Université Ferhat Abbas-Sétif1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2016/2017
Module : EDO

Examen

Présentation : (1point)

Exercice 1 : (6 points)

On considère le système homogène

$$Y'(t)=A(t)Y(t) \quad \text{où} \quad Y'(t)=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(t)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A(t)=\begin{pmatrix} 2t & 1 & 1 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$$

1- Résoudre le système différentiel homogène.

2- On considère la fonction B définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $B=\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$

Peut on appliquer la méthode des coefficients indéterminés pour résoudre le système différentiel $Y' = A\ Y + B$? Justifier votre réponse.

Exercice 2 : (5 points)

Montrer que l équation de Bernoulli suivante se ramène a une équation linéaire.

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0\,, n \in z,\ n \neq 0,\ n \neq 1$$

Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$

Exercice 3 : (4 points)

Mettre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sous forme d'un système différentiel du premier ordre puis le résoudre dans C.

Exercice 4: (4 points)

Considérons le systeme gradient suivant :

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y\left(2y^2 - 3y + 1\right) \end{cases}$$

Etudier la stabilité du système.

Exercice 1 (06 pts)

$Y'(t) = A(t)Y(t)$ $\quad Y'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $\quad Y(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 1 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$$

Résolution du système différentiel.

$$Y'(t) = A(t)\,y(t)$$

l'eqt caractéristique

$P(\lambda) = (\lambda - 2t)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2t$ racine triple 0,5

d'après Cayley Hamilton on a $P(A) = (A - 2tI)^3 = 0$ 0,5

on pose $B = A - 2tI \Rightarrow B^3 = 0$, B nilpotente 0,5

Donc la solution est $y = Ce^{tA}$ 0,5

on a $B = A - 2tI \Rightarrow A = B + 2tI$

$tA = tB + 2t^2 I$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$e^{tA} = e^{tB} \cdot e^{2t^2 I}$

$$e^{tB} = I + tB + \frac{t^2 B^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 01

$$e^{2t^2 I} = \begin{pmatrix} e^{2t^2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t^2} & 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$ 0,5

Finalement

$$e^{tA} = e^{2t^2 I} \cdot e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{2t^2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t+\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t^2} & t e^{2t^2} & \left(t+\frac{t^2}{2}\right) e^{2t^2} \\ 0 & e^{2t^2} & t e^{2t^2} \\ 0 & 0 & e^{2t^2} \end{pmatrix}$$ 0,5

donc

$$y = e^{tA} C = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

d'où

$$y = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t^2} + c_2 t e^{2t^2} + c_3 \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^{2t^2} \\ c_2 e^{2t^2} + c_3 t e^{2t^2} \\ c_3 e^{2t^2} \end{pmatrix}$$ 01

La méthode des coefficients indéterminés ne s'applique que dans les circonstances où les coefficients de la matrice (A) sont tous des constantes donc on ne peut pas appliquer pour résoudre le système

$$y' = A(t)\, y + B(t)$$

01

On a $\int_0^t A(s)\,ds = \begin{pmatrix} t^2 & t & t \\ 0 & t^2 & t \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} = M$

l'éqt Caract $P(\lambda) = (t^2 - \lambda)^3 \Rightarrow \lambda = t^2$ racine triple.

d'où $P(M) = (M - t^2 I) = 0$ Cayley Hamilton

$B = M - t^2 I \Rightarrow M = B + t^2 I \Rightarrow M = t^2 I + B$

la solution $y = e^{M} \cdot C$

$e^{M} = e^{B} \cdot e^{t^2 I}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Nilpotente $e^{B} = I + Bt + B^2 \frac{t^2}{2}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t^2 & t^2 \\ 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (5pts) : Montrer que l'eqt de Bernoulli suivante se ramène à une eqt linéaire

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^n = 0 \quad , n \in \mathbb{Z}, \; n \neq 0, \; n \neq 1$$

Trouver les solutions de l'équation

$$xy' + y - xy^3 = 0$$

Sol

On pose $y^{1-n} = z \Rightarrow z' = (1-n)\,y'\,y^{-n}$ 01

l'eqt devient

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{y}{y^n} + b(x) = 0$$

d'où

$$\frac{z'}{(1-n)} + a(x)\,z + b(x) = 0$$ 01 Eqt linéaire

$$xy' + y - xy^3 = 0$$

$$\frac{xy'}{y^3} + \frac{y}{y^3} - x = 0 \quad , z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$$

$$-\frac{1}{2}x z' + z = x$$ 01

$z = u.v \Rightarrow z' = u'v + v'u$

on obtient $v = x^2$ et $u = \frac{2}{x} + K$ 01

$$z = u.v = 2x + Kx^2$$

$$z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2x + kx^2}$$ 01

$$y = \frac{1}{\sqrt{\;\;}}$$

$$-\frac{1}{2}xz' + z = x$$

$$z = u.v \Longrightarrow z' = u'v + uv'$$

$$-\frac{1}{2}x\left(u'v + uv'\right) + uv = x$$

$$-\frac{1}{2}xu'v - \underbrace{\frac{1}{2}xuv' + uv} = x$$

$$u\underbrace{\left(v - \frac{x}{2}v'\right)}_{=0} - \frac{x}{2}u'v = x$$

$$v - \frac{x}{2}v' \Rightarrow \frac{x}{2}v' = v \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{2}{x}$$

$$\ln|v| = 2\ln|x| \Rightarrow \ln v = \ln x^2 \Rightarrow v = x^2$$

$$-\frac{x}{2}u'(x^2) = x \Rightarrow -x^3u' = 2x \Longrightarrow -x^2u' = 2$$

$$u' = \frac{-2}{x^2} \Longrightarrow u = \frac{2}{x} + K$$

$$z = u.v = x^2\left(\frac{2}{x} + K\right) = 2x + Kx^2$$

$$z = \frac{1}{y^2} = 2x + Kx^2 \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{2x + Kx^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x + Kx^2}}$$

Exercice 03 (4 pts)

Mettre l'eqt différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sous forme d'un système différentiel du premier ordre puis le résoudre dans $\mathbb{C}$.

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow y'' = 2y' - 2y$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

0,5

On pose $y = x_1$, $y' = x_2$

$$x_1' = y' = x_2 \quad \text{et} \quad y'' = x_2' = 2y' - 2y = 2x_2 - 2x_1$$

le système d'équation est: 01

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 2x_2 - 2x_1 = -2x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad x'(t) = A\,x(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & +2 \end{pmatrix}$

les valeurs propres $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$ 0,5

les vecteurs propres

$\lambda_1 = 1+i$ $\qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ 0.5

$\lambda_2 = 1-i$ $\qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ 0.5

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(1+i)t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(1-i)t}$$ 01

Exercice 4 (04 pts)

Considérons le système gradient suivant :

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y(2y^2 - 3y + 1) \end{cases}$$

Etudier la stabilité du système.

On remarque que $(0,0)$ est un point d'équilibre 0,5

le système gradient est $\begin{cases} x' = -\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \\ y' = -\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \end{cases}$ 0,5

On obtient $\left.\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial G}{\partial y} = 2y(2y^2 - 3y + 1) \end{cases}\right\} \Longrightarrow$

$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x \Rightarrow G(x,y) = x^2 + \varphi(y)$

$\frac{\partial G}{\partial y} = \varphi'(y) \Longrightarrow 2y(2y^2 - 3y + 1) = 4y^3 - 6y^2 + 2y$

$\varphi(y) = y^4 - 2y^3 + y^2$ 0,5

alors $G(x,y) = x^2 + y^4 - 2y^3 + y^2 = x^2 + y^2(y^2 - 2y + 1)$ 01

$= x^2 + y^2(y-1)^2 > 0$

donc la fonction $G(x,y)$ est <u>défini positive</u> on peut choisir G comme fonction de Liapounov

<u>La stabilité du système</u>

On a $\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

On a $\dfrac{\partial G}{\partial t} = \dfrac{\partial G}{\partial x} \cdot \overset{\dot{x}}{\dfrac{\partial x}{\partial t}} + \dfrac{\partial G}{\partial y} \cdot \overset{\dot{y}}{\dfrac{\partial y}{\partial t}}$

$$= \frac{\partial G}{\partial x}\left(\frac{-\partial G}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial G}{\partial y}\left(-\frac{\partial G}{\partial y}\right) \quad 1.5$$

$$= -\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2\right] < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$(0,0)$ est asymptotiquement stable