\right) + B\tfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\right)\right) - \tfrac{1}{4}\, e^{\frac{-t}{4}} \left(A\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\right) + B\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\right)\right)$$

on a :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A + 16 = 0 \\ B\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}A = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -16 \\ B = \frac{-16}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

La solution de l'équation (ε) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est donc :

$$y(t) = e^{\frac{-t}{4}} \left(-16\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) - \frac{16}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)\right) + 16$$

Exemple A.12
Résolution d'une EDL2CC avec second membre constant

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.13 Résolution d'une EDL2CC avec second membre exponentiel

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.11
Exemple A.12

Exercices :
Exercice B.6
Exercice B.7
Exercice B.8
Exercice B.9

On résout ici l'équation différentielle (ε) : $y"(x) + 2y'(x) - 3y(x) = xe^x$.

1. Résolution de l'équation sans second membre : $y"(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ qui admet $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ comme racines réelles. Ainsi la solution de l'équation sans second membre est : $y_s(x) = A\,e^x + B\,e^{-3x}$ avec A et B dans $\mathbb{R}$,.
2. Recherche d'une solution particulière : le second membre est le produit $P(x)\,e^{sx}$ d'un poynôme de degré 1 et d'une fonction exponentielle, mais on remarque que $s = 1$ est une racine simple de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme du produit $Q(x)\,e^{sx}$ d'un polynôme de degré 2 et de valuation 1 avec une exponentielle, c'est à dire $y_p(x) = (ax^2 + bx)\,e^x$.
   On a :

$$y_p'(x) = (2ax + b)\,e^x + (ax^2 + bx)\,e^x = (ax^2 + bx + 2ax + b)\,e^x$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

et

$$y''_p(x) = (2ax+b+2a)\,e^x + (ax^2+bx+2ax+b)\,e^x = (ax^2+[4a+b]x+2b+2a)\,e^x$$

d'où en remplaçant dans (ε) :

$$(ax^2+[4a+b]x+2b+2a)\,e^x + 2\times(ax^2+bx+2ax+b)\,e^x - 3\times(ax^2+bx)\,e^x = xe^x$$

Par identification, on en déduit :

$$\begin{cases} 8a = 1 \\ 2a+4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{-1}{16} \end{cases}$$

D'où : $y_p(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}\right)e^x$.

3. Solution générale de l'équation avec second membre :

$$y(x) = y_s(x) + y_p(x) = A\,e^x + B\,e^{-3x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}\right)e^x \text{ avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}$$

4. Détermination de la valeur des constantes : en l'absence de conditions initiales, la formule précédente donne une infinité de solutions.

La solution de l'équation (ε) est donc :

$$y(x) = A\,e^x + B\,e^{-3x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}\right)e^x \text{ avec } A\,,\ B \in \mathbb{R}$$

Exemple A.13
Résolution d'une EDL2CC avec second membre exponentiel

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exercices

Exercice B.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

Exemples :
Exemple A.1

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi "Exercice B.1" depuis le grain sur le système de renvois ou sur le renvoi "Exercice B.1" de l'exemple A.1 associé à ce grain. On accède à ces pages de la même façon en cliquant sur l'un des renvois ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2 Résolution d'EDL1CC

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4
Exemple A.5
Exemple A.6

Exercices :
Exercice B.3
Exercice B.4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(ε_1) $y' + 3y = x + 1$ Solution

(ε_2) $y' - 4y = (2x+3)\,e^x$ Solution

(ε_3) $s' - 5s = \cos 4t + \sin 4t$ Solution

(ε_4) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - u = e^t(t^2+1)$ Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3 Résolution d'EDL1CC avec conditions initiales

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4
Exemple A.5
Exemple A.6

Exercices :
Exercice B.2
Exercice B.4

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions initiales :

(ε_1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = \cos(\omega t + \varphi)$ avec $y(0) = 1$ Solution

(ε_2) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v + t^2 - 3t$ avec $v(0) = 0$ Solution

Table des matières
Concepts
Notions

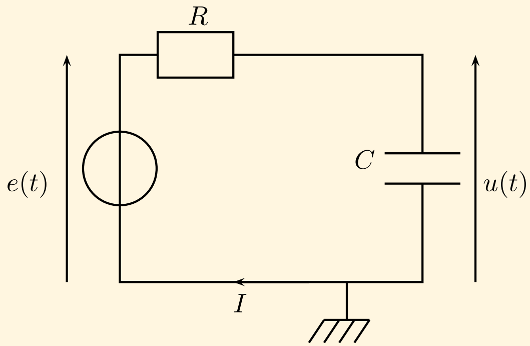
Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4 Résolution d'EDL1CC en électronique

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

Exemples :
Exemple A.3
Exemple A.4
Exemple A.5
Exemple A.6

Exercices :
Exercice B.2
Exercice B.3



En électronique, pour calculer la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit "RC" série (cf. figure), on applique la loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + u(t)$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Or, si on note $q(t)$ la charge du condensateur et C sa capacité, on a :

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} \text{ et } i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$e(t) = RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$$

avec comme condition initiale : à $t = 0$, $u(0) = U_0$.

Résoudre cette équation dans les deux cas suivants :

1. Si $e(t)$ est une tension continue $e(t) = E_0$. (On représentera alors la solution $u(t)$ obtenue dans le cas où $E_0 > U_0$ et dans le cas où $E_0 < U_0$) Solution
2. Si $e(t)$ est une tension alternative $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$. Solution

Exercice B.4
Résolution d'EDL1CC en électronique

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5 Utilisation de la méthode de variation de la constante

Cours :
Variation de la constante

Exemples :
Exemple A.7

En utilisant la méthode de variation de la constante, résoudre :

$(\varepsilon_1)\;\; y' + 2y = \tan x\, e^{-2x}$ Solution

$(\varepsilon_2)\;\; y' + y = \cos x$ Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.6 Résolution d'EDL2CC avec conditions initiales

Cours :
Solution particulière d'une EDL2

Exemples :
Exemple A.11
Exemple A.12
Exemple A.13

Exercices :
Exercice B.7
Exercice B.8
Exercice B.9

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions initiales :

(ε_1) $y" + 4y' + 4y = 9$ avec $y(-1) = 1$ et $y'(-1) = 2$ Solution

(ε_2) $y" - 2y' + y = 5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ Solution

(ε_3) $y" + 9y = 5t + 1$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ Solution

(ε_4) $y" + 2y' + 10y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$ Solution

(ε_5) $y" + 4y + \sin 2x = 0$ avec $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = 1$ Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.7 Résolution d'EDL2CC avec conditions graphiques

Cours :
Solution particulière d'une EDL2

Exemples :
Exemple A.11
Exemple A.12
Exemple A.13

Exercices :
Exercice B.6
Exercice B.8
Exercice B.9

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y" - 6y' + 8y = 0$.
   Solution
2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative passe par le point $A(0;k)$ et admet en ce point une tangente d'équation $y = mx + p$.
   Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.8 Résolution d'EDL2CC avec paramètre

Cours :
Solution particulière d'une EDL2

Exemples :
Exemple A.11
Exemple A.12
Exemple A.13

Exercices :
Exercice B.6
Exercice B.7
Exercice B.9

Résoudre l'équation différentielle $y" + \omega^2 y = \cos(ax)$ dans les cas suivants :

1. quand $a \neq \omega$ et $a \neq -\omega$ Solution
2. quand $a = \omega$ ou $a = -\omega$ Solution

Exercice B.9 Résolution d'EDL2CC en électronique

Cours :
Solution particulière d'une EDL2

Exemples :
Exemple A.11
Exemple A.12
Exemple A.13

Exercices :
Exercice B.6
Exercice B.7
Exercice B.8

Mise en garde : *on prévient le lecteur que cet exercice est d'un niveau de difficulté bien supérieur aux précédents et au suivant, du fait de sa longueur et surtout de son caractère très général. L'objectif est effectivement ici de retrouver un résultat classique d'électronique : l'expression de la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC série en régimes continu et sinusoïdal.*

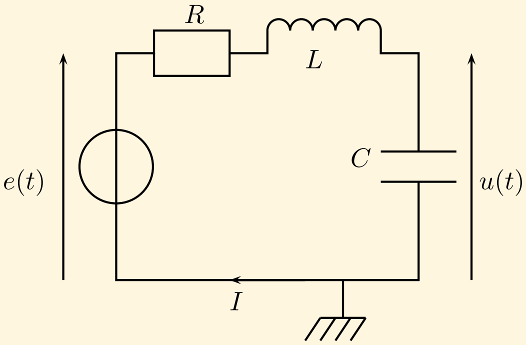


Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

En électronique, pour calculer la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit "RLC série" comme sur la figure ci-dessus, on est amené à résoudre une équation différentielle linéaire et à coefficients constants du second ordre.

En effet, l'application de la loi des mailles à ce montage conduit à :

$$e(t) = R\,i(t) + L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + u(t)$$

Or, à tout instant t, l'intensité $i(t)$ dans le circuit est reliée à la charge $q(t)$ du condensateur et à la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur par les formules :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{C\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

On en déduit :

$$e(t) = RC\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + u(t)$$

Ou encore, en divisant chaque membre par LC :

$$\frac{e(t)}{LC} = \frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{LC}$$

Enfin, en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $2m\omega_0 = \frac{R}{L}$, on obtient l'EDL2CC d'inconnue $u(t)$ suivante :

$$(\varepsilon) \qquad \omega_0^2\,e(t) = \frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,u(t)$$

Exercice B.9
Résolution d'EDL2CC en électronique

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.9
Résolution d'EDL2CC en électronique

1. Déterminer l'équation sans second membre associée à (ε), puis son équation caractéristique, et enfin le signe du discriminant Δ de cette équation caractéristique en fonction de la valeur de m. Solution
2. Déterminer la solution générale de l'équation avec second membre associée à (ε) quand $m < 1$. Solution
3. Déterminer la solution générale de l'équation avec second membre associée à (ε) quand $m = 1$. Solution
4. Déterminer la solution générale de l'équation avec second membre associée à (ε) quand $m > 1$. Solution
5. Déterminer une solution particulière de l'équation (ε) quand la tension d'entrée $e(t)$ est constante ($e(t) = E_0$). Solution
6. Déterminer la solution générale de l'équation (ε) quand $m < 1$, $e(t) = E_0$ et avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$. Solution
7. Déterminer la solution générale de l'équation (ε) quand $m = 1$, $e(t) = E_0$ et avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$. Solution
8. Déterminer la solution générale de l'équation (ε) quand $m > 1$, $e(t) = E_0$ et avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$. Solution
9. Déterminer une solution particulière de l'équation (ε) quand la tension d'entrée $e(t)$ est sinusoïdale ($e(t) = E_0 \cos(\omega t)$). Solution
10. Déterminer la solution générale de l'équation (ε) quand $m < 1$, $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

11. Déterminer la solution générale de l'équation (ε) quand $m = 1$, $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$. Solution
12. Déterminer la solution générale de l'équation (ε) quand $m > 1$, $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$. Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.10 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC

Cours :
Entraînement

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(ε_1) $y' - 3y = 1 - 3x$ avec $y(0) = 1$ Solution

(ε_2) $3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t + 1$ avec $y'(0) = -1$ et $y(0) = 1$ Solution

(ε_3) $y' - 3y = 2\cos(3\pi t) - \sin(3\pi t)$ avec $y(1) = -1$ Solution

(ε_4) $3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 4v = t^2 - t + 3$ avec $v(-1) = 4$ Solution

(ε_5) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 4y = \sin(2t) + t^2$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ Solution

(ε_6) $y' - y = 3x - 5x^2 + \cos(3x)$ avec $y(-1) = 0$ Solution

(ε_7) $s' - 3s = \cos t + \sin t$ avec $s(0) = 0$ Solution

(ε_8) $y" + y' - 6y = xe^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ Solution

(ε_9) $y" - 3y' + 2y = x^2 + x + 1 - \cos 2x$ Solution

(ε_{10}) $y" + 4y = \cos(2x) - \sin(4x)$ avec $y(0) = \frac{5}{16}$ et $y'(0) = 0$ Solution

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

(ε_{11}) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = (3t+1)e^{-t}$ avec $y(0) = 1$ Solution

(ε_{12}) $y" + 2ny' + n^2 y = (x+1)e^{-nx}$ Solution

(ε_{13}) $y" + y' + y = x^2 + 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ Solution

(ε_{14}) $y" - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ Solution

Exercice B.10
Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC

Annexe C
Documents

C.1 Document de l'avant-propos

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.1 Navigation par renvois

Cours :
Renvois

On arrive sur cette page après avoir cliqué sur le renvoi "Document C.1" depuis le grain sur le système de renvois. On retourne à cette page de la même façon en cliquant sur le renvoi ci-dessus.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.2 Compléments de cours

Document C.2.1 Second membre usuel d'une EDL1CC – Cas 1

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

On considère l'EDL1 à coefficients constants :

$$ay'(x) + by(x) = C$$

où C est une constante réelle.

– Si $b \neq 0$, et si $y_p(x) = \frac{C}{b}$, alors $y_p'(x) = 0$, d'où :

$$ay_p'(x) + by_p(x) = a \times 0 + b \times \frac{C}{b} = C$$

Ainsi, $y_p(x) = \frac{C}{b}$ est bien une solution particulière de l'EDL1 proposée.

– Si $b = 0$, et si $y_p(x) = \frac{C}{a}x$, alors $y_p'(x) = \frac{C}{a}$, d'où :

$$ay_p'(x) + by_p(x) = a \times \frac{C}{a} + 0 \times \frac{C}{a}x = C$$

Ainsi, $y_p(x) = \frac{C}{a}x$ est bien une solution particulière de l'EDL1 proposée.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.2 Second membre usuel d'une EDL1CC – Cas 2

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

On considère l'EDL1 à coefficients constants :

$$ay'(x) + by(x) = P(x)$$

où P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

La propriété énoncée dans le paragraphe de cours suggère donc de chercher une solution particulière $y_p(x)$ à cette équation sous la forme d'un polynôme : notons-le $Q(x)$. Or, si $y_p(x) = Q(x)$ est de degré $m \in \mathbb{N}^*$, alors sa dérivée $y_p'(x) = Q'(x)$ est un polynôme de degré $m-1$ et on doit avoir : $a\,Q'(x) + b\,Q(x) = P(x) \quad (\star)$.

Par conséquent :

- Si $b \neq 0$, alors $a\,Q'(x) + b\,Q(x)$ est nécessairement un polynôme de degré m, et la relation $(\star)$ implique que m et n sont égaux, c'est à dire que $Q(x)$ est un polynôme de même degré que P.
- Si $b = 0$, alors $a\,Q'(x) + b\,Q(x) = a\,Q'(x)$ est un polynôme de degré $m-1$, et $(\star)$ implique que $m-1 = n$, c'est à dire que $Q(x)$ est de degré $n+1 = \deg P + 1$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.3 Second membre usuel d'une EDL1CC – Cas 3

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

On considère l'EDL1 à coefficients constants :

$$ay'(x) + by(x) = P(x)\, e^{sx}$$

où P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et s est un nombre réel non nul.

La propriété énoncée dans le paragraphe de cours suggère donc de chercher une solution particulière $y_p(x)$ à cette équation sous la forme :

$$y_p(x) = Q(x)\, e^{sx}$$

où Q est un polynôme de degré m.
On a alors :

$$y_p'(x) = Q'(x)\, e^{sx} + s\, Q(x)\, e^{sx}$$

Et, en remplaçant dans l'équation différentielle :

$$a\left(Q'(x)\, e^{sx} + s\, Q(x)\, e^{sx}\right) + b\, Q(x)\, e^{sx} = P(x)\, e^{sx}$$

Soit encore :

$$\big(a\, Q'(x) + (as+b)\, Q(x)\big)\, e^{sx} = P(x)\, e^{sx}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

L'exponentielle e^{sx} n'étant jamais nulle, on peut simplifier à droite et à gauche de l'égalité par e^{sx}, ce qui donne :

$$a\,Q'(x) + (as+b)\,Q(x) = P(x) \quad (\star)$$

On distingue alors les deux cas de figure suivants :

– Si $as+b \neq 0$, alors $a\,Q'(x) + (as+b)\,Q(x)$ est de degré m et $(\star)$ implique que m et n sont égaux, c'est à dire que $Q(x)$ est un polynôme de même degré que P.

– Si $as+b = 0$, alors $a\,Q'(x) + (as+b)\,Q(x) = a\,Q'(x)$ est un polynôme de degré $m-1$, et $(\star)$ implique que $m-1 = n$, c'est à dire que $Q(x)$ est de degré $n+1 = \deg P + 1$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.4 Second membre usuel d'une EDL1CC – Cas 4

Cours :
Solution particulière d'une EDL1

On considère l'EDL1 à coefficients constants :

$$ay'(x) + by(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi)$$

où ω est un nombre réel non nul.

La propriété énoncée dans le paragraphe de cours suggère donc de chercher une solution particulière $y_p(x)$ à cette équation sous la forme :

$$y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$$

On a alors :

$$y_p'(x) = -A\omega \sin(\omega x + \varphi) + B\omega \cos(\omega x + \varphi)$$

Et, en remplaçant dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} &a \times [-A\omega \sin(\omega x + \varphi) + B\omega \cos(\omega x + \varphi)] \\ &\qquad + b \times [A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)] = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi) \end{aligned}$$

Soit encore :

$$[aB\omega + bA] \cos(\omega x + \varphi) + [-aA\omega + bB] \sin(\omega x + \varphi) = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi)$$

Par identification des coefficients des cosinus et sinus, on en déduit le système d'inconnues A et B :

$$\begin{cases} bA + aB\omega = \alpha \\ -aA\omega + bB = \beta \end{cases}$$

En résolvant ce système on en déduit une solution particulière de l'EDL1 proposée.

Document C.2.5 Notion de valuation d'un polynôme

Cours :
Solution particulière d'une EDL1
Solution particulière d'une EDL2

La valuation ("val" en abrégé) d'un polynôme $Q(x)$ est le degré du monôme de Q non-nul de plus bas degré.

Ainsi, si $\mathrm{val}(Q) = 1$, cela signifie que le terme constant du polynôme Q est nul.

Par exemple, $Q_1(x) = x^3 + 2x$ est de valuation 1, tandis que $Q_2(x) = x^5 + 3x^4$ est de valuation 4.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.6 Quelques propriétés des signaux sinusoïdaux

Documents :
Document C.3.4
Document C.3.6
Document C.3.9
Document C.3.26
Document C.3.29

Amplitude et phase d'un signal :
Soit $s(t)$ un signal sinusoïdal de pulsation ω :

$$s(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

(a et b sont des réels)

1. Amplitude :

   On veut montrer qu'il existe un nombre réel A positif et un nombre réel ϕ tels que $s(t)$ puisse s'écrire $s(t) = A\cos(\omega t - \phi)$.
   On cherche à exprimer A et ϕ en fonction de a et de b :

$$s(t) = A\cos(\omega t - \phi) = A[\cos(\omega t)\cos(\phi) + \sin(\omega t)\sin(\phi)] = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Cette égalité étant vraie pour tout t, on en déduit :

$$a = A\cos(\phi) \text{ et } b = A\sin(\phi)$$

Ce qui entraîne :

$$a^2 + b^2 = A^2[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)] = A^2$$

Comme A est toujours positif on en déduit : $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Phase :

   La phase du signal à l'instant t est $\omega t - \phi$. La phase à l'origine correspond à la phase du signal à l'instant $t = 0$.
   La phase à l'origine est donc $-\phi$ (attention ne pas oublier le signe $-$). ϕ sera déterminé par son cosinus et son sinus :

$$\cos(\phi) = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\phi) = \frac{b}{A} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3. Caractéristiques d'un signal sinusoïdal :

   Un signal sinusoïdal est donc caractérisé par :
   - sa période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$
   - son amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
   - sa phase à l'origine $-\phi$ définie par $\cos(\phi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\phi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

4. Remarque :

   Si a est positif, $\cos(\phi)$ est positif : l'angle peut être choisi dans $]-\pi;\pi[$ et il peut être intégralement défini par sa tangente : $\tan(\phi) = \frac{b}{a}$.

5. Application : mettre sous la forme $s(t) = A\cos(\omega t - \phi)$ les signaux suivants :
   - $s_1(t) = \cos(5t) + \sin(5t)$
   - $s_2(t) = \cos(100t) - \sqrt{3}\sin(100t)$
   - $s_3(t) = 4\sqrt{3}\cos(50t) + 4\sin(50t)$

Liens pour revenir à :

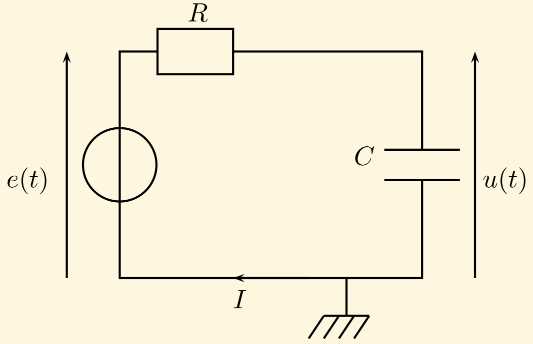
- la solution (3) de l'exercice B.2
- la solution (1) de l'exercice B.3
- la solution (2) de l'exercice B.4
- la solution (6) de l'exercice B.9
- la solution (9) de l'exercice B.9

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.7 Amplitude, phase et impédance complexe

Documents :
Document C.3.29



On a vu que la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série est solution de l'équation différentielle :

$$e(t) = RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + u(t)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ou encore :

$$(\varepsilon) \qquad \omega_0^2\, e(t) = \frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, u(t)$$

en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $2m\omega_0 = \frac{R}{L}$.

Dans le cas où la tension d'entrée $e(t)$ est de la forme $e(t) = E_0\cos(\omega t)$, la solution particulière de (ε) (qui correspond au régime établi) est alors sinusoïdale : $u_p(t) = U_m\cos(\omega t - \varphi)$, U_m désignant l'amplitude du signal aux bornes du condensateur et φ sa phase.

Par ailleurs, l'impédance totale Z_t du circuit et l'impédance du condensateur Z_c sont :

$$Z_t = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \text{ et } Z_c = \frac{-j}{C\omega}$$

Amplitude de la tension aux bornes du condensateur : elle s'obtient en cherchant le module du rapport de l'impédance totale du circuit par l'impédance du condensateur. En effet :

$$|Z_t| = \frac{E_0}{I} \text{ et } |Z_c| = \frac{U_m}{I} \text{ d'où } \frac{U_m}{E_0} = \left|\frac{Z_c}{Z_t}\right|$$

Or :

$$\frac{Z_c}{Z_t} = \frac{-j}{RC\omega + j(LC\omega^2 - 1)}$$

D'où :

$$\left|\frac{Z_c}{Z_t}\right| = \left|\frac{-j}{RC\omega + j(LC\omega^2 - 1)}\right| = \frac{1}{|RC\omega + j(LC\omega^2 - 1)|} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Sachant que :

$$\begin{cases} \frac{R}{L} = 2m\omega_0 \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} RC = 2m\omega_0 LC = \frac{2m}{\omega_0} \\ LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\frac{U_m}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega^2\omega_0^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

Et finalement :

$$U_m = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{4m^2\omega^2\omega_0^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

Déphasage φ : il s'agit du retard de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur par rapport à la tension d'entrée $e(t)$. On peut la visualiser au moyen d'un diagramme de Fresnel. En effet, sachant que :

- Il n'y a pas de déphasage entre la tension aux bornes de la résistance R et l'intensité du courant I dans le circuit.
- Il y a un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre la tension aux bornes de l'inductance L et l'intensité du courant I dans le circuit.
- Il y a un déphasage de $\frac{-\pi}{2}$ entre la tension aux bornes du condensateur C et l'intensité du courant I dans le circuit.
- La tension aux bornes du générateur est égale à la somme des tensions aux bornes des composants R , L et C montés en série.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On obtient, en prenant comme origine des phases la phase du courant I, le diagramme de Fresnel :

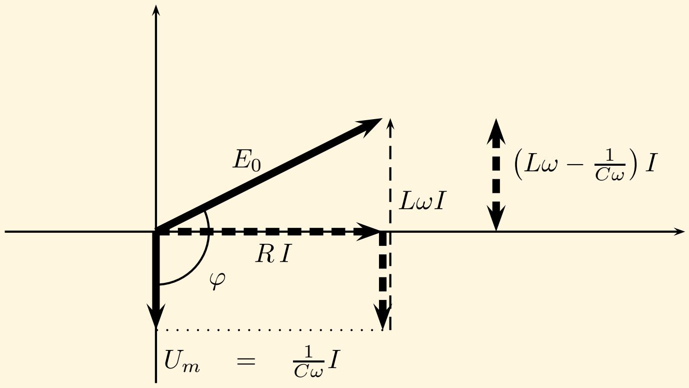


Diagramme de Fresnel

Sur ce diagramme, on peut appliquer les relations trigonométriques dans un triangle rectangle et le théorème de Pythagore pour déterminer d'une part que :

$$\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{LC\omega^2 - 1}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{4m\omega_0^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

Or : $\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\varphi)$, d'où :

$$\cos(\varphi) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Et d'autre part :

$$\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{RC\omega}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}} = \frac{2m\omega\omega_0}{\sqrt{4m\omega_0^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

Or : $\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \sin(\varphi)$, d'où :

$$\sin(\varphi) = \frac{2m\omega\omega_0}{\sqrt{4m\omega_0^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{u_p(t) = \frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \varphi)}$$

avec :

$$\boldsymbol{\cos(\varphi) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} \text{ et } \boldsymbol{\sin(\varphi) = \frac{2m\omega_0\omega}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}}$$

Document C.2.7
Amplitude, phase et impédance complexe

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.3 Solutions des exercices

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.1 Mise en garde

Attention, les pages qui suivent ne sont pas censées être lues de manière linéaire : elles n'ont un sens que si on y accède depuis la page contenant l'énoncé de l'exercice auquel elles font référence, et après avoir cherché cet exercice.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.2 Résolution d'EDL1CC (1)

Exercices :
Exercice B.2

Equation : $(\varepsilon_1) \quad y' + 3y = x + 1$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y_s' + 3y_s = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{y_s} = -3\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y_s}{y_s} = -3\int \mathrm{d}x \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y_s}{k}\right| = -3x \Longleftrightarrow y_s(x) = ke^{-3x}$$

   où k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l'équation $y_p' + 3y_p = x + 1$ (équation avec second membre) :

   Le second membre est un polynôme de degré 1, donc y_p sera un polynôme de degré 1 : $y_p(x) = ax + b$ d'où $y_p'(x) = a$.
   En remplaçant dans l'équation (ε_1) , on obtient :

$$y_p' + 3y_p = x + 1 \Longleftrightarrow a + 3(ax + b) = x + 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 1 \end{cases}$$

   Ce qui donne : $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{9}$, d'où : $y_p(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

3. Solution générale de l'équation avec second membre $y' + 3y = x + 1$:

   La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $y_g = y_s + y_p$.
   Finalement :
   $$y_g(x) = ke^{-3x} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Document C.3.3 Résolution d'EDL1CC (2)

Exercices :
Exercice B.2

Equation : $(\varepsilon_2) \quad y' - 4y = (2x+3)e^x$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y_s' - 4y_s = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{y_s} = +4\,\mathrm{d}x \iff \int \frac{\mathrm{d}y_s}{y_s} = 4\int \mathrm{d}x \iff \ln\left|\frac{y_s}{k}\right| = 4x \iff y_s(x) = ke^{4x}$$

   où k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l'équation $y_p' - 4y_p = (2x+3)e^x$ (équation avec second membre) :

   Le second membre est un polynôme de degré 1 multiplié par e^x , et e^x n'est pas solution de l'équation sans second membre, donc y_p sera un polynôme de degré 1 multiplié par e^x : $y_p(x) = (ax+b)e^x$ d'où $y_p'(x) = ae^x + (ax+b)e^x$
   En remplaçant dans l'équation (ε_2) , on obtient :

$$\begin{aligned} y_p' - 4y_p = (2x+3)e^x \quad &\iff (ax+b+a)e^x - 4(ax+b)e^x = (2x+3)e^x \\ &\iff (-3ax+a-3b)e^x = (2x+3)e^x \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

En simplifiant par e^x (qui n'est jamais nul) on en déduit :

$$\begin{cases} -3a = 2 \\ a - 3b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{-2}{3} \\ b = \frac{-11}{9} \end{cases}$$

Ainsi : $y_p(x) = (\frac{-2}{3}x - \frac{11}{9})e^x$

3. Solution générale de l'équation avec second membre $y' - 4y = (2x+3)e^x$:

   La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $y_g = y_s + y_p$.
   Finalement :
$$y_g(x) = ke^{4x} - \left(\frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right) e^x \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Document C.3.3
Résolution d'EDL1CC (2)

Document C.3.4 Résolution d'EDL1CC (3)

Exercices :
Exercice B.2

Equation : $(\varepsilon_3) \quad s' - 5s = \cos(4t) + \sin(4t)$

1. Résolution de l'équation sans second membre $s_s' - 5s_s = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}s_s}{s_s} = +5\,\mathrm{d}x \iff \int \frac{\mathrm{d}s_s}{s_s} = 5\int \mathrm{d}x \iff \ln\left|\frac{s_s}{k}\right| = 5x \iff s_s(t) = ke^{5t}$$

   où k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l'équation $s_p' - 5s_p = \cos(4t) + \sin(4t)$ (équation avec second membre) :

   Le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation $\omega = 4$, donc s_p sera une fonction sinusoïdale de pulsation $\omega = 4$: $s_p(t) = A\cos(4t) + B\sin(4t)$, d'où $s_p'(t) = -4A\sin(4t) + 4B\cos(4t)$.
   En remplaçant dans l'équation (ε_3), on obtient :

$$\begin{aligned} s_p' - 5s_p = \cos(4t) + \sin(4t) \iff & -4A\sin(4t) + 4B\cos(4t) \\ & -5(A\cos(4t) + B\sin(4t)) \\ & = \cos(4t) + \sin(4t) \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ce qui donne :

$$(4B-5A)\cos(4t)+(-5B-4A)\sin(4t))=\cos(4t)+\sin(4t)$$

D'où, par identification :

$$\begin{cases} -5A+4B=1 & : & (1) \\ -4A-5B=1 & : & (2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -41A=7 & : & 5(1)+4(2) \\ 41B=-1 & : & 4(1)-5(2) \end{cases}$$

Ainsi : $s_p(t)=\frac{1}{41}\big(-9\cos(4t)-\sin(4t)\big)$

3. Autre écriture de la solution particulière :

   On pourrait laisser le résultat de s_p sous la forme trouvée précédemment, mais dans un signal sinusoïdal, il est souvent intéressant de connaître l'amplitude et la phase à l'origine. Pour un complément sur la recherche de l'amplitude et de la phase à l'origine d'un signal, on peut consulter le lien suivant.

   Ici, on obtient :

   – Amplitude $A_{\max}$: $A_{\max}=\frac{1}{41}\sqrt{9^2+1}=\frac{1}{41}\sqrt{82}=\sqrt{\frac{2}{41}}$,
   d'où : $s_p(t)=\frac{1}{41}\sqrt{82}\left(\frac{-9}{\sqrt{82}}\cos(4t)-\frac{1}{\sqrt{82}}\sin(4t)\right)$
   – Phase ϕ : on pose $\cos\phi=\frac{-9}{\sqrt{82}}$ et $\sin\phi=\frac{-1}{\sqrt{82}}$,
   d'où : $s_p(t)=\frac{1}{41}\sqrt{82}\cos(4t-\phi)$

4. Solution générale de l'équation avec second membre $s'-5s=\cos(4t)+\sin(4t)$:

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $s_g = s_s + s_p$.
Finalement :

$$s_g(t) = ke^{5t} + \sqrt{\frac{2}{41}}\cos(4t - \phi)$$

avec $\cos\phi = \frac{-9}{\sqrt{82}}$ et $\sin\phi = \frac{-1}{\sqrt{82}}$, et k étant une constante réelle.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.5 Résolution d'EDL1CC (4)

Exercices :
Exercice B.2

Equation : (ε_4) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - u = (t^2+1)e^t$

1. Résolution de l'équation sans second membre $\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} - u_s = 0$:
$$\frac{\mathrm{d}u_s}{u_s} = \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u_s}{u_s} = \int \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{u_s}{k}\right| = t \Longleftrightarrow u_s(t) = ke^t$$
où k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} - u_p = (t^2+1)e^t$ (équation avec second membre) :

   Le second membre est un polynôme de degré 2 multiplié par e^t, et e^t est solution de l'équation sans second membre, donc u_p sera un polynôme de degré 3 et de valuation 1 multiplié par e^t : $u_p(t) = (at^3 + bt^2 + ct)e^t$, d'où :
$$\frac{du_p}{dt} = (at^3 + bt^2 + ct)e^t + (3at^2 + 2bt + c)e^t$$
   En remplaçant dans l'équation (ε_4), on obtient :
$$\frac{du_p}{\mathrm{d}t} - u_p = (t^2+1)e^t \Longleftrightarrow (3at^2 + 2bt + c)e^t = (t^2+1)e^t$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

En simplifiant par e^t , on trouve :

$$3at^2 + 2bt + c = t^2 + 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi : $u_p(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) e^t$

3. Solution générale de l'équation avec second membre $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - u = (t^2 + 1)e^t$:

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$.
Finalement :

$$u_g(t) = ke^t + \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) e^t \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.6 Résolution d'EDL1CC avec conditions initiales (1)

Exercices :
Exercice B.3

Equation : $(\varepsilon_1)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\cos(\omega t+\varphi)$ avec $y(0)=1$

1. Résolution de l'équation sans second membre $\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t}+y_s=0$:

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{y_s}=-\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}y_s}{y_s}=-\int\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y_s}{k}\right|=-t \Longleftrightarrow y_s(t)=ke^{-t}$$

   où k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l'équation avec second membre :

   Le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, donc y_p sera une fonction sinusoïdale de pulsation ω : $y_p(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+B\sin(\omega t+\varphi)$, d'où $y_p'(t)=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)+\omega B\cos(\omega t+\varphi)$.
   En remplaçant dans l'équation (ε_1), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}t}+y_p=\cos(\omega t+\varphi) \quad\Longleftrightarrow\ & -\omega A\sin(\omega t+\varphi)+\omega B\cos(\omega t+\varphi)\\ & +A\cos(\omega t+\varphi)+B\sin(\omega t+\varphi)\\ & =\cos(\omega t+\varphi)\end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ce qui donne :

$$(A + \omega B)\cos(\omega t + \varphi) + (B - A\omega)\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)$$

D'où, par identification :

$$\begin{cases} A + \omega B = 1 & : \quad (1) \\ -A\omega + B = 0 & : \quad (2) \end{cases} \iff \begin{cases} B = \frac{\omega}{1+\omega^2} & : \quad \omega \times (1) + (2) \\ A = \frac{1}{1+\omega^2} & : \quad (1) - \omega \times (2) \end{cases}$$

Ainsi : $y_p(t) = \frac{1}{1+\omega^2}\big(\cos(\omega t + \varphi) + \omega\sin(\omega t + \varphi)\big)$

3. Autre écriture de la solution particulière :

   On pourrait laisser le résultat de y_p sous la forme trouvée précédemment mais pour un signal sinusoïdal, il est souvent intéressant de connaître l'amplitude et la phase à l'origine. Pour un complément sur la recherche de l'amplitude et de la phase à l'origine d'un signal, on peut consulter le lien suivant.

   Ici, on obtient :
   – Amplitude $A_{\max}$: $A_{\max} = \frac{1}{1+\omega^2}\sqrt{\omega^2+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$,
   d'où : $y_p(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}\sin(\omega t + \varphi)\right)$
   – Phase ϕ : on pose $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ et $\sin\phi = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$,
   d'où : $y_p(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi - \phi)$

4. Solution générale de l'équation avec second membre $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = \cos(\omega t + \varphi)$ avec $y(0) = 1$:

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $y_g = y_s + y_p$.
Ainsi :

$$y_g(t) = ke^{-t} + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi - \phi)$$

La constante k est déterminée par la condition initiale $y_g(0) = 1$:

$$y_g(0) = k + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\varphi - \phi) = 1 \Longleftrightarrow k = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\varphi - \phi)$$

Finalement :

$$y_g = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\varphi - \phi)\right]e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi - \phi)$$

avec $\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ et $\sin(\phi) = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$

5. Remarque complémentaire :

   En électronique la solution de l'équation sans second membre correspond au régime transitoire et la solution particulère correspond au régime permanent (ou établi).
   Ici $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\varphi - \phi)\right]e^{-t}$ correspond au régime transitoire
   et $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi - \phi)$ au régime établi.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.7 Résolution d'EDL1CC avec conditions initiales (2)

Exercices :
Exercice B.3

Equation : (ε_2) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v + t^2 - 3t$ avec $v(0) = 0$
Cette équation est équivalente à : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - v = t^2 - 3t$ avec $v(0) = 0$.

1. Résolution de l'équation sans second membre $\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} - v_s = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}v_s}{v_s} = \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}v_s}{v_s} = \int \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{v_s}{k}\right| = t \Longleftrightarrow v_s(t) = ke^t$$

   où k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} - v_p = t^2 - 3t$ (équation avec second membre) :

   Le second membre est un polynôme de degré 2, donc v_p sera un polynôme de degré 2 : $v_p(t) = at^2 + bt + c$, d'où $v_p'(t) = 2at + b$.
   En remplaçant dans l'équation (ε_2), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} - v_p = t^2 - 3t \Longleftrightarrow 2at + b - (at^2 + bt + c) = t^2 - 3t \Longleftrightarrow -at^2 + (-b + 2a)t + b - c = t^2 - 3t$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Par identification, on en déduit :

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2a - b = -3 \\ b - c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi : $v_p(t) = t^2 - t + 1$.

3. Solution générale de l'équation avec second membre $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} - v_p = t^2 - 3t$:

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $v_g = v_s + v_p$.
Ainsi :

$$v_g(t) = ke^t + t^2 - t + 1$$

La constante k est déterminée par la condition initiale $v_g(0) = 0$, ce qui donne $k + 1 = 0$ d'où $k = -1$.
Finalement :

$$v_g(t) = -e^t + t^2 - t + 1$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.8 Résolution d'EDL1CC en électronique (1)

Exercices :
Exercice B.4

Equation : $e(t) = RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t)$ avec $u(0) = U_0$

1. Résolution de l'équation sans second membre $RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}u_s}{u_s} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u_s}{u_s} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{RC} \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{u_s}{k}\right| = \frac{-t}{RC} \Longleftrightarrow u_s(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

   où k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l'équation avec second membre quand $e(t) = E_0$:

   Le second membre est une constante, donc u_p sera une constante : $u_p(t) = A$, d'où $\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} = 0$. En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} + u_p = E_0 \Longleftrightarrow A = E_0$$

   Ainsi : $u_p(t) = E_0$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

3. Solution générale de l'équation avec second membre quand $e(t) = E_0$:
   La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$. Ainsi :

   $$u_g(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + E_0$$

   La constante k est déterminée par la condition initiale $u_g(0) = U_0$, ce qui donne $k = U_0 - E_0$.
   Finalement :

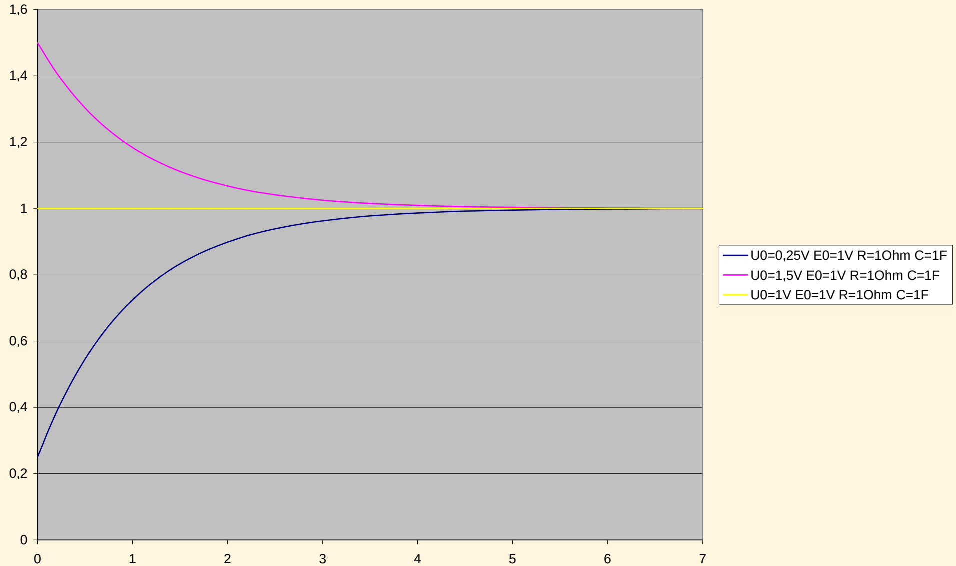
   $$u_g(t) = (U_0 - E_0)e^{-\frac{t}{RC}} + E_0$$

   – Si $U_0 < E_0$ le condensateur va se charger jusqu'à ce que la tension à ses bornes soit égale à E_0.
   – Si $U_0 > E_0$ le condensateur va se décharger jusqu'à ce que la tension à ses bornes soit égale à E_0.
   – Si $U_0 = E_0$ la charge du condensateur restera constante.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On obtient les tracés suivants pour $E_0 = 1\,\mathrm{V}$, $R = 1\,\Omega$, $C = 1\,\mathrm{F}$ et $U_0 = 0{,}25\,\mathrm{V}$ ou $1{,}5\,\mathrm{V}$ ou $1\,\mathrm{V}$:



Document C.3.8
Résolution d'EDL1CC en électronique (1)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.9 Résolution d'EDL1CC en électronique (2)

Exercices :
Exercice B.4

Equation : $e(t) = RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t)$ avec $u(0) = U_0$

1. Résolution de l'équation sans second membre $RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}u_s}{u_s} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u_s}{u_s} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{RC} \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{u_s}{k}\right| = \frac{-t}{RC} \Longleftrightarrow u_s(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

où k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l'équation avec second membre quand $e(t) = E_m\cos(\omega t + \varphi)$:

Le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, donc u_p sera une fonction sinusoïdale de pulsation ω : $u_p(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi)$, d'où $u_p'(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) + \omega B\cos(\omega t + \varphi)$. En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} RC\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} + u_p = E_m\cos(\omega t + \varphi) \quad &\Longleftrightarrow -\omega A \times RC\sin(\omega t + \varphi) + \omega B \times RC\cos(\omega t + \varphi) \\ &+A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi) = E_m\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Par identification, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A+\omega BRC=E_m & : & (1) \\ -A\omega RC+B=0 & : & (2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} B=\frac{\omega RC E_m}{1+(\omega RC)^2} & : & \omega RC\times(1)+B\times(2) \\ A=\frac{E_m}{1+(\omega RC)^2} & : & (1)-\omega RC\times(2) \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$u_p(t)=\frac{E_m}{1+R^2C^2\omega^2}\big(\cos(\omega t+\varphi)+\omega RC\sin(\omega t+\varphi)\big)$$

3. Autre écriture de la solution particulière :

   On pourrait laisser le résultat de u_p sous la forme trouvée précédemment mais pour un signal sinusoïdal, il est souvent intéressant de connaître l'amplitude et la phase à l'origine. Pour un complément sur la recherche de l'amplitude et de la phase à l'origine d'un signal, on peut consulter le lien suivant.

   Ici, on obtient :

   – Amplitude $A_{\max}$: $A_{\max}=\frac{E_m}{1+R^2C^2\omega^2}\sqrt{R^2C^2\omega^2+1}=\frac{E_m}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$,
   d'où : $u_p(t)=\frac{E_m}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega t+\varphi)+\frac{\omega RC}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi)\right)$

   – Phase ϕ : on pose $\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$ et $\sin\phi=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$,
   d'où : $u_p(t)=\frac{E_m}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega t+\varphi-\phi)$

4. Solution générale de l'équation $RC\,\frac{\mathrm{d}u_g}{\mathrm{d}t}+u_g=E_m\cos(\omega t+\varphi)$ avec $u(0)=1$:

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$. Ainsi :

$$u_g(t) = ke^{\frac{-t}{RC}} + \frac{E_m}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi - \phi)$$

La constante k est déterminée par la condition initiale :

$$u_g(0) = k + \frac{E_m}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\varphi - \phi) = U_0$$

ce qui donne :

$$k = U_0 - \frac{E_m}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\varphi - \phi)$$

Finalement :

$$u_g(t) = \left[U_0 - \frac{E_m}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\varphi - \phi)\right] e^{\frac{-t}{RC}} + \frac{E_m}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi - \phi)$$

avec $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$ et $\sin\phi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$

Document C.3.10 Variation de la constante (1)

Exercices :
Exercice B.5

Equation : $(\varepsilon_1) \quad y' + 2y = \tan(x)e^{-2x}$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y_s' + 2y_s = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{y_s} = -2\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y_s}{y_s} = -2\int \mathrm{d}x \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y_s}{k}\right| = -2x \Longleftrightarrow y_s(x) = ke^{-2x}$$

   où k est une constante réelle.

2. Variation de la constante :

   Dans la solution précédente y_s , k devient une fonction de x : $k(x)$, d'où on cherche une solution de l'équation avec second membre de la forme $y(x) = k(x)e^{-2x}$. On a alors : $y'(x) = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x}$. On remplace dans l'équation avec second membre :

$$y' + 2y = \tan(x)e^{-2x} \Longleftrightarrow k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x} + 2k(x)e^{-2x} = \tan(x)e^{-2x}$$

   On remarque que les termes en $k(x)$ s'annulent (si ce n'est pas le cas c'est qu'il y a une erreur de calcul). On en déduit :

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-2x} = \tan(x)e^{-2x} &\iff k'(x) = \tan(x) \iff k'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &\iff k(x) = -\ln|\cos(x)| + C\,,\ \ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Solution générale de l'équation avec second membre :

   On remplace le $k(x)$ trouvé dans $y(x) = k(x)e^{-2x}$ et on obtient :

$$y(x) = [-\ln|\cos(x)| + C]\, e^{-2x} = -\ln|\cos(x)|\, e^{-2x} + Ce^{-2x}$$

   où C est une constante réelle.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.11 Variation de la constante (2)

Exercices :
Exercice B.5

Equation : $(\varepsilon_2) \quad y' + y = \cos x$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y_s' + y_s = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{y_s} = -\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y_s}{y_s} = -\int \mathrm{d}x \Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y_s}{k}\right| = -x \Longleftrightarrow y_s(x) = ke^{-x}$$

   où k est une constante réelle.

2. Variation de la constante :

   Dans la solution précédente y_s, k devient une fonction de x : $k(x)$, d'où on cherche une solution de l'équation avec second membre de la forme $y(x) = k(x)e^{-x}$. On a alors : $y'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$. On remplace dans l'équation avec second membre :

$$y' + y = \cos(x) \Longleftrightarrow k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = \cos(x)$$

   On remarque que les termes en $k(x)$ s'annulent (si ce n'est pas le cas c'est qu'il y a une erreur de calcul). On en déduit :

$$k'(x)e^{-x} = \cos(x) \Longleftrightarrow k'(x) = \cos(x)e^{x}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.11
Variation de la constante (2)

Pour obtenir $k(x)$, il faut procéder à une intégration par parties. On pose : $u = \cos(x)$ d'où $u' = -\sin(x)$, et $v' = e^x$ d'où $v = e^x$. Et on a :

$$k(x) = \int \cos(x)e^x \,\mathrm{d}x = \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x \,\mathrm{d}x$$

On procède à une deuxième intégration par parties en posant $u = \sin(x)$ d'où $u' = \cos(x)$, et $v' = e^x$ d'où $v = e^x$:

$$\begin{aligned} k(x) &= \int \cos(x)e^x \,\mathrm{d}x = \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x \,\mathrm{d}x \\ &= \cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

D'où : $2k(x) = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x$ à une constante d'intégration près. Finalement :

$$k(x) = \frac{\cos(x)e^x + \sin(x)e^x}{2} + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

3. Solution générale de l'équation avec second membre :

   On remplace le $k(x)$ trouvé dans $y(x) = k(x)e^{-x}$ et on obtient :

$$y(x) = \left[\frac{\cos(x)e^x + \sin(x)e^x}{2} + C\right] e^{-x} = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} + Ce^{-x}$$

   où C est une constante réelle.

4. Remarque complémentaire : pour cet exercice, il aurait été plus simple d'appliquer la méthode de la solution particulière.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.12 Résolution d'EDL2CC avec conditions initiales (1)

Exercices :
Exercice B.6

Equation : $(\varepsilon_1) \quad y" + 4y' + 4y = 9$ avec comme conditions initiales $y(-1) = 1$ et $y'(-1) = 2$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y_s" + 4y'_s + 4y_s = 0$:

   L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$, ou $(r+2)^2 = 0$. Elle admet une racine réelle double $r = -2$ d'où :

   $$y_s(x) = (Ax + B)e^{-2x} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

2. Recherche de la solution particulière de l'équation $y_p" + 4y_p" + 4y_p = 9$ (équation avec second membre) :

   Le second membre est une constante (polynôme de degré 0), donc y_p sera un polynôme de degré 0 : $y_p(x) = a$, d'où $y'_p(x) = 0$ et $y_p"(x) = 0$. En remplaçant dans l'équation avec second membre, on obtient : $4a = 9$, d'où $y_p(x) = \frac{9}{4}$.

3. Solution générale de l'équation avec second membre $y" + 4y' + 4y = 9$:

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $y_g = y_s + y_p$. Donc :

$$y_g(x) = (Ax+B)e^{-2x} + \frac{9}{4} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

4. Conditions initiales :

$$\begin{array}{lll} y_g(x) = (Ax+B)e^{-2x} + \frac{9}{4} & \text{d'où} & y_g(-1) = (-A+B)e^{2} + \frac{9}{4} = 1 \\ y_g'(x) = -2(Ax+B)e^{-2x} + Ae^{-2x} & \text{d'où} & y_g'(-1) = (3A-2B)e^{2} = 2 \end{array}$$

On obtient donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -A+B = \frac{-5}{4}e^{-2} & : & (1) \\ 3A-2B = 2e^{-2} & : & (2) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} A = \frac{-e^{-2}}{2} & : & 2\times(1)+(2) \\ B = \frac{-7e^{-2}}{4} & : & 2\times(1)+(2) \end{array} \right.$$

Finalement :

$$y_g(x) = -\left(\frac{x}{2} + \frac{7}{4}\right) e^{-2(x+1)} + \frac{9}{4}$$

Document C.3.12
Résolution d'EDL2CC avec conditions initiales (1)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.13 Résolution d'EDL2CC avec conditions initiales (2)

Exercices :
Exercice B.6

Equation : (ε_2) $y" - 2y' + y = 5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ avec comme conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y_s" - 2y_s' + y_s = 0$:

   L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$, ou $(r-1)^2 = 0$. Elle admet une racine réelle double $r = 1$, d'où :

   $$y_s(x) = (Ax + B)e^x \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

2. Recherche de la solution particulière de l'équation avec second membre $y_p" - 2y_p' + y_p = 5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$:

   Le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation 1, donc y_p sera une fonction sinusoïdale de pulsation 1 :

   $$y_p(x) = C\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + D\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

   d'où :

   $$y_p'(x) = -C\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + D\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

et :

$$y_p"(x) = -C\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - D\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -y_p$$

En remplaçant dans l'équation avec second membre, on obtient :

$$2C\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 2D\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 5\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C=0 \\ D=\frac{-5}{2}\end{array}\right.$$

Finalement :

$$y_p(x) = \frac{-5}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

3. Solution générale de l'équation avec second membre $y" - 2y' + y = 5\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$:

   La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $y_g = y_s + y_p$. Donc :

$$y_g(x) = (Ax+B)e^x - \frac{5}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

4. Conditions initiales :

$$\begin{array}{lll} y_g(x) = (Ax+B)e^x - \frac{5}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & \text{d'où} & y_g(0) = B + \frac{5\sqrt{2}}{4} = 0 \\ y_g'(x) = (Ax+B)e^x + Ae^x - \frac{5}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & \text{d'où} & y_g'(0) = A + B - \frac{5\sqrt{2}}{4} = 0 \end{array}$$

   On obtient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{l} B = -\frac{5\sqrt{2}}{4} \\ A+B = \frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B = -\frac{5\sqrt{2}}{4} \\ A = \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

Finalement :

$$y_g(x) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^x - \frac{5}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.14 Résolution d'EDL2CC avec conditions initiales (3)

Exercices :
Exercice B.6

Equation : (ε_3) $y" + 9y = 5t + 1$ avec comme conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y_s" + 9y_s = 0$:

   L'équation caractéristique associée est $r^2 + 9 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées $r = +3j$ et $r = -3j$, d'où :

   $$y_s(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

2. Recherche de la solution particulière de l'équation $y_p" + 9y_p = 5t + 1$ (équation avec second membre) :

   Le second membre est un polynôme de degré 1, donc y_p sera un polynôme de degré 1 : $y_p(t) = at + b$, d'où $y_p'(t) = a$ et $y_p"(t) = 0$. En remplaçant dans l'équation avec second membre, on obtient :

   $$y_p" + 9y_p = 5t + 1 \iff 9at + 9b = 5t + 1 \iff a = \frac{5}{9} \text{ et } b = \frac{1}{9}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi :

$$y_p(t) = \frac{5t+1}{9}$$

3. Solution générale de l'équation avec second membre $y" + 9y = 5t + 1$:

   La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire : $y_g = y_s + y_p$. D'où :

$$y_g(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + \frac{5t+1}{9} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

4. Conditions initiales :

$$\begin{array}{lll} y_g(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + \frac{5t+1}{9} & \text{d'où} & y_g(0) = A + \frac{1}{9} = 0 \\ y_g'(t) = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t) + \frac{5}{9} & \text{d'où} & y_g'(0) = 3B + \frac{5}{9} = 0 \end{array}$$

Finalement :

$$y_g(t) = \frac{-1}{9}\cos(3t) - \frac{5}{27}\sin(3t) + \frac{5t+1}{9}$$

Document C.3.14
Résolution d'EDL2CC avec conditions initiales (3)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.15 Résolution d'EDL2CC avec conditions initiales (4)

Exercices :
Exercice B.6

Equation : (ε_4) $\quad y" + 2y' + 10y = 0$ avec comme conditions initiales $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$

1. Résolution de l'équation sans second membre :

   L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 10 = 0$. Son discriminant est $\Delta = -36 = (6j)^2$ et ses racines sont complexes conjuguées : $r_1 = -1 + 3j$ et $r_2 = -1 - 3j$. D'où :

$$y_s(x) = (A\cos(3x) + B\sin(3x))e^{-x} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

2. Solution générale de l'équation avec conditions initiales :

$$y(0) = A = 0 \text{ et } y(1) = B\sin(3)e^{-1} = 1 \text{ d'où } B = \frac{e}{\sin(3)}$$

   Finalement :

$$y_g(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin(3)}e^{-(x-1)}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.16 Résolution d'EDL2CC avec conditions initiales (5)

Exercices :
Exercice B.6

Equation : $(\varepsilon_5)\quad y" + 4y + \sin(2x) = 0$ avec comme conditions initiales $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = 1$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y" + 4y = 0$:

   L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4 = 0$. Elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 2j$ et $r_2 = -2j$. D'où :

   $$y_s(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

2. Recherche de la solution particulière de l'équation $y_p" + 4y_p = -\sin(2x)$ (équation avec second membre) :

   On est dans le cas où le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation ω et où $j\omega$ est solution de l'équation sans second membre, donc y_p doit être de la forme : $y_p(x) = x(C\cos(2x) + D\sin(2x))$, d'où :

   $$y_p'(x) = C\cos(2x) + D\sin(2x) + x(-2C\sin(2x) + 2D\cos(2x))$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

et

$$\begin{aligned} y_p{}^{"}(x) &= -2C\sin(2x) + 2D\cos(2x) - 2C\sin(2x) + 2D\cos(2x) \\ &\quad +x\big(- 4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)\big) \\ &= -4C\sin(2x) + 4D\cos(2x) + x\big(- 4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)\big) \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation avec second membre, on obtient :

$$-4C\sin(2x) + 4D\cos(2x) = -\sin(2x) \Longleftrightarrow D = 0 \text{ et } C = \frac{1}{4}$$

Ainsi :

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x\cos(2x)$$

3. Solution générale de l'équation avec second membre $y^{"} + 4y = -\sin(2x)$:

   La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $y_g = y_s + y_p$, d'où :

$$y_g(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{4}x\cos(2x) \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

4. Conditions initiales :

$$\begin{array}{lll} y_g(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{4}x\cos(2x) & \text{d'où} & y_g(\pi) = A + \frac{\pi}{4} = 1 \\ y_g'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{2}x\sin(2x) & \text{d'où} & y_g'(\pi) = 2B + \frac{1}{4} = 1 \end{array}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On en déduit : $A = 1 - \frac{\pi}{4}$ et $B = \frac{3}{8}$. Finalement :

$$y_g(x) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) + \frac{3}{8}\sin(2x) + \frac{1}{4}x\cos(2x)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.17 Résolution d'EDL2CC avec conditions graphiques (1)

Exercices :
Exercice B.7

Equation : $y" - 6y' + 8y = 0$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 6r + 8 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4$ et elle admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 4$ et $r_2 = 2$. D'où :

$$y(x) = y_s(x) = A\,e^{4x} + B\,e^{2x} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.18 Résolution d'EDL2CC avec conditions graphiques (2)

Exercices :
Exercice B.7

Equation : $y" - 6y' + 8y = 0$ avec comme conditions graphiques que la courbe représentative de la solution passe par le point $A(0; k)$ et admette en ce point une tangente d'équation $y = mx + k$.

On a vu précédemment que la solution générale de l'équation était :

$$y(x) = y_s(x) = A\,e^{4x} + B\,e^{2x} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

Les conditions graphiques imposent que :

$$\begin{cases} y(0) = k \\ y'(0) = m \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} y(x) = A\,e^{4x} + B\,e^{2x} \\ y'(x) = 4A\,e^{4x} + 2B\,e^{2x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y(0) = A + B = k & : & (1) \\ y'(0) = 4A + 2B = m & : & (2) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}m - k & : & -2(1) + (2) \\ B = 2k - \frac{1}{2}m & : & -4(1) + (2) \end{cases}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Finalement :

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}m - k\right)e^{4x} + \left(2k - \frac{1}{2}m\right)e^{2x}$$

Document C.3.19 Résolution d'EDL2CC avec paramètres (1)

Exercices :
Exercice B.8

Equation : $y" + \omega^2 y = \cos(ax)$ avec $a \neq \omega$ et $a \neq -\omega$

1. Résolution de l'équation sans second membre $y_s" + \omega^2 y_s = 0$:

   L'équation caractéristique associée est $r^2 + \omega^2 = 0$. Elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = j\omega$ et $r_2 = -j\omega$. D'où :

   $$y_s(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

2. Recherche de la solution particulière de l'équation avec second membre quand $a \neq \pm\omega$:

   Le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation a, donc on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction sinusoïdale de pulsation a : $y_p(x) = C\cos(ax) + D\sin(ax)$. D'où :

$$y_p'(x) = -aC\sin(ax) + aD\cos(ax) \text{ et } y_p"(x) = -a^2C\cos(ax) - a^2D\sin(ax) = -y_p(x)$$

   En remplaçant dans l'équation avec second membre, on obtient :

   $$y_p" + \omega^2 y_p = (\omega^2 - a^2)[C\cos(ax) + D\sin(ax)] = \cos(ax)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Comme $a \neq \pm\omega$, alors $(\omega^2 - a^2) \neq 0$ et on en déduit :

$$C = \frac{1}{\omega^2 - a^2} \text{ et } D = 0$$

Ainsi :

$$y_p(x) = \frac{1}{\omega^2 - a^2} \cos(ax)$$

3. Solution générale de l'équation avec second membre quand $a \neq \pm\omega$:

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $y_g = y_s + y_p$. Finalement :

$$y_g(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega^2 - a^2}\cos(ax)$$

où A et B sont des constantes réelles.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.20 Résolution d'EDL2CC avec paramètres (2)

Exercices :
Exercice B.8

Equation : $y" + \omega^2 y = \cos(ax)$ avec $a = \pm\omega$

La solution générale de l'équation sans second membre est toujours :

$$y_s(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

1. Remarque :

   Si $a = +\omega$ ou $a = -\omega$, comme $(-\omega)^2 = \omega^2$ et $\cos(-\omega x) = \cos(\omega x)$, alors l'équation devient $y" + \omega^2 y = \cos(\omega x)$. Les deux cas se traitent donc de la même façon (ce qui n'aurait pas été le cas si le second membre était de la forme $\sin(ax)$).

2. Recherche de la solution particulière de l'équation avec second membre quand $a = \pm\omega$:

   Le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation w tout comme la solution de l'équation sans second membre, donc on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω multipliée par x :

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

$y_p(x) = x(C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x))$, d'où :

$$y_p'(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x) + x[-\omega C\sin(\omega x) + \omega D\cos(\omega x)]$$

Et :

$$y_p\text{"}(x) = [-2\omega C\sin(\omega x) + 2\omega D\cos(\omega x)] + x[-\omega^2 C\cos(\omega x) - \omega^2 D\sin(\omega x)]$$

En remplaçant dans l'équation avec second membre, on obtient :

$$y_p\text{"} + \omega^2 y_p = [-2\omega C\sin(\omega x) + 2\omega D\cos(\omega x)] = \cos(\omega x)$$

D'où : $C = 0$ et $D = \pm\frac{1}{2\omega}$. Ainsi :

$$y_p(x) = \frac{1}{2\omega}\, x\sin(\omega x)$$

3. Solution générale de l'équation avec second membre quand $a = \pm\omega$:

   La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $y_g = y_s + y_p$. Finalement :

$$y_g(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{1}{2\omega}\, x\sin(\omega x)$$

   où A et B sont des constantes réelles.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.21 Résolution d'EDL2CC en électronique (1)

Exercices :
Exercice B.9

L'équation sans second membre associée à (ε) est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_s(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0 \frac{\mathrm{d}u_s(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_s(t) = 0$$

Son équation caractéristique est donc :

$$r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Et elle a comme dicriminant :

$$\Delta = (2m\omega_0)^2 - 4 \times r^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$$

Comme $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$, alors m est forcément strictement positif, et le discriminant Δ est :

- Strictement négatif quand $m < 1 \iff R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Nul quand $m = 1 \iff R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Strictement positif quand $m > 1 \iff R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.22 Résolution d'EDL2CC en électronique (2)

Exercices :
Exercice B.9

Quand $m < 1 \Longleftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors :

$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1) = (j \times 2\omega_0\sqrt{1-m^2})^2$$

Donc l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \text{ et } r_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

D'où la solution générale de l'équation sans second membre associée à (ε) :

$$u_s(t) = e^{-m\omega_0 t}\Big(A\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Big)$$

avec A et B dans $\mathbb{R}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.23 Résolution d'EDL2CC en électronique (3)

Exercices :
Exercice B.9

Quand $m = 1 \iff R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors le discriminant Δ de l'équation caractéristique est nul et il y a une racine réelle double :

$$r_1 = r_2 = -\omega_0$$

D'où la solution générale de l'équation sans second membre associée à (ε) :

$$u_s(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

avec A et B dans $\mathbb{R}$.

Document C.3.24 Résolution d'EDL2CC en électronique (4)

Exercices :
Exercice B.9

Quand $m < 1 \iff R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors :

$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1) = (2\omega_0\sqrt{m^2 - 1})^2$$

Donc l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \text{ et } r_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$$

D'où la solution générale de l'équation sans second membre associée à (ε) :

$$u_s(t) = Ae^{-\omega_0(m+\sqrt{m^2-1})t} + Be^{-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})t}$$

avec A et B dans $\mathbb{R}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.25 Résolution d'EDL2CC en électronique (5)

Exercices :
Exercice B.9

Si le second membre de (ε) est une constante $\left(\omega_0^2 e(t) = \omega_0^2 E_0\right)$, alors on peut chercher une solution particulière $u_p(t)$ sous forme d'une constante. On trouve de manière évidente :

$$u_p(t) = E_0$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.26 Résolution d'EDL2CC en électronique (6)

Exercices :
Exercice B.9

La solution générale de (ε) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$.

Ainsi, si $m < 1 \iff R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors :

$$u_g(t) = E_0 + e^{-m\omega_0 t}\Big(A\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Big)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_g'(t) &= -m\omega_0 \times e^{-m\omega_0 t}\Big(A\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Big) \\ &+\omega_0\sqrt{1-m^2}e^{-m\omega_0 t}\Big(-A\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t) + B\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Big) \end{aligned}$$

Les conditions initiales conduisent donc à :

$$\begin{cases} u_g(0) = E_0 + A = 0 \\ u_g'(0) = -m\omega_0 A + B\omega_0\sqrt{1-m^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -E_0 \\ B = \frac{-mE_0}{\sqrt{1-m^2}} \end{cases}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Comme on l'a fait dans des exercices précédents, la solution obtenue correspondant à un signal sinusoïdal, il est souhaitable de l'exprimer à l'aide de son amplitude et de sa phase (pour des rappels, consulter le lien suivant).

Ici, on obtient :

– Amplitude $U_{\max}$: $U_{\max} = \frac{E_0}{\sqrt{1-m^2}}$,
  d'où :

$$u_g(t) = E_0 - \frac{E_0 e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\left(\sqrt{1-m^2}\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t) + m\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\right)$$

– Phase ϕ : on pose $\cos(\varphi) = \sqrt{1-m^2}$ et $\sin(\varphi) = m$,
  d'où :

$$u_g(t) = E_0 - \frac{E_0 e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\left(\cos(\varphi)\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t) + \sin(\varphi)\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\right)$$

  C'est à dire :

$$u_g(t) = E_0 - \frac{E_0 e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \times cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t - \varphi)$$

Finalement :

$$u_g(t) = E_0\left[1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t - \varphi)\right]$$

avec $\cos(\varphi) = \sqrt{1-m^2}$ et $\sin(\varphi) = m$.

Cette solution est représentée graphiquement par les courbes d'allures :

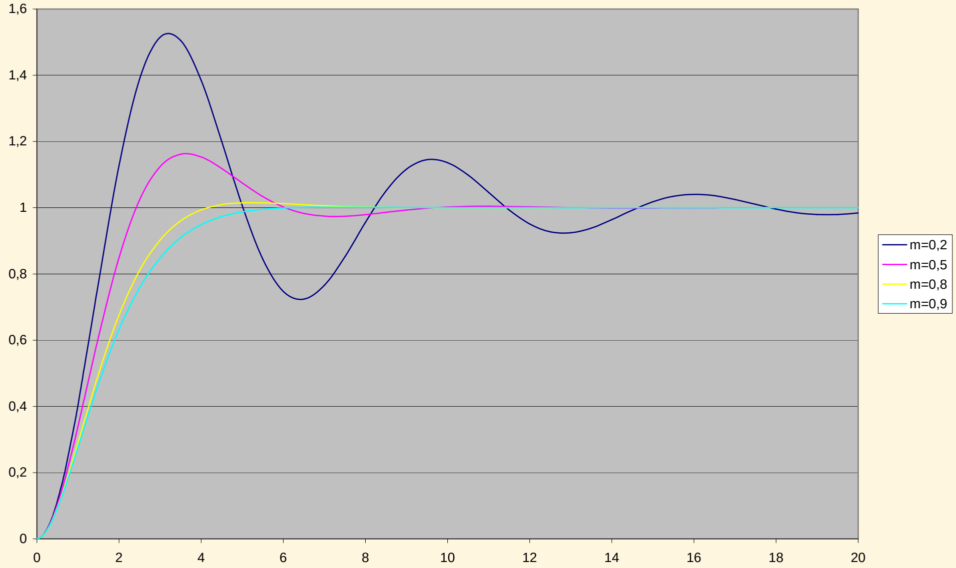


Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.27 Résolution d'EDL2CC en électronique (7)

Exercices :
Exercice B.9

La solution générale de (ε) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$.

Ainsi, si $m = 1 \iff R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors :

$$u_g(t) = E_0 + (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

On en déduit :

$$u'_g(t) = -\omega_0(At + B)e^{-\omega_0 t} + Ae^{-\omega_0 t}$$

Les conditions initiales conduisent donc à :

$$\begin{cases} u_g(0) = E_0 + B = 0 \\ u'_g(0) = -\omega_0 B + A = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -E_0 \\ A = -\omega_0 E_0 \end{cases}$$

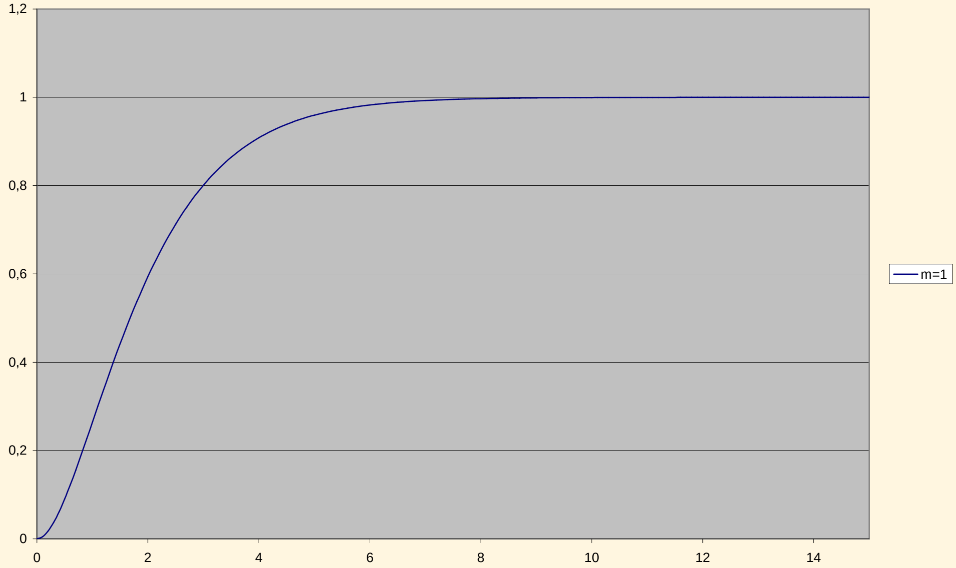
Finalement :

$$u_g(t) = E_0\left[1 - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}\right]$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Cette solution est représentée graphiquement par la courbe d'allure :



Document C.3.27
Résolution d'EDL2CC en électronique (7)

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.28 Résolution d'EDL2CC en électronique (8)

Exercices :
Exercice B.9

La solution générale de (ε) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$.

Ainsi, si $m > 1 \iff R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors :

$$u_g(t) = E_0 + A\,e^{-\omega_0(m+\sqrt{m^2-1})t} + B\,e^{-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})t}$$

Pour simplifier les calculs, on pose :

$$\omega_1 = \omega_0(m + \sqrt{m^2-1}) \text{ et } \omega_2 = \omega_0(m - \sqrt{m^2-1})$$

On a donc :

$$u_g(t) = E_0 + A\,e^{-\omega_1 t} + B\,e^{-\omega_2 t}$$

D'où :

$$u_g'(t) = -\omega_1 A\,e^{-\omega_1 t} - \omega_2 B\,e^{-\omega_2 t}$$

Les conditions initiales conduisent donc à :

$$\begin{cases} u_g(0) = A + B + E_0 = 0 \\ u'_g(0) = -\omega_1 A - \omega_2 B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = -E_0 & : (1) \\ -\omega_1 A - \omega_2 B = 0 & : (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} B = \frac{-\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} E_0 & : (2) + \omega_1 (1) \\ A = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} E_0 & : (2) + \omega_2 (1) \end{cases}$$

C'est à dire :

$$A = \frac{(m - \sqrt{m^2 - 1})}{2\sqrt{m^2 - 1}} E_0 \text{ et } B = -\frac{(m + \sqrt{m^2 - 1})}{2\sqrt{m^2 - 1}} E_0$$

Finalement :

$$u_g(t) = E_0 \left[1 + \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} e^{-\omega_1 t} - \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} e^{-\omega_2 t} \right]$$

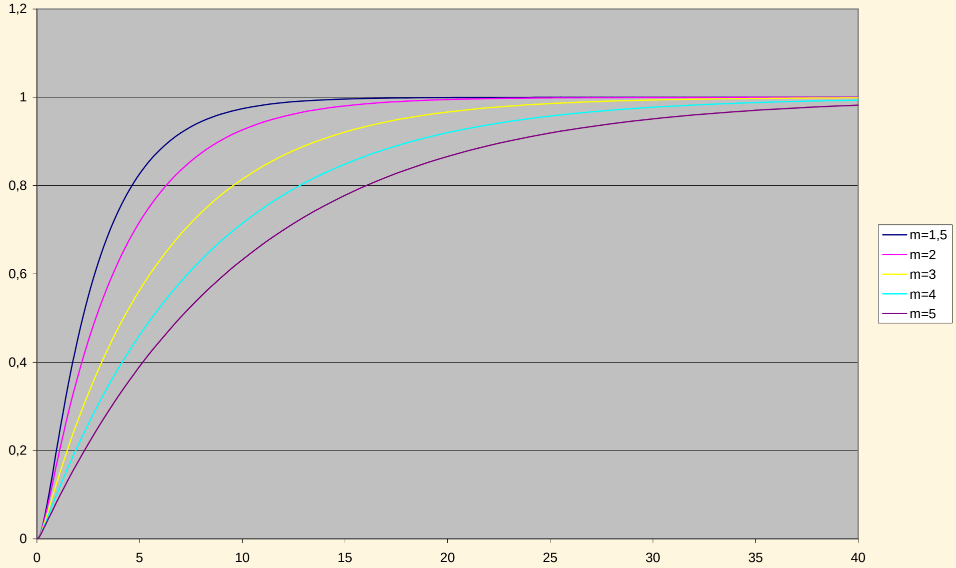
ou encore :

$$\begin{aligned} u_g(t) \;&= E_0 \Big[1 + \tfrac{(m - \sqrt{m^2-1})}{2\sqrt{m^2-1}} e^{-\omega_0 (m + \sqrt{m^2-1}) t} \\ &\qquad - \tfrac{(m + \sqrt{m^2-1})}{2\sqrt{m^2-1}} e^{-\omega_0 (m - \sqrt{m^2-1}) t} \Big] \end{aligned}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Cette solution est représentée graphiquement par les courbes d'allures :



Document C.3.28
Résolution d'EDL2CC en électronique (8)

Document C.3.29 Résolution d'EDL2CC en électronique (9)

Exercices :
Exercice B.9

Si le second membre est une fonction sinusoïdale $(\omega^2 e(t) = \omega^2 E_0 \cos(\omega t))$, alors on cherche $u_p(t)$ sous la forme d'une fonction sinusoïdale de même pulsation :

$$u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}u_p(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2 u_p(t)}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 u_p(t)$$

En remplaçant alors dans l'équation (ε) , on obtient :

$$E_0\omega_0^2\cos(\omega t) = (\omega_0^2 - \omega^2)\big[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big] + 2m\omega_0\big[-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\big]$$

Ce qui donne par identification :

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A + 2m\omega_0\omega B = E_0\omega_0^2 & (1) \\ -2m\omega_0\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 & (2) \end{cases}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

La combinaison : $(2m\omega_0\omega)\times(1)+(\omega_0^2-\omega^2)\,B\times(2)$ donne alors :

$$B=\frac{2mE_0\omega_0^3\omega}{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}\text{ d'où }A=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{2m\omega_0\omega}\times B=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)E_0\omega_0^2}{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$

Ainsi :

$$u_p(t)=\frac{E_0\omega_0^2}{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t)+2m\omega_0\omega\sin(\omega t)\right]$$

On peut également exprimer cette solution à l'aide de son amplitude et de sa phase (revoir éventuellement le lien suivant) en remarquant que :

$$(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t)+2m\omega_0\omega\sin(\omega t)=\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}\Bigg[\tfrac{(\omega_0^2-\omega^2)}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos(\omega t)$$
$$+\tfrac{2m\omega_0\omega}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\sin(\omega t)\Bigg]$$

En posant $\cos(\varphi)=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$ et $\sin(\varphi)=\frac{2m\omega_0\omega}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$, φ étant donc la phase du signal, on a :

$$u_p(t)=\frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\left[\cos(\varphi)\cos(\omega t)+\sin(\varphi)\sin(\omega t)\right]$$

L'amplitude du signal est donc : $U_{\max}=\frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Finalement :

$$u_p(t) = \frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

avec $\cos(\varphi) = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{2m\omega_0\omega}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$

Remarque : on trouvera, en suivant ce lien, des compléments pour calculer l'amplitude et la phase du signal en utilisant les impédances complexes.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.30 Résolution d'EDL2CC en électronique (10)

Exercices :
Exercice B.9

La solution générale de (ε) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$.

Ainsi, si $m < 1 \Longleftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors :

$$\begin{aligned} u_g(t) &= \frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos(\omega t-\varphi) \\ &\qquad +e^{-m\omega_0 t}\Big(A\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)+B\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Big) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_g'(t) &= \frac{-E_0\omega_0^2\omega}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\sin(\omega t-\varphi) \\ &\quad -m\omega_0 e^{-m\omega_0 t}\Big(A\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)+B\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Big) \\ &\qquad +\omega_0\sqrt{1-m^2}e^{-m\omega_0 t}\Big(-A\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)+B\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Big) \end{aligned}$$

Les conditions initiales conduisent donc à :

$$\begin{cases} u_g(0) = \frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos(\varphi) + A = 0 \\ u_g'(0) = -m\omega_0 A + B\omega_0\sqrt{1-m^2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos(\varphi) \\ B = \frac{-m}{\sqrt{1-m^2}}\frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos(\varphi) \end{cases}$$

On peut alors calculer :

– l'amplitude du signal :

$$U_{max} = \sqrt{A^2+B^2} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos(\varphi)$$

– la phase α (φ désignant déjà la phase de la solution u_s de l'équation sans second membre) définie par :

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1-m^2} \text{ et } \sin(\alpha) = m$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u_g(t) &= \frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\Bigg[\cos(\omega t-\varphi) - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\cos(\varphi)\Bigg(\sqrt{1-m^2}\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t) \\ &\qquad + m\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Bigg)\Bigg] \\ &= \frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\Bigg[\cos(\omega t-\varphi) - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\cos(\varphi)\Bigg(\cos(\alpha)\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t) \\ &\qquad + \sin(\alpha)\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t)\Bigg)\Bigg] \end{aligned}$$

Document C.3.30
Résolution d'EDL2CC en électronique (10)

Finalement :

$$u_g(t) = \frac{E_0\omega_0^2}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\left[\cos(\omega t - \varphi) - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\cos(\varphi)\cos(\omega_0\sqrt{1-m^2}t - \alpha)\right]$$

avec $\cos(\varphi) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2}}$, $\sin(\varphi) = \frac{2m\omega_0\omega}{\sqrt{4m^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2}}$, $\cos(\alpha) = \sqrt{1-m^2}$ et $\sin(\alpha) = m$

Document C.3.30
Résolution d'EDL2CC en électronique (10)

Document C.3.31 Résolution d'EDL2CC en électronique (11)

Exercices :
Exercice B.9

La solution générale de (ε) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$.

Ainsi, si $m = 1 \iff R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors :

$$u_g(t) = E_0 \cos(\omega t) + (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

D'où :

$$u_g'(t) = -E_0\omega \sin(\omega t) - \omega_0(At + B)\, e^{-\omega_0 t} + A\, e^{-\omega_0 t}$$

Les conditions initiales conduisent donc à :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_g(0) = E_0 + B = 0 \\ u_g'(0) = -\omega_0 B + A \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} B = -E_0 \\ A = -\omega_0 E_0 \end{array} \right.$$

Finalement :

$$u_g(t) = E_0 \Big[\cos(\omega t) - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t} \Big]$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.32 Résolution d'EDL2CC en électronique (12)

Exercices :
Exercice B.9

La solution générale de (ε) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est à dire $u_g = u_s + u_p$.

Ainsi, si $m > 1 \iff R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, alors :

$$u_g(t) = E_0 \cos(\omega t) + A\, e^{-\omega_0 (m+\sqrt{m^2-1})t} + B\, e^{-\omega_0 (m-\sqrt{m^2-1})t}$$

Pour simplifier les calculs, on pose : $\omega_1 = \omega_0(m+\sqrt{m^2-1})$ et $\omega_2 = \omega_0(m-\sqrt{m^2-1})$.

On a donc :

$$u_g(t) = E_0 \cos(\omega t) + A\, e^{-\omega_1 t} + B\, e^{-\omega_2 t}$$

Et :

$$u_g'(t) = -E_0 \omega \sin(\omega t) - \omega_1 A\, e^{-\omega_1 t} - \omega_2 B\, e^{-\omega_2 t}$$

Les conditions initiales conduisent donc à :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_g(0) = A + B + E_0 = 0 \\ u_g'(0) = -\omega_1 A - \omega_2 B = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} A + B = -E_0 & (1) \\ -\omega_1 A - \omega_2 B = 0 & (2) \end{array} \right.$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{ll} B = \frac{-\omega_1}{\omega_1-\omega_2}E_0 & (2)+\omega_1\times(1) \\ A = \frac{\omega_2}{\omega_1-\omega_2}E_0 & (2)+\omega_2\times(1) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B = -\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}\,E_0 \\ A = \frac{m-\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}\,E_0 \end{array}\right.$$

Finalement :

$$u_g(t) = E_0\left[\cos(\omega t) + \frac{\omega_2}{\omega_1-\omega_2}e^{-\omega_1 t} - \frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2}e^{-\omega_2 t}\right]$$

Ou encore :

$$u_g(t) = E_0\left[\cos(\omega t) + \frac{(m-\sqrt{m^2-1})}{2\sqrt{m^2-1}}e^{-\omega_0(m+\sqrt{m^2-1})t} - \frac{(m+\sqrt{m^2-1})}{2\sqrt{m^2-1}}e^{-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})t}\right]$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.33 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (1)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_1) \qquad y' - 3y = 1 - 3x \text{ avec } y(0) = 1$$

est :

$$y(x) = e^{3x} + x$$

Document C.3.34 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (2)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_2) \qquad 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t+1 \text{ avec } y'(0)=-1 \text{ et } y(0)=1$$

est :

$$y(t)=\frac{1}{2}t^2-t+1$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.35 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (3)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_3) \qquad y' - 3y = 2\cos(3\pi t) - \sin(3\pi t) \text{ avec } y(1) = -1$$

est :

$$y(t) = \left(-1 + \frac{\pi - 2}{3(\pi^2+1)}\right) e^{3(t-1)} + \frac{\pi - 2}{3(\pi^2+1)} \cos(3\pi t) + \frac{2\pi + 1}{3(\pi^2+1)} \sin(3\pi t)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.36 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (4)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_4) \qquad 3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 4v = t^2 - t + 3 \text{ avec } v(-1) = 4$$

est :

$$v(t) = \frac{61}{32}\, e^{-\frac{4}{3}(t+1)} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{8}t + \frac{39}{32}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.37 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (5)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_5) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 4y = \sin(2t) + t^2 \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0$$

est :

$$y(t) = \frac{9}{8}\cos(2t) + \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t) + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}$$

Document C.3.38 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (6)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_6) \qquad y' - y = 3x - 5x^2 + \cos(3x) \text{ avec } y(-1) = 0$$

est :

$$y(x) = \left[-5 + \frac{1}{10}\big(3\sin(3) + \cos(3)\big)\right] e^{x+1} + 5x^2 + 7x + 7 + \frac{3}{10}\sin(3x) - \frac{1}{10}\cos(3x)$$

Document C.3.39 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (7)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_7) \qquad s' - 3s = \cos t + \sin t \text{ avec } s(0) = 0$$

est :

$$s(t) = \frac{2}{5}\, e^{3t} - \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t$$

Document C.3.40 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (8)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_8) \qquad y" + y' - 6y = xe^{2x} \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1$$

est :

$$y(x) = \frac{1}{125}\left(e^{2x} - e^{-3x}\right) + \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x\right) e^{2x}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.41 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (9)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_9) \qquad y" - 3y' + 2y = x^2 + x + 1 - \cos 2x$$

est :

$$y(x) = A\,e^x + B\,e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 + \frac{1}{20}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x)$$

avec A et B réels.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.42 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (10)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_{10}) \qquad y" + 4y = \cos(2x) - \sin(4x) \text{ avec } y(0) = \frac{5}{16} \text{ et } y'(0) = 0$$

est :

$$y(x) = \frac{5}{16}\cos(2x) - \frac{1}{16}\sin(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{12}\sin(4x)$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.43 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (11)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_{11}) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = (3t+1)e^{-t} \text{ avec } y(0) = 1$$

est :

$$y(t) = e^{-t} + \left(\frac{3}{2}t^2 + t\right) e^{-t}$$

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.44 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (12)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_{12}) \qquad y" + 2ny' + n^2y = (x+1)e^{-nx}$$

est :

$$y(x) = (Ax + B)\,e^{-nx} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\,e^{-nx}$$

avec A et B réels.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.3.45 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (13)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_{13}) \qquad y" + y' + y = x^2 + 1 \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0$$

est :

$$y(x) = \frac{4}{3}\sqrt{3}\, e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right) + x^2 - 2x + 1$$

Document C.3.46 Pêle-mêle d'EDL1CC et d'EDL2CC (14)

Exercices :
Exercice B.10

La solution de l'équation :

$$(\varepsilon_{14}) \qquad y" - 4y' + 4y = 3e^{2x}$$

est :

$$y(x) = (Ax + B)\, e^{2x} + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$$

avec A et B réels.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Index des notions

Table des matières
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents